

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky



**Aplikace integrálního počtu v přírodních a
technických vědách s přihlédnutím k výuce na
střední škole**

Bakalářská práce

Helena Vacková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Josef Daněček, CSc.

České Budějovice, 2012

Bibliografické údaje

Vacková H., 2012: Aplikace integrálního počtu v přírodních a technických vědách s přihlédnutím k výuce na střední škole. [Applications of integral calculus in natural and technical sciences with regard to teaching high school. Bc. Thesis, in Czech.] - 38 p., Faculty of Science, The University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

This thesis discusses the applicability of the Riemann integral in natural and technical sciences. The work is divided into three parts: introduction, theory and applicability of the Riemann integral. The introductory part deals with the history of the integral up to the 17th century. The theoretical part consists of the introduction of the Riemann integral, its properties, classes of integrable functions and curve length definitions. The main theorems and definitions needed for calculations are presented. The second part of the thesis deals with the applicability of the Riemann integrals in physics and mechanics. It contains general formula derivations for calculating some physical and technical variables. The Riemann integral is also used to determine the static moments and center of gravity of a homogeneous planar board.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice dne 24. 4. 2012

Helena Vacková

Poděkování:

Touto cestou bych chtěla poděkovat Prof. RNDr. Josefu Daněčkovi, Csc. za odborné vedení, cenné rady a připomínky při psaní této bakalářské práce. Paní Lauře Haug za korekturu anglické anotace. Rodině a přátelům za obrovskou podporu při psaní této bakalářské práce.

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Historie integrálu	1
1.1.1	17. století	1
1.1.2	18.století	4
1.1.3	19. století	6
2	Určitý integrál	7
2.1	Úvod	7
2.2	Primitivní funkce	9
2.3	Riemannův integrál	10
2.3.1	Základní vlastnosti	13
2.3.2	Třídy Riemannovsky integrovatelných funkcí	13
3	Aplikace určitého integrálu	15
3.1	Geometrické aplikace	16
3.2	Fyzikální aplikace určitého integrálu	22
3.3	Aplikace určitého integrálu v mechanice	23
3.3.1	Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti tenké homogenní rovinné desky	23
3.3.2	Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti homogenního rovinného oblouku	28
3.4	Technické aplikace určitého integrálu	29
4	Závěr	32

Kapitola 1

Úvod

1.1 Historie integrálu

1.1.1 17. století

Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Většina jeho matematických objevů je známá jen z jeho korespondence s Descartem, Pascalem, Torricellim, Huygensem, Robervalem, Wallisem a mnoha dalšími. Fermat jim zasílal různé problémy a vyzýval je k jejich řešení. Sám svými objevy obohatil mnoho oblastí matematiky a fyziky. Položil spolu s Descartem základy analytické geometrie a spolu s Pascalem základy teorie pravděpodobnosti. Výrazně zasáhl také do teorie čísel, optiky a mnoha dalších oborů. Věnoval se kvadraturám hyperbol a parabol zadaných rovnicemi $y^n = kx^{\pm m}$, kde $m, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}$. Fermat již dovedl integrovat parabolickou, hyperbolickou a exponenciální funkci.^[12]

Blaise Pascal (1623 - 1662)

Významně přispěl k rozvoji integrálního počtu. Pascal pronikl do procesu integrace a uvědomil si, že veškeré integrování vede k výpočtu jistých aritmetických součtů mocnin. Pascal jako první dovedl integrovat funkce trigonometrické.^[12]

Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz jsou nejvýznamnějšími matematiky druhé poloviny 17. století, kteří nezávisle na sobě vytvořili diferenciální a integrální počet. Vybu-
dovovali ucelenou teorii, do které zahrnuli všechny roztržštěné objevy svých předchůdců, teorii,

kteřá poskytla jednotný pohled na jednotlivosti, do tē doby izolované.

V roce 1638 studoval G. Galilei stejnoměrné zrychlený přímočarý pohyb a došel ke vztahu pro dráhu tohoto pohybu ($x = \frac{1}{2}gt^2$, když $\frac{dx}{dt} = gt$), a tím vlastně k výpočtu jistého neurčitého integrálu. Torricelli uvažoval obecněji, určil dráhu jako "integrál" rychlosti. Úloha měření dráhy v závislosti na čase si vynutila přenesení integrálních postupů ze statických úloh na úlohy dynamické a posléze poskytla i ideu a metodu, jak svázat pojem derivace (tečny, rychlosti) s pojmem integrálu (obsahu, dráhy).

V oblasti integrace v druhé polovině 17. století byly použity ve formě sčítání nekonečného počtu nekonečně malých veličin. Newton a Leibniz sjednotili infinitezimální počet, dali mu pevný řád a výpočetní algoritmy.^[12]

Isaac Newton(1643 - 1727)

Své úvahy v infinitezimálním počtu opíral o tzv. teorii fluxí a fluent. Díky znalosti Descartových idejí analytické geometie si mohl Newton představit rovinnou křivku jako množinu průsečíků vždy dvou přímk rovnooběžných se souřadnicovými osami x a y , pohybujících se okamžitými rychlostmi \dot{y} a \dot{x} (\dot{y} je okamžitá rychlost pohybu přímky rovnoběžné s osou y). Tyto okamžité rychlosti \dot{x} a \dot{y} , které mají charakter vektorů, nazval fluxemi. Okamžitá rychlost pohybujícího se průsečíků, tj. vektor rychlosti pohybu tohoto bodu, vznikne složením obou složek pohybu \dot{x} , \dot{y} podle známého rovnoběžníkového pravidla. Podíl $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ je směrnici tečny ke křivce opsané průsečíkem zmíněných pohybujících se přímk. Z našeho pohledu jsou souřadnice x, y (fluenty) pohybujícího se bodu funkcemi času t a fluxe \dot{x}, \dot{y} derivacemi x, y podle t

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Jejich poměr je derivace y podle x ^[12]

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}.$$

Dvě základní úlohy vedoucí k výpočtu integrálu:

1. ze znalosti rychlosti hmotného bodu v každém okamžiku určit dráhu, kterou tento bod urazí

za určitý čas

2. nalézt vztah mezi fluentami x, y , tj. nalézt funkci f vyhovující rovnici $f(x, y) = 0$, je-li dán vztah mezi fluxemi [12]

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Součtu nekonečně mnoha nekonečně malých veličin říkal integrál a dospěl tak ke vztahu

$$\int m dx = \int y dy$$

Dále z $\frac{m}{y} = \frac{dy}{dx}$ neboli $m dx = y dy$ dostal rovnost $m = y \frac{dy}{dx}$ a vztah $\int m dx = \int y dy$ přepsal do tvaru

$$\int y \frac{dy}{dx} dx = \int y dy$$

a ve formě určitého integrálu pak

$$\int_a^b y \frac{dy}{dx} dx = \int_{y(a)}^{y(b)} y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y(a)}^{y(b)} = \frac{1}{2} [y^2(b) - y^2(a)]$$

Na základě souvislosti mezi diferencováním a integrováním vypracoval Leibniz tzv. teorii transmutace, která v sobě obsahuje integrování, rozklad do řad i metodu charakteristického trojúhelníka.

Obsahem transmutační věty je rovnost

$$\int_a^b y dx = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x dy$$

jenž je zárodkem metody integrace per partés.

V Paříži dne 29. října 1675 napsal, že bude užitečné místo "součtu všech l" psát od nynějška $\int l$ (znak \int je odvozen z prvního písmene slova summa), a že vzniká nový druh počtu, nová početní operace, která odpovídá sčítání a násobení. Druhý druh počtu vzniká, když z výrazu $\int l = a$ získáme $l = a \frac{y}{d}$ (d je první písmeno slova differentia). Jako totiž operace \int zvětšuje rozměr, tak jej d zmenšuje. Znak \int znamená součet a d diferenci. Svou symboliku Leibniz neustále vylepšoval, např. už v dopise z 11. listopadu 1675 změnil $\frac{y}{d}$ na dy . Leibniz sice zavedl operační symbol pro integrování, název integrál však pochází od Jakoba Bernoulliho.[12]

Již v 17. století dokázali Wallis, Newton, Leibniz a Gragory pomocí integrace rozložit funkci $tg^{-1}x$ (tj. funkce inverzní $tg x$) do nekonečné řady:

$$tg^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

1.1.2 18.století

Osmnácté století se neslo ve znamení velké ofenzívy matematické analýzy do oblasti, které bychom dnes říkali aplikace matematiky. Fyzika přicházela s potřebou rozšiřovat pojmy matematické analýzy a také zobecňovat integrál. Např. problémy chvění struny, vedení tepla nebo zkoumání potenciálu rychlosti vedly k rozvoji diferenciálních rovnic, nekonečných Fourierových řad a integrálu. Název "integrální počet" (calculus integralis) zavedl Leibniz roku 1698 po dohodě s Johannem Bernoullim, a to místo dřívějšího termínu "inverzní metoda tečen" neboli "sumační počet" (calculus summatorius).

Byla také skupina matematiků, kteří odmítali pojem nekonečně malé veličiny a snažili se odůvodnit infinitezimální počet algebraickou cestou. Do této skupiny patřil např. Brooka Taylor, který je znám především publikací vztahu pro rozvoj funkcí do mocninných řad, tzv. Taylorovou řadou: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$

Jméno Maclaurina je také spojováno s Taylorovou řadou se středem v bodě nula. Maclaurin se na rozdíl od Taylora zabýval i otázkami konvergence řad a vytvořil dokonce tzv. integrální kritérium pro nekonečné řady.^[12]

Jakob (1654 - 1705) a Johann Bernoulli (1667 - 1748)

Jakob Bernoulli vyučoval markýze Guillaume Francoise de l'Hospitala, který roku 1696 publikoval ve své knize *Analyse des infiniment petites pour l'intelligence des lignes courbes* (Analýza nekonečně malých veličin ve studiu křivek), která se stala první učebnicí diferenciálního a integrálního počtu. Kniha je dnes známa především díky Bernoulliho výsledku, tzv. "l'Hospitalovu pravidlu" pro určení limity podílu dvou funkcí, v němž se jak čitatel, tak jmenovatel blíží k nule. Jakob i Johann se také v těsné souvislosti s výpočty integrálů věnovali problematice nekonečných řad, využívali je při výpočtech integrálů složitých algebraických a transcendentních

funkcí. Johann je např. autorem vynikajícího výsledku

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots,$$

který je možno dokázat užitím rozkladu do řad a integrací po částech.^[12]

Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827)

Jeho životním dílem je pětisvazková *Mécanique céleste*. Zde uvádí např. integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

dnes známý jako Laplaceův pravděpodobnostní integrál.^[12]

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Jako první definoval logaritmus jako exponent, zavádí známé číslo e jako základ přirozeného logaritmu; definuje ho pomocí nekonečné řady a vypočítává na 23 desetinných míst. Napsal třísvazkovou učebnici integrálního počtu *Institutiones calculi integralis* (Základy integrálního počtu). Euler poprvé jasně formuloval názor, že matematická analýza je obecná věda o funkcích. Pojem funkce však byl poněkud odlišný od toho, jak jej známe dnes. Obecně lze říci, že "v době Eulera" se pod pojmem funkce rozuměl jistý analytický výraz reprezentovaný mocninnou řadou. První definici funkce v našem současném pojetí podal v roce 1718 Johann Bernoulli: *Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina, která je sestavena libovolným způsobem z proměnné veličiny a konstant.*

Euler byl v roce 1748 přesnější:

Funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený libovolně z této proměnné veličiny a konstantních veličin.

Sám Euler však cítil, že pojetí funkce jako analytického výrazu pro matematiku nestačí. Roku 1755 uvádí novou, širší definici:

Když některé veličiny závisí na jiných tak, že při změně těchto (druhých) se také pozmění, říkáme, že první jsou funkcí druhých. Tento název má mimořádně široký charakter a zahrnuje všechny možné způsoby, jak lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných veličin.

Dirichlet už podává moderní definici funkce: y je funkce x , jestliže každé hodnotě x z daného intervalu odpovídá jediná hodnota y a dodává, že není podstatné, jestli existuje vzorec, který by tuto závislost popisoval. Pojem spojitosti funkce, jak je známe dnes, byl zaveden Bolzanem a Cauchym až v 19. století. [12]

1.1.3 19. století

V 19. století nastupuje období zpřesňování matematické analýzy, byly vysvětleny a odstraněny paradoxní výsledky získávané např. přerovnáváním konvergentních řad, limitními přechody v konvergentních posloupnostech funkcí apod.

Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857)

Význam Cauchyho díla v matematické analýze položil základy matematické analýze v dnešní podobě. Definované pojmy a matematické metody buduje na analytickém základě. Významný kus teoretické práce vykonal také v teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Cauchy se snažil pro funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ určit obsah plochy vymezené osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce f . Pro spojitou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ postupoval Cauchy takto: Rozdělil interval $[a, b]$ na N částí pomocí bodů $a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$. Tomuto dělení D intervalu $[a, b]$ přiřadil aproximující součet

$$S = \sum_{i=1}^N f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad (1.1)$$

kterým vyjádřil součet obsahů obdelníků se základnou $[x_{i-1}, x_i]$ a výškou, která je dána funkční hodnotou $f(x_{i-1})$. Cauchyovým úmyslem bylo definovat $\int_a^b f(x) dx$ jako limitu součtu tvaru (1.1), když maximum délek podintervalů $[x_{i-1}, x_i]$ bude konvergovat k nule. [12]

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Bernhard Riemann byl německý matematik, který výrazně přispěl k rozvoji matematické analýzy a diferenciální geometrie. Riemann výrazně přispěl k propojení geometrie a matematické analýzy. Na jeho myšlenkách byly dále rozvinuty například Riemannova geometrie, algebraická geometrie či teorie komplexních ploch. V reálné analýze přispěl definicí Riemannova integrálu a rozvinul také teorii trigonometrických řad. [12]

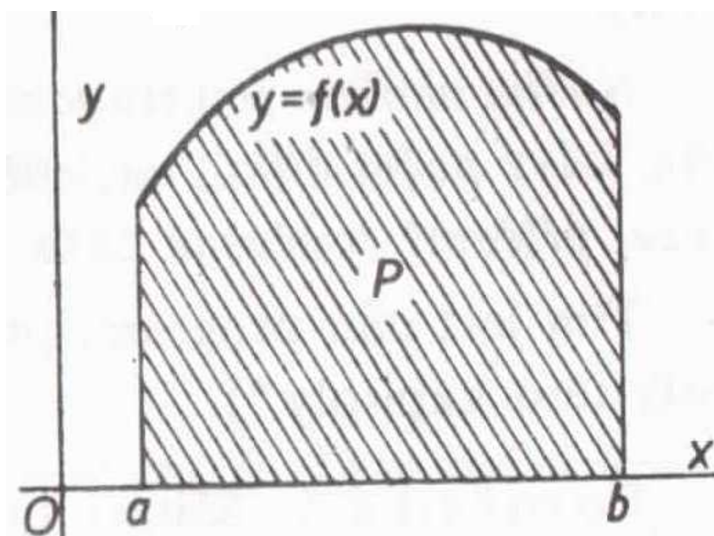
Kapitola 2

Určitý integrál

2.1 Úvod

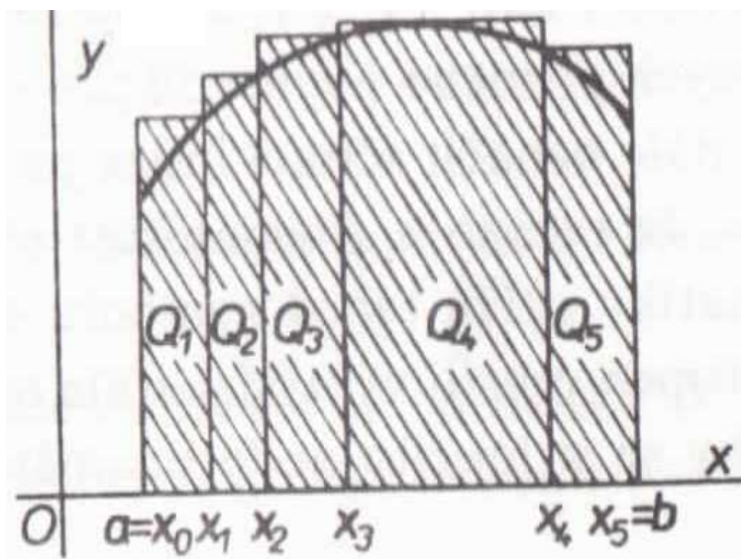
K pojmu určitého integrálu byli matematikové přivedeni geometrickým problémem, otázkou po plošné míře rovinných oborů. V elementární geometrii se definuje plošná velikost neboli obsah trojúhelníků (jako polovina součinu základny a výšky) a dále plošná velikost neboli obsah oborů, jež se dají rozložit na konečný počet trojúhelníků. Vzniká otázka, jakým způsobem je vhodné definovat obsah oborů obecnějších, jež nelze rozložit na konečný počet trojúhelníků: vezměme jeden takový jednoduchý případ.

Budiž dána funkce $f(x)$, spojitá a kladná v intervalu $[a, b]$. Sestrojme obor P , ohraničený osou x , přímkami $x = a$ a $x = b$ a křivkou $y = f(x)$. Jak definovat obsah oboru P ?^[6]



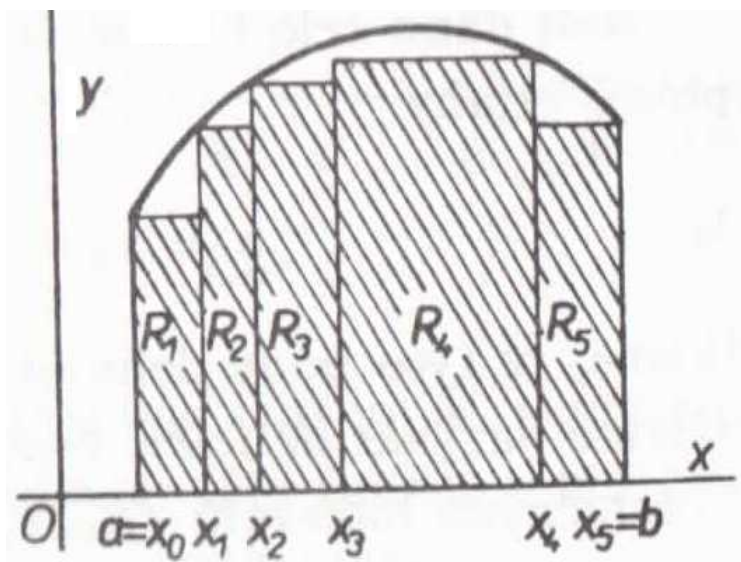
Obrázek 2.1: Zdroj: [6]

Rozdělíme interval $[a, b]$ na konečný počet dílků x_0, x_1, \dots, x_N , nad každým z těchto N podintervalů $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) jakožto základnou sestrojíme dva obdelníky: obdelník Q_i , jehož výška se rovná největší hodnotě funkce $f(x)$ v podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ ^[6]



Obrázek 2.2: Zdroj: [6]

a obdelník R_i , jehož výška se rovná nejmenší hodnotě funkce $f(x)$ v podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$.



Obrázek 2.3: Zdroj: [6]

Označíme-li znakem M_i největší hodnotu a znakem m_i nejmenší hodnotu funkce f v podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, je obsah obdelníka Q_i roven číslu $M_i(x_i - x_{i-1})$ a obsah obdelníka R_i roven číslu $m_i(x_i - x_{i-1})$.

Obdelníky Q_1, Q_2, \dots, Q_n tvoří jistý mnohoúhelník Q , "opsaný" oboru P , jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^N M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Obdobně obdelníky R_1, R_2, \dots, R_n tvoří jistý mnohoúhelník R , "vepsaný" oboru P , jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^N m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Když délky jednotlivých podintervalů konvergují k nule, zdá se, že obsah "opsaného" mnohoúhelníka Q i obsah "vepsaného" mnohoúhelníka R bude konvergovat k téže limitě a tuto společnou limitu nazýváme "obsahem oboru P ". [6]

2.2 Primitivní funkce

Definice 2.2.1 (Primitivní funkce) Funkce F je primitivní funkcí k funkci f v otevřeném intervalu (a, b) , platí-li $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Poznámka 2.2.1 Je-li F primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b) , pak každá funkce $G = F + c$, kde c je libovolná reálná konstanta, je také primitivní funkcí k funkci f , neboť na intervalu (a, b) platí

$$G' = F' + c' = F' = f.$$

Tímto způsobem dostaneme všechny primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b) .

Věta 2.2.1 Je-li funkce f spojitá v intervalu (a, b) , existuje k ní v tomto intervalu primitivní funkce.

Poznámka 2.2.2 Libovolnou primitivní funkci k funkci f v intervalu (a, b) nazýváme také neurčitým integrálem funkce f a značíme symbolem

$$\int f(x)dx.$$

Symbol \int se nazývá integrální znak, funkce f se nazývá integrand a proměnná x se nazývá integrační proměnná.

2.3 Riemannův integrál

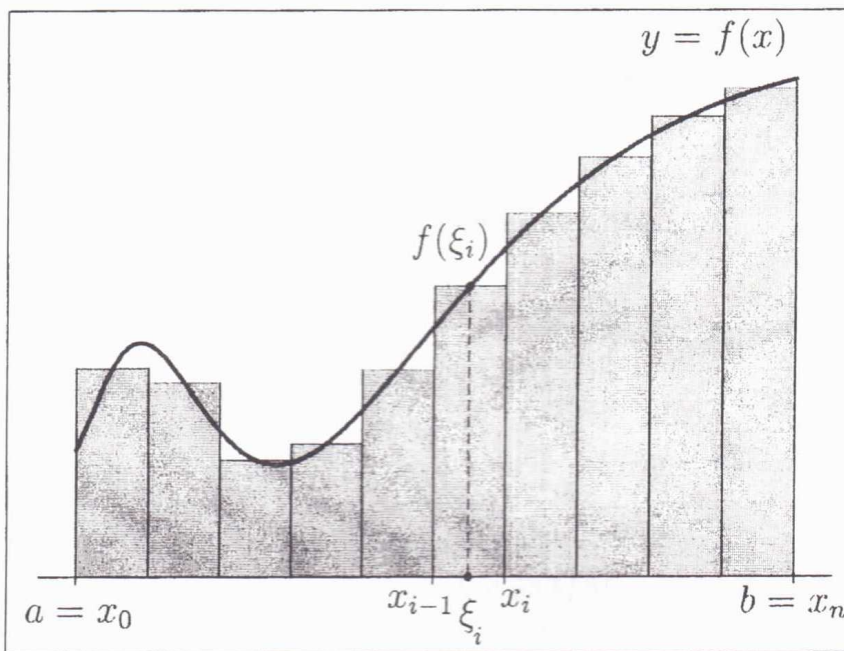
Uvažujme interval $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ jsou konečná, reálná čísla a necht' D_N je dělení intervalu I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. Každý interval $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ nazýváme částečným intervalem dělení D_N . Délku (míru) intervalu I_i definujeme $\mu(I_i) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Výraz $\nu(D_N) = \max_{i=1,2,\dots,N} \Delta x_i$ nazýváme normou dělení D_N .^[4]

Definice 2.3.1 Necht' f je ohraničená funkce na I , D_N dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$.^[2] Přiřadíme dělení D_N a funkci f dolní Riemannův integrální součet daný vztahem

$$s(f, D_N) = \sum_{i=1}^N m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^N m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$$

a horní Riemannův integrální součet daný vztahem^[4]

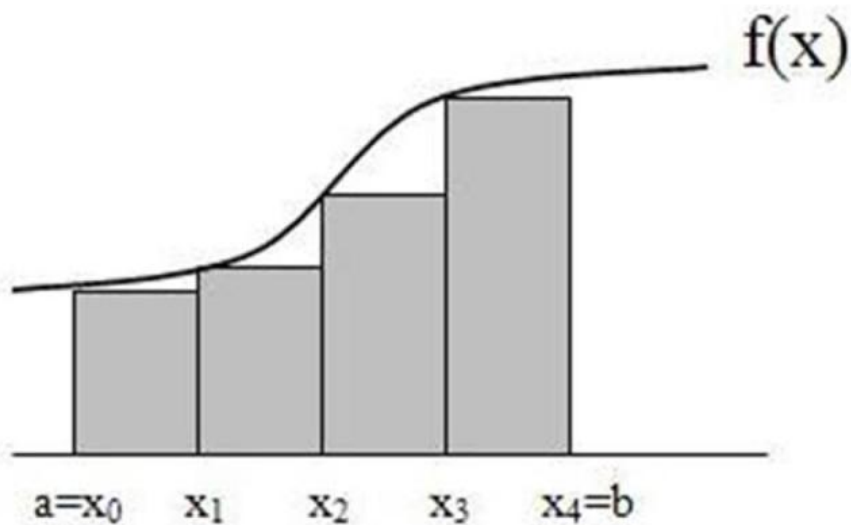
$$S(f, D_N) = \sum_{i=1}^N M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^N M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$



Obrázek 2.4: Riemannův integrál. Zdroj: [2]

Definice 2.3.2 Necht f je ohraničená funkce na I . Definujme dolní Riemannův integrál daný vztahem

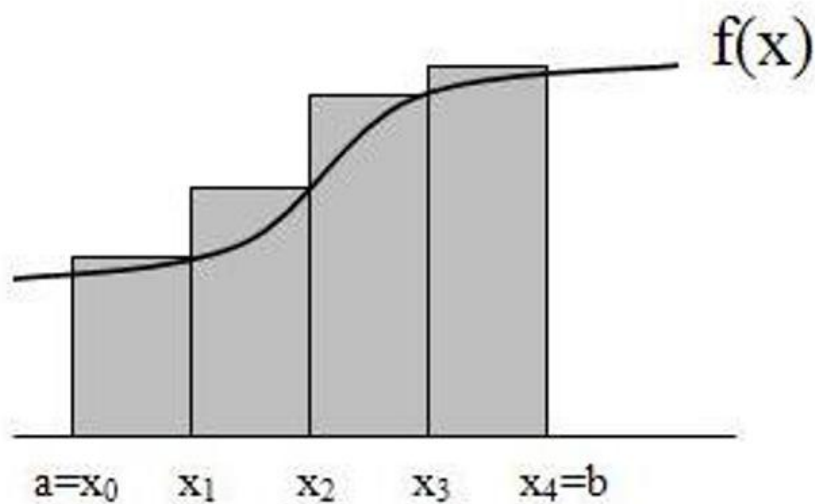
$$\int_a^b f(x) dx = I^-(f) = \sup_D s(f, D)$$



Obrázek 2.5: Dolní integrální součet.

a horní Riemannův integrál pro funkci f vztahem^[4]

$$\int_a^b f(x) dx = I^+(f) = \inf_D S(f, D).$$



Obrázek 2.6: Horní integrální součet.

Definice 2.3.3 Řekněme, že funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy jestliže na intervalu I platí

$$I^-(f) = I^+(f).$$

V tomto případě se tato společná hodnota nazývá Riemannův integrál f na I a značíme^[4]

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Věta 2.3.1 (test integrability) Necht' f je omezená funkce na intervalu I . Funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že^[4]

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 2.3.2 Každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu je Riemannovsky integrabilní.

Lemma 2.3.1 Je-li M supremum a m infimum funkce $f(x)$ v intervalu I , pak

$$m(b-a) \leq s(D) \leq S(D) \leq M(b-a)$$

pro každé dělení D v intervalu I .

Poznámka 2.3.1 Necht' f je omezená funkce na intervalu I a D_N je ekvidistantní dělení, tj. $x_i = a + (b-a)i/2^N$, $i = 0, 1, \dots, 2^N$. Definujme

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \qquad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definujme

$$J^-(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} m_i \qquad J^+(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} M_i.$$

Pak f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když $J^-(f) = J^+(f)$.^[4]

2.3.1 Základní vlastnosti

Poznámka 2.3.2 Množinu všech Riemannovsky integrovatelných funkcí na (a, b) značíme $\mathcal{R}((a, b))$.

Věta 2.3.3 Necht' $f, g \in \mathcal{R}((a, b))$.

1. $f + g \in \mathcal{R}((a, b))$ a $\lambda f \in \mathcal{R}((a, b))$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $fg \in \mathcal{R}((a, b))$
3. jestliže $\frac{1}{g}$ je omezená na (a, b) pak $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}((a, b))$
4. $\min_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}, \max_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\} \in \mathcal{R}((a, b))$
5. Necht' $a < c < b$. Pak $f \in \mathcal{R}((a, b))$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{R}((a, c))$ a $f \in \mathcal{R}((c, b))$.

Navíc platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

6. jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$ pak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$$

7. $|f| \in \mathcal{R}((a, b))$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

8. jestliže $f(x) \geq 0$ pro každé $x \in [a, b]$ a $a \leq c \leq d \leq b$ pak

$$\int_c^d f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

2.3.2 Třídy Riemannovsky integrovatelných funkcí

Věta 2.3.4 Každá monotonní funkce na $[a, b]$ patří do $\mathcal{R}((a, b))$.

Věta 2.3.5 Každá spojitá funkce na $[a, b]$ patří do $\mathcal{R}((a, b))$.

Věta 2.3.6 Necht' $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená a spojitá s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů z (a, b) . Pak $f \in \mathcal{R}((a, b))$.^[4]

Věta 2.3.7 (věta o střední hodnotě) Necht' f je spojitá na $[a, b]$, pak existuje $\xi \in [a, b]$ tak, že ^[4]

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Fundamentální věta integrálního počtu

Definice 2.3.4 Necht' $f \in \mathcal{R}((a, b))$. Pro každé $x \in [a, b]$ definujeme funkci ^[4]

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Tvrzení 2.3.1 Necht' F je funkce z Definice 2.3.4. Pak funkce F je spojitá $[a, b]$.

Věta 2.3.8

(a) Jestliže je funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, pak F je diferencovatelná v x_0 a $F'(x_0) = f(x_0)$.

(b) Jestliže je funkce f spojitá a $G(x)$, $x \in [a, b]$ je jakákoliv jiná diferencovatelná funkce na $[a, b]$ taková, že $G'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$, pak ^[4]

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Důsledek 2.3.1 Jestliže $f \in C^1([a, b])$ pak

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Jestliže funkce $g \in C([a, b])$, pak je funkce $x \rightarrow \int_a^x g(t) dt$, $x \in [a, b]$ diferencovatelná na $[a, b]$ a ^[4]

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Definice 2.3.5 (definice stejnoměrné spojitosti) Funkce f se nazývá stejnoměrně spojitá na množině $M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x', x'' \in M$ platí:

$$|x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Kapitola 3

Aplikace určitého integrálu

Základní myšlenka Riemannova integrálu byla známa již starým Řekům, kteří jejím užitím dokázali počítat obsahy a objemy některých geometrických objektů (například jehlanu, kužele či koule).^[16] Definice Riemannova integrálu je geometricky velmi názorná a lze ji využít jako základ pro přibližný výpočet určitého integrálu.^[2] Pomocí určitého integrálu lze určit např. obsah rovinného obrazce, délku oblouku rovinné křivky, obsah rotační plochy nebo objem rotačního tělesa.^[16]

Aplikace Riemannova integrálu nejsou vhodné jen v matematice, ale i v jiných předmětech jako ve fyzice a mechanice.

Nyní si uvedeme několik geometrických aplikací, které mohou být použity v matematických seminář na střední škole, protože obsahují jednoduché integrály funkcí, které by studenti neměly mít problém vypočítat.

V geometrických aplikacích se zaměříme na výpočet plošného obsahu rovinného obrazce, objemu a povrchu pláště rotačního tělesa. Potom si uvedeme několik fyzikálních aplikací a aplikací v mechanice.

3.1 Geometrické aplikace

Plošný obsah rovinného obrazce

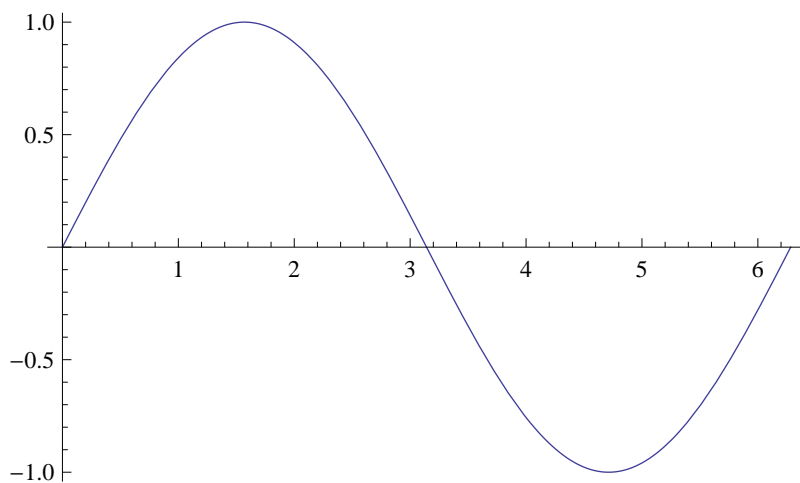
Plošný obsah části roviny

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, f_1(x) < y < f_2(x)\},$$

kde f_1, f_2 jsou spojité funkce takové, že $f_1(x) \leq f_2(x)$, pro každé $x \in [a, b]$, se spočte podle vzorce ^[4]

$$P(A) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Příklad 1: Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $f : y = \sin x$ v intervalu $[0, 2\pi]$ a osou x .

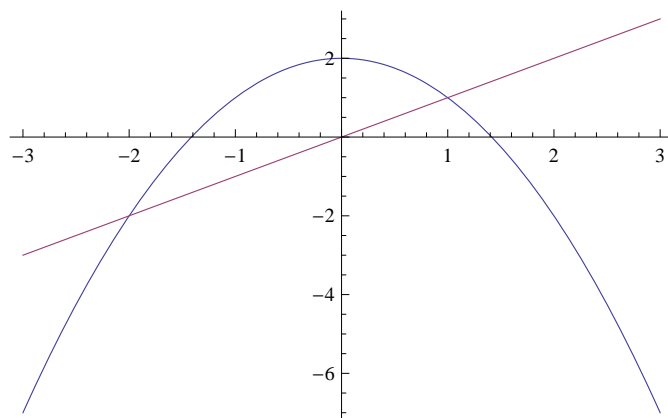


Obrázek 3.1: Graf funkce $\sin x$.

Obsah tohoto obrazce je

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 4 m^2. \end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $f : y = 2 - x^2$, $g : y = x$.



Obrázek 3.2: Graf funkcí $f : y = 2 - x^2$ a $g : y = x$.

Nejprve určíme x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí f , g řešením soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} y &= 2 - x^2 \\ y &= x \\ -x^2 + x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, což jsou v našem případě integrační meze. Obsah hledaného obrazce je

$$S = \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - x] dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{9}{3} m^2.$$

Objem rotačního tělesa

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a necht' f je spojitá na $[a, b]$. Uvažujme těleso vzniklé rotací plochy

$$P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < |f(x)|\}$$

kolem osy x . Vzorec pro výpočet objemu V_x takto daného rotačního tělesa je

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

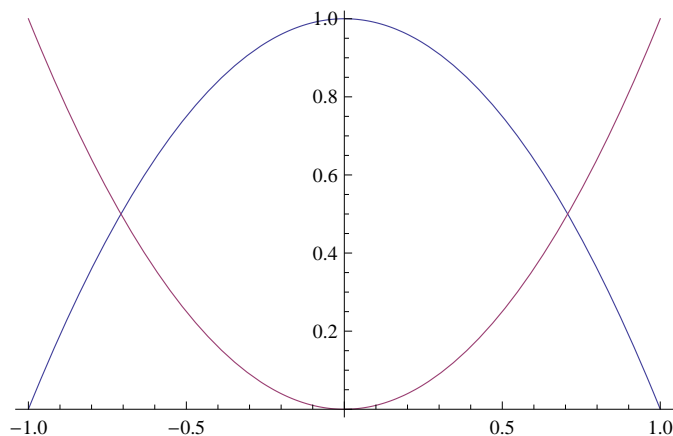
Vzorec pro výpočet objemu V_y tělesa vzniklého rotací plochy

$$P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, 0 < x < |g(y)|\}$$

kolem osy y , kde g je spojitá na (c, d) je ^[4]

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y) dy.$$

Příklad 3: Vypočtete objem rotačního tělesa, jež vznikne rotací rovinného obrazce omezeného křivkami $f : y = 1 - x^2$ a $g : y = x^2$ a kolem osy x .



Obrázek 3.3: Průběh funkcí $f : y = 1 - x^2$ a $g : y = x^2$.

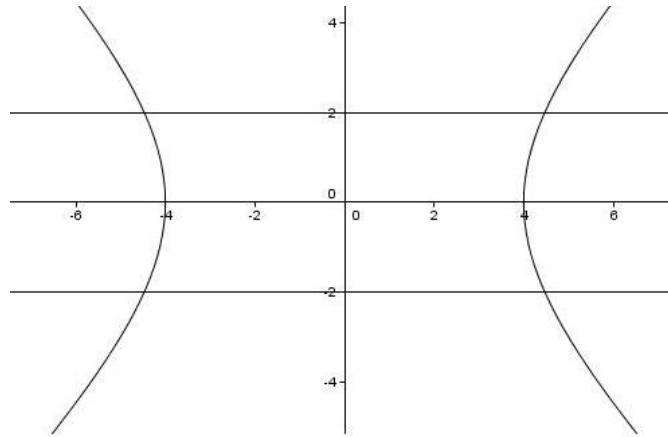
Nejprve určíme průsečíky grafů funkcí.

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= x^2 \\ 1 &= 2x^2 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Rovnice $f(x) = g(x)$ má dvě řešení: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Z obrázku (3.3) je vidět, že $f(x) > g(x)$. Objem rotačního tělesa vyjádříme jako $V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [(1-x^2)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-2x^2+x^4-x^4) dx = \\
&= \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-2x^2) dx = \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = \\
&= \pi \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi m^3
\end{aligned}$$

Příklad 4: Vypočítejte objem rotačního tělesa, jež vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $x^2 - y^2 = 16$, $y = -2$, $y = 2$ a kolem osy y .



Obrázek 3.4: Graf funkce $x^2 - y^2 = 16$, $y = -2$, $y = 2$.

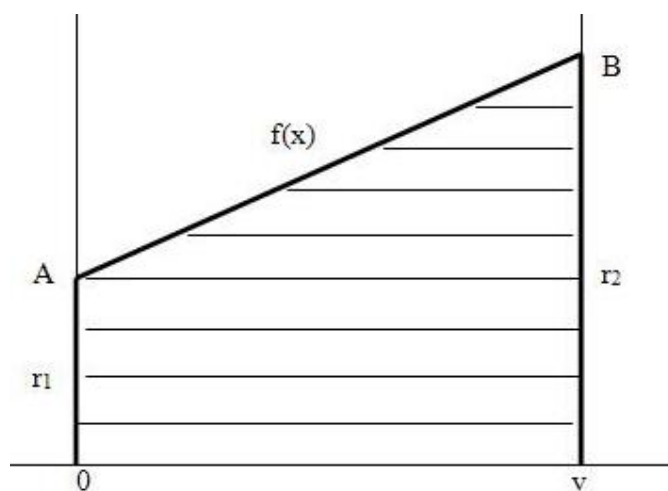
Z rovnice hyperboly vyjádříme $x^2 = y^2 + 16$ a dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa.

$$V = \pi \int_{-2}^2 (y^2 + 16) dy = \pi \left[\frac{y^3}{3} + 16y \right]_{-2}^2 = \pi \left[\frac{2^3}{3} + 32 - \frac{(-2)^3}{3} + 32 \right] = \frac{208}{3} \pi m^3$$

Povrch pláště rotačního tělesa

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a má na tomto intervalu spojitou derivaci. Povrch pláště rotačního tělesa, který vznikne rotací křivky, jež je grafem f , kolem osy x , lze vypočítat takto^[18]

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \tag{3.1}$$



Obrázek 3.5: Křivka $f(x)$

Příklad 5: Vypočítejte povrch pláště, který tvoří křivka $f(x)$ otáčením kolem osy x .

Nejprve zjistíme souřadnice bodů A a B ,

$$A = [0, r_1] \quad B = [v, r_2]$$

a potom si vyjádříme funkci $f(x)$.

$$f(x) = \frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1$$

Vypočteme povrch pláště podle vzorce 3.1.

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^v \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right) x + r_1 \right] \sqrt{1 + \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right) x + r_1 \right]'^2} dx = \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2} \int_0^v \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right) x + r_1 \right] dx = \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2} \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right) \frac{x^2}{2} + r_1 x \right]_0^v = \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2} \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right) \frac{v^2}{2} + r_1 v \right] = \\ &= \pi \sqrt{1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2} (r_1 + r_2) v = \pi \sqrt{\left(\frac{v^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2}{v^2} \right)} (r_1 + r_2) v = \\ &= \pi (v + r_1^2 + r_2^2 - \sqrt{2r_1 r_2}) (r_1 + r_2) = \\ &= (r_1 v + r_2 v + r_1^2 + r_2^2 - \sqrt{2r_1 r_2} - \sqrt{2r_2 r_1}) \pi m^2 \end{aligned}$$

Definice křivek

Nejprve budeme definovat pojem křivky v rovině.

Definice 3.1.1 Je-li parametrizace $\Phi = (\varphi(t), \psi(t))$ křivky γ prosté zobrazení a třídy C^1 na celém intervalu $[a, b]$ a má přitom nenulovou derivaci (v bodech a, b uvažujeme jednostranné derivace) v každém bodě intervalu $[a, b]$, nazýváme γ *obloukem* a zobrazení Φ jeho parametrizací.

Křivka vznikne napojením konečně mnoha oblouků za sebe. Zobrazení φ se nazývá parametrizací křivky. Křivka γ se nazývá uzavřenou, jestliže $\Phi(a) = \Phi(b)$. Body, ve kterých oblouk či křivka protíná sama sebe, nazýváme násobnými body. Uzavřenou křivku nazveme jednoduchou, jestliže nemá žádný násobný bod kromě počátečního a koncového bodu $\Phi(a) = \Phi(b)$.

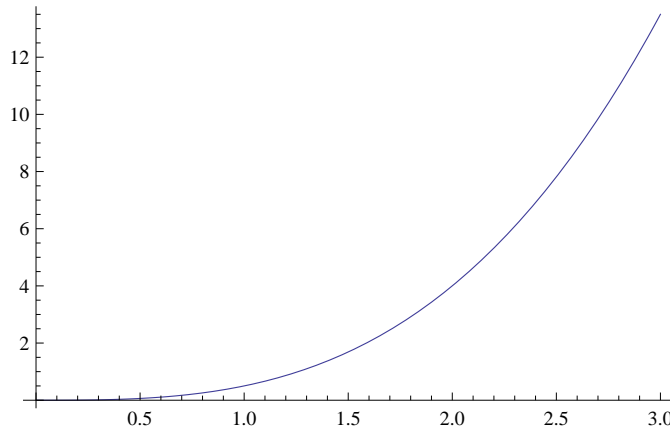
Věta 3.1.1 V případě parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$ je délka oblouku dána vztahem

$$L = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Poznámka 3.1.1 Ve speciálních případech, je křivka dána předpisem $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ a derivace f' je spojitá na $[a, b]$, pak platí ^[4]

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 6: Určete délku l grafu funkce $y = x^{3/2}$, $x \in [0, 3]$.



Obrázek 3.6: Graf funkce $y = x^{3/2}$.

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{31}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) \doteq 6,0963 \text{ m}$$

3.2 Fyzikální aplikace určitého integrálu

Ve fyzice můžeme určitý integrál použít při odvozování fyzikálních veličin a k výpočtu např. statických momentů, momentů setrvačnosti, těžiště tělesa nebo hmotnosti.^[17]

Příklad 1: Dráha přímočarého pohybu konaného rychlostí $v = v(t)$ (předpokládejme spojitost funkce v) v časovém intervalu $[T_1, T_2]$ $T_1 < T_2$, $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ je dána určitým integrálem

$$d = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt. \quad (3.2)$$

$$m_i = \inf_{t \in I_i} v(t) \quad M_i = \sup_{t \in I_i} v(t) \quad (3.3)$$

$$\Delta d_i = v(\xi_i) \Delta t_i$$

kde $\xi_i \in I_i$ a $\Delta t_i = \frac{T_2 - T_1}{N}$

$$d_N = \sum_{i=1}^N \Delta d_i = \sum_{i=1}^N v(\xi_i) \Delta t_i \quad (3.4)$$

je zřejmé z (3.3) a (3.4), že

$$s_N = \sum_{i=1}^N m_i \Delta t_i \leq d_N \leq \sum_{i=1}^N M_i \Delta t_i = S_N,$$

kde s_N je dolní a S_N je horní Riemannův integrální součet pro funkci v .

Nyní použijeme Větu 2.3.1 (test integrability) tj. dokážeme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$S_N - s_N < \varepsilon$$

pro nějaké $N \in \mathbb{N}$.

Pro důkaz předešlého využijeme stejnoměrné spojitosti funkce v .

$$S_N - s_N = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) \frac{T_2 - T_1}{N} \leq \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{T_2 - T_1}{N} = \varepsilon(T_2 - T_1)$$

Jestliže $\sup_N S_N = \inf_N s_N$ pak tato společná hodnota je dráha d a platí (3.2)

Příklad 2: Práce vykonaná na přímočaré dráze ve kladném směru osy x silou velikosti $F = F(x)$ v intervalu $[a, b]$ je dána určitým integrálem

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

Příklad 3: Je-li při jednoduchém kmitavém pohybu hmotného bodu na pružině podél osy x : $F(x) = kx$, kde k je konstanta (tzv. tuhost pružiny), pak práce vykonaná na dráze $s = b - a$ je

$$W = \int_a^b kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2).$$

Příklad 4: Závislost rychlosti hmotného bodu na čase je dána vztahem $v = 3t - \frac{1}{t^2}$, v je určeno v m/s . Určete dráhu, kterou hmotný bod urazí v časovém intervalu $[2s, 5s]$.

$$s = \int_2^5 \left(3t - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{t} \right]_2^5 = \frac{3 \cdot 25}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{156}{5} m$$

3.3 Aplikace určitého integrálu v mechanice

Těžiště soustavy hmotných bodů je bod $T = [x_T, y_T]$, který má tu vlastnost, že kdyby v něm byla soustředěna veškerá hmota soustavy, pak by měl stejný statický moment jako celá soustava.

3.3.1 Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti tenké homogenní rovinné desky

$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ o plošné hustotě $\sigma \text{ kg.m}^{-2}$

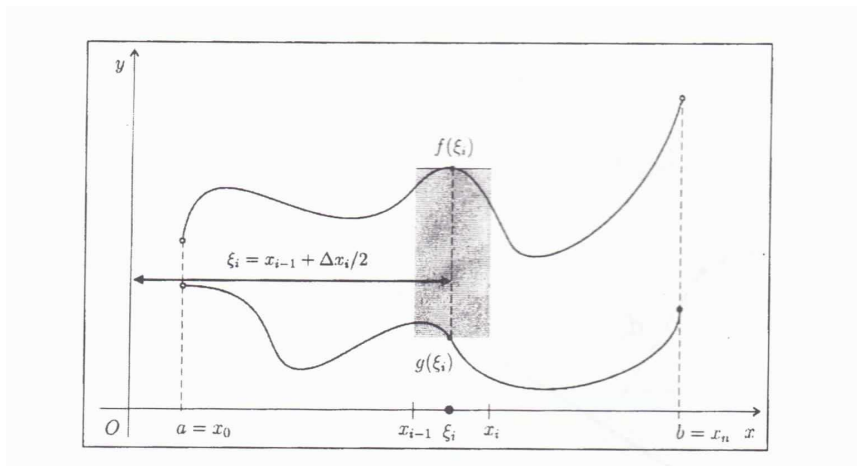
Hmotnost

$$hm = \sigma \int_a^b [f(x) - g(x)] dx,$$

Nyní odvodíme statické momenty vzhledem k souřadným osám

$$\Delta hm_i = \sigma [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i$$

$$\Delta S_y^i = \xi_i \Delta hm_i,$$



Obrázek 3.7: Statické momenty tenké homogenní rovinné desky. Zdroj: [2]

kde $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$S_y^N = \sum_{i=1}^N \Delta S_y^i = \sigma \sum_{i=1}^N [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \xi_i \Delta x_i,$$

je přibližný statický moment.

Označme

$$m_i = \inf_{x \in I_i} x[f(x) - g(x)] \quad M_i = \sup_{x \in I_i} x[f(x) - g(x)].$$

Dolní a horní Riemannův integrální součet pro funkci $\sigma x[f(x) - g(x)]$ je následující

$$s_N = \sigma \sum_{i=1}^N m_i \Delta x_i \quad S_N = \sigma \sum_{i=1}^N M_i \Delta x_i.$$

Dále platí

$$s_N \leq S_y^N \leq S_N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Pokud platí $\sup_N s_N = \inf_N S_N$ pak tuto hodnotu nazveme statickým momentem S_y tenké rovinné desky s plošnou hustotou σ vzhledem k ose y . Statický moment S_x tenké rovinné desky s plošnou hustotou σ vzhledem k ose x vypočítáme podobným způsobem jako k ose y . Použijeme Riemannův integrální součet pro funkci $\frac{1}{2}\sigma[f^2(x) - g^2(x)]$.

Celkem dostáváme

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx, \quad S_y = \sigma \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

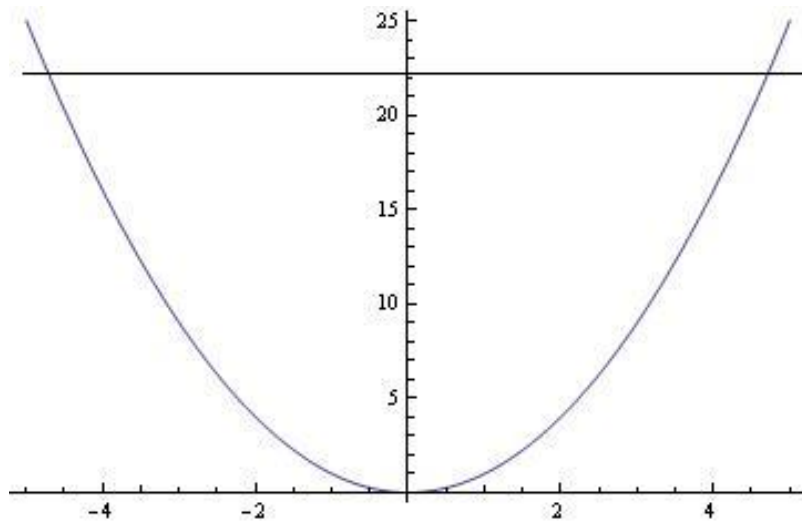
a pro souřadnice těžiště máme

$$T = [x_T, y_T] = \left[\frac{S_y}{hm}, \frac{S_x}{hm} \right].$$

Momenty setrvačnosti

$$I_x = \frac{1}{3}\sigma \int_a^b [f^3(x) - g^3(x)] dx, \quad I_y = \sigma \int_a^b x^2[f(x) - g(x)] dx.$$

Příklad 1: Vypočtete hmotnost tenké rovinné desky s hustotou $\sigma \text{ kg/m}^2$ ohraničené křivkami $f(x) = b$ a $g(x) = kx^2$, kde $b > 0, k > 0$.



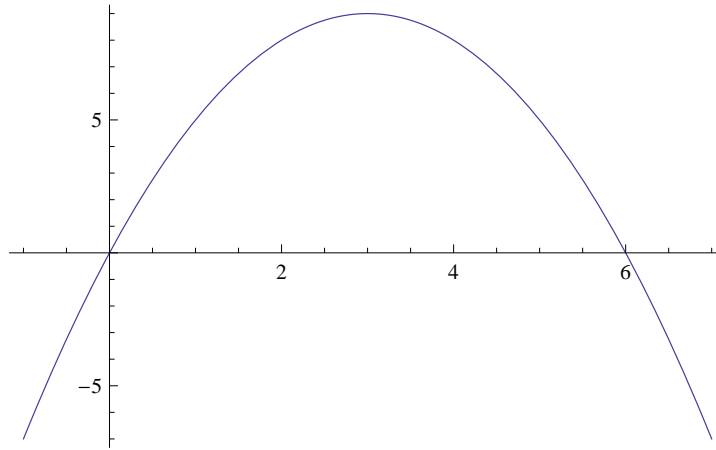
Obrázek 3.8: Tenká rovinná deska.

$$hm = 2\sigma \int_0^{\sqrt{\frac{b}{k}}} (b - kx^2) dx = 2\sigma \left[bx - k \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{b}{k}}} = 2\sigma \left(b\sqrt{\frac{b}{k}} - k \frac{\left(\sqrt{\frac{b}{k}}\right)^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\sigma b\sqrt{\frac{b}{k}} \text{ kg}$$

Příklad 2: Vypočtete souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = 6x - x^2$ a osou x .^[19]

Rovinná oblast je ohraničena shora křivkou $f(x) = 6x - x^2$ a zdola křivkou $g(x) = 0$.

$$hm = \sigma \int_0^6 (6x - x^2) dx = \sigma \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = \sigma(108 - 72) = 36\sigma$$



Obrázek 3.9: Průběh funkce $y = 6x - x^2$.

Statické momenty jsou

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2}\sigma \int_0^6 (6x - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\sigma \int_0^6 (36x^2 - 12x^3 + x^4) dx = \frac{1}{2}\sigma \left[36\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^6 = \\ &= \frac{1}{2}\sigma (12 \cdot 216 - 3 \cdot 1296 + \frac{7776}{5}) = \frac{1}{2}\sigma \frac{-6480 + 7776}{5} = \frac{648}{5}\sigma \end{aligned}$$

$$S_y = \sigma \int_0^6 x(6x - x^2) dx = \sigma \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = \sigma \left[2x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^6 = \sigma (2 \cdot 216 - \frac{1296}{4}) = \sigma (432 - 324) = 108\sigma.$$

Těžiště má souřadnice

$$x_T = \frac{108\sigma}{36\sigma} = 3 \qquad y_T = \frac{648}{5}\sigma \cdot \frac{1}{36}\sigma = \frac{18}{5}$$

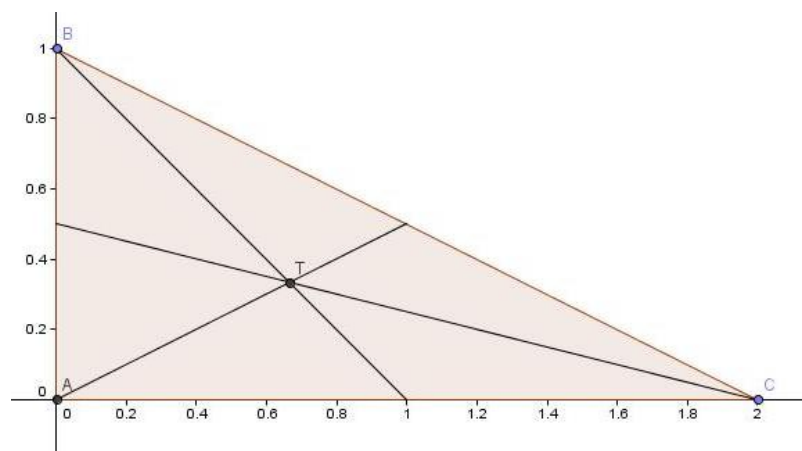
$$T = \left[3, \frac{18}{5} \right].$$

Příklad 3: Vypočtěte těžiště a momenty setrvačnosti homogenního trojúhelníka s vrcholy

$$A = [0, 0], B = [0, 1], C = [2, 0].$$

Nejprve si vyjádříme y : $y = -\frac{1}{2}x + 1$ a spočteme hmotnost

$$hm = \sigma \int_0^2 (1 - \frac{1}{2}x) dx = \sigma \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = \sigma (2 - 1) = \sigma$$



Obrázek 3.10: Trojúhelník ABC.

A nyní si vypočteme statické momenty a pak dosadíme do vzorce pro souřadnice těžiště.

$$\begin{aligned}
 S_x &= \frac{1}{2}\sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sigma \int_0^2 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right) dx = \frac{1}{2}\sigma \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \\
 &= \frac{1}{2}\sigma \left(2 - 2 + \frac{8}{12}\right) = \frac{1}{3}\sigma
 \end{aligned}$$

$$S_y = \sigma \int_0^2 x \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx = \sigma \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \sigma \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \sigma \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sigma$$

$$x_T = \frac{2}{3} \qquad y_T = \frac{1}{3}$$

$$T = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

Momenty setrvačnosti jsou

$$I_x = \frac{1}{3}\sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 dx = \frac{1}{3}\sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{8}\right) dx = \frac{1}{3}\sigma \left[x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{32}\right]_0^2 = \frac{1}{6}\sigma$$

$$I_y = \sigma \int_0^2 x^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx = \sigma \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) dx = \sigma \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\sigma$$

3.3.2 Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti homogenního rovinného oblouku

Hmotný rovinný drát o lineární hustotě $\sigma(t)$ kg/m můžeme považovat za křivku o parametrických rovnicích

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a, b)$$

Pro hmotnost a statické momenty platí následující vztahy

$$hm = \sigma \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

$$S_x = \sigma \int_a^b \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad S_y = \sigma \int_a^b \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

$$hm = \sigma \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$S_x = \sigma \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad S_y = \sigma \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$T = [x_T, y_T] = \left[\frac{S_y}{hm}, \frac{S_x}{hm} \right].$$

Momenty setrvačnosti [2]

$$I_x = \sigma \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

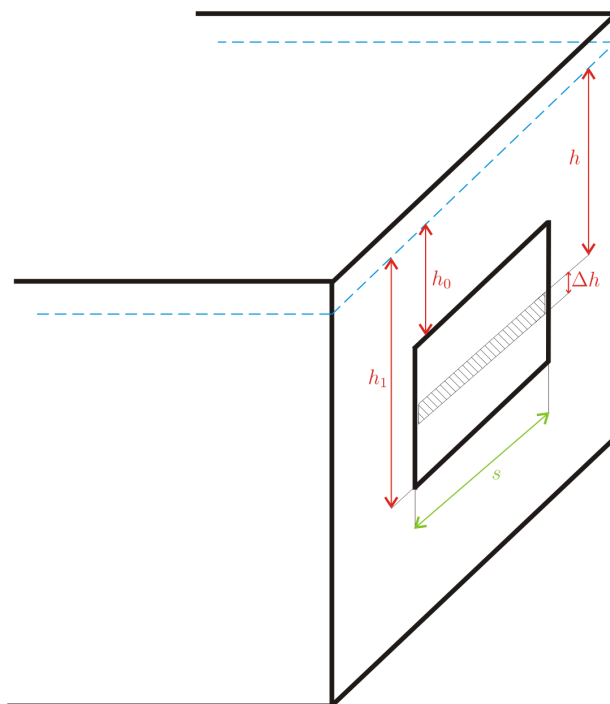
$$S_x = \sigma \int_a^b \psi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b \varphi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

3.4 Technické aplikace určitého integrálu

Nyní si uvedeme několik technických aplikací. Tyto aplikace nejsou vhodné do výuky matematických seminářů, které by pravděpodobně studenti střední škol nebyli schopni vypočítat, protože obsahují složitější integrály funkcí, ale chceme tím ukázat, kde všude se dá ještě použít Riemannův integrál.

Příklad 1: Ve stěně nádrže naplněné vodou je obdélníkový otvor. Horní hrana otvoru je ve vzdálenosti h_0 metrů pod hladinou a dolní hrana h_1 metrů pod hladinou. Šířka otvoru s metrů. Určete jaké množství vody Q v m^3 vyteče tímto otvorem za jednu vteřinu.^[2]



Obrázek 3.11: Výtok vody z nádrže. Zdroj: [2]

$$v = \sqrt{2gh} \quad m/s \qquad \Delta Q = \sqrt{2ghs} \Delta h \quad m^3$$

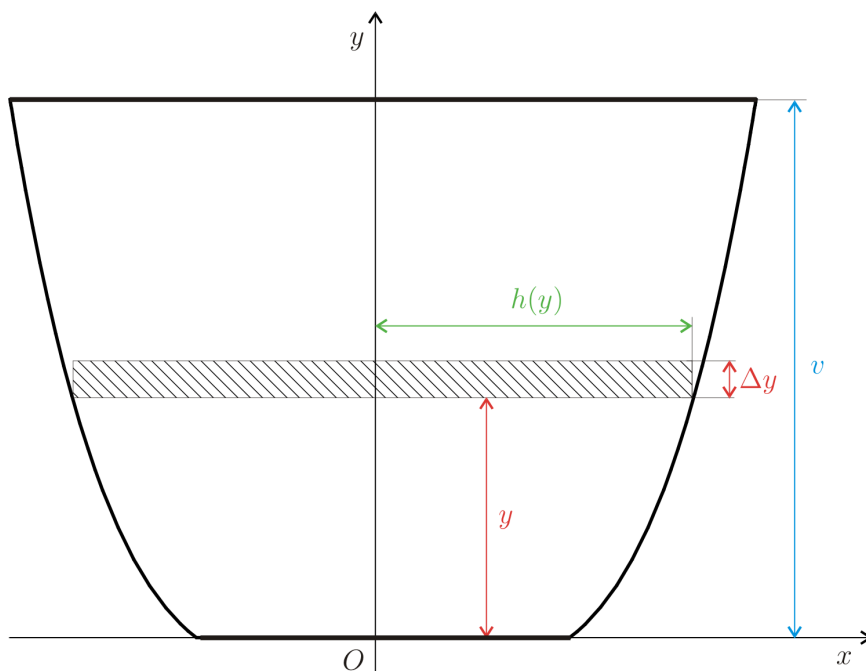
$$Q = \int_{h_0}^{h_1} \sqrt{2ghs} dh = \sqrt{2gs} \int_{h_0}^{h_1} \sqrt{h} dh = \sqrt{2gs} \left[\frac{2}{3} h^{3/2} \right]_{h_0}^{h_1} = \frac{2\sqrt{2g}}{3} s (h_1^{3/2} - h_0^{3/2}) \quad m^3$$

Ve skutečnosti je výtok menší vlivem tření ve vodě a zúžením proudu vody

$$Q = \left(\frac{2\sqrt{2g}}{3} sc (h_1 \sqrt{h_1} - h_0 \sqrt{h_0}) \right) \quad m^3,$$

kde $c < 1$ je tabulkový koeficient.

Příklad 2: Vypočítejte práci, kterou musíme vykonat, abychom vyčerpali rotačně symetrickou nádrž o výšce v metrů, která je celá naplněná kapalinou o hustotě $\sigma \text{ kg/m}^3$.^[2]



Obrázek 3.12: Výtok vody z rotačně symetrické nádrže. Zdroj: [2]

Element válce vody výšky Δy a poloměru $h(y)$, který má hmotnost

$$\Delta hm = \pi \sigma h^2(y) \Delta y \quad \text{kg},$$

musíme zvednout do výšky $v - y$, a tím vykonáme práci

$$\Delta W = \pi g \sigma h^2(y) (v - y) \Delta y \quad \text{J},$$

kde g je tabulkový koeficient.

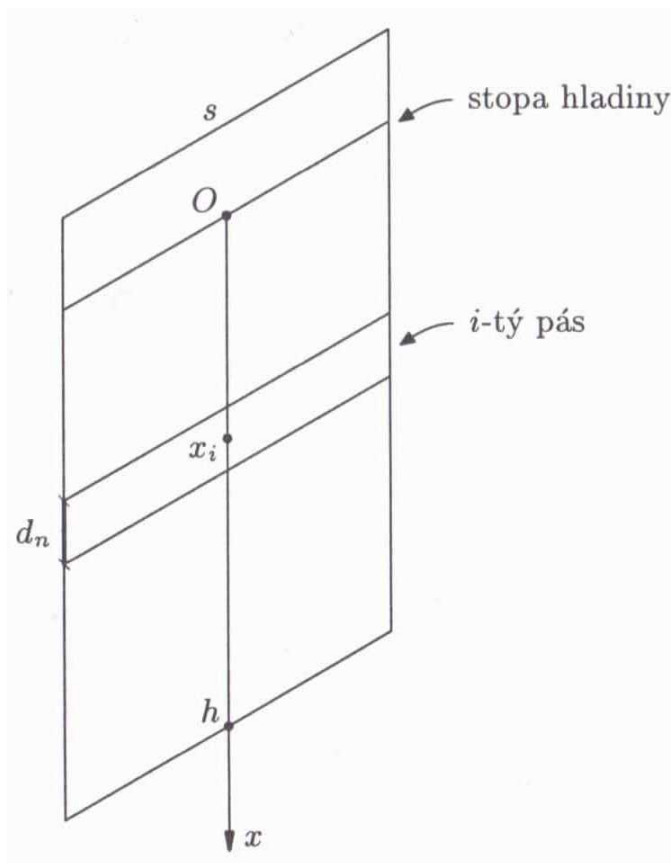
Celková práce potom je $W = \pi g \sigma \int_0^v h^2(y) (v - y) dy \quad \text{J}$.

Příklad 3: Částice se pohybuje přímočaře se zrychlením $a = 2,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Určete rovnici rychlosti a rovnici dráhy (když $v_0 = 0$, $s_0 = 0$). Vypočítejte rychlost a dráhu pohybu v čase $t = 2 \text{ s}$.^[20]

$$v = \int_0^2 a dt = a [t]_0^2 = a[2 - 0] = 2,6 \cdot 2 = 5,2 \text{ m/s}$$

$$s = \int_0^2 vt dt = \int_0^2 at dt = a \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = a(2 - 0) = 2,6 \cdot 2 = 5,2 \text{ m}$$

Příklad 4: Vypočítejte tlak P kapaliny konstantní měrné hmotnosti σ na svislou stěnu šířky s , sahá-li kapalina do výšky h .



Obrázek 3.13: Svislá stěna. Zdroj: [11]

Osu x položíme kolmo na stopu hladiny a orientujeme ji svisle dolů s počátkem na hladině. Tlak na jednotku plochy je přímo úměrný hloubce, tedy v hloubce x rovný kx , kde k závisí na σ .^[11] Celkový tlak P na stěnu bude dán integrálem

$$P = \int_0^h kxs \, dx = ks \int_0^h x \, dx = ks \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h = \frac{ks h^2}{2}.$$

Bude tedy úměrný druhé mocnině výšky h .

Kapitola 4

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit stručný přehled teorie Riemannova integrálu, ukázat aplikovatelnost Riemannovské definice integrálu na příkladech v přírodních resp. technických vědách a vybrat příklady, které by se daly použít v matematických seminářích na střední škole. Nejprve bylo nutné definovat pojem primitivní funkce, Riemannův integrál a jeho vlastnosti. V dalších kapitolách jsme ukázali aplikovatelnost Riemannova integrálu v geometrii, fyzice a v mechanice. V geometrických aplikacích jsme se zaměřili na plošný obsah rovinného obrazce, objem, povrch pláště rotačního tělesa a délku křivky. U aplikací v mechanice jsme se soustředili na hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti tenké homogenní rovinné desky a homogenního oblouku. Každou aplikaci jsme si předvedli na názorných příkladech, které byly doplněny obrázkem. Vždy jsme vybírali jednoduché příklady, které by se daly použít v matematických seminářích na střední škole, aby tyto semináře mohly být obohaceny pro studenty zajímavou látkou, protože ne všichni studenti vědí, proč se danou látku učí a k čemu jim bude dobrá. V poslední kapitole jsme se zaměřili na technické aplikace. Tyto příklady nejsou vhodné do matematických seminářů, ale chtěli jsme tím ukázat, kde se ještě dá použít Riemannův integrál. Doufám, že tato práce nebude prospěšná jenom mě, ale možná pomůže i některým studentům matematických oborů jako doplňující studijní materiál. Při psaní této bakalářské práce jsem se dozvěděla spoustu nových a zajímavých informací např. to, že aplikovatelnost Riemannova integrálu není vhodná jen v matematice, ale i v jiných předmětech jako ve fyzice, mechanice, a že by se aplikovatelností Riemannova integrálu dal prohloubit zájem o matematiku i v ostatních předmětech formou matematických seminářů.

Literatura

- [1] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., Matematická analýza I, Praha: Nakladatelství technické literatury, 1985, ISBN 213030014
- [2] Daněček J., Dlouhý O., Příbyl O., Matematika I, Brno: akademické nakladatelství CERM, 2007, ISBN 978-80-7204-525-9
- [3] Dlouhý Z., Hruška K., Kůst J., Rohlíček J., Jan Taišl, Zieris J., Úvod do matematické analýzy, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, ISBN 14-377-70
- [4] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Function of One Variable*. Birkhäuser, Boston, 2003
- [5] Gillman L., Robert H.Mc Dowell, Matematická analýza, Praha: Nakladatelství technické literatury, 1983, ISBN 213030013
- [6] Jarník V., Integrální počet, Praha: Academia, 1984
- [7] Kopáček J. a kolektiv, Příklady z matematiky pro fyziky [I], Praha: vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty univerzity Karlovy 1998, ISBN 80-85863-20-0
- [8] Kopáček J., Matematická analýza pro fyziky, Praha: vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty univerzity Karlovy 1997,
- [9] Polák J.: Přehled středoškolské matematiky, Praha: Prometheus, 1995, ISBN 80-85849-78-X
- [10] Rektorys K. a spolupracovníci, Přehled užití matematiky I, Praha: Prometheus, 1995, ISBN 80-85849-92-5

- [11] Rektorys K., Co a k čemu je vyšší matematika, Praha: Academia, 2001, ISBN 80-200-0883-7
- [12] Schwabik Š., Šarmanová P., Malý průvodce historií integrálu, Praha:Prometheus, 1996, ISBN 80-719-038-1
- [13] Ungermann Z., Matematika a řešení fyzikálních úloh, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990, ISBN 80-04-22957-3
- [14] <http://aix-slx.upol.cz/~fiser/KMAMMAN1/Ma1-08a-spojitosť.pdf>
- [15] <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf>
- [16] http://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l
- [17] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Integr%C3%A1l>
- [18] <http://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i24.html>
- [19] http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_3_1.pdf
- [20] <http://www.priklady.eu/sk/Riesene-priklady-matematika/Vypocet-a-pouzitie-urciteho-integralu/Urcity-integral-vo-fyzike.alej>