Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

Studijní obor: Finanční matematika

Úmrtnostní tabulky kontra životní pojištění

Bakalářská práce

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Vladimíra PETRÁŠKOVÁ
Katedra matematiky

Autor:
Andrea PECHAČOVÁ

České Budějovice, duben 2006

Prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením paní RNDr.Vladimíry Petráškové a uvedla v seznamu literatury všechny použité literární a odborné zdroje

V Českých Budějovicích dne 26. 04. 2006

Poděkování vedoucímu práce

Děkuji tímto RNDr. Vladimíře Petráškové za odborné vedení a pomoc při zpracování bakalářské práce.

Anotace

Název: Úmrtnostní tabulky kontra životní pojištění

Vypracovala: Andrea Pechačová

Vedoucí práce: RNDr. Vladimíra Petrášková.

Klíčová slova: Úmrtnostní tabulky, dekrementí řád vymírání populace, životní pojištění

Záměrem této práce je zobrazení vlivu úmrtnostních tabulek na výpočet pojistného v oblasti pojištění osob.
Úmrtnostní tabulky v podstatě zachycují dekrementní řád vymírání populace, mají specifický tvar a konstrukci. Jsou založeny na statistických údajích, které vycházejí z rozsáhlého souboru populace. Tyto tabulky jsou přímo využívány v pojištění osob. Sazby pojistného pro různé druhy životního pojištění jsou vypočítávány právě na základě těchto statistických údajů.

Annotation

Title: Mortality tables contra person insurance

Author: Andrea Pechačová

Supervisor: RNDr. Vladimíra Petrášková

Key words: Mortality tables, decrement order of the population, personal life insurance

The intention of this work is a reflect of the influence of mortality tables on the calculation of the insurance in the sphere of person insurance. The mortality tables catch insubstance the decrement order of dying out of the population, they have a special form and construction.They are based on statistic data , which go out from an extensive set of the population. These tables are directly used in the insurance persons.The rates of insurance for different kind of life insurance are calculated just on the bases of these statistic data.

OBSAH

Úvod

Záměrem této práce je nastínění vlivu úmrtnostních tabulek v životním pojištění. Úmrtnostní tabulky jsou nedílnou součástí při stanovení konkrétních sazeb jednotlivých pojistných produktů.

Tyto tabulky jsou založeny na dekrementním řádu vymírání populace, který je tvořen na základě pozorování většího souboru lidí. V podstatě se jedná o systematické uspořádání určitých statistických údajů, které se odvíjejí od dekrementního řádu . Právě tyto údaje jsou používány pro výpočty pojistného v pojištění osob.

Mojí snahou je zachycení jistých zákonitostí a odchylek ve výpočtech pojistného u různých druhů pojištění.

Většina pojišťoven má svého pojistného matematika, který vypočítává a a stanovuje sazby pojistného tak, aby co nejvíce minimalizoval možnost ztráty pojišťovny, ale také aby pojistné bylo, co možná nejpřijatelnější pro budoucího pojištěného.

Cílem této práce je zachycení různých nutných výpočtů v pojištění osob a skutečností, které by měly v těchto počtech být zohledněny.

1. Úmrtnostní tabulky

1.1 Řád vymírání populace

Úmrtnostní tabulky jako takové musí mít určité náležitosti a jsou sestavovány dle určitých vzorů. Prvním,co bych zmínila je *dekrementní řád* úmrtnostních tabulek.

Základem, dle kterého pojišťovna buduje pojišťovna své výpočty životního pojištění, je život a umírání lidí. Neznámým okamžikem v tomto případě je to, kdy smrt nastane.Smrt je náhodným jevem, který se pojišťuje. Pojišťovna nemůže pro svého konkrétního pojištěnce určit,ani dle sebelepších výpočtů, kdy bude skutečně splatná částka, k jejíž výplatě se v případě smrti zavázala. Ale i přes tento fakt, jsou výpočty v pojištění osob založeny na určitém modelu, který je platný pro větší soubor lidí. Při správném použití tento model pojišťovně zaručuje splnitelnost závazků, které pojišťovna převzala. Tento model je založen a odpozorován ze zkušeností a vlastně vyjadřuje ten fakt, že čím je člověk starší, tím je blíže smrti. Samozřejmě i tento fakt není stoprocentní, protože jak za chvíli poukáži, jsou určité věkové skupiny, kdy tato zákonitost neplatí. Ale pro většinu případů samozřejmě platí, že s rostoucím věkem roste i samotná úmrtnost. Nyní by mi mohl někdo oponovat, že u dvou měřených nebo spíše pozorovaných souborů lidí, se mohou vyskytnout určité odchylky, které by nám mohli výpočty pozměnit. Pojišťovna ale pracuje jen s průměrnými hodnotami, protože při velkém počtu pojištěných lidí se odchylky od průměrných hodnot v průběhu let, kdy pojišťovna uskutečňuje svou činnost, navzájem vyrovnají, uplatňuje se zde Zákon velkých čísel.

Samotné průměrné hodnoty se získávají podle určitých demografických metod pozorováním velkých populačních souborů obyvatelstva nebo v lepším případě, jak jsem již zmínila, pojištěnců. Průměrné hodnoty udávají ve tvaru posloupnosti začínající členem

l_0, dále pak pokračuji $l_1 \ldots, l_x, \ldots\ldots, l_\omega$

Člen l_x vyjadřuje počet osob žijících ve věku x ze souboru l_0 současně narozených jedinců. Označení l je odvozeno od anglického přídavného jména living.

Symbol ω označuje poslední uvažovanou věkovou kategorii, a používá se pravděpodobně proto, že je posledním písmenem řecké abecedy. Do posledního členu $l\omega$ se zahrnují i osoby přesahující věk ω, protože samotný věk ω se volí většinou tak vysoký, že je jen malá pravděpodobnost dožití tohoto věku. Dost často se můžeme setkat s tím, že posloupnost začíná členem l_{15} (tedy začíná souborem současně narozených patnáctiletých jedinců), a to právě proto, že přístupnost životního pojištění je věkově omezená, tudíž zkoumání od nižšího věku pozbývá smyslu. Do vytvořené posloupnosti není možné v jejím průběhu přijmout nového jedince a jediným možným způsobem jak tuto posloupnost opustit je smrt. Z tohoto vyplývá, že existuje určitý řád ubývání populace, mluvíme tedy o tzv. *Dekremetním řádu vymírání populace*. Existují i jiné dekrementní řády, např. dekrementní řád svobodných.

Prvním členem posloupnosti se většinou udává kulaté číslo například 100 000, a to se pak nazývá kořenem. Mohlo by se zdát, že takový dekrementní řád popisuje pouze fiktivní úmrtnostní chování populace ale v pojišťovacích výpočtech l_x nevystupují jako absolutní hodnoty, ale pouze jako hodnoty relativní ve vzájemných poměrech. Jako důkaz uvádím následující příklad.

Příklad č.1:

Jaké pojistné by měla jednorázově požadovat pojišťovna od dvacetiletého muže, který s ní uzavírá pojištění na dožití věku padesáti let s pojistnou částkou 300 000 Kč. Přitom pojišťovna pracuje s pojistně technickou mírou 4 % a řídí se stavem úmrtnosti v České republice v 2004.

Řešení

Nejdříve se vrátíme k pojmu zmíněném v příkladě, a tím je pojistně technická úroková míra. Je to vlastně úroková míra, kterou pojišťovny používají pro konstrukci sazeb svých pojistných produktů. V případě pojištění osob je konstrukce pojistného založena na počáteční hodnotě té částky, kterou bude muset pojišťovna vyplatit v rámci uzavřených pojistných smluv. Příliš nízká míra zvyšuje pojistné sazby tak, že neobstojí v konkurenci na pojistném trhu, zatímco příliš vysoká míra vede k nízkým rezervám vytvořených z pojistného.

Nyní se vrátím samotnému řešení příkladu. Musíme zohlednit vliv úmrtnosti. Podle úmrtnostních tabulek mužů v České republice za rok 2004 (viz. Tabulka č.1) použijeme z odpovídajícího dekrementího řádu s kořenem l_0 = 100 000 hodnoty l_{20}= *99 304* a l_{50} = *93 006*

$300\,000\; l_{50} = 300\,000 * 93\,006 = 2,79018^{10}$

tuto částku ještě musíme diskontovat *(i = 0,04 %)*

$2,79018^{10} * (1 / 1,04)^{30} = 8\,602\,645\,810$

A posledním krokem k získání hledaného pojistného, je rozdělení poslední částky rovným dílem mezi l_{20} = *99 034*. Fiktivních dvacetiletých pojištěnců.

$8\,602\,645\,810 / l_{20} = 8\,602\,645\,810 / 99\,304 =$

= 86 629 Kč.

Výpočty lze shrnout do jednoho vzorce ,

$300\,000\; l_{50} / l_{20} * v^{30} =$

$= 300\,000 * 93\,006 / 99\,304 * (1 / 1,04)^{30}$

= 86 629 Kč

z něhož je patrné, že hodnoty l_{50} a l_{20} vystupují opravdu jen ve vlastním poměru.

Poměr l_{50} / l_{20} se dá také použít ne jednotlivé pojištěné ve věku dvaceti let, a to v tom smyslu, že lze vypočítat s jakou pravděpodobností se dožijí padesáti let.

${}_{30}p_{20} = 93\,006 / 99\,304 = 0,93657$

Pravděpodobnost dožití padesáti let pro dvacetiletého muže je tedy 0, 9367.

1.2 Tvar a konstrukce úmrtnostních tabulek

Dalším důležitým pojmem tykající se úmrtnostních tabulek je jejich ***tvar a konstrukce***.

Úmrtnostní tabulka obsahuje obvykle mimo posloupnosti i řadu dalších systematicky uspořádaných údajů.Pojišťovny většinou pracují pouze s běžnými neboli průřezovými úmrtnostními tabulkami, které vycházejí z dekrementních zkušeností dané populace během krátkého časového období (obvykle nepřesahující 10 let) anebo s úplnými úmrtnostními tabulkami, v nichž se používají věkové intervaly délky jednoho roku. Opakem běžných úmrtnostních tabulek jsou tzv. *generační úmrtnostní tabulky*, které představují opravdový dekrementní záznam o průběhu života konkrétní populace současně narozených jedinců. A nakonec existují i *zkrácené úmrtnostní tabulky*, které používají víceleté věkové skupiny

Tabulka č.3 – Zkrácené úmrtnostní tabulky mužů a žen za léta 1996 – 2000 v České republice

Česká republika							
Věk	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
			muži				
0	0,005553	0,994447	100 000	555	99 489	7 104 027	**71**
1	0,001343	0,998657	99 445	134	99 378	7 004 538	**70,4**
5	0,001071	0,998929	99 311	106	99 258	6 607 026	**66,5**
10	0,001152	0,998848	99 205	114	99 148	6 110 736	**61,6**
15	0,003693	0,996307	99 091	366	98 908	5 614 997	**56,7**
20	0,005113	0,994887	98 725	505	98 472	5 120 459	**51,9**
25	0,005352	0,994648	98 220	526	97 957	4 628 098	**47,1**
30	0,00649	0,99351	97 694	634	97 377	4 138 312	**42,4**
35	0,009702	0,990298	97 060	942	96 589	3 651 426	**37,6**
40	0,01713	0,98287	96 119	1 647	95 295	3 168 479	**33**
45	0,028537	0,971463	94 472	2 696	93 124	2 692 002	**28,5**
50	0,046844	0,953156	91 776	4 299	89 627	2 226 382	**24,3**
55	0,071245	0,928755	87 477	6 232	84 361	1 778 250	**20,3**
60	0,111414	0,888586	81 245	9 052	76 719	1 356 446	**16,7**
65	0,163688	0,836312	72 193	11 817	66 284	972 852	**13,5**
70	0,239834	0,760166	60 376	14 480	53 136	641 430	**10,6**
75	0,345925	0,654075	45 896	15 876	37 957	375 752	**8,2**
80	0,483772	0,516228	30 019	14 522	22 758	185 965	**6,2**
85	0,644369	0,355631	15 497	9 986	10 504	72 175	**4,7**
90	0,802225	0,197775	5 511	4 421	3 301	19 655	**3,6**
95	0,921488	0,078512	1 090	1 004	588	3 153	**2,9**
100	0,98167	0,01833	86	86	43	214	**2,5**
			ženy				
0	0,00476	0,99524	100 000	476	99 562	7 784 717	**77,8**
1	0,001131	0,998869	99 524	113	99 468	7 685 154	**77,2**
5	0,000799	0,999201	99 411	79	99 372	7 287 284	**73,3**
10	0,000752	0,999248	99 332	75	99 295	6 790 425	**68,4**
15	0,001429	0,998571	99 257	142	99 186	6 293 952	**63,4**
20	0,001671	0,998329	99 115	166	99 033	5 798 021	**58,5**
25	0,001635	0,998365	98 950	162	98 869	5 302 857	**53,6**
30	0,002426	0,997574	98 788	240	98 668	4 808 513	**48,7**
35	0,004154	0,995846	98 548	409	98 344	4 315 171	**43,8**
40	0,007147	0,992853	98 139	701	97 788	3 823 453	**39**
45	0,012156	0,987844	97 438	1 184	96 845	3 334 511	**34,2**
50	0,019139	0,980861	96 253	1 842	95 332	2 850 285	**29,6**
55	0,030003	0,969997	94 411	2 833	92 995	2 373 625	**25,1**
60	0,048674	0,951326	91 578	4 458	89 350	1 908 652	**20,8**
65	0,08298	0,91702	87 121	7 229	83 506	1 461 904	**16,8**
70	0,141826	0,858174	79 891	11 331	74 226	1 044 374	**13,1**
75	0,238688	0,761312	68 561	16 365	60 378	673 243	**9,8**
80	0,386749	0,613251	52 196	20 187	42 103	371 351	**7,1**
85	0,585016	0,414984	32 009	18 726	22 646	160 837	**5**
90	0,795	0,205	13 283	10 560	8 003	47 605	**3,6**

95	0,94263	0,05737	2 723	2 567	1 440	7 589	**2,8**
100	0,994246	0,005754	156	156	78	391	**2,5**

Členění sloupců tabulek bývá většinou standardní a jsou v nich uváděny většinou tyto údaje:

1. ***l_x =Počet dožívajících se věku x***

Vyjadřuje počet jedinců z l_o, kteří se dožijí věku x, l_0 je kořenem tabulky

Jedná se tedy o dekrementní řád vymírání populace

2. ***dx - Počet zemřelých ve věku x***

V podstatě vyjadřuje počet jedinců z l_o, kteří zemřou ve věku x. Takže by se dalo říci, že d_x je pravým opakem l_x.Počítá se jako rozdíl dvou po sobě jdoucích tabulkových počtů dožívajících.

Platí :

$d_x = l_x - l_{x+1}$

pro $x = 0, 1, 2 \ldots\ldots \omega\text{-}1$

Například :

$d_{25} = l_{25} - l_{26} = 99\,105 - 99\,075 = 30$

(hodnoty jsou čerpány z tab.č.2)

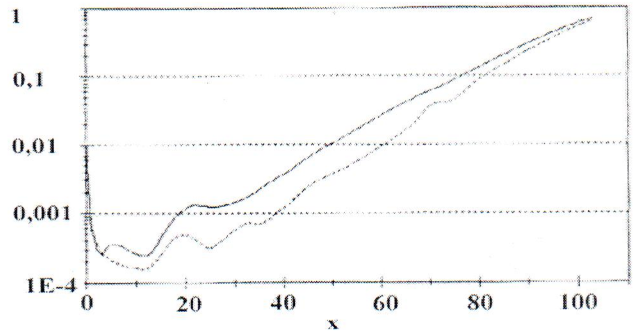
3. ***g_x - Pravděpodobnost úmrtí ve věku x***

Pravděpodobnost úmrtí ve věku x, nám udává pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře před dosažením věku x+1,l_x a q_x jsou na sebe navzájem převoditelné, proto platí, že obsahují stejnou informaci.

Pravděpodobnost úmrtí g_x je založena na spojité funkci : $g_x = 1 - exp\,(- m_x\,)$,

m_x je tabulková míra úmrtnosti. Pravděpodobnost úmrtí osob ve věku 0 let je počítána jako podíl zemřelých ve věku 0 let a živě narozených v daném období.

Obrázek č.1 Pravděpodobnost úmrtí q_x pro muže — a ženy ---- v České republice z roku 1990



<u>Platí :</u>

$l_x = l_x - l_{x+1} / l_x$

$l_{x+1} = (1\text{-}q_x) * l_x$

<u>Například</u> (tab.č.2.) :

$l_{25} = (1 - q_{24}) * l_{24} = p_{24} * l_{24} =$

$= 0{,}999651 * 99\ 140 = 99\ 105{,}4$

4. p_x *-Pravděpodobnost dožití ve věku x*

Značí se jako p_x a v podstatě vyjadřuje pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku x+1.

<u>Platí :</u>

$p_x = 1 - q_x = l_{x+1} / l_x$

5. L_x - *Počet let prožitých osobami ve věku x*

Vyjadřuje celkový počet let, které ve věku x prožije celkem l_x osob. Počítá se jako průměr ze dvou po sobě jdoucích tabulkových počtů dožívajících.

Platí :

$L_x = l_{x+1} + ½\, d_x = l_x + l_{x+1} / 2$

Z původních l_x osob ve věku x přispěje každá l_{x+1} osob, které se dožijí věku x+1, do L_x jedním rok, to znamená celkem l_{x+1} roky. V případě L_0 jsou úmrtí díky kojenecké úmrtnosti vyšší v prvních týdnech života, takže hodnota ve výrazu musí být nahrazena mnohem menší hodnotou.

Příklad :

$L_{50} = l_{51} + ½ * d_{50} = 96\ 320 + ½ * 296 = 96\ 469$ zatímco

$L_0 = l_1 + 0{,}08d_0 = 99\ 626 + 0{,}08*374 = 99\ 656$

6. *Tx - Počet zbylých let života osob ve věku x*

Celkový počet let, které do konce svého života prožije celkem l_x osob.

Tedy platí :

$T_x = L_x + L_{x+1} + \ldots + L\omega.$

7. *e_x - Střední délka života ve věku x*

Vyjadřuje průměrný počet let, kterých se ještě dožije jedinec ve věku x.

Platí :

$e^0_x = T_x / l_x$

Počítá se jako podíl počtu let života, které má tabulková generace v daném věku před sebou (T_x) a tabulkovém počtu dožívajících.

tj. celkový počet let T_x očekávaný pro populaci l_x se rovnoměrně rozdělí na každého jedince.

Například (dle tabulky č.2) může 20letá žena v průměru očekávat :

$e^0_x = T_{20} / l_{20} = 5\ 864\ 707 / 99\ 267 = 59{,}08$,

téměř šedesát let života

Střední délka života je syntetickým ukazatelem, který zobrazuje úmrtnostní poměry ve všech věkových skupinách.

Tyto vše náležitosti by měly mít úmrtnostní tabulky, v některých speciálních případech se používá i navíc

např. intenzita úmrtnosti ve věku x, která vyjadřuje pravděpodobnost úmrtí v nekonečně malém věkovém intervalu.

To by bylo asi vše ke konstrukci úmrtnostních tabulek, dále asi nemá smysl toto téma rozebírat, protože většina pojišťoven přejímá již hotové tabulky. Stěžejním krokem konstrukce úmrtnostních tabulek je výpočet pravděpodobností q_x, ostatní hodnoty se již dopočítávají dle vzorců. Podle způsobu výpočtů pravděpodobností q_x se také obvykle liší jednotlivé metody konstrukce úmrtnostních tabulek. Lze říci, že vypovídací schopnost úmrtnostní tabulky je tím reálnější, čím větší je zkoumaný soubor, čím delší je uvažované období a čím bližší je k přítomnosti.

Běžně používané metody počítají q_x podle vzorců typu:

$$q_x = D_x / P_x + ½ D_x = m_x / 1 + ½ m_x,$$

kde P_x je střední stav populace ve věku x za období, pro něž se tabulka konstruuje, D_x je počet úmrtí ve věku x za toto období, $m_x = D_x / P_x$ je míra úmrtnosti ve věku x za toto období. ½ D_x ve jmenovateli koriguje tu skutečnost, že hodnota D_x v čitateli je kumulativní údaj za celé uvažované období, zatímco střední stav populace P_x ve jmenovateli přibližně odpovídá stavu populace v polovině tohoto období.

Tímto bych již ráda opustila téma konstrukce a struktury úmrtnostních tabulek. A nyní bych se už přímo zaměřila na vztah mezi pojištěním osob a úmrtnostními tabulkami.

1.3 Úmrtnostní tabulky v pojištění osob

Tuto kapitolu bych chtěla zaměřit na některé aspekty, které jsou podstatné v použití úmrtnostních tabulek pro výpočet životního pojištění.

1.3.1 Rozdíl v úmrtnosti ženské a mužské populace

Podle úmrtnostních tabulek vykazuje mužská populace větší úmrtnost (větší pravděpodobnost qx) než ženská populace. V průměru ženy žijí déle než muži. I toto je jeden z aspektů, ke kterému musí pojišťovna přihlížet ve výpočtu pojistného.

Záleží jen na samotné pojišťovně jak se k tomuto problému postaví. Jednou s možností je výpočet pojišťovací sazby pro muže a pro ženy zvlášť. Další způsob je počítání sazby bez rozlišení pohlaví, a to za použití smíšených úmrtnostních tabulek.V tomto případě si většinou pojišťovna sestrojí své vlastní úmrtnostní tabulky a vytvoří si průměrného pojištěného aniž by rozlišovala pohlaví.

Posledním využívaným způsobem je výpočet pojišťovací sazby použitím mužských úmrtnostních tabulek. Sazby pro ženy dostane posunutím věkové kategorie.(např. o 5 let, tzn. 30letá žena platí totéž pojistné jako 25letý muž) .

Vrátím se k příkladu č.1, jen trochu ho obměním, a zkusím ukázat rozdíl výše pojistného u muže a ženy stejné věkové kategorie a dále pak proměnu pojistného dle metody zestárnutí ženy.

Příklad č.2 :

Uvažujeme pojištění pro případ dožití sjednané na dobu 20 let. Jaký základ se při úrokové míře 4 % zúročí za 20 let na částku 300 000 ?

Muž, 30 let (dle tabulky č.1 viz. Přílohy)

$300\ 000 * l_{50} = 300\ 000 * 93\ 006 = 2{,}79018^{10}$

$2{,}79018^{10} * \ (1 / 1{,}04)^{20} \ = 1{,}27340173^{10}$

$1{,}27340173^{10} / l_{30} = 1{,}\ 27340173 / 98\ 066 = 129\ 851$

Muž by musel zaplatiti jednorázové pojistné 129 851 Kč.

Žena 30 let (dle tabulky č. 2) :

$300\,000 * l_{50} = 300\,000 * 96\,830 = 2{,}9049^{10}$

$2{,}9049^{10} * (1 / 1{,}04)^{20} = 1{,}32575844^{10}$

$1{,}32575844^{10} / l_{30} = 1{,}32575844^{10} * 99\,084 = 133\,801$

Jak vidíme, žena za těch samých podmínek zaplatí 133 801 Kč, tedy o 3 950 Kč více. (díky větší úmrtnosti u mužů).

Nyní zkusím vzít pro ženu údaje z úmrtnostních tabulek mužů, ale nechám ji o pět let omládnout.

$300\,000 * l_{50} = 2{,}79018^{10}$

$2{,}79018^{10} * (1 / 1{,}04)^{20} = 1{,}27340173^{10}$

$1{,}27340173^{10} / l_{25} = 1{,}27340173^{10} / 98\,548 = 129\,216$

Vidíme, že tímto způsobem se dostáváme na téměř to samé pojistné, které zaplatí za stejných podmínek muž.

1.3.2 Vyrovnávání úmrtnostních tabulek

Úmrtností tabulky jsou statistickým záznamem, vytvořeným na základě dat o populaci. Proto se většinou při výběru dat může stát, že se vyskytnou odchylky od skutečných hodnot, které bohužel nejsou zanedbatelné. Právě proto se musí úmrtnostní tabulky vyrovnávat. Podle statistických pozorování ale lze určit jak by měla vypadat posloupnost q_x. Většinou ve vyspělých zemí má tento průběh :

Posloupnost q_x začíná většími hodnotami díky kojenecké úmrtnosti, které se dá těžko předejít, dále pak nejmenších hodnot dosahuje na začátku puberty, poté rychle roste až do 30 let z důvodu velkého počtu dopravních nehod a sebevražd. Po třicítce už tato posloupnost celkem pravidelně roste.

K vyrovnávání úmrtnostních tabulek se používá různých statistických metod, ze kterých jen velmi stručně některé naznačím.

Grafické vyrovnávání : vepsání hladkých křivek do grafů vypočtených hodnot q_x.

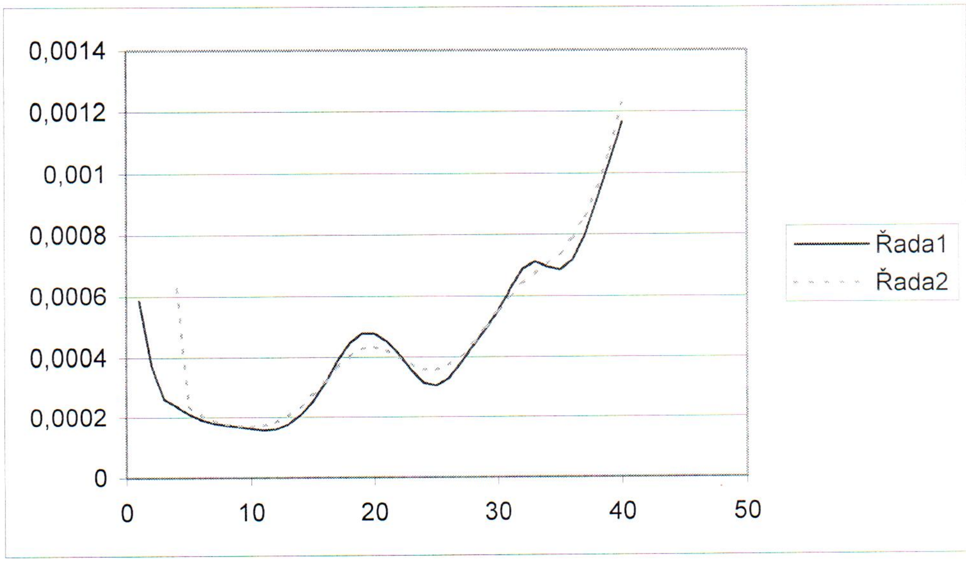
Analytické vyrovnávání : využívá nejčastěji metodu nejmenších čtverců pro vypočtené hodnoty q_x pro odhad parametrů vhodné křivky zadané analytickým vzorcem.

Mechanické vyrovnávání : nepoužívanější postup. Vyrovnaná hodnota pro daný věk x posloupnosti q_x se opírá o klouzavé průměry. Nejpoužívanější metodou je *Wittsteinova metoda*, kde pro vyrovnanou hodnotu q_x^W platí

$$q_x^W = \frac{1}{25}[5q_x + 4(q_{x-1} + q_{x+1}) + 3(q_{x-2} + q_{x+2}) + 2(q_{x-3} + q_{x+3}) + (q_{x-4} + q_{x+4})] =$$

$$= 0{,}2q_x + 0{,}16(q_{x-1} + q_{x+1}) + 0{,}12(q_{x-2} + q_{x+2}) + 0{,}08(q_{x-3} + q_{x+3}) + 0{,}04(q_{x-4} + q_{x+4}).$$

Vyrovnání podle tohoto vzorce je ekvivalentní postupu, kdy se dvakrát po sobě aplikuje jednoduché aritmetické průměrování délky 5 tvaru $\frac{1}{5} \cdot (q_{x-2} + q_{x-1} + q_x + q_{x+1} + q_{x+2})$ s vahami $\frac{1}{5}$. Ze vzorce je vidět, že váhy u jednotlivých pravděpodobností jsou souměrné kolem svého středu (tj. kolem q_x). Dále vidíme, že čím dále jsme od věku x, tím jsou váhy menší. Pro jejich součet platí 0,04+0,08+0,12+0,16+0,2+0,16+0,12+0,08+0,04=1. Hodnoty $q_1, q_2, q_3, q_{\omega-3}, q_{\omega-2}, q_{\omega-1}, q_\omega$ nelze dle vzorce vyrovnat. V těchto případech se přejímají nevyrovnané hodnoty.



obrázek č. 2 – Pravděpodobnosti úmrtí žen v České republice za rok 1990, vyrovnané hodnoty pomocí Wittsteinovy metody (řada 1 je vyrovnanou řadou, řada 2 je řadou, kterou vyrovnáváme)

1.3.3 Věkové posuny ve výpočtu pojistného

Každá pojišťovna si sama volí jaké úmrtnostní tabulky použije pro výpočet pojistného. Tím pádem na sebe přebírá riziko špatného výběru. Při výběru celostátních úmrtnostních tabulek nese riziko, že se její pojistný kmen bude chovat jinak.

Pojistné smlouvy založené na dožití si většinou sjednává jedinec, který předpokládá, že se tohoto věku dožije, tudíž z toho vyplývá ve většině případech zdravý člověk V takovém případě bývají celostátní pravděpodobnosti úmrtí q_x příliš vysoké. Na opak u pojistných smluv sjednávaných na případ úmrtí, zvláště smlouvy uzavřené na kratší období (např. 10 let), by se mělo počítat s vyššími pravděpodobnostmi úmrtí. Takové riziko se nazývá tzv. **rizikem selekce**.

Na tyto skutečnosti pojišťovny reagují určitými bezpečnostními opatřeními. Často pojišťovny využívají posun zvolené úmrtnostní tabulky ve prospěch pojišťovny. Některé pojišťovny používající celostátní úmrtnostní tabulky, nechávají například smlouvy uzavřené na pojištění pro případ úmrtí, zestárnout o rok. Po takovém posunu se hodnoty q_{40} rovná hodnotě q_{41} před posunutím. Modifikací této metody je použití zastárlých úmrtnostních tabulek. Jako obměna zestárnutí o rok, se používá vzorec, který zaručuje zvýšení každé pravděpodobnosti o hodnotu 0,0005. Nejúčinnějším opatřením je použití nižší pojistně-technické úrokové míry než je skutečná úroková míra na kapitálovém trhu.

1.3.4 Různé formy úmrtnostních tabulek

Další možností jsou **selekční úmrtnostní tabulky**. Tyto tabulky reagují na selekční riziko, jsou dvojitě odstupňované, rozlišují nejen věk x, ale i dobu t uplynulou od počátku pojištění.

Selekční tabulky používají např. hodnoty typu $q_{[x]+t}$, které označují pravděpodobnost úmrtí ve věku x+t, když od počátku pojištění uplynulo t let.

Selekční tabulky se nyní nejvíce využívají v invalidním pojištění, vyvstává riziko **antiselekce. Antiselekce** spočívá v tom, že úmrtnost invalidů závisí podstatně na době uplynulé od vstupu do invalidního stavu. Důvodem je skutečnost, že s růstem délky invalidního stavu se redukují jeho negativní účinky na úmrtnost.

(např. pravděpodobnost úmrtí invalidy ve věku 50 let, rovna při vstupu do invalidního stavu ve věku 50 let)

V řadě produktů životního pojištění je pojistné závislé na životě či smrti více osob. V tomto případě se často využívají **Skupinové úmrtnostní tabulky**, kde se vychází ze souboru jehož prvky jsou skupiny s nějakými společnými zájmy – např. manželé. Z toho vyplývá,že selekční úmrtnostní tabulky se nevztahují na jednotlivce ale na určité skupiny osob.

V praxi to vypadá asi takto(uvažuji úmrtnostní tabulky dvojic), hodnoty l_x udávají počet dvojic ze zvoleného kořenu tabulky , v nichž se první uvažovaná osoba dožila věku x a druhá osoba věku y. Při tvorbě takového dekrementního řádu jsou dostupné statistické podklady nedostačující z důvodu velkého množství kombinací věků. Proto se používá umělá konstrukce, při níž klademe

$L_{xy} = l_x * l_y$

Příklad :

Jaká je podle úmrtnostních tabulek mužů a žen České republiky za rok 2004 pravděpodobnost toho, že z 30 leté ženy s 35letým manželem bude za 30 let vdova.

Řešení : *Použijeme vzorec*

$$nq_x \, np_y = l_x - l_{x+n} / l_x * l_{y+n} / l_y$$

Pro $x = 35$, $y = 30$ a $n = 30$. Náhodný jev, tedy to, že se žena stane vdovou zahrnuje to, že 35 lety muž před uplynutím 35 let zemře a současně tato žena musí přežít příštích 30 let.

97 516 – 75 229/ 97 516 * 92 628 / 99 084 = 0,2136.

V rozsahu dekrementních řádů můžeme pracovat i takto. Ze souboru

$l_{xy} = l_x l_y = 97\ 516 * 99\ 084 = 9,\ 662{,}275{,}344$

manželských dvojic, v nichž věk odpovídá věku zadaným v příkladě výše, po uplynutí 30 let vznikne

$(l_x - l_{x+n}) * l_{y+n} = (97\ 516 - 75\ 229) * 99\ 084 =$

$= 2{,}208{,}285{,}108$ vdov

Vidíme, že pojišťovny pro výpočty pojistných sazeb využívají různé modifikace úmrtnostních tabulek. Samozřejmě hlavně proto, aby co nejvíce minimalizovali riziko pří výpočtu sazeb.Český statistický úřad sestavuje úmrtnostní tabulky pro okresy či dokonce města.

1.3.5 Komutační čísla

V pojištění osob se kombinují údaje z úmrtnostních tabulek s úrokovým počtem. Pro zjednodušení se používají tzv. **komutační čísla**. Životní pojišťovny obvykle používají komutační čísla vypočtená na základě jimi určených úmrtnostních tabulek a pojistně technických úrokových měr.

Diskontovaný počet dožívajících se věku x:

$D_x = l_x * v^x$

Diskontovaný počet zemřelých ve věku x:

$C_x = d_x * v^{x+1}$

l_x a d_x jsou hodnoty z úmrtnostních a tabulek a

v = 1 / (1+i) je diskontní faktor, který odpovídá příslušné pojistně-technické úrokové míře i.

D_x označuje počáteční hodnotu částky která je nutná k vyplacení 1 Kč každé z osob dožívajících se věku x. Diskontování se provádí v okamžiku narození těchto osob

Hodnota **C_x** se dá interpretovat obdobně jako D_x, akorát exponent x+1 je ve vzorci z toho důvodu, že počet zemřelých dx odpovídá stavu na konci roku

Mezi uvedenými komutativními čísly platí :

$C_x = D_x * v - D_{x+1}$.

Dalšími často používanými komutativními čísly jsou již zmíněné **C_x** a **D_x**, **M_x** a **N_x**, **R_x** a **S_x**, přičemž symboly v každé dvojici abecedně sousedí a komutační čísla z dané dvojice vznikají jako odpovídající součet komutativních čísel z předchozí dvojice.

Např. $S_x = \sum N_{x+j}$.

x	v^x	l_x	d_x	D_x	C_x	N_x	M_x	S_x	R_x
15	0,555	**100 000**	55	55 526,45	29,42	1 248 412	7 510,62	23 552 316	342 553
16	0,534	99 945	68	53 361,40	34,68	1 192 885	7 481,20	22 303 904	335 043
17	0,513	99 877	81	51 274,35	39,79	1 139 524	7 446,51	21 111 019	327 562
18	0,494	99 797	93	49 262,48	44,19	1 088 249	7 406,73	19 971 495	320 115
19	0,475	99 704	104	47 323,57	47,46	1 038 987	7 362,53	18 883 246	312 708
20	0,456	99 600	113	45 455,97	49,48	991 663	7 315,07	17 844 259	305 346
21	0,439	99 487	119	43 658,19	50,16	946 207	7 265,59	16 852 595	298 031
22	0,422	99 368	123	41 928,86	49,79	902 549	7 215,43	15 906 388	290 765
23	0,406	99 245	124	40 266,42	48,51	860 620	7 165,64	15 003 838	283 550
24	0,39	99 121	124	38 669,20	46,66	820 354	7 117,13	14 143 218	276 384
25	0,375	98 997	124	37 135,26	44,63	781 685	7 070,46	13 322 864	269 267
26	0,361	98 873	123	35 662,35	42,73	744 550	7 025,83	12 541 179	262 196
27	0,347	98 750	124	34 247,99	41,33	708 887	6 983,10	11 796 630	255 171
28	0,333	98 626	126	32 889,44	40,54	674 639	6 941,77	11 087 742	248 188
29	0,321	98 499	131	31 583,91	40,36	641 750	6 901,23	10 413 103	241 246
30	0,308	98 368	137	30 328,79	40,65	610 166	6 860,87	9 771 354	234 345
31	0,296	98 231	145	29 121,64	41,25	579 837	6 820,22	9 161 188	227 484
32	0,285	98 086	153	27 960,33	42,05	550 715	6 778,97	8 581 351	220 663
33	0,274	97 933	163	26 842,89	43,05	522 755	6 736,92	8 030 635	213 884
34	0,264	97 770	175	25 767,42	44,37	495 912	6 693,87	7 507 880	207 148
35	0,253	97 595	189	24 731,99	46,09	470 145	6 649,50	7 011 968	200 454
36	0,244	97 405	206	23 734,67	48,22	445 413	6 603,41	6 541 823	193 804
37	0,234	97 200	225	22 773,58	50,76	421 678	6 555,19	6 096 410	187 201
38	0,225	96 974	248	21 846,91	53,65	398 905	6 504,43	5 674 732	180 646
39	0,217	96 727	273	20 952,99	56,81	377 058	6 450,78	5 275 828	174 141
40	0,208	96 454	301	20 090,30	60,25	356 105	6 393,96	4 898 770	167 690
41	0,2	96 153	332	19 257,34	64,01	336 014	6 333,71	4 542 666	161 296
42	0,193	95 821	368	18 452,66	68,1	316 757	6 269,70	4 206 651	154 963
43	0,185	95 453	408	17 674,85	72,6	298 304	6 201,60	3 889 894	148 693
44	0,178	95 045	453	16 922,44	77,49	280 629	6 129,00	3 591 590	142 491
45	0,171	94 593	502	16 194,09	82,71	263 707	6 051,52	3 310 961	136 362
46	0,165	94 090	557	15 488,53	88,15	247 513	5 968,80	3 047 254	130 311
47	0,158	93 533	615	14 804,67	93,63	232 024	5 880,65	2 799 741	124 342
48	0,152	92 918	677	14 141,63	99,01	217 220	5 787,02	2 567 716	118 461
49	0,146	92 241	741	13 498,72	104,26	203 078	5 688,02	2 350 496	112 674
50	0,141	91 500	809	12 875,27	109,42	189 579	5 583,76	2 147 418	106 986
51	0,135	90 692	881	12 270,65	114,61	176 704	5 474,34	1 957 839	101 403
52	0,13	89 811	959	11 684,09	119,98	164 433	5 359,73	1 781 135	95 928
53	0,125	88 852	1 044	11 114,73	125,56	152 749	5 239,75	1 616 701	90 569
54	0,12	87 808	1 135	10 561,67	131,28	141 635	5 114,19	1 463 952	85 329
55	0,116	86 673	1 232	10 024,18	136,96	131 073	4 982,91	1 322 317	80 215
56	0,111	85 441	1 332	9 501,67	142,48	121 049	4 845,94	1 191 244	75 232
57	0,107	84 109	1 437	8 993,74	147,71	111 547	4 703,46	1 070 196	70 386
58	0,103	82 672	1 544	8 500,11	152,63	102 553	4 555,75	958 648	65 682
59	0,099	81 128	1 654	8 020,56	157,24	94 053	4 403,12	856 095	61 127
60	0,095	79 474	1 768	7 554,83	161,58	86 033	4 245,88	762 042	56 723
61	0,091	77 706	1 884	7 102,68	165,59	78 478	4 084,30	676 009	52 478
62	0,088	75 822	2 002	6 663,91	169,21	71 375	3 918,71	597 531	48 393
63	0,085	73 820	2 121	6 238,39	172,37	64 711	3 749,50	526 156	44 475
64	0,081	71 699	2 241	5 826,08	175,08	58 473	3 577,13	461 445	40 725
65	0,078	69 458	2 362	5 426,92	177,43	52 647	3 402,05	402 972	37 148

66	0,075	67 096	2 485	5 040,76	179,53	47 220	3 224,61	350 325	33 746
67	0,072	64 611	2 611	4 667,36	181,39	42 179	3 045,08	303 105	30 521
68	0,069	61 999	2 738	4 306,46	182,84	37 512	2 863,70	260 926	27 476
69	0,067	59 262	2 859	3 957,98	183,58	33 205	2 680,86	223 414	24 612
70	0,064	56 403	2 966	3 622,17	183,16	29 247	2 497,28	190 209	21 932
71	0,062	53 437	3 053	3 299,70	181,29	25 625	2 314,11	160 961	19 434
72	0,059	50 384	3 116	2 991,50	177,88	22 325	2 132,82	135 336	17 120
73	0,057	47 268	3 154	2 698,56	173,13	19 334	1 954,95	113 011	14 987
74	0,055	44 114	3 172	2 421,64	167,43	16 635	1 781,82	93 677	13 032
75	0,053	40 942	3 176	2 161,07	161,19	14 214	1 614,39	77 041	11 251
76	0,051	37 766	3 170	1 916,76	154,72	12 053	1 453,19	62 828	9 636
77	0,049	34 596	3 153	1 688,32	147,97	10 136	1 298,47	50 775	8 183
78	0,047	31 442	3 119	1 475,41	140,75	8 448	1 150,50	40 639	6 885
79	0,045	28 323	3 062	1 277,92	132,84	6 972	1 009,76	32 191	5 734
80	0,043	25 261	2 975	1 095,93	124,09	5 694	876,92	25 219	4 724
81	0,042	22 286	2 853	929,69	114,44	4 598	752,83	19 525	3 847
82	0,04	19 433	2 699	779,49	104,11	3 669	638,39	14 926	3 095
83	0,039	16 734	2 517	645,41	93,36	2 889	534,29	11 258	2 456
84	0,037	14 217	2 313	527,23	82,48	2 244	440,93	8 369	1 922
85	0,036	11 904	2 092	424,47	71,74	1 717	358,45	6 125	1 481
86	0,034	9 811	1 862	336,41	61,37	1 292	286,71	4 408	1 123
87	0,033	7 950	1 627	262,09	51,58	956	225,34	3 116	836
88	0,032	6 323	1 395	200,43	42,51	694	173,76	2 161	610
89	0,03	4 928	1 171	150,21	34,31	493	131,24	1 467	437
90	0,029	3 757	960	110,12	27,06	343	96,93	974	305
91	0,028	2 797	768	78,82	20,82	233	69,87	631	209
92	0,027	2 029	598	54,97	15,59	154	49,05	398	139
93	0,026	1 430	452	37,27	11,33	99	33,46	244	90
94	0,025	978	331	24,5	7,98	62	22,13	145	56
95	0,024	647	234	15,58	5,43	37	14,15	83	34
96	0,023	412	160	9,55	3,55	22	8,72	46	20
97	0,022	253	104	5,63	2,23	12	5,16	25	11
98	0,021	148	65	3,18	1,34	6	2,93	12	6
99	0,021	83	39	1,71	0,77	3	1,59	5,9	3,1
100	0,02	44	22	0,88	0,42	2	0,82	2,7	1,5
101	0,019	22	12	0,43	0,21	1	0,4	1,1	0,7
102	0,018	11	6	0,2	0,1	0	0,18	0,4	0,3
103	0,018	5	5	0,08	0,08	0	0,08	0,1	0,1

Tabulka č.4 Komutační čísla pro úmrtnostní tabulku mužů v České republice z roku 1993 vyrovnanou pomocí Wittsteinovy metody

(pro pojistně-technickou úrokovou míru 4%)

Např.

$D_{15} = l_{15} * v^{15} = 100\ 000 * (1/1{,}04)^{15} = 55\ 526{,}5$

$C_{50} = d_{50} * v^{15} = 809 * (1/1{,}04)^{15} = 449{,}2089$

$N_{100} = D_{100} + D_{101} + D_{102} + D_{103} =$

$= 0{,}88 + 0{,}43 + 0{,}2 + 0{,}08 = 1{,}59$

1.3.6 Příklady

Všechny příklady jsou počítány pomocí tab.1

Příklad (2.3.6.1)
S jakou pravděpodobností se 21letý muž dožije
a) dožije 40 let
b) nedožije 40 let

Řešení:
a) $_{19}p_{21} = l_{21+19} / l_{21} = 96\,665 / 98\,933 = 0{,}97707$
b) $_{19}q_{21} = (l_{21} - l_{21+19}) / l_{21} = (98\,933 - 96\,665) / 98\,933 = 0{,}022924$

Příklad (2.3.6.2)
Jaká je pravděpodobnost, že 25letý muž zemře
a) mezi 60. a 70. narozeninami
b) právě ve věku 70 let?

Řešení
a) Z l_{25} (64 398) doživších se 25let bude v 60letech naživu l_{60} (83 353) a v 70letech l_{70} (64 398) mužů

$(l_{60} - l_{70}) / l_{25} = (83\,353 - 64\,398) / 64\,398 = 0{,}29434$

b) $d_{70} / l_{25} = 2\,470 / 98\,548 = 0{,}02506$

Příklad (2.3.6.3)
Kolik let života má ještě před sebou v průměru
a) devatenáctiletý muž
b) šedesátiletý muž

Řešení :
a) přímo z úmrtnostních tabulek $T_{19} = 54{,}13$

b) $T_{60} = 17{,}59$

Příklad (2.3.6.4)
20letý muž zdědil 200 000 Kč. Za tuto částku hodlá uzavřít smlouvu týkající se pojištění na dožití s výplatou pojistné částky za 20 let. Pojišťovna používá pojistně-technickou úrokovou míru 4 %. Kolik peněz by mu mělo být vyplaceno pojišťovnou, kdyby se dožil věku 40 let

Řešení :

$l_{20} = 99\ 034$

$l_{40} = 96\ 665$

$x = 200\ 000 * l_{20} = 200\ 000 * 99\ 034 = 1{,}98068^{10}$

$1{,}98068^{10} * (1+0{,}04)^{20} = 4{,}3399137^{10}$

toto je částka po zúročení pojistně-technickou úrokovou mírou,nyní tuto částku musím vydělit skutečným počtem 20letých, kteří se dožili 40let

$4{,}3399137^{10} / 96\ 665 = 448\ 964$

Ve věku 40 let by mu byla vyplacena částka 448 964 Kč.

Příklad (2.3.6.5)

Jak vysoké jednorázové pojistné musí klient zaplatit pojišťovně, uzavře-li pojištění na dožití věku 65 let. V době sepisování smlouvy je klientovi 50 let a požaduje vyplacení částky 150 000 Kč.

Pojistně-technická úroková míra činí 4,5%.

Řešení :

$l_{50} = 91\ 500$

$l_{65} = 69\ 458$

$150\ 000 * l_{65} = 150\ 000 * 69\ 458 = 1{,}04187^{10}$

$1{,}04187^{10} / (1+0{,}05)^{15} = 5{,}011{,}572{,}840$

$5{,}011{,}572{,}840 / l_{50} = 5{,}011{,}572{,}840 / 91\ 500 = 54\ 771{,}28$

Pojišťovna by po klientovi požadovala jednorázové pojistné ve výši 54 771 Kč.

2. Výpočet pojistného v pojištění osob

Každá pojišťovna publikuje sazebníky, kde přesně určuje výši pojištění pro jednotlivé produkty. Výše pojistného obvykle závisí nejen na typu pojištění, ale také na pohlaví pojištěného, na vstupním věku pojištěného (tento příklad se obzvlášť týká životního pojištění, jak jsme viděli podle úmrtnostních tabulek), na době trvání pojištění a způsobu placení.

Sazebník pojišťovny odráží jisté limity, kterým jsou pojistné obchody podřízeny. Například tyto sazebníky stanovují minimální a maximální pojistnou dobu. Většinou pojistnou dobu tvoří nějaké kulaté číslo např. dožití 60 let věku. Velice častým omezením je požadavek nepřekročení předepsané hodnoty při součtu vstupního věku x a pojistné doby n.

Dále si často pojišťovny stanovují minimální a maximální vstupní věk pojištěného. Minimální věk u životního pojištění v dnešní době už není tak podstatný, protože jsou pojišťovny, které nabízejí produkty životního pojištění i pro ty nejmenší. I v tomto případě hrají roli i úmrtnostní tabulky, protože pokud pomineme kojeneckou úmrtnost, pravděpodobnost úmrtí v prvních létech života je dost malá, tudíž pojišťovna podstupuje menší riziko. Maximální věk je podstatný, pokud si 60ti letý muž uzavírá pojištění například pro případ smrti na 20 let, bylo by pro pojišťovnu velkým rizikem takovou smlouvu uzavřít, protože pravděpodobnost úmrtí takového jedince už je veliká, tudíž by se zvyšovalo riziko pojišťovny v tom smyslu,že tento pojištění by mohl platit pojistné jen krátkou dobu, tudíž pravděpodobnost ztráty by byla vysoká

Často je limitována i výše pojistné částky. Pojišťovna si nedovolí uzavřít smlouvu s nepřirozeně velkým pojistným např. pojištění života na 2 miliardy korun, pojišťovny často dovolují jen násobky určitých základních pojistných částek, např. jako nejmenší je povolen půlnásobek a jako největší desetinásobek těchto hodnot.

Pojišťovny ale svým klientům vycházejí vstříc a i tyto limity se dají upravit pro spokojenost zákazníka i pojišťovny. Nyní se prosazuje trend, že přijde klient se svým konkrétním přáním, na co a jaké přesně potřebuje pojištění a pojišťovna mu ho sestaví tak říkajíc namíru. Těžko na dnešním trhu v oblasti pojišťovnictví najdete dva stejné druhy Životního pojištění. Navíc dochází ke kombinaci pojištění, spoření a různých připojištění přesně podle potřeb klientů.

2.1 Počáteční hodnota pojištění

Ve většině případů výpočet pojistného v pojištění osob je založen na počáteční hodnotě té částky, kterou bude muset pojišťovna vyplatit vzhledem k příslušným úmrtnostním tabulkám svým pojištěným. Diskontování se provádí dle přijaté pojistně-technické úrokové míry v okamžiku uzavření pojištění. Tato počáteční hodnota se pak dále ještě přepočítává na jednoho pojištěného v době uzavření pojištění.

V pojišťovnictví na rozdíl od oblasti financí se v pojišťovnictví uplatňuje také náhodný prvek reprezentovaný pravděpodobnostmi úmrtí nebo dožití z úmrtnostní tabulky a mluví se pak o tzv. počáteční hodnotě pojištění. Tato počáteční hodnota pojištění je zároveň jednorázovým nettopojistným, které pojišťovna použije pro příslušný pojistný produkt. Je možné shrnout, že výpočet pojistného je založen na principu ekvivalence mezi počáteční hodnotou příslušného pojištění a počáteční hodnotou očekávaného pojistného. Princip ekvivalence a princip fiktivního souboru jsou dva základní principy, ze kterých se zde vychází.

2.1.1 Pojištění pro případ dožití

Při tomto pojištění pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku, jestliže se osoba pojištěná ve věku x dožije konce sjednané pojistné doby n. Zemře-li pojištěný před koncem pojistné doby, pojištění bez náhrady zanikne.

Jednotková počáteční hodnota je

$_n\boldsymbol{E}_x = l_x - {}_nv^{\,x+n} / l_x = l_x - {}_nv^{\,x+n} / l_x.v^{\,x} = D_{x+n} / D_x$

Vedle symbolu ${}_nE_x$ se někdy používá $A_{x\,\overline{n|}}^{\;1}$. Jestliže konec pojištění je stanoven dožitím určitého věku 60 let, pak se zřejmě použije jednotková počáteční hodnota ${}_{60-x}E_x$.

Příklad Jaká je jednotková počáteční hodnota pojištění 40letého muže na dožití věku 60 let?

Řešení : x = 40, n = 20 a komutační čísla z tab. č.

$${}_{20}E_{40} = D_{60} / D_{40} = 7\,554{,}83 / 20\,090{,}3 = 0{,}376$$

To znamená, že na každých 1 000 Kč pojistné částky připadá jednorázové nettopojistné ve výši 376 Kč.

2.1.2 Pojištění pro případ smrti

V tomto pojištění pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku (většinou pozůstalým) na konci toho pojistného roku, v němž osoba pojištěná ve věku x zemře.

Jednotková počáteční hodnota je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_x &= d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_\omega v^{\omega-x+1} / l_x \\ &= d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + \ldots + d_\omega v^{\omega+1} / l_x v^x \\ &= C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega / D_x = M_x / D_x \end{aligned}$$

neboť jednotkové částky vyplacené osobám zemřelým během prvního roku pojištění dají celkovou částku d_x diskontovanou k okamžiku uzavření pojištění jako $d_x v$, jednotkové částky vyplacené osobám zemřelým během druhého roku pojištění dají celkovou částku d_{x+1} diskontovanou k okamžiku uzavření pojištění jako $d_{x+1} v^2$ atd.

Dočasné pojištění pro případ smrti

Omezuje trvání pojištění na sjednanou pojistnou dobu n, dožije–li se pojištěný konce pojistné doby, pojištění bez náhrady zanikne.Toto pojištění se nyní využívá jako tzv. úvěrové pojištění, které obvykle uzavírá podnikatel v okamžiku, kdy mu nějaká banka poskytla časově omezený úvěr. Pojišťovna většinou za jednorázové pojistné v případě smrti pojištěného během období, kdy má pojištěný dluh splatit, přebírá odpovědnost za příslušný úvěr. Jestliže se sjednaná pojistná částka rovná výši poskytnutého úvěru, jedná se o dočasné pojištění pro případ smrti.

Jednotková počáteční hodnota je

$$A_{x}{}^{1}{}_{\overline{n|}} = (C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}) \;/\; D_x$$
$$= (M_x - M_{x+n}) \;/\; D_x$$

Odložené pojištění pro případ smrti

Toto pojištění odkládá povinnost pojistného plnění pojišťovny v případě smrti pojištěného o příslušnou čekací dobu k, tzn. počínaje až věkem x+k osoby pojištěné ve věku x. Toto opatření je typické u pojištění s nižšími pojistnými částkami, kdy pojišťovna nevyžaduje vstupní zdravotní prohlídku ani zdravotní dokumentaci a nahrazuje to odkladem svého pojistného plnění.

Jednotková počáteční hodnota je

$$_{k}A_x = (C_{x+k} + C_{x+k+1} + \ldots + C_{\omega}) \;/\; D_x$$
$$= M_{x+k} \;/\; D_x$$

Odložené dočasné pojištění pro případ smrti

Toto pojištění kombinuje předchozí dva případy.

Jednotková hodnota pojištění je

$$_{k}A_{x}{}^{1}{}_{\overline{n|}} = (C_{x+k} + C_{x+k+1} + \ldots + C_{x+k+n-1}) \;/\; D_x$$
$$= (M_{x+k} - M_{x+k+n}) \;/\; D_x$$

2.1.3 Smíšené pojištění

Pojištění pro případ dožití i dočasné pojištění mají ve svém klasickém tvaru z hlediska pojištěného tu nevýhodu, že připouštějí situaci, kdy pojištění může zaniknout bez náhrady pro pojištěného. Z tohoto důvodu se obě předchozí formy kombinují do tzv. smíšeného pojištění (pojištění pro případ smrti nebo dožití). Při tomto pojištění pojišťovna vyplatí (většinou pozůstalým pojištěného) sjednanou pojistnou částku na konci toho roku, v němž osoba pojištěná ve věku x zemře, přičemž nejpozději k výplatě této částky dojde, dožije-li se pojištěný konce sjednané pojistné doby n. Smíšené pojištění patří v oblasti kapitálového pojištění osob k nejžádanějším.

Jednotková počáteční hodnota

$$A_{x\overline{n|}} = (C_x + C_{x+1} + \dots + C_{x+n-1} + D_{x+n}) \;/\; D_x$$

$$= (M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) / D_x$$

Pojišťovny někdy modifikují smíšené pojištění tak, že sjednaná pojistná částka je odlišná pro případ smrti a pro případ dožití.

V souvislosti se smíšeným pojištěním se také často uvádí tzv. pojištění s pevnou dobou výplaty. Při tomto pojištění se sjednaná pojistná částka vyplatí na konci sjednané pojistné doby n bez ohledu na to, zda pojištěný žije nebo mezitím zemřel. Toto pojištění se však uzavírá téměř výhradně za běžné pojistné a náhodný moment, kterým se toto pojištění odlišuje od obyčejného spoření s výpovědní lhůtou či termínového vkladu, spočívá v tom, že v případě smrti přestává povinnost placení pojistného.

2.1.4 Pojištění důchodu

Na rozdíl od jistých důchodů ve financích je výplata životního důchodu vázána na život pojištěného a v případě jeho smrti výplaty životního důchodu zpravidla končí. Z tohoto důvodu je pojištění důchodu podobné pojištění pro případ dožití až na to, že povinnost pojistného plnění pojišťovny se opakuje v periodických termínech.
Při *pojištění doživotního důchodu* pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na počátku pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije.

Jednotková počáteční hodnota

$$\ddot{a}_x = (l_x + l_{x+1}v + \ldots + l_\omega v^{\omega-x}) / l_x$$
$$= (D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega) / D_x = N_x / D_x$$

Stejně jako u jistých důchodů i zde se rozlišují předlhůtní životní důchody s výplatami vždy na počátku pojistného roku. Zatímco výše uvedený vzorec se týká předlhůtního doživotního důchodu, má jednotková počáteční hodnota polhůtního doživotního důchodu tvar

$$a_x = (D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega) / D_x = N_{x+1} / D_x = \ddot{a}_x - 1$$

Pojištění dočasného důchodu omezuje trvání pojištění na sjednanou pojistnou dobu n. Jednotková počáteční hodnota je v případě předlhůtního důchodu

$$\ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = (D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}) / D_x$$
$$= N_x - N_{x+n} / D_x$$

a v případě polhůtního důchodu

$$a_{x\overline{n}|} = (D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}) / D_x$$
$$= (N_{x+1} - N_{x+n+1}) / D_x = \ddot{a}_{x,\overline{n+1}|} - 1$$

Pojištění odloženého dočasného důchodu kombinuje předchozí dva případy. Jeho jednotková počáteční hodnota je

$$_k\ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = (D_{x+k} + D_{x+k+1} + \ldots + D_{x+k+n-1}) / D_x$$
$$= N_{x+k} - N_{x+n+k} / D_x$$

2.1.5 Pojištění s proměnným pojistným plněním

Z různých důvodů se v některých případech smluvně zaručuje, že pojistné plnění se bude měnit v závislosti na době uplynulé od počátku pojištění. Za příklad takového pojištění lze považovat úvěrové pojištění, kde výše pojistného plnění klesá v čase s tím, jak se umořuje dluh pojištěného. Pojištění s proměnným pojistným plněním je aktuální zvlášť v současné době, kdy inflační tlaky a rychle se měnící ekonomické situace, ovlivňující pojištění rizika např. růstem cen, nutí pojišťovny k takovým opatřením.

V tomto odstavci uvedu počáteční hodnoty pro některé jednoduché případy, kdy změny ve výši pojistného plnění jsou pravidelné. V příslušném označení pak často figuruje symbol *I* pro růst a symbol *D* pro pokles.

Pojištění pro případ smrti s rostoucí pojistnou částkou typu 1,2,3 ... Při úmrtí v prvním roce pojištění se v jednotkovém případě vyplatí 1 Kč, při úmrtí v druhém roce 2 Kč atd.

$$(IA)_x = (C_x + 2C_{x+1} + \dots + (\omega - x + 1)C_\omega) / D_x$$
$$= (M_x + M_{x+1} + \dots + M_\omega) / D_x = R_x / D_x$$

Dočasné pojištění pro případ smrti s rostoucí pojistnou částkou typu 1,2, ..., n

$$(IA)_{xn} = (C_x + 2C_{x+1} + \dots + nC_{x+n-1}) / D_x$$
$$= (M_x + M_{x+1} + \dots + M_{x+n-1} - nM_{x+n}) / D_x$$
$$= (R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}) / D_x$$

Dočasné pojištění pro případ smrti s klesající pojistnou částkou typu *n*, *n*-1, ...,1

$$(DA)_{xn} = (nC_x + (n-1) C_{x+1} + \dots + C_{x+n-1}) / D_x$$
$$= (nM_x - M_{x+1} - M_{x+2} - \dots - M_{x+n}) / D_x$$
$$= (nM_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}) / D_x$$

2.1.6 Příklady

(viz. Tabulka č. 4 – Komutační čísla)

Příklad (2.1.6.1)

Jak velké jednorázové nettopojistné zaplatí v případě trvalého pojištění pro případ smrti 35letý muž, chce-li zajistit v den svých prvých nedožitých narozenin výplatu 500 000 Kč svým dědicům?

Řešení :

Počáteční hodnota trvalého pojištění pro případ smrti x = 35 je

$500\,000\ M_{35} / D_{35} = 500\,000 * 6\,649{,}05 / 24\,731{,}99 = 134\,422$

Muž zaplatí jednorázové nettopojistné ve výši 134 422 Kč.

Příklad (2.1.6.2)

Jaké je jednorázové nettopojistné při smíšeném pojištění 35letého muže na dobu 25let s pojistnou částkou 400 000 Kč?

Řešení:

Počáteční hodnota smíšeného pojištění pro x = 35 a pro n = 25 je

$$400\,000\ A_{(35/25)} = 400\,000 * (M_{35} - M_{60} + D_{60}) / D_{35} =$$
$$= 400\,000 * (6\,649{,}05 - 4\,245{,}88 + 7\,554{,}83) / 24\,731{,}99 =$$
$$= 161\,054{,}\ 5694$$

Příklad (2.1.6.3)

Jaké je jednorázové nettopojistné při pojištění doživotního důchodu 60letého muže na 20 000 Kč ročního důchodu?

Uvažujeme platby :

a) vždy na počátku pojistného roku

b) vždy na konci pojistného roku

Řešení :

a) $20\,000\ \ddot{a}_{60} = 20\,000\ N_{60} / D_{60} = 86\,033 / 4\,245{,}88 * 20\,000 = 405\,254{,}0345$

b) $20\,000\ a_{60} = 20\,000\ N_{61} / D_{60} = 78\,478 / 4\,245{,}88 * 20\,000 = 369\,666{,}5944$

60letý muž dostane doživotní rentu v roční výši 20 000 Kč za 405 254 Kč při platbě na začátku pojistného roku a 369 666 při platbě na konci pojistného roku.

Příklad (2.1.6.4)

Jaké je jednorázové nettopojistné při pojištění doživotního důchodu 45letého muže s odkladem k věku 60let na 10 000 Kč ročního předlhůtního důchodu?

Řešení :

$10\ 000\ {}_{15}\ddot{a}_{45} = 10\ 000\ N_{60} / D_{60} = 86\ 033 / 16\ 194 * 10\ 000 = 53\ 126{,}46659$

Příklad (2.1.6.5)

Jaké je jednorázové nettopojistné při pojištění doživotního polhůtního důchodu 62letého muže

a) při pojištění měsíčního důchodu na 1 000 Kč měsíčního důchodu

b) při pojištění ročního důchodu na 1 200 Kč ročního důchodu

Řešení :

a) $12\ 000\ a^{(12)}_{65} \approx 12\ 000\ [\ N_{63} / D_{62} + (\ 12\text{-}1\ )/(\ 12\ {*}2\ )\ ]$

$= 12\ 000 * (\ 64\ 711 / 6\ 663{,}91 + 11/24\ ) = 122\ 027{,}9843$

b) $12\ 000\ a_{62} = 12\ 000 * 9{,}71066 = 116\ 527{,}9843$

Jednorázové nettopojistné při pojištění doživotního ročního důchodu 62letého muže na 12 000 Kč má nižší hodnotu než doživotní pojištění měsíčního důchodu na 1 000 Kč měsíčního polhůtního důchodu, neboť pojištěný bude dostávat důchodové platby později.

2.2 Běžné nettopojistné

V předchozím odstavci jsem se věnovala výpočtu jednorázového nettopojistného. V praxi však často osoba uzavírající pojištění dává z nejrůznějších důvodů přednost placení pojistného v pravidelných splátkách jako běžné pojistné. Navíc v některých pojistných druzích je běžné pojistné jedinou přípustnou formou. Současné statistiky, že v pojištění osob převládá volba běžného pojistného, a to navíc při větších pojistných částkách volba měsíčního pojistného. Na druhé straně však pro některé druhy pojištění nelze přímo z jejich logiky běžné pojistné připustit, např. neodložený důchod nelze splácet formou běžného pojistného, neboť by došlo k souběhu splátek s výplatami důchodu.
Přestože pojišťovny nabízí klientovi možnost individuálního plánu pro splácení pojistného s proměnnými splátkami respektující řadu okolností (např. předpokládaná inflace)

Uvažujeme pro jednoduchost jen běžné pojistné s konstantními splátkami. Otázkou je nyní, jak rozpočítat do takových splátek příslušnou počáteční hodnotu pojištění při respektování časové hodnoty peněz a té skutečnosti, že při úmrtí pojištěného se pojistné zpravidla přestává splácet. Řešení je překvapivě jednoduché, běžné pojistné lze považovat za důchod, který ale vyplácí pojistník pojistiteli v závislosti na životě pojištěného
Proto např. běžné pojistné P na jednotkovou pojistnou částku v pojištění pro případ dožití z věku x do věku x+n, které se platí každoročně vždy na začátku dalšího roku pojištění, nejdéle však do roku, kdy pojištěný zemře nebo se dožije věku x+n, musí splňovat vztah

$P\,\ddot{a}_{x\,\overline{n|}} = {}_nE_x$

po úpravě

$P\,(l_x + l_{x+1}\,v + \ldots + l_{x+n-1}\,v^{n-1}) = l_{x+n}\,v^n$

kde na levé straně je vidět jednak diskontování jednotlivých splátek pojistného P a dále závislost inkasa na životě pojištěného. K základnímu symbolu P vyhrazenému pro běžné nettopojistné na jednotkovou pojistnou částku nebo jednotkový důchod se většinou připojuje vstupní věk x pojištěného a případně také doba placení pojistného h, která může být kratší než pojistná doba. Pro úplnou specifikaci se někdy rovněž přidává symbol jednotkové počáteční hodnoty příslušného pojištění, např. ${}_hP_x$ (${}_nE_x$).

Pro předchozí případ pojištění na dožití s h=n je tedy roční nettopojistné na jednotkovou pojistnou částku rovno

${}_nP_x = {}_nE_x / \text{“}a_{x\surd n} \;\; = D_{x+n} / N_x - N_{x+n}$

Analogické vzorce dostaneme pro další druhy pojištění

Pojištění pro případ smrti

$\boldsymbol{P_x} = A_x / \ddot{a}_x \;\; = M_x / N_x$

Dočasné pojištění pro případ smrti

${}_n\boldsymbol{P_x} = A^{1}_{x\surd n} \;\; / \text{“}a_{x\surd n} \;\; = (M_x - M_{x+n}) / (N_x - N_{x+m})$

Smíšené pojištění

${}_n\mathbf{P_x} = A_{x\surd n} \;\; / \text{“}a_{x\surd n} \;\; = (M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) / (N_x - N_{x+n})$

2.3 Bruttopojistné

Pojistné, které životní pojišťovna nabízí na pojistném trhu ve svém sazebníku, obvykle převyšuje příslušné nettopojistné. Soukromé pojišťovny jsou výdělečné organizace a z přijatého pojistného hradí nejen pojistné plnění, jak tomu odpovídá konstrukce nettopojistného, ale z těchto prostředků také pokrývají náklady spojené s pojišťovací činností., vytváří bezpečnostní fondy pro nepříznivé výchylky v pojistných událostech, realizují z nich svůj podnikatelský zisk apod.

Moderní pojišťovnictví je výnosná činnost, která má často daleko ke svým původním kořenům a jako taková je podřízena pravidlům byznysu a konkurenčního boje. S tím souvisí některé nové trendy, které se v této branži objevují. Například vzhledem ke konkurenci se zhoršuje situace s odbytem pojistných produktů a úměrně s tím stoupají provize, které musí pojišťovny přenechávat svým agentům a obchodním zástupcům za zprostředkování nových pojistných smluv a jejich udržování. Značné prostředky musí věnovat také na analýzy finančního trhu a na vyhledávání výhodných investičních příležitostí, aby svěřený kapitál byl co nejlépe zhodnocen.

Jestliže jsem zatím zmínila dva výpočetní podklady používané v pojištění osob, totiž o úrokovém počtu a o úmrtnostních tabulkách, roste v poslední době význam dalších výpočetních podkladů, na jejichž základě se z příslušného nettopojistného stanoví výsledné bruttopojistné. Je nutné předem zdůraznit , že v této oblasti často hrají rozhodující roli expertní odhady opírající se o průzkum pojistného trhu, prognózy ekonomické situace, individuální údaje o osobě, která má být pojištěna etc. .

Rostou nároky na výpočetní techniku související se snahou přistupovat k jednotlivým smlouvám z hlediska stanovení bruttopojistného individuálně ve vhodném počítačovém systému.

Nettopojistné zvětšené o správní náklady se obvykle nazývá *postačující pojistné.* Postačující pojistné ještě nemusí dosahovat výše výsledného bruttopojistného, neboť pojišťovna musí případně pamatovat na *bezpečnostní přirážku*, která ji chrání proti nepříznivým výkyvům náhodné povahy souboru pojištěných, jako je např. náhlé zvýšení úmrtnosti v některých věkových skupinách atd.

Na druhé straně nemá být bezpečnostní přirážka zdrojem nadměrných zisků pojišťovny a její nevyužitá část se různou formou opět rozděluje mezi pojištěnce. Taková bezpečnostní přirážka se k postačujícímu pojistnému připočítává dvěma způsoby:

Implicitní způsob, také nazývaný postupem založeným na výpočetních podkladech prvního řádu spočívá v tom, že pojišťovna použije výpočetní podklady, které jsou z jejího hlediska méně příznivé, než se očekává ve skutečnosti. Pojistné vypočtené pomocí takových podkladů je pak samozřejmě vyšší, než je v průměru zapotřebí. Nejčastěji je implicitní způsob započítávání bezpečnostní přirážky založen na použití nižších pojistně-technických úrokových měr a na vhodných změnách v používaných úmrtnostních tabulkách jako je například umělé zvýšení pravděpodobnosti úmrtí nebo věkový posun způsobující zestárnutí úmrtnostní tabulky v pojištěních, jejichž počáteční hodnota roste s růstem pravděpodobnosti úmrtí, tedy v pojištění pro případ smrti nebo smíšeném pojištění (sem také spadá záměrné používání zastaralých úmrtnostních tabulek, neboť ve většině věkových skupin se úmrtnost dosud zmenšuje)

Dále pak umělé snížení pravděpodobností úmrtí nebo věkový posun způsobující omládnutí úmrtnostní tabulky v pojištěních, jejichž počáteční hodnota roste s poklesem pravděpodobností úmrtí, tedy v pojištění pro případ dožití a v pojištění důchodu.

Explicitní způsob také někdy nazývaný postupem založeným na výpočetních podkladech druhého řádu používá údaje pokud možno blízké skutečnému stavu, ale přidává k postačujícímu pojistnému explicitně stanovenou bezpečnostní přirážku.

Při klasickém přístupu se správní náklady většinou rozdělují do následujících skupin :

Počáteční jednorázové náklady α

Tyto náklady jsou spojeny s uzavřením pojistné smlouvy. Zahrnují se sem náklady spojené s prodejem pojistného produktu včetně lékařské prohlídky , s vystavením pojistné smlouvy včetně vytvoření příslušného počítačového záznamu atd. Nejpodstatnější složkou těchto nákladů je provize, která bývá úměrná sjednané pojistné částce nebo důchodu, udávají se obvykle náklady α jako procenta z pojistné částky nebo roční výplaty důchodu.

Běžné správní náklady β

Běžné správní náklady jsou náklady během celého trvání pojištění nezahrnuté v ostatních nákladových položkách a souvisí s udržováním daného pojištění např. administrativa, nájem budov atd.
V případě, že doba placení pojistného je kratší než pojistná doba , uvažují se obvykle zvlášť běžné správní náklady β_1 během celého trvání pojištění a vedle nich běžné správní náklady β_2 během placení pojistného($\beta = \beta_1 + \beta_2$).
Běžné správní náklady se opět většinou udávají jako procenta z pojistné částky nebo roční výplaty důchodu.

Inkasní náklady γ

Tyto náklady vznikají především u pojištění s běžným pojistným jako náklady s inkasem pojistného. Je logické, že se obvykle udávají jako procenta z ročního bruttopojistného.

Náklady při výplatě důchodu δ

Vznikají jen u důchodového pojištění jako náklady s výplatami důchodu. Udávají se obvykle jako procenta z roční výplaty důchodu.

Vzhledem k dnešním bezhotovostním platbám probíhajícím mezi různými konty velikost správních nákladů δ a γ klesá.

Správní náklady se také někdy započítávají *jednotnou správní přirážkou* ε slučující v sobě jednotlivé typy správních nákladů. Velice často se udává jako procenta z jednorázového bruttopojistného nebo z běžného nettopojistného.

Postup započítávání správních nákladů k nettopojistnému :

Uvažuji pojištění pro případ dožití z věku x do věku x+n.

Jednorázové bruttopojistné ne jednotkovou pojistnou částku E_x je zde

$$\boldsymbol{E_x} = {}_nE_x + \alpha + \beta_1 \ddot{a}_{xn\urcorner}$$

kde E_x je jednotková počáteční hodnota tohoto pojištění, tj. jednorázové nettopojistné na jednotkovou pojistnou částku. Počáteční jednorázové náklady α i běžné náklady β_1 představují procenta z pojistné částky, tj. v případě jednotkové pojistné částky je lze k nettopojistnému ${}_nE_x$ jednoduše přičíst. Zatímco ale náklady α se uplatní jednorázově na počátku pojištění, opakují se náklady β_1 každoročně během celého trvání pojištění a je nutné uvažovat jejich počáteční hodnotu $\beta_1 \ddot{a}_{xn\urcorner}$.

V případě běžného bruttopojistného ${}_nB_x$ je situace komplikovanější, neboť zde musí platit

$${}_n\boldsymbol{B}_x \, \ddot{\boldsymbol{a}}_{xn\urcorner} = {}_nE_x + \alpha + \beta \ddot{a}_{xn\urcorner} + \gamma \, {}_nB_x \, \ddot{a}_{xn\urcorner}$$

kde na pravé straně ještě navíc vzhledem ke splácení běžného pojistného figuruje počáteční hodnota inkasních nákladů γ udávaných jako procenta z bruttopojistného.

Z předchozího vztahu dostaneme

$${}_n\boldsymbol{B}_x = ({}_nE_x + \alpha + \beta \, \ddot{a}_{xn\urcorner}) \,/\, (1-\gamma)\, \ddot{a}_{xn\urcorner}$$
$$= 1 \,/\, (1-\gamma) * ({}_nP_x + \alpha / \ddot{a}_{xn\urcorner} + \beta)$$

kde ${}_nP_x = {}_nE_x / \ddot{a}_{xn\urcorner}$ je příslušné běžné nettopojistné.

Další příklady vzorců pro jiné druhy pojištění :

Pojištění pro případ smrti

$\mathbf{'E}_x = A_x + \alpha + \beta_I\, \ddot{a}_x = 1 + \alpha + (\beta_I - d)\, \ddot{a}_x$

$\mathbf{B}_x = (A_x + \alpha + \beta \ddot{a}_x) / (1\text{-}\gamma)\, \ddot{a}_x$

$= 1 / (1\text{-}\gamma) * (1 + \alpha / \ddot{a}_x + \beta_I - d)$

Dočasné pojištění pro případ smrti

$\mathbf{'E}_x = A^1{}_{xn\neg} + \alpha + \beta_I\, \ddot{a}_{xn\neg} = 1 + \alpha - {}_nE_x\, (\beta_I - d)\ddot{a}_{x\,n\neg}$

${}_n\mathbf{B}_x = A^1{}_{xn\neg} + \alpha + \beta_I\, \ddot{a}_{xn\neg} / (1\text{-}\gamma)\, \ddot{a}_{xn\neg}$

$= 1 / (1\text{-}\gamma) * ((1 + \alpha - {}_nE_x) / \ddot{a}_{xn\neg} + \beta - d)$

Smíšené pojištění

$\mathbf{'E}_x = A_{xn\neg} + \alpha + \beta_I\, \ddot{a}_{xn\neg} = 1 + \alpha + (\beta_I - d)\ddot{a}_{xn\neg}$

${}_n\mathbf{B}_x = A_{xn\neg} + \alpha + \beta_I\, a^{\cdot\cdot}{}_{xn\neg} / (1\text{-}\gamma)\, \ddot{a}_{xn\neg}$

$= 1 / (1\text{-}\gamma) * (1 + \alpha / \ddot{a}_{xn} + \beta - d)$

Pojištění s pevnou dobou výplaty

${}_n\mathbf{B}_x = v^n + \alpha + \beta_I\, \ddot{a}_{xn\neg} / (1\text{-}\gamma)\ddot{a}_{xn\neg}$

Pojištění doživotního důchodu

$\mathbf{'E}_x = (1 + \delta)\ddot{a}_x + \alpha\ / 1 - \gamma$

2.4 Pojištění s výhradou

Pojištění s výhradou se rozumí případ, kdy při předčasném ukončení pojištění pojišťovna podle pojistné smlouvy musí vrátit podstatnou část doposud zaplaceného pojistného. Někdy se zmíněná výhrada chápe obecněji jako situace, kdy pojišťovna musí vrátit podstatnou část rozdílu, o který zaplacené pojistné převyšuje pojistné plnění.

Například

V pojištění pro případ dožití z věku x do věku x + n za běžné pojistné s výhradou se při úmrtí pojištěného před dožitím věku x + n smluvně vrací všechny doposud zaplacené splátky běžného bruttopojistného. V tomto případě musí běžné bruttopojistné ${}_nB_x$ splňovat vztah

$$ {}_nB_x = {}_nE_x + \alpha + \beta \ddot{a}_{x\overline{n}|} + {}_nB_x (IA)_{x\overline{n}|} \,/\, (1-\gamma)\, \ddot{a}_{x\overline{n}|} $$

kde člen ${}_nB_x (IA)_{x\overline{n}|}$ vyjadřuje skutečnost, že při úmrtí pojištěného v prvním roce pojištění je nutné vrátit ${}_nB_x$ na jednotkovou pojistnou částku, při úmrtí pojištěného v druhém roce je nutné vrátit $2\ {}_nB_x$ na jednotkovou pojistnou částku atd., až konečně při úmrtí pojištěného v posledním n-tém roce pojištění je nutné vrátit $n\ {}_nB_x$ na jednotkovou pojistnou částku. Při dožití věku x + n se žádné pojistné nevrací, ale proběhne pojistné plnění.

Z předchozího vztahu dostaneme

$$ {}_n\boldsymbol{B}_x = {}_nE_x + \alpha + \beta \ddot{a}_{x\overline{n}|} \,/\, (1-\gamma)\, \ddot{a}_{x\overline{n}|} - (IA)_{x\overline{n}|} $$

Např.

pro $x = 40,\ n = 20,\ \alpha = 0{,}035,\ \beta = 0{,}006,\ \gamma = 0{,}05$

$$ {}_{20}B_{40} = {}_{20}E_{40} + \alpha + \beta\, \ddot{a}_{40,\overline{20}|} \,/(1-\gamma)\, \ddot{a}_{40,\overline{20}|} - (IA)_{40,\overline{20}|} $$

2.5 Pojištění více životů

Tímto označením se rozumí taková pojištění, v nichž je pojistné plnění závislé na životě nebo smrti dvou nebo i více osob, např. rodičů a dětí, manželů. To si vyžaduje použití skupinových úmrtnostních tabulek. Ovšem skupinové pojištění nevychází ze skupinové úmrtnostní tabulky, ale dovoluje přechodem k průměrným hodnotám zjednodušit hromadnou pojistnou smlouvu, z níž mohou být vypuštěny některé určující faktory (např.vstupní věky pojištěných) a podstatně snížit správní náklady (např.na uzavření smlouvy)

Nyní vezmu v úvahu pouze pojištění dvojic, velice často se v této souvislosti zavádí další komutační čísla :

$$\boldsymbol{D}_{xy} = l_{xy}\, v^{1/2\,(x+y)} = l_x l_y\, v^{1/2\,(x+y)}$$

$$\boldsymbol{C}_{xy} = d_{xy}\, v^{1/2\,(x+y)+1} = (\, l_x l_y - l_{x+1}\, l_{y+1})\, v^{1/2\,(x+y)+1}$$

$$\boldsymbol{N}_{xy} = \sum_{j=0} D_{x+j\,,\, y+j}$$

$$\boldsymbol{M}_{xy} = \sum_{j=0} C_{x+j\,,\, y+j}$$

kde ve dvou posledních vzorcích se sčítá přes maximálně možný rozsah sčítacího indexu j . tj.(ω-x, ω-y).

Pak lze zapsat vzorce pro jednotkové počáteční hodnoty různých pojištění dvojic osob, které jsou opět základem pro výpočet pojistného :

Pojištění dvojice osob pro případ dožití

tj. pojistná částka je vyplacena, pokud se obě osoby z uvažované dvojice pojištěné ve věku x (první osoba) a y (druhá osoba) dožijí konce pojistné doby

$${}_n\boldsymbol{E}_{xy} = l_{x+n,\, y+n}\, v^n = l_{x+n,\, y+n}\, v^{1/2\,(x+n,\, y+n)} \,/\, l_{xy}\, v^{1/2\,(x+y)}$$

$$= D_{x+n,\, y+n} \,/\, D_{xy}$$

Pojištění důchodu dvojice osob do první smrti

tj. důchod je vyplácen pokud jsou obě osoby z uvažované dvojice naživu

$\ddot{\mathbf{a}}_{xy} = l_{xy} + l_{x+1,y+1}\, v + \ldots / l_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,y+1} + \ldots / D_{xy}$

$= N_{xy} / D_{xy}$

Pojištění důchodu dvojice osob do druhé smrti

tj. důchod je vyplácen pokud je naživu alespoň jedna z osob z uvažované dvojice:

$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$

Pojištění důchodu pro přežívajícího

tj. důchod je vyplácen, pokud je naživu právě jedna osoba z uvažované dvojice

$\ddot{a}^{[1]}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\ddot{a}_{xy}$

Jednostranné pojištění důchodu pro přežívajícího

tj. důchod je vyplácen po smrti první osoby z dvojice druhé osobě z dvojice

$\ddot{a}_{x\,y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$

Pojištění dvojice osob pro případ smrti

tj. pojistná částka je vyplacena při první smrti v uvažované dvojici

$A_{xy} = d_{xy}\, v + d_{x+1,y+1}\, v^2 + \ldots / l_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,y+1} + \ldots / D_{xy} =$

$= M_{xy} / D_{xy} = 1 - d\ddot{a}_{xy}$

Smíšené pojištění dvojice osob

tj. pojistná částka je vyplacena při první smrti v uvažované dvojic, nejpozději ale po uplynutí doby n, dožijí-li se jejího konce obě osoby

$A_{xy\overline{n|}} = (M_{xy} - M_{x+n,\,y+n} + D_{x+n,\,y+n}) / D_{xy} = 1 - d\,\ddot{a}_{xy\,\overline{n|}}$

3. Pojistná rezerva v pojištění osob

3.1 Nettorezerva

Při výpočtu běžného pojistného jsem zatím předpokládala, že jeho splátky jsou v čase konstantní. Jestliže odhlédneme od změn pojistného reagujících na inflační vývoj a některé individuální okolnosti v pojistné smlouvě, přirozenější by bylo, jak se na první pohled zdá, pokaždé odhadnout na začátku pojistného roku předpokládané pojistné plnění v tomto roce a na základě tohoto odhadu stanovit příslušné pojistné pro tento rok. V takovém případě se mluví o tzv. *přirozeném pojistném*, které vždy zaplatí pojištěné riziko na jeden rok dopředu a na konci tohoto roku je pojistné inkasované od souboru pojištěných osob beze zbytku spotřebováno, neboť přesně odpovídá pravděpodobnosti, že v daném roce nastane pojistná událost. V praxi se přirozené pojistné využívá především v rámci úrazového pojištění, kde se vychází z odhadu úrazovosti pro daný rok v jednotlivých rizikových skupinách, ale také u některých pojištění s kratší pojistnou dobou, kde je žádoucí, aby počáteční pojistné splátky byly nízké a zvětšovaly se teprve s předpokládaným růstem příjmů pojištěné osoby.

Např.

Přirozené nettopojistné v rámci pojištění pro případ smrti se vstupním věkem x a jednotkovou pojistnou částkou. Přirozené pojistné vyžadované na počátku t-tého roku pojištění pro tento rok je zde zřejmě

$$\boldsymbol{P_x(t)} = C_{x+t-1} / D_{x+t-1} = d_{x+t-1}v / l_{x+t-1} = q_{x+t-1}v$$

Toto přirozené nettopojistné je tedy přímoúměrné pravděpodobnosti úmrtí.

U většiny úmrtnostních tabulek pravděpodobnosti úmrtí po překročení věku třiceti let rostou exponenciálním způsobem.Proto by pojistné ve věku 30 let bylo několikrát nižší než pojistné vyžadované ve věku 60 let .

Takové rozdíly jsou nežádoucí nebo dokonce nepřípustné u pojištění, které mají spořivý charakter, např. u smíšeného pojištění by se v jednotlivých letech vyžadovalo značně malé pojistné pokrývající roční riziko úmrtí , ale pojistné pro poslední rok by dosáhlo téměř výše sjednané pojistné částky. V praxi se proto ve většině případů volí splátky pojistného v konstantní výši s tím, že v prvních letech pojištění se platí víc, než je zapotřebí k pokrytí pojištěného rizika, zatímco v pozdějších letech je často pojistné k pokrytí rizika nedostatečné. Z toho vyplývá, že přebytky pojistného z prvních let nemohou být rozděleny jako zisk, ale musí z nich být vytvořen jakýsi rezervní fond, který spolu se svými úroky slouží k vyrovnání pozdějšího deficitu.Tento fond se nazývá *pojistnou rezervou*, podle toho zda se připočítávají nebo nezapočítávají správní náklady se tento fond navíc rozlišuje na *nettorezervu a bruttorezervu.*

Např.

Pojištění osoby se vstupním věkem x a pojistnou dobou n, které za roční pojistné nettopojistné ve výši ${}_nP_x$ poskytuje na konci t-tého roku pojistné plnění ve výši a_t při dožití konce t-tého roku pojištění a pojistné plnění ve výši b_t při úmrtí během t-tého roku pojištění (např. $a_n = 1$ a všechny ostatní hodnoty a_t a b_t jsou nulové, pak se zřejmě jedná o pojištění pro případ dožití z věku x do věku x + n s jednotkovou pojistnou částkou).

Nettorezerva nashromážděná do konce t-tého roku pojištění se označuje symbolem ${}_tV_x$, přičemž se většinou klade ${}_0V_x = 0$. Vzhledem k tomu, jak je nettopojistné konstruováno, musí být

$$ {}_nP_x = \sum_{j=1}^{n} D_{x+j-1} = \sum_{j=1}^{n} (a_j D_{x+j} + b_j C_{x+j-1}) $$

rekurentní vzorec pro nettorezervu

$$({}_{t-1}V_x + {}_nP_x)l_{x+t-1}(1+i) = {}_tV_x\, l_{x+t} + (a_t\, l_{x+t} + b_t\, d_{x+t-1})$$

$({}_{t-1}V_x + {}_nP_x)l_{x+t-1}$ je částka, kterou pojišťovna disponuje na začátku t-tého roku, zúročená na konci tohoto roku , zatímco na pravé straně je částka ${}_tV_x$ l_{x+t}, kterou pojišťovna disponuje na konci t-tého roku.

Pokud vztah vynásobím v^{x+t} dostávám

$$({}_{t-1}V_x + {}_nP_x)D_{x+t-1} = {}_tV_x\, D_{x+t} + (a_t\, D_{x+t} + b_t\, C_{x+t-1})$$

Sečtením rovností vznikne

$$\sum_{j=1}^{t}({}_{j-1}V_x + {}_nP_x)D_{x+j-1} = \sum_{j=1}^{t} [{}_jV_x\, D_{x+j} + (a_j\, D_{x+j} + b_j\, C_{x+j-1})]$$

odtud

$${}_tV_x^{retro} = ({}_nP_x \sum_{j=1}^{t} D_{x+j-1}) / D_{x+t} - \sum_{j=1}^{t} (a_j\, D_{x+j} + b_j\, C_{x+j-1}) / D_{x+t}$$

Tímto jsem získala nerekurentní vzorec pro nettorezervu nashromážděnou do konce t-tého roku pojištění založený na hodnotách časově situovaných vzhledem k okamžiku výpočtu do minulosti.Mluví se proto o ***retrospektivním výpočtu nettorezervy***, což je zdůrazněno použitím označení ${}_tV_x^{retro}$.

Při retrospektivním výpočtu nettorezervu na konci t-tého roku pojištění počítáme jako rozdíl mezi pojistným vybraným do konce t-tého roku a zúročeným k tomuto okamžiku a pojistným plněním provedeným do konce t-tého roku a zúročeným k tomuto okamžiku, přičemž tento rozdíl je rozpočten na jednoho pojištěného na konci t-tého roku.

Kdybychom sčítali přes j = t + 1, t + 2, ... , n, pak bychom dostali vzorec pro ***prospektivní výpočet nettorezervy***

$$ {}_tV_x^{pro} = \sum_{j=t+1}^{n} (a_j D_{x+j-1} + b_j C_{x+j-1}) / D_{x+t} - {}_nP_x \sum_{j=t+1}^{n} D_{x+j-1} / D_{x+j-1} $$

Při prospektivním výpočtu nettorezervu na konci t-tého roku pojištění počítáme jako rozdíl mezi pojistným plněním očekávaným od počátku (t+1)-ního roku a diskontovaným k tomuto okamžiku a pojistným očekávaným od počátku (t+1) – ního roku a diskontovaným k tomuto okamžiku, přičemž tento rozdíl je rozpočten na jednoho pojištěného na konci t-tého roku.

${}_tV_x^{pro} = {}_tV_x^{retro}$ pro každé t = 1,... ,n.

Nettorezerva je tedy stejná, ať ji počítáme retrospektivně nebo prospektivně, takže se většinou píše jen ${}_tV_x$. V praxi se používá spíše prospektivnímu výpočtu rezervy (např.z důvodu jednoduchosti).

Pokud se vrátím k rekurentnímu vzorci pro nettorezervu, můžu v něm využít vztah

$D_{x+t} = D_{x+t-1}\, v\ -\ C_{x+t-1}$

A po úpravě mi pro běžné nettopojistné vychází

$$ {}_nP_x = {}_tV_x v - {}_{t-1}V_x + [a_t D_{x+t} + (b_t - {}_tV_x)\, C_{x+t-1}] / D_{x+t-1} $$
$$ = {}_nP_x^{ukl}\,(t) + {}_nP_x^{riz}\,(t) $$

Obdržela jsem rozklad běžného pojistného na dvě složky :

Tzv. ***ukládací část pojistného*** v t-tém roce pojištění

$\mathbf{{}_nP_x^{ukl}\,(t)} = {}_tV_x v - {}_{t-1}V_x$

a ***rizikovou část pojistného*** v t-tém roce pojištění

${}_nP_x^{riz}\,(t) = a_t D_{x+t} + (b_t - {}_tV_x)\, C_{x+t-1}] / D_{x+t-1}$

Tento rozklad provádí většina životních pojišťoven pro všechny své pojistné produkty, neboť na jeho základě lze analyzovat vytváření pojistných rezerv v čase. Ukládací část ${}_{n}P_{x}^{ukl}\ (t)$ pojistného je částka, kterou musí pojišťovna v t-tém pojistném roce přidat k nettorezervě ${}_{t\text{-}1}V_{x}$,aby po příslušném zúročení obnášela právě ${}_{t}V_{x}$.

Riziková část pojistného ${}_{n}P_{x}^{riz}\ (t)$ je částka v průměru pokrývající v rámci uvažovaného pojištění pojistné plnění v t-tém roce pojištění, přičemž v ní jsou zohledněny prostředky z nettorezerv, které se uvolnily ve prospěch pojistného kmene vzhledem k úmrtí některých pojištěných v tomto roce.

3.2 Bruttorezerva

Bruttorezerva je k nettorezervě ve stejném postavení jako bruttopojistné a k nettopojistnému. Jestliže se klasické správní náklady započítávají tak, jak to bylo popsáno v kapitole vypočítávání bruttopojistného, pak už lze odvodit odpovídající vzorce pro bruttorezervu.

Př. Odvodím prospektivním způsobem vzorec bruttorezervy na jednotkovou pojistnou částku v pojištění na dožití z věku x do věku x + n s běžným a jednorázovým pojistným.

Řešení : Odečtu-li od očekávaných budoucích výdajů pojišťovny (tj. od očekávaného pojistného plnění včetně očekávaných správních nákladů), dostaneme při běžném pojistném

$$
\begin{aligned}
{}_{t}V_{x}^{brutto} &= (\,{}_{n-t}E_{x+t} - \beta\ddot{a}_{x+t,\,n-t\,,\,n-t\rceil} + \gamma\,{}_{n}B_{x}\,\ddot{a}_{x+t,\,n-t\,,\,n-t\rceil}\,) - \\
&\quad (\,{}_{n}P_{x} + \alpha / \ddot{a}_{xn\rceil} + \beta + \gamma_{n}B_{x})\,\ddot{a}_{x+t,\,n-t\,,\,n-t\rceil}\,) \\
&= {}_{t}V_{x} - \alpha * (\,\ddot{a}_{x+t,\,n-t\,,\,n-t\rceil} / \ddot{a}_{xn\rceil}\,)
\end{aligned}
$$

a při jednorázovém pojistném

$$
\begin{aligned}
{}_{t}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{brutto}} &= {}_{n-t}E_{x+t} - \beta_{1}\,\ddot{a}_{x+t,\,n-t\,,\,n-t\rceil} \\
&= {}_{t}V_{x} + \beta_{1}\,\ddot{a}_{x+t,\,n-t\,,\,n-t\rceil}
\end{aligned}
$$

Závěr

Smyslem této práce bylo zjednodušení orientace v poměrně složité problematice životního pojištění. Za tímto účelem bylo nutné vytvoření jednoduchého průvodce při výpočtech pojistného a vysvětlení pojmu „úmrtnostní tabulka". Pojištění jako takové, tedy i životní pojištění osob, je založeno na minimalizaci rizika vzniklého na základě určitého náhodného jevu. V životním pojištění je bohužel tímto neblahým náhodným jevem smrt pojištěnce, což ještě umocňuje význam správného pochopení výkladu metodiky.

V práci jsem se snažila o maximálně srozumitelné zobrazení všech skutečností, které vznikající při výpočtech stanovujících výši pojistného. Rovněž vysvětlení samotné tvorby sazeb pojistného bylo nezbytně nutné. Způsob využití statistických údajů v tzv. „ umrtnostní tabulce",která je základním stavebním prvkem výpočtu, bylo dalším úkolem.

V průběhu celé práce byl kladen důraz na zjednodušení a vysvětlení méně srozumitelných partií metodiky výpočtu pojistného, aby případný zájemce mohl snáze učinit jednoznačné a odpovědné rozhodnutí.

Tabulka č.1 Úmrtnostní tabulky mužů v České republice za rok 2003

Muži *Males*							
věk	qx	px	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0,004169	0,995831	100000	417	99616	7254655	72,55
1	0,000313	0,999687	99583	31	99567	7155039	71,85
2	0,000127	0,999873	99552	13	99546	7055471	70,87
3	0,000193	0,999807	99539	19	99530	6955926	69,88
4	0,000134	0,999866	99520	13	99513	6856396	68,89
5	0,000165	0,999835	99507	16	99498	6756883	67,9
6	0,000157	0,999843	99490	16	99482	6657384	66,91
7	0,000158	0,999842	99475	16	99467	6557902	65,93
8	0,000186	0,999814	99459	19	99450	6458435	64,94
9	0,000173	0,999827	99440	17	99432	6358985	63,95
10	0,000141	0,999859	99423	14	99416	6259553	62,96
11	0,000167	0,999833	99409	17	99401	6160137	61,97
12	0,000154	0,999846	99393	15	99385	6060736	60,98
13	0,000162	0,999838	99377	16	99369	5961351	59,99
14	0,000201	0,999799	99361	20	99351	5861981	59
15	0,000267	0,999733	99341	27	99328	5762630	58,01
16	0,000432	0,999568	99315	43	99293	5663302	57,02
17	0,000621	0,999379	99272	62	99241	5564009	56,05
18	0,000823	0,999177	99210	82	99169	5464768	55,08
19	0,000955	0,999045	99128	95	99081	5365598	54,13
20	0,001019	0,998981	99034	101	98983	5266517	53,18
21	0,001017	0,998983	98933	101	98883	5167534	52,23
22	0,000999	0,999001	98832	99	98783	5068651	51,29
23	0,000905	0,999095	98733	89	98689	4969868	50,34
24	0,000978	0,999022	98644	96	98596	4871180	49,38
25	0,000995	0,999005	98548	98	98499	4772584	48,43
26	0,000994	0,999006	98450	98	98401	4674085	47,48
27	0,00101	0,99899	98352	99	98302	4575684	46,52
28	0,000969	0,999031	98252	95	98205	4477382	45,57
29	0,000933	0,999067	98157	92	98111	4379178	44,61
30	0,001018	0,998982	98066	100	98016	4281066	43,66
31	0,001049	0,998951	97966	103	97914	4183051	42,7
32	0,001077	0,998923	97863	105	97810	4085136	41,74
33	0,001182	0,998818	97758	116	97700	3987326	40,79
34	0,001289	0,998711	97642	126	97579	3889626	39,84
35	0,001461	0,998539	97516	142	97445	3792047	38,89
36	0,00163	0,99837	97374	159	97294	3694602	37,94
37	0,001767	0,998233	97215	172	97129	3597307	37
38	0,00188	0,99812	97043	182	96952	3500178	36,07
39	0,002025	0,997975	96861	196	96763	3403226	35,14
40	0,002201	0,997799	96665	213	96558	3306463	34,21
41	0,002421	0,997579	96452	234	96335	3209905	33,28
42	0,002694	0,997306	96218	259	96089	3113570	32,36

43	0,002953	0,997047	95959	283	95818	3017481	31,45
44	0,003365	0,996635	95676	322	95515	2921663	30,54
45	0,003799	0,996201	95354	362	95173	2826148	29,64
46	0,004357	0,995643	94992	414	94785	2730976	28,75
47	0,004983	0,995017	94578	471	94342	2636191	27,87
48	0,005643	0,994357	94106	531	93841	2541849	27,01
49	0,00609	0,99391	93575	570	93290	2448008	26,16
50	0,006615	0,993385	93006	615	92698	2354717	25,32
51	0,007408	0,992592	92390	684	92048	2262019	24,48
52	0,008367	0,991633	91706	767	91322	2169971	23,66
53	0,009423	0,990577	90939	857	90510	2078649	22,86
54	0,010628	0,989372	90082	957	89603	1988139	22,07
55	0,011373	0,988627	89124	1014	88617	1898536	21,3
56	0,011899	0,988101	88111	1048	87586	1809918	20,54
57	0,013018	0,986982	87062	1133	86495	1722332	19,78
58	0,0143	0,9857	85929	1229	85314	1635836	19,04
59	0,015904	0,984096	84700	1347	84026	1550522	18,31
60	0,017727	0,982273	83353	1478	82614	1466496	17,59
61	0,019009	0,980991	81875	1556	81097	1383881	16,9
62	0,020133	0,979867	80319	1617	79511	1302784	16,22
63	0,021478	0,978522	78702	1690	77857	1223274	15,54
64	0,023142	0,976858	77012	1782	76121	1145417	14,87
65	0,025218	0,974782	75229	1897	74281	1069296	14,21
66	0,027981	0,972019	73332	2052	72306	995015	13,57
67	0,030598	0,969402	71280	2181	70190	922709	12,94
68	0,033467	0,966533	69099	2313	67943	852519	12,34
69	0,035764	0,964236	66787	2389	65593	784576	11,75
70	0,038349	0,961651	64398	2470	63163	718984	11,16
71	0,041453	0,958547	61929	2567	60645	655820	10,59
72	0,045618	0,954382	59362	2708	58008	595175	10,03
73	0,049697	0,950303	56654	2816	55246	537168	9,48
74	0,054167	0,945833	53838	2916	52380	481922	8,95
75	0,059497	0,940503	50922	3030	49407	429542	8,44
76	0,065241	0,934759	47892	3125	46330	380135	7,94
77	0,071539	0,928461	44768	3203	43166	333805	7,46
78	0,078619	0,921381	41565	3268	39931	290639	6,99
79	0,086081	0,913919	38297	3297	36649	250708	6,55
80	0,095361	0,904639	35000	3338	33332	214059	6,12
81	0,105151	0,894849	31663	3329	29998	180727	5,71
82	0,1169	0,8831	28333	3312	26677	150729	5,32
83	0,127671	0,872329	25021	3194	23424	124052	4,96
84	0,141143	0,858857	21827	3081	20286	100628	4,61
85	0,15247	0,84753	18746	2858	17317	80342	4,29
86	0,168873	0,831127	15888	2683	14546	63025	3,97
87	0,185407	0,814593	13205	2448	11981	48478	3,67
88	0,203419	0,796581	10757	2188	9663	36498	3,39
89	0,222996	0,777004	8568	1911	7613	26835	3,13
90	0,244217	0,755783	6658	1626	5845	19222	2,89
91	0,267151	0,732849	5032	1344	4360	13377	2,66
92	0,291856	0,708144	3688	1076	3149	9018	2,45
93	0,31837	0,68163	2611	831	2196	5868	2,25
94	0,346711	0,653289	1780	617	1471	3673	2,06
95	0,376866	0,623134	1163	438	944	2201	1,89

96	0,40879	0,59121	725	296	576	1257	1,74
97	0,442398	0,557602	428	190	334	681	1,59
98	0,477555	0,522445	239	114	182	347	1,45
99	0,51408	0,48592	125	64	93	165	1,33
100	0,551733	0,448267	61	33	44	73	1,2
101	0,590213	0,409787	27	16	19	29	1,06
102	0,629165	0,370835	11	7	8	10	0,87
103	1	0	4	4	2	2	0,5

Tabulka č.2 Podrobné úmrtnostní tabulky žen v České republice za rok 2003

	Ženy *Females*						
věk *age*	qx	px	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0,00329	0,996714	100000	329	99698	7904029	79,04
1	0,00048	0,999516	99671	48	99647	7804332	78,3
2	0,00013	0,999866	99623	13	99617	7704684	77,34
3	9,1E-05	0,999909	99610	9	99605	7605068	76,35
4	5,1E-05	0,999949	99601	5	99598	7505463	75,36
5	0,00011	0,999888	99596	11	99590	7405864	74,36
6	0,00012	0,99988	99584	12	99579	7306274	73,37
7	0,00012	0,999882	99573	12	99567	7206696	72,38
8	0,00013	0,999867	99561	13	99554	7107129	71,38
9	0,00013	0,999871	99548	13	99541	7007575	70,39
10	0,00011	0,999891	99535	11	99529	6908034	69,4
11	0,00013	0,999871	99524	13	99517	6808505	68,41
12	0,00011	0,999892	99511	11	99506	6708987	67,42
13	9,9E-05	0,999901	99500	10	99495	6609481	66,43
14	0,00015	0,999855	99490	14	99483	6509986	65,43
15	0,00018	0,999824	99476	18	99467	6410503	64,44
16	0,00021	0,99979	99459	21	99448	6311035	63,45
17	0,00027	0,999732	99438	27	99424	6211587	62,47
18	0,00031	0,99969	99411	31	99396	6112163	61,48
19	0,00032	0,999683	99380	32	99364	6012767	60,5
20	0,00032	0,999678	99349	32	99333	5913403	59,52
21	0,00029	0,999713	99317	28	99302	5814070	58,54
22	0,00026	0,999743	99288	26	99276	5714768	57,56
23	0,00022	0,999783	99263	22	99252	5615492	56,57
24	0,00021	0,99979	99241	21	99231	5516240	55,58
25	0,00022	0,999782	99220	22	99210	5417010	54,6
26	0,00026	0,999737	99199	26	99186	5317800	53,61
27	0,0003	0,9997	99173	30	99158	5218614	52,62
28	0,0003	0,999696	99143	30	99128	5119457	51,64
29	0,0003	0,999705	99113	29	99098	5020329	50,65
30	0,0003	0,999702	99084	30	99069	4921231	49,67
31	0,00033	0,999669	99054	33	99038	4822162	48,68
32	0,00037	0,999631	99021	37	99003	4723124	47,7
33	0,00049	0,999512	98985	48	98961	4624121	46,72
34	0,00054	0,999457	98936	54	98910	4525161	45,74
35	0,00062	0,999381	98883	61	98852	4426251	44,76
36	0,00075	0,999255	98821	74	98785	4327399	43,79
37	0,00074	0,99926	98748	73	98711	4228614	42,82
38	0,0008	0,999196	98675	79	98635	4129903	41,85
39	0,00092	0,999078	98595	91	98550	4031268	40,89
40	0,00098	0,99902	98505	97	98456	3932718	39,92
41	0,00113	0,998867	98408	111	98352	3834262	38,96
42	0,00128	0,998717	98297	126	98233	3735909	38,01
43	0,00127	0,998727	98170	125	98108	3637676	37,05
44	0,00153	0,998469	98045	150	97970	3539568	36,1
45	0,00175	0,998253	97895	171	97810	3441598	35,16

46	0,00198	0,998022	97724	193	97628	3343788	34,22
47	0,00227	0,997729	97531	222	97420	3246160	33,28
48	0,00236	0,997637	97309	230	97194	3148740	32,36
49	0,00257	0,997435	97079	249	96955	3051546	31,43
50	0,0028	0,997201	96830	271	96695	2954591	30,51
51	0,00307	0,996935	96559	296	96411	2857896	29,6
52	0,00334	0,996657	96263	322	96103	2761485	28,69
53	0,00373	0,996269	95942	358	95763	2665382	27,78
54	0,00402	0,995984	95584	384	95392	2569619	26,88
55	0,00443	0,995573	95200	421	94989	2474228	25,99
56	0,00487	0,995129	94778	462	94547	2379239	25,1
57	0,00545	0,994547	94317	514	94060	2284691	24,22
58	0,00595	0,994051	93802	558	93523	2190632	23,35
59	0,00661	0,993386	93244	617	92936	2097108	22,49
60	0,00724	0,992763	92628	670	92292	2004172	21,64
61	0,00801	0,991986	91957	737	91589	1911880	20,79
62	0,0088	0,991205	91220	802	90819	1820291	19,95
63	0,00955	0,990451	90418	863	89986	1729472	19,13
64	0,0103	0,989699	89555	923	89093	1639486	18,31
65	0,01123	0,988773	88632	995	88135	1550392	17,49
66	0,01234	0,987658	87637	1082	87096	1462258	16,69
67	0,01425	0,985749	86555	1233	85939	1375161	15,89
68	0,01608	0,98392	85322	1372	84636	1289222	15,11
69	0,01787	0,982127	83950	1500	83200	1204586	14,35
70	0,01981	0,980192	82450	1633	81633	1121387	13,6
71	0,02198	0,978016	80816	1777	79928	1039754	12,87
72	0,02449	0,975514	79040	1935	78072	959826	12,14
73	0,02782	0,972182	77104	2145	76032	881754	11,44
74	0,03157	0,968426	74960	2367	73776	805722	10,75
75	0,0357	0,9643	72593	2592	71297	731945	10,08
76	0,04056	0,95944	70001	2839	68582	660648	9,44
77	0,04582	0,954184	67162	3077	65623	592067	8,82
78	0,05176	0,948245	64085	3317	62427	526443	8,21
79	0,05866	0,941338	60768	3565	58986	464017	7,64
80	0,06664	0,93336	57203	3812	55297	405031	7,08
81	0,07559	0,924412	53391	4036	51373	349734	6,55
82	0,08574	0,914264	49356	4232	47240	298360	6,05
83	0,09723	0,902772	45124	4387	42930	251120	5,57
84	0,11022	0,889781	40737	4490	38492	208190	5,11
85	0,12488	0,875124	36247	4526	33984	169698	4,68
86	0,14138	0,858625	31720	4484	29478	135715	4,28
87	0,1599	0,8401	27236	4355	25058	106237	3,9
88	0,18064	0,819363	22881	4133	20814	81178	3,55
89	0,20377	0,796229	18748	3820	16838	60364	3,22
90	0,22948	0,770522	14928	3426	13215	43526	2,92
91	0,25792	0,742082	11502	2967	10019	30312	2,64
92	0,28922	0,71078	8535	2469	7301	20293	2,38
93	0,32347	0,676531	6067	1962	5086	12992	2,14
94	0,36069	0,639309	4104	1480	3364	7906	1,93
95	0,40083	0,599167	2624	1052	2098	4542	1,73
96	0,44374	0,556257	1572	698	1223	2444	1,55
97	0,48915	0,51085	875	428	661	1221	1,4
98	0,53664	0,463357	447	240	327	560	1,25

99	0,58566	0,414337	207	121	146	233	1,13
100	0,63549	0,364507	86	55	59	87	1,01
101	0,68527	0,314731	31	21	21	28	0,9
102	0,73401	0,265991	10	7	6	8	0,77
103	1	0	3	3	1	1	0,5

Seznam použité literatury :

Pojistná matematika v praxi, Tomáš Cipra, vydáno edicí HZ, Praha 1994

Finanční a pojistná matematika, RNDr. Marie Kletečková, doc.RHDr.Václav Nýdl CSc., vydáno v Českých Budějovicích 2001