

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
katedra matematiky

**Zajímavé křivky a jejich vlastnosti
(studium užitím matematické analýzy)**

Diplomová práce

Autor: Václav Roubal

Vedoucí diplomové práce: Ing. Eva Zmeškalová, CSc.

České Budějovice, 2006

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně na základě vlastních zjištění a s použitím literatury uvedené v závěru.

V Českých Budějovicích dne 20. 4. 2006

Radlav Roubal

.....

Děkuji vedoucí mé diplomové práce Ing. Evě Zmeškalové, CSc., za poskytnutí cenných rad a informací při konzultaci a řešení jednotlivých úkolů diplomové práce.

Obsah

Úvod	5
1. Vyšetřování průběhu křivky	6
1.1 Vyšetřování průběhu křivky zadané explicitně.....	7
1.2 Vyšetřování průběhu křivky zadané implicitně.....	11
1.3 Vyšetřování průběhu křivky dané parametricky	18
1.4 Vyšetřování průběhu křivky dané v polárních souřadnicích.....	25
2. Délka rovinné křivky	36
3. Křivkový integrál 1. druhu	46
4. Délka prostorové křivky	57
Závěr	61
Seznam použité literatury	62

Úvod

Cílem diplomové práce je rozebrání problematiky rovinné křivky a zkoumání jejích vlastností pomocí prostředků matematické analýzy se zaměřením na konkrétní příklady některých zajímavých křivek. V první kapitole se především věnujeme vyšetřování průběhu grafu křivky při různých možnostech jejich zadání. Jedná se o rovinné křivky zadané explicitně, implicitně, ale také parametricky a v polárních souřadnicích. Zadání křivky vhodným způsobem může vyšetřování křivky značně zjednodušit. Jsou zde uvedeny jen některé dílčí definice a věty, ostatní lze i s důkazy nalézt v některé z publikací, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Ve druhé kapitole jsme na příkladech ilustrovali, jak lze určovat délku rovinné křivky. Opět jsme využili různých způsobů zadání.

Ve třetí kapitole je rozebrán pojem křivkového integrálu 1. druhu pro oblouk i pro křivku v prostoru R^n . V poslední kapitole je pak uvedena jedna z aplikací křivkového integrálu, a to výpočet délky prostorové křivky.

Pro sestavení grafů křivek jsme použili matematický software Cabri II Plus.

1. Vyšetřování průběhu křivky

Při vyšetřování průběhu křivek užíváme často faktu, že lze křivku rozdělit na konečný počet funkcí s definičním oborem, který je částí definičního oboru křivky. Pro zopakování zde uvedeme postup, kterého budeme využívat pro vyšetřování průběhu funkce.

1. Určíme definiční obor funkce, body nespojitosti, intervaly spojitosti, nulové body.
2. Ověříme, zda funkce není lichá, sudá nebo periodická. V případě některé této vlastnosti nám pro vyšetřování stačí pouze část definičního oboru.
3. V krajních bodech intervalů spojitosti určíme limity.
4. Vypočítáme $f'(x)$, určíme její definiční obor, nulové body a body, ve kterých $f'(x)$ neexistuje. Dále určíme intervaly ryzí monotónnosti a lokální extrémů.
5. Vypočítáme $f''(x)$, její definiční obor, nulové body a body, ve kterých $f''(x)$ neexistuje. Dále určíme intervaly ryzí konvexnosti a konkávnosti a inflexní body.
6. V bodech $+\infty, -\infty$ určíme asymptoty, má-li je funkce.
7. Vypočítáme hodnoty ve významných bodech (např.: krajní body intervalů spojitosti, průsečíky se souřadnými osami, lokální extrémů, krajní body definičního oboru, atd.).
8. Z předchozích vlastností sestrojíme graf funkce.

Definice a věty, které potřebujeme pro vyšetřování předchozích vlastností zde nebudeme uvádět. Lze je i s důkazy najít v knize „Vojtěch Jarník: Diferenciální počet I.“

Nyní uvedeme postup, který budeme používat pro vyšetřování průběhu křivky. Nejprve ale zopakujeme několik způsobů, jak lze křivku zadat. V závorce je vždy uveden jednoduchý příklad.

Způsoby zadání křivky:

1. explicitně ($f(x) = x^2$),

2. implicitně $((x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = 0)$,

3. v polárních souřadnicích $(r(\varphi) = \sin^3 \frac{\varphi}{3})$,

4. parametricky $(x(t) = t + 1, y(t) = t + t^2)$.

Nyní uvedeme pro každý způsob zadání křivky postup, podle kterého budeme postupovat při vyšetřování jejího průběhu a ilustrujeme ho na příkladech některých zajímavých křivek. Před vyšetřováním těchto křivek ještě uvedeme krátký popis vzniku těchto křivek.

1.1 Vyšetřování průběhu křivky zadané explicitně

V případě, že je křivka zadaná explicitně ve tvaru $y = f(x)$, kde f je funkce, vyšetřujeme její průběh jako průběh funkce f . Využijeme k tomu postupu, který jsme uvedli v úvodu této kapitoly.

Příklad 1.1.1

Vyšetřete průběh křivky dané předpisem $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

Řešení:

Křivka je zadaná explicitně, budeme ji tedy vyšetřovat pomocí postupu uvedeného v úvodu této kapitoly.

Nejprve určíme definiční obor, body nespojitosti, intervaly spojitosti a nulové body:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Křivka není definovaná v bodech $-1, 1$. Je spojitá v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

$f(x) = 0$ pro $x = 0$. $f(-x) = f(x)$, funkce je sudá. Budeme ji tedy vyšetřovat jen na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Limity v krajních bodech $D(f)$ a v bodech nespojitosti:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

Určíme vertikální asymptoty:

Limita pro $x \rightarrow 1_+$ je nevlastní, proto má funkce v bodě $x = 1$ vertikální asymptotu o rovnici $x = 1$.

Vypočítáme první derivaci:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$, derivace neexistuje pro $x = 1$.

V intervalech $\langle 0, 1 \rangle$ a $(1, +\infty)$ je první derivace záporná. Funkce je tedy v obou intervalech klesající.

Druhá derivace bude:

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Druhá derivace není nikdy rovna nule, neexistuje pro $x = 1$.

V intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je druhá derivace záporná, funkce je konkávní. V intervalu $(1, +\infty)$ je kladná, funkce je tedy konvexní.

Určíme ještě asymptotu pro $x = +\infty$. Je to přímka ve tvaru $y = kx + q$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

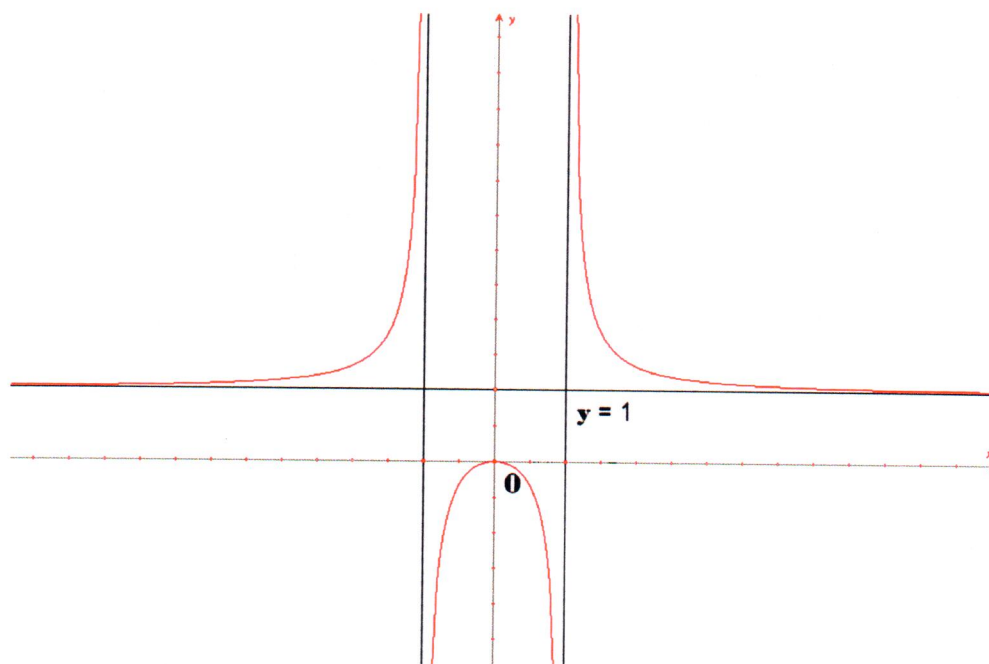
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

Asymptotou je tedy přímka o rovnici $y = 1$.

Sestrojíme graf dané křivky (obr. 1.1.1).

Poznámka 1.1:

V příkladu byl použit pojem „vertikální asymptota“. Je to přímka, která prochází bodem, v němž je alespoň jedna jednostranná limita nevlastní. Tato přímka je rovnoběžná s osou y .



Obr. 1.1.1: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

V následujícím příkladu vyšetříme ještě jednu explicitně zadanou křivku, kterou je řetězovka. Řetězovka je křivka, jejíž tvar zaujme homogenní vlákno, které je ohebné, ale nikoliv roztažné, pod vlivem gravitace. Křivku lze vyjádřit jako graf hyperbolického

kosinu $y = k \cosh \frac{x}{k}$ nebo ve tvaru $y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{\frac{-x}{k}} \right)$.

Příklad 1.1.2

Vyšetřete průběh křivky zadané rovnicí $y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{\frac{-x}{k}} \right)$.

Řešení:

Ze zadání je vidět, že se jedná o funkci tvaru $y = f(x)$. Nejprve zjistíme, zda není souměrná podle některé z os. Po dosazení $-x$ za x dostáváme, že křivka má jednu osu souměrnosti, a to osu y .

$D(f) = R$. Vzhledem k souměrnosti podle osy y se omezíme pouze na interval $I = \langle 0, \infty \rangle$.

Určíme první a druhou derivaci:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2k} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} \right).$$

Z první derivace určíme lokální extrémny a intervaly monotonicity:

$f'(x) > 0$ v celém intervalu I , je tedy rostoucí. V bodě $x = 0$ nabývá svého minima.

Z druhé derivace určíme inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti:

$f''(x) > 0$ v celém intervalu I , je tedy konvexní a nemá žádný inflexní bod.

Pro sestrojení grafu křivky zjistíme ještě hodnoty v některých bodech.

$$f(0) = k$$

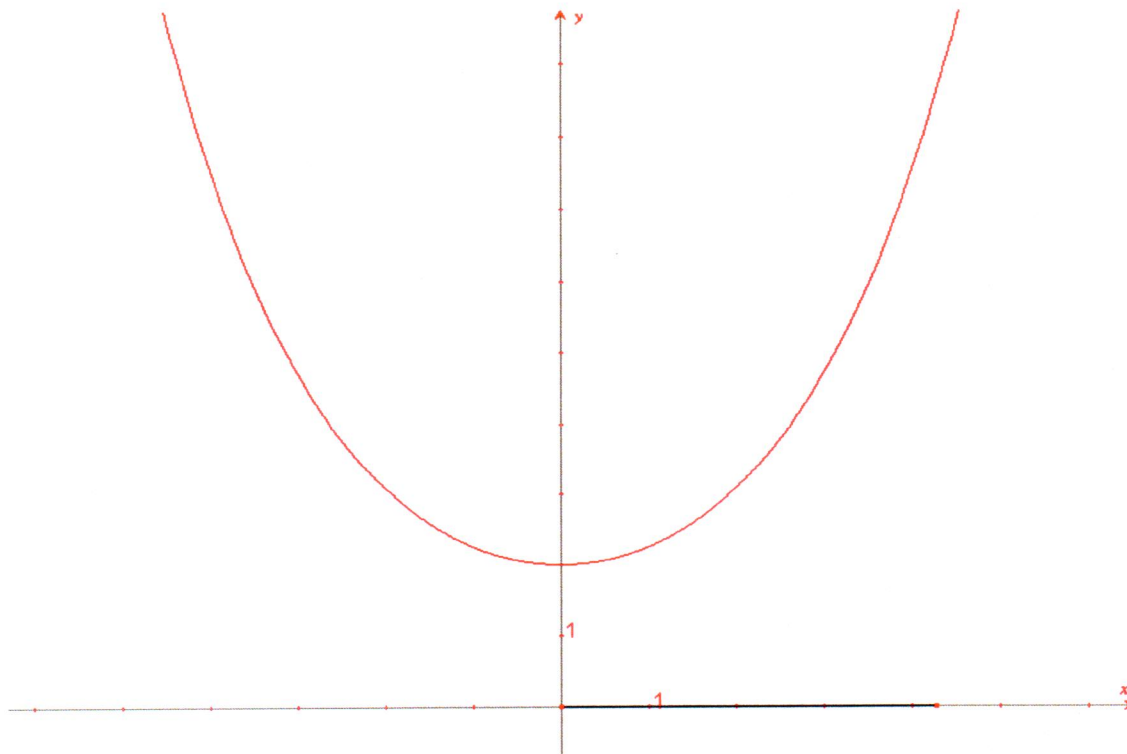
$$f(k) \doteq 1,54k$$

$$f\left(\frac{k}{2}\right) \doteq 1,13k$$

$$f\left(\frac{3k}{2}\right) \doteq 2,35k$$

$$f(2k) \doteq 3,76k$$

Vzhledem k symetričnosti dostáváme celou křivku (obr. 1.1.2).



Obr. 1.1.2: Řetězovka

1.2 Vyšetřování průběhu křivek daných implicitně

Křivky zadané implicitně splňují rovnici ve tvaru $F(x, y) = 0$. Vyšetřování průběhu těchto křivek je analogické s předchozí kapitolou. Budeme přitom využívat následující definice a věty.

Definice 1.2.1 – Implicitní funkce

Nechť D je definiční obor, F je zobrazení $D \rightarrow \mathbb{R}^1$; $D \subset \mathbb{R}^2$ a $A \subset \mathbb{R}^1$ a $B \subset \mathbb{R}^1$ jsou 2 neprázdné množiny, pro které $A \times B \subset D$. Říkáme, že $F(x, y) = 0$ určuje implicitní funkci v $A \times B$, tedy funkci $f: A \rightarrow B$, jestliže platí:

1. $\forall x \in A: F(x, f(x)) = 0$,
2. $\forall x \in A; \forall y \in B: y \neq f(x) \Rightarrow F(x, y) \neq 0$.

Věta 1.2.1 – Implicitní funkce 2 proměnných

Nechť F je funkce 2 proměnných x, y s vlastnostmi:

1. F je definovaná a spojitá v obdélníku $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \delta'; y_0 + \delta' \rangle$, kde $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je jeho střed a $\delta, \delta' > 0$,
2. $F[x_0, y_0] = 0$,
3. $\forall x \in \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$ je funkce $F(x, y)$ s pevným x v proměnné y rostoucí (klesající) na $\langle y_0 - \delta'; y_0 + \delta' \rangle$.

Pak existují δ_1, δ_1' , kde $0 < \delta_1 \leq \delta, 0 < \delta_1' \leq \delta'$ tak, že rovnice $F(x, y) = 0$ určuje v obdélníku $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \delta'; y_0 + \delta' \rangle$ implicitní funkci $y = f(x)$, která splňuje podmínku $f(x_0) = y_0$ a která je na $\langle x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1 \rangle$ spojitá.

Důkaz:

Číslo δ_1' můžeme v intervalu $\langle 0; \delta_1' \rangle$ vybrat libovolně tj. druhý rozměr obdélníku nemusíme nikdy zmenšovat. Pro pevné x spočítáme y a pokud je $y > y_0$ a $x < x_0$, je klesající. Pokud je $x > x_0$, je rostoucí. Pokud je $y < y_0$ a $x < x_0$, je rostoucí, pokud je $x > x_0$, je klesající.

$F(x_0, y)$ je rostoucí v $y \Rightarrow$

$$F(x_0; y_0 - \delta_1') < 0 \wedge F(x_0; y_0 + \delta_1') > 0. \quad (1)$$

Ze spojitosti funkce F v bodech $[x_0, y_0 - \delta_1']$ a $[x_0, y_0 + \delta_1']$ platí, že v okolí bodu $[x_0, y_0 - \delta_1']$ je funkce záporná a v okolí bodu $[x_0, y_0 + \delta_1']$ je funkce kladná. Nyní vybereme menší z obou okolí bodu x_0 . Existuje kladné číslo $\delta_1; \delta_1 \leq \delta$ takové, že $\forall x \in \langle x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1 \rangle$ platí obě nerovnosti (1).

Protože funkce $F(x, y)$ s pevným x je v proměnné y na intervalu $\langle y_0 - \delta_1'; y_0 + \delta_1' \rangle$ spojitá a rostoucí a v koncových bodech má různá znaménka (platí nerovnosti (1)) \Rightarrow existuje právě jedno $y \in \langle y_0 - \delta_1'; y_0 + \delta_1' \rangle$ takové, že $F(x, y) = 0$.

Dle definice 1.1 to znamená, že na obdélníku $\langle x_0 - \delta_1'; x_0 + \delta_1' \rangle \times \langle y_0 - \delta_1'; y_0 + \delta_1' \rangle$ je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena implicitní funkce $y = f(x)$, přitom $f(x_0) = y_0$.

Nyní zbývá dokázat, že funkce f je na intervalu $\langle x_0 - \delta_1'; x_0 + \delta_1' \rangle$ spojitá.

Pokud platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, pak je funkce f spojitá.

Z předchozích úvah vyplývá, že $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \delta_1'$. Protože jsme δ_1' vybrali libovolně, můžeme ho nyní zmenšit tak, aby bylo menší než dané $\varepsilon > 0$. Tím sice zúžíme definiční obor implicitní funkce, ale hodnoty f se v okolí bodu x_0 nezmění. Tím je dokázáno, že v okolí bodu x_0 platí: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Spojitosť v ostatních bodech definičního oboru dokážeme analogicky tím, že celý postup opakujeme, přitom výchozí bod x_0 zaměníme za uvažovaný bod x .

C.B.D

Věta 1.2.2 – Derivace implicitní funkce 2 proměnných

Nechť F je funkce 2 proměnných x, y s vlastnostmi:

1. F je definovaná a spojitá v obdélníku $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \delta'; y_0 + \delta' \rangle$, kde $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je jeho střed a $\delta, \delta' > 0$,
2. $F[x_0, y_0] = 0$,
3. parciální derivace F'_x, F'_y existují a jsou spojitě v obdélníku $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \delta'; y_0 + \delta' \rangle$,
4. parciální derivace $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak platí závěr věty 1.2.1 a navíc $y = f(x)$ má v každém bodě intervalu $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$

vlastní derivaci $f'(x)$, jejíž hodnota je $f'(x) = \frac{F'_x}{F'_y}$.

Důkaz:

Nechť podle 4. bodu věty 1.2.2 platí:

ve středu obdélníka $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \delta; y_0 + \delta \rangle$ je

$$F'_y(x_0, y_0) > 0. \quad (2)$$

Ze spojitosti $F'_y(x, y)$ (bod 3 věty 1.2.2) nerovnost (2) platí v některém okolí bodu $[x_0, y_0]$, proto můžeme původní obdélník zmenšit tak, aby v něm nerovnost (2) platila.

Pak je funkce $F(x, y)$ s pevným x rostoucí v proměnné y a je splněna podmínka 3 věty 1.2.1, proto platí závěr věty 1.2.1.

Nyní zbývá dokázat existenci $f'(x_0)$.

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = F'_x(\xi, \eta)(x - x_0) + F'_y(\xi, \eta)(y - y_0). \quad (3)$$

$[\xi, \eta]$ je bod roviny ležící na úsečce spojující x_0 a y_0 . Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce platí:

$$y = f(x) \Rightarrow F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0),$$

nyní dosadíme do vztahu (3) a dostaneme

$$0 - 0 = F'_x(\xi, \eta)(x - x_0) + F'_y(\xi, \eta)(f(x) - f(x_0))$$

a po úpravě

$$0 = \frac{F'_x(\xi, \eta)}{F'_y(\xi, \eta)} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ze spojitosti F'_x , F'_y a f plyne:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F'_x(\xi, \eta)}{F'_y(\xi, \eta)} = \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \Rightarrow$$

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad \text{C.B.D}$$

Na následujícím příkladu ukážeme vyšetřování průběhu křivky zadané implicitně.

Příklad 1.2.1

Metodou implicitních funkcí vyšetřete křivku K , která je dána rovnicí

$$F(x,y): x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0 \text{ je dané reálné číslo}).$$

Řešení:

$$D(K) = R,$$

$$F(0,0) = 0 \Rightarrow [0,0] \in K.$$

Ověříme, zda křivka není souměrná podle některé z os. Dostáváme tedy

$$F(x,y) = F(y,x) \Rightarrow [x,y] \in K \Leftrightarrow [y,x] \in K,$$

křivka je tedy souměrná podle osy I. a III. kvadrantu.

Protože platí:

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow x^3 + y^3 - 3axy < 0 \Rightarrow [x,y] \notin K,$$

žádný bod křivky neleží ve III. kvadrantu.

Vzhledem k souměrnosti podle osy I. a III. kvadrantu se omezíme pouze na vyšetření ve I. a v II. kvadrantu.

Nyní tedy vyšetříme křivku ve II. kvadrantu.

$$x \in (-\infty, 0), y \in (0, \infty)$$

Dokážeme, že rovnice $F(x,y) = 0$ určuje v obdélníku $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$ implicitní funkci $y = f(x)$, která je na $(-\infty, 0)$ spojitá, klesající a ověříme, zda přímka $y = -x - a$ je její asymptota.

$$x = 0, F(0,y) = y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0, x < 0 \text{ pevné, } F'_y(x,y) = 3y^2 - 3ax > 0 \Rightarrow$$

$F(x,y)$ je rostoucí.

$$\text{Pro } y = 0: F(x,y) = F(x,0) = x^3 < 0.$$

Pro $y = -x: F(x,y) = F(x,-x) = x^3 - x^3 - 3ax(-x) = 3ax^2 > 0$, což podle věty 1.2.1 znamená, že funkce $F(x,y) = 0$ určuje v II. kvadrantu implicitní funkce $y = f(x)$, která je spojitá a pro kterou platí $0 < f(x) < -x$ pro $\forall x < 0$. Navíc z nerovnosti $F'_y(x,y) \neq 0$ podle věty 1.2.2 plyne, že funkce má derivaci v každém bodě $x < 0$.

Podle věty 1.2.2 je

$$f'(x) = \frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax},$$

$$f(x) < \frac{x^2}{3a} \Rightarrow$$

$$x^2 - ay > x^2 - a \frac{x^2}{3a} = \frac{2x^2}{3} > 0$$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající.

Nyní ověříme, zda přímka $y = -x - a$.

Odtud plyne, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x + a$ je rovna 0.

Platí $3a \geq x + y > -a \Rightarrow$

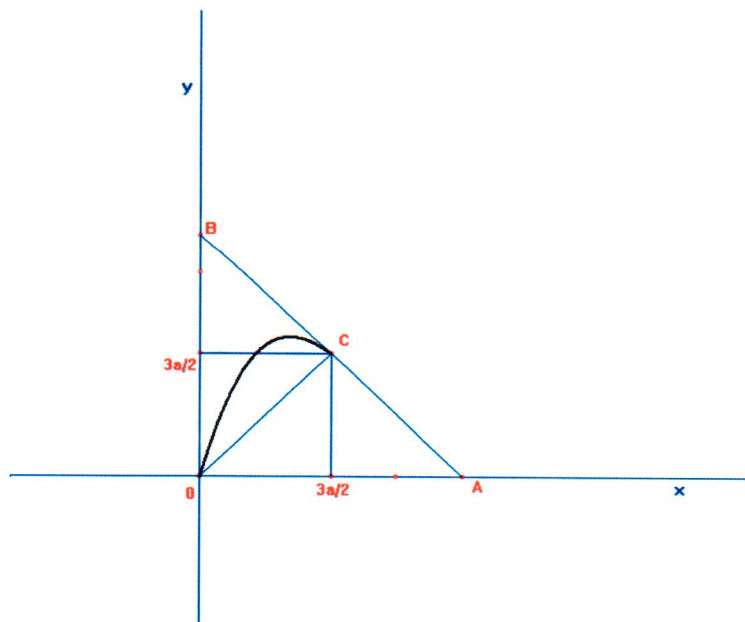
$$(x + y)^2 \leq 9a^2.$$

$$0 < x + y + a = \frac{a(x + y)^2}{x^2 - xy - y^2} \leq \frac{9a^3}{\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}} \leq \frac{9a^3}{\frac{3x^2}{4}}.$$

Odtud limitním přechodem pro $x \rightarrow -\infty$ dostáváme limitu rovnou 0.

Přímka $y = -x - a$ je tedy asymptota křivky.

Nyní vyšetříme křivku v I. kvadrantu. Vzhledem k symetrii podle osy I. a III. kvadrantu se omezíme pouze na tu část křivky, která je na přímce $y = x$ (viz obrázek 1.2.1).



Obr. 1.2.1

Dosadíme x za y a dostáváme:

$$2x^3 - 3ax^2 = 0.$$

Odtud po úpravě

$$x^2(2x - 3a) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{3a}{2}.$$

Z předchozích úvah vidíme, že množina K v I. kvadrantu leží v $\Delta 0AB$. Jak již bylo řečeno, z důvodu symetrie se můžeme omezit na horní část $\Delta 0CB$, kde $C = \left[\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2} \right]$.

Dále platí:

$$[0,0] \in K, C \in K.$$

Rovnice $F(x,y) = 0$ určuje v $\Delta 0CB$ implicitní funkci $y = f(x)$, kde $x \in \left\langle 0, \frac{3a}{2} \right\rangle$.

Určíme derivaci a její nulové body:

$$f'(x) = \frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax}.$$

Nulové body derivace obdržíme po vyřešení rovnice

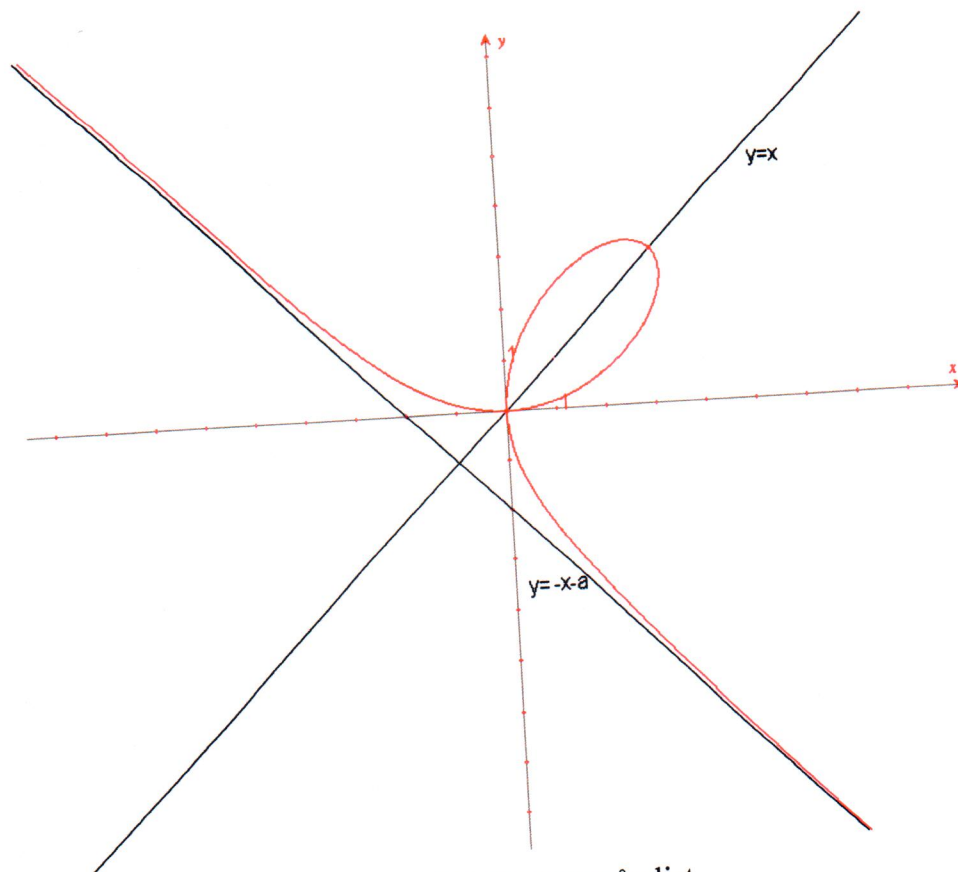
$$3x^2 - 3ay = 0.$$

Jediný stacionární bod je $[a^3\sqrt{2}, a^3\sqrt{4}]$.

V tomto bodě má funkce lokální maximum, na intervalu $\langle 0, a^3\sqrt{2} \rangle$ je rostoucí, na

intervalu $\langle a^3\sqrt{2}, \frac{3a}{2} \rangle$ je klesající.

Nyní můžeme sestavit graf zadané funkce (obr. 1.2.2).



Obr. 1.2.2: Descartesův list

1.3 Vyšetřování průběhu křivky dané parametricky

Nejprve uvedeme definici křivky zadané parametricky.

Definice 1.3.1 – Parametricky zadaná křivka

Nechť f je funkce, J je libovolný interval, $x(t)$, $y(t)$ jsou funkce proměnné t , $t \in J$, t je parametr, $x(t), y(t)$ jsou spojité na J , $\dot{x}(t) \neq 0$ a spojitá ve všech bodech J . Říkáme, že rovnice $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametricky zadávají funkci f , pokud $K = \{(x(t), y(t)), t \in J\}$ je grafem funkce f .

Nyní uvedeme větu, kterou budeme používat pro vyšetřování průběhu křivky.

Věta 1.3.1 – Derivace parametricky zadané funkce

Nechť J je libovolný interval, $y = f(x)$ je parametricky zadaná rovnicemi $x = x(t), y = y(t), t \in J$, necht' $t_0 \in J, x_0 = x(t_0) \in R, x_0 \neq 0, y' \in R$. Pro přehlednost ještě označíme $x(t) = \varphi_1(t), y(t) = \varphi_2(t), x_0 = \varphi_1(t_0)$.

Pak

$$f'(x_0) = \frac{\dot{\varphi}_1(t_0)}{\dot{\varphi}_2(t_0)}, \text{ kde } t_0 = \varphi_1^{-1}(x_0),$$

$$f''(x_0) = \frac{\ddot{\varphi}_2(t_0)}{\ddot{\varphi}_1(t_0)} * \frac{1}{\dot{\varphi}_1(t_0)} = \frac{\varphi_2''(t_0)\varphi_1'(t_0) - \varphi_1''(t_0)\varphi_2'(t_0)}{(\varphi_1'(t_0))^3}, \text{ kde } t_0 = \varphi_1^{-1}(x_0).$$

Důkaz:

Nechť platí

$$f(x_0) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x_0)).$$

Derivováním této rovnosti dostaneme (pravou stranu derivujeme jako složenou funkci)

$$f'(x_0) = \varphi_2'(\varphi_1^{-1}(x_0)) * (\varphi_1^{-1}(x_0))' = \frac{\varphi_2'(\varphi_1^{-1}(x_0))}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(x_0))} = \frac{\dot{\varphi}_2(t_0)}{\dot{\varphi}_1(t_0)}.$$

Analogicky dostáváme druhou derivaci.

C.B.D

Křivky zadané parametricky jsou určeny parametrickými rovnicemi

$$x = x(t),$$

$$y = y(t), \text{ kde } t \text{ je parametr.}$$

Při vyšetřování postupujeme následovně:

1. Určíme definiční obor křivky K (tj. definiční obory funkcí $x(t), y(t)$), intervaly spojitosti funkcí $x(t), y(t)$, body nespojitosti a nulové body.
2. Ověříme, zda křivka není souměrná podle některé z os nebo periodická.
3. Vypočítáme limity v krajních bodech spojitosti definičního oboru křivky K .
4. Určíme derivaci funkcí $x(t), y(t)$ a nulové body $\dot{x}(t)$. Na každém intervalu, kde $\dot{x}(t) \neq 0$ existuje inverzní funkce $x^{-1}(t)$. Parametrické rovnice $x = x(t), y = y(t)$ určují funkci $y = f(x) = y(x^{-1}(x))$. Křivka K je sjednocením grafů funkcí na

těchto intervalech. Funkce na jednotlivých intervalech pak vyšetřujeme podle kapitoly 1.1.

Parametricky vyšetřujeme například cyklické křivky. Cyklické křivky rozdělujeme na cykloidy, epicykloidy a hypocykloidy. V této kapitole rozebereme cykloidy a hypocykloidy. Epicykloidy budou probrány v následující kapitole.

Cykloidy vznikají kutálením kružnice po ose x . V případě, že bod opisující cykloidu je na kružnici, vzniká klasická cykloida. Pokud je bod uvnitř kružnice, dostaneme zkrácenou cykloidu, v opačném případě dostáváme prodlouženou cykloidu.

Hypocykloidy vznikají kutálením kružnice o poloměru a uvnitř kružnice o poloměru b . Hypocykloidy mají parametrické rovnice ve tvaru:

$$\begin{aligned}x &= (a-b)\cos t - b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right), \\y &= (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right), \quad t \in \langle 0; +\infty \rangle,\end{aligned}$$

kde t je parametr.

V následujících příkladech vyšetříme průběh jedné hypocykloidy a klasické cykloidy. Příkladem hypocykloidy bude asteroida. Je dána kružnice o poloměru a .

Uvnitř této kružnice se kutálí kružnice o poloměru $\frac{a}{4}$, na které je zvolen pevný bod A .

Tento bod opisuje asteroidu.

Příklad 1.3.1

Vyšetřete průběh křivky, která má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned}x(t) &= a\cos^3 t \\y(t) &= a\sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad a > 0.\end{aligned}$$

Řešení:

Budeme postupovat podle výše uvedeného schématu. Nejprve ověříme, zda daná křivka není souměrná podle některé z os. Pro snadnější ověření se pokusíme vyloučit parametr

t . Obdržíme rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Z této rovnice je patrné, že proměnné x a y jsou

ve druhé mocnině, tudíž je křivka souměrná podle osy x i podle osy y . Křivku tedy budeme vyšetřovat jen na intervalu, kde $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle = I$.

Nyní určíme $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ a najdeme nulové body derivace $\dot{x}(t)$.

$$\dot{x}(t) = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\dot{y}(t) = 3a \sin^2 t \cos t$$

Vyřešíme rovnici $\dot{x}(t) = 0$, tedy $-3a \cos^2 t \sin t = 0$. V intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ dostáváme pouze bod $t = 0$. Interval I zůstává nezměněn, můžeme tedy křivku na tomto intervalu

považovat za funkci $y = f(x)$. Z rovnice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ vyjádříme $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$.

Vypočteme hodnoty x pro krajní body intervalu I .

$$x(0) = a$$

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Průběh funkce $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$ budeme vyšetřovat na intervalu $\left\langle a \frac{\sqrt{2}}{2}; a \right\rangle$.

Vypočítáme první a druhou derivaci

$$f'(x) = - \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$f''(x) = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}.$$

Určíme nulové body první a druhé derivace, lokální extrémů a inflexní body.

První derivace je rovna nule pro $x = a$, pro ostatní x je záporná. Funkce je tedy v celém intervalu I klesající, v bodě $x = a$ má lokální minimum.

Druhá derivace je kladná v celém intervalu I , neexistuje tedy žádný inflexní bod.

Funkce je v intervalu I konvexní.

Limity v krajních bodech intervalu I jsou

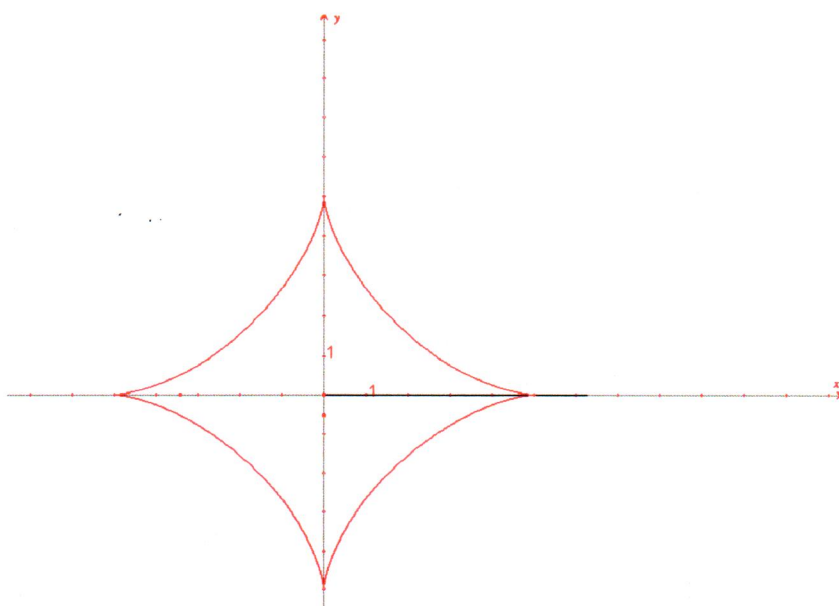
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = a \frac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce je tedy omezená a tudíž nemá žádnou

asymptotu. Určíme ještě souřadnici y pro krajní body intervalu I :

$$y(0) = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nyní můžeme sestavit graf křivky (obr. 1.3.1) s využitím souměrnosti podle souřadných os.



Obr. 1.3.1: Asteroida

V dalším příkladu vyšetříme průběh klasické cykloidy. Klasická cykloida vzniká při kutálení kružnice, na které je dán pevný bod B , po ose x .

Příklad 1.3.2

Vyšetřete průběh křivky dané parametricky:

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t), \quad t \in (-\infty; \infty).$$

Řešení:

Nejprve určíme derivaci $\dot{x}(t)$ a její nulové body:

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t) = 0,$$

$$1 - \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1$$

Vyřešením této rovnice dostáváme nulové body derivace $\dot{x}(t)$:

$$t = 0 + 2k\pi.$$

Vidíme, že se nulový bod periodicky opakuje s periodou 2π . Zkusíme ověřit, zda křivka nemá také periodu 2π .

Dosadíme do zadaných parametrických rovnic:

$$x(t + 2\pi) = a(t + 2\pi - \sin(t + 2\pi)) = 2a\pi + a(t - \sin t)$$

$$y(t + 2\pi) = a(1 - \cos(t + 2\pi)) = a(1 - \cos t) = y(t)$$

Dostáváme, že křivka je periodická s periodou 2π . Stačí ji tedy vyšetřovat na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Vyšetřujeme tedy křivku zadanou parametrickými rovnicemi

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t), \quad t \in (0; 2\pi).$$

Určíme derivace $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ a vypočítáme první a druhou derivaci a lokální extrémy:

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t)$$

$$\dot{y}(t) = a \sin t,$$

podle věty 1.3.1 dostaneme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2 \cos t(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t}{a^3 (1 - \cos t)^3}.$$

Lokální extrémy nastávají v bodech, kde $\frac{dy}{dx} = 0$, nebo neexistuje. Dostáváme tedy:

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = \pi,$$

neexistuje právě tehdy, když $1 - \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, 2\pi$. Pro určení lokálního minima nebo maxima vypočteme hodnotu druhé derivace pro $t = \pi$, dostaneme

$$\frac{a^2 \cos t(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t}{a^3 (1 - \cos t)^3} = \frac{-2a^2}{8a^3} = -\frac{1}{4a} < 0.$$

V bodě $t = \pi$ je tedy lokální maximum a jeho hodnota je:

$$x(\pi) = a(\pi - \sin \pi) = a\pi$$

$$y(\pi) = a(1 - \cos \pi) = 2a.$$

Z první derivace ještě určíme monotonii:

$$\frac{dy}{dx} > 0, t \in \langle 0, \pi \rangle,$$

$$\frac{dy}{dx} < 0, t \in \langle \pi, 2\pi \rangle.$$

Křivka je tedy v intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ rostoucí a v intervalu $\langle \pi; 2\pi \rangle$ klesající.

Z druhé derivace určíme inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2 \cos t(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t}{a^3(1 - \cos t)^3}, \text{ po úpravě dostáváme } \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2} < 0.$$

Druhá derivace je vždy záporná, neexistuje tedy žádný inflexní bod a křivka je v celém intervalu I konkávní. Limity v krajních bodech intervalu I jsou vlastní, funkce nemá žádné asymptoty.

Pro narysování grafu určíme ještě hodnoty v některých bodech:

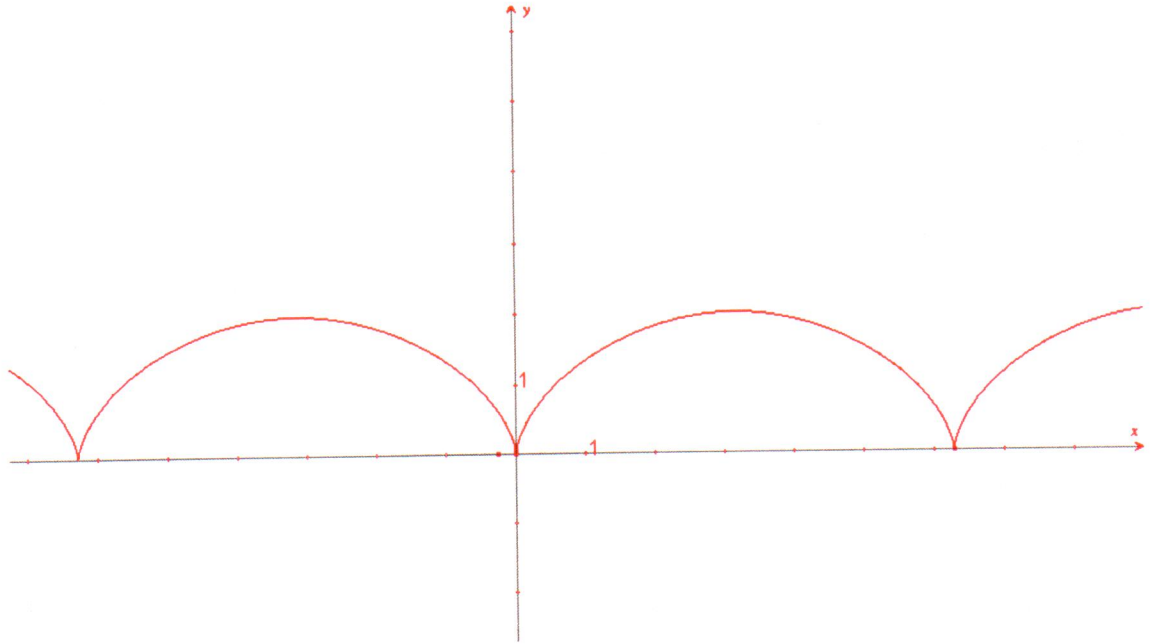
$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a \doteq 0,57a$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)a \doteq 5,71a$$

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a.$$

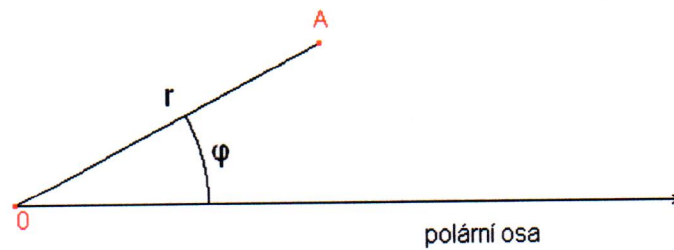
Vzhledem k periodičnosti dostáváme celý graf (obr. 1.3.2).



Obr. 1.3.2: Cykloida

1.4 Vyšetřování průběhu křivky dané v polárních souřadnicích

Křivky v polárních souřadnicích jsou určeny pomocí poloměru r a úhlu φ (obr. 1.4.1).



A je bodem křivky

Obr. 1.4.1

Kladná poloosa x se nazývá polární osa. Souřadnice x, y křivky zadané v polárních souřadnicích jsou:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Křivka je dána předpisem $r(\varphi)$.

Pro vyšetřování průběhu křivky označíme souřadnice

$$x = x(\varphi),$$

$$y = y(\varphi).$$

Při vyšetřování postupujeme následovně:

1. Určíme definiční obor křivky K (tj. definiční obory funkcí $x(\varphi), y(\varphi)$), intervaly spojitosti funkcí $x(\varphi), y(\varphi)$, body nespojitosti a nulové body.
2. Ověříme, zda křivka není souměrná podle některé z os nebo periodická.
3. Vypočítáme limity v krajních bodech spojitosti definičního oboru křivky K .
4. Určíme derivaci funkcí $x(\varphi), y(\varphi)$ a nulové body $\dot{x}(\varphi)$. Na každém intervalu, kde $\dot{x}(\varphi) \neq 0$ existuje inverzní funkce $x^{-1}(\varphi)$. Parametrické rovnice $x = x(\varphi), y = y(\varphi)$ určují funkci $y = f(x) = y(x^{-1}(x))$. Křivka K je sjednocením grafů funkcí na těchto intervalech.

Polární souřadnice se používají pro vyšetřování dalších druhů cyklických křivek, mezi které patří například epicykloidy.

Epicykloidy vznikají kutálením kružnice po vnitřku dané kružnice. Epicykloidy mají rovnice:

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \left(\frac{a + b}{b} t \right),$$

$$y = (a + b) \sin t - b \sin \left(\frac{a + b}{b} t \right), \quad t \in \langle 0; +\infty \rangle,$$

kde a je poloměr kutálející se kružnice, b je poloměr pevné kružnice a t je parametr. Pro speciální případ $a = b$ dostáváme křivku, která se nazývá kardioida. V následujícím příkladu vyšetříme její průběh.

Příklad 1.4.1

Vyšetřete průběh křivky dané v polárních souřadnicích předpisem

$$r(\varphi) = 1 + \cos \varphi, \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Řešení:

Vyjádříme souřadnice x, y pomocí polárních souřadnic:

$$x = (1 + \cos \varphi) \cos \varphi$$

$$y = (1 + \cos \varphi) \sin \varphi$$

Určíme derivace

$$\dot{x}(\varphi) = -\sin \varphi \cos \varphi - (1 + \cos \varphi) \sin \varphi$$

$$\dot{y}(\varphi) = -\sin^2 \varphi + (1 + \cos \varphi) \cos \varphi.$$

Určíme nulový bod $\dot{x}(\varphi)$:

$$-\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$-\sin 2\varphi = \sin \varphi$$

Dostáváme body $\varphi = 0, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}$. Křivka se nám rozpadá na 4 funkce s definičními

$$\text{obory } I_1 = \left\langle 0; \frac{5\pi}{6} \right\rangle, I_2 = \left\langle \frac{5\pi}{6}; \pi \right\rangle, I_3 = \left\langle \pi; \frac{7\pi}{6} \right\rangle, I_4 = \left\langle \frac{7\pi}{6}; 2\pi \right\rangle.$$

Ověříme, zda křivka není souměrná podle některé z os. Protože $\cos \varphi = \cos(2\pi - \varphi)$, dostáváme, že křivka je souměrná podle osy x . Stačí se tedy při vyšetřování omezit na intervaly I_1, I_2 .

1. Vyšetření v intervalu I_1

Určíme první a druhou derivaci a lokální extrém:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 \varphi + (1 + \cos \varphi) \cos \varphi}{-\sin \varphi \cos \varphi - (1 + \cos \varphi) \sin \varphi}, \text{ po úpravě dostáváme } -\frac{\cos 2\varphi + \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin \varphi}.$$

Pro výpočet druhé derivace ještě určíme:

$$\ddot{x}(\varphi) = -2 \cos 2\varphi - \cos \varphi$$

$$\ddot{y}(\varphi) = -2 \sin 2\varphi - \sin \varphi,$$

Druhá derivace bude:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-2 \sin 2\varphi - \sin \varphi)(-\sin 2\varphi - \sin \varphi) - (-2 \cos 2\varphi - \cos \varphi)(\cos 2\varphi + \cos \varphi)}{(-\sin 2\varphi - \sin \varphi)^3},$$

po úpravě dostáváme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3 + 3 \cos \varphi}{(-\sin 2\varphi - \sin \varphi)^3}.$$

Určíme nulové body první derivace:

$$-\frac{\cos 2\varphi + \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin \varphi} = 0 \Leftrightarrow \cos 2\varphi + \cos \varphi = 0,$$

$$\cos 2\varphi = -\cos \varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

V intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle$ je derivace záporná, křivka je tedy klesající.

V intervalu $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ je derivace kladná, křivka je tedy rostoucí.

Druhá derivace v bodě $\varphi = \frac{\pi}{3}$ je $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$, křivka je tedy konkávní. V bodě $\varphi = \frac{\pi}{3}$ je

lokální maximum s hodnotou $\left[0,75; \frac{3\sqrt{3}}{4} \right]$.

Druhá derivace je v intervalu I_1 záporná, křivka je v celém intervalu konkávní.

Neexistuje inflexní bod.

2. Vyšetření v intervalu I_2

První derivace $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2\varphi + \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin \varphi}$ je v intervalu I_2 záporná, funkce je tedy klesající.

Druhá derivace $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3 + 3 \cos \varphi}{(-\sin 2\varphi - \sin \varphi)^3}$ je v intervalu I_2 kladná, funkce je tedy

konvexní. Neexistuje tedy inflexní bod.

Pro sestavení grafu křivky určíme hodnoty v některých bodech:

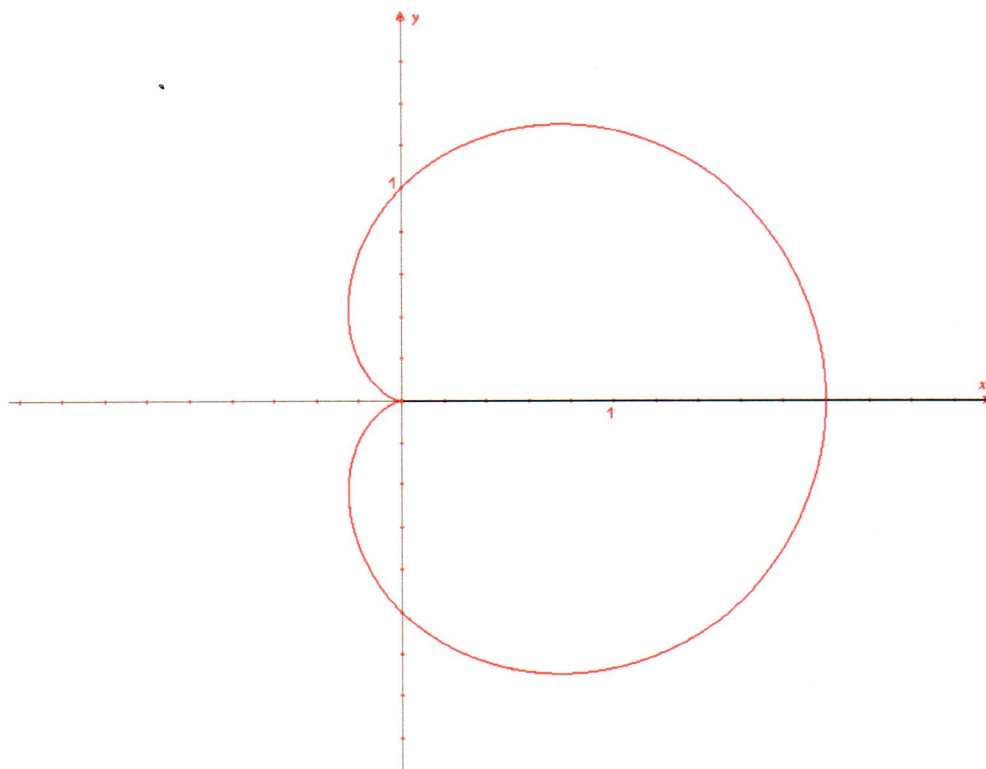
$$\varphi = 0 \qquad x = 2 \qquad y = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{6} \qquad x = \frac{3-2\sqrt{3}}{4} \doteq -0,12 \qquad y = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \doteq 0,07$$

$$\varphi = \pi \qquad x = 0 \qquad y = 0$$

Vzhledem k souměrnosti podle osy x dostaneme celou křivku (obr. 1.4.2).



Obr. 1.4.2: Kardioda

Další zajímavou křivkou, pro kterou je vhodné použít polární souřadnice je Bernoulliho lemniskáta. Je to množina bodů v rovině, u nichž součin vzdáleností od dvou pevných bodů F_1, F_2 (ohnisek) v téže rovině je roven $\left(\frac{F_1 F_2}{2}\right)^2 = a^2$. Její průběh vyšetříme v následujícím příkladu.

Příklad 1.4.2

Vyšetřete průběh křivky zadané rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Řešení:

Z uvedené rovnice je vidět, že křivka je souměrná podle obou souřadných os.

Pro snadnější vyšetřování průběhu dané křivky se pokusíme o zavedení polárních souřadnic.

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Po dosazení za x a y dostáváme

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi).$$

Po úpravě

$$r^4 = a^2 r^2 \cos 2\varphi$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Pro určení definičního oboru vyřešíme rovnici:

$$\cos 2\varphi \geq 0 \text{ a dostáváme}$$

$$D(K) = \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle.$$

Vzhledem k souměrnosti podle obou souřadných os bude stačit, omezíme-li se jen na

$$\text{interval } I = \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

Po dosazení do parametrických rovnic dostáváme:

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi$$

$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi.$$

Nejprve určíme nulové body derivace $\dot{x}(\varphi)$:

$$\dot{x}(\varphi) = -a \left(\frac{\sin 2\varphi \cos \varphi + \cos 2\varphi \sin \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) = -a \frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 0$$

$$-a \sin 3\varphi = 0$$

$$\sin 3\varphi = 0$$

$$\varphi = 0 + k \frac{\pi}{3}, k \in Z.$$

Vypočítáme první a druhou derivaci. Pro její výpočet potřebujeme určit

$$\ddot{x}(\varphi) = -a \frac{2 \cos \varphi + \cos 5\varphi}{(\sqrt{\cos 2\varphi})^3}$$

$$\dot{y}(\varphi) = \frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$\ddot{y}(\varphi) = -a \frac{2 \sin \varphi + \sin 5\varphi}{(\sqrt{\cos 2\varphi})^3}$$

Pro první derivace podle věty 1.3.1 dostáváme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \cos 3\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi} a \sin 3\varphi} = -\cotg 3\varphi$$

pro druhou derivaci:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(2 \sin \varphi + \sin 5\varphi) \sin 3\varphi + (2 \cos \varphi + \cos 5\varphi) \cos 3\varphi}{-a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin^3 3\varphi} = -\frac{3\sqrt{\cos 2\varphi}}{a \sin^3 3\varphi}$$

Nyní vypočítáme nulové body první derivace:

$$\frac{dy}{dx} = -\cotg 3\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

Do intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ spadá pouze hodnota $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Druhá derivace v tomto bodě je

záporná, křivka zde má své lokální maximum.

První derivace je v intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle$ kladná, křivka je tedy rostoucí.

V intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ je záporná, křivka je klesající.

Druhá derivace není v intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ nikdy rovna nule, neexistuje tedy žádný inflexní bod.

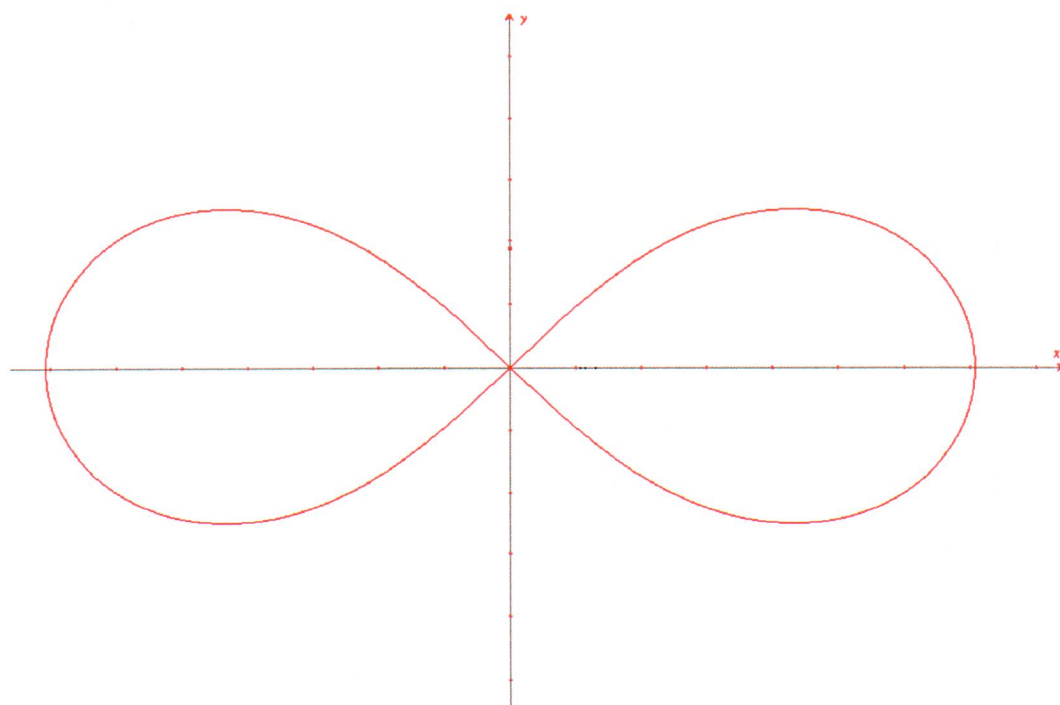
Pro sestrojení grafu určíme hodnoty v některých bodech:

$$\varphi = 0 \qquad x = a \qquad y = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \qquad x \doteq 0,61a \qquad y \doteq 0,35a$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad x = 0 \qquad y = 0$$

Vzhledem k souměrnosti křivky podle obou souřadných os dostáváme celou křivku (obr. 1.4.3).



Obr. 1.4.3: Bernoulliova lemniskáta

Další skupinou křivek jsou spirály. Jsou definovány jako trajektorie bodů, které se pohybují po přímce podle daného pravidla, zatímco přímka rotuje konstantní rychlostí kolem daného pevného bodu. Pro křivky tohoto druhu je též výhodné využít polární souřadnice. V následujícím příkladu vyšetříme průběh jedné ze spirál, a to Archimédovy spirály.

Příklad 1.4.3

Vyšetřete průběh křivky, která je v polárních souřadnicích dána rovnicí

$$r(\varphi) = k\varphi, \text{ kde } \varphi \in \langle 0; +\infty \rangle \text{ a } k > 0 \text{ je konstanta.}$$

Řešení:

Nejprve vyjádříme souřadnice x, y pomocí polárních souřadnic.

$$x = k\varphi \cos \varphi,$$

$$y = k\varphi \sin \varphi.$$

$$D(K) = \langle 0; +\infty \rangle.$$

Pro zjednodušení si zvolíme parametr $k = 1$.

Dále vypočítáme derivace:

$$\dot{x}(\varphi) = \cos \varphi - \varphi \sin \varphi,$$

$$\dot{y}(\varphi) = \sin \varphi + \varphi \cos \varphi.$$

Nyní můžeme určit nulové body derivace $\dot{x}(\varphi)$:

$$\cos \varphi - \varphi \sin \varphi = 0$$

$$\varphi = \operatorname{cotg} \varphi$$

$$\varphi \doteq \frac{\sqrt{3}\pi}{2}, \frac{12\pi}{11}, \frac{41\pi}{20}, \text{ atd.}$$

Nelze určit všechny nulové body derivace $\dot{x}(\varphi)$, je jich nekonečně mnoho. Pro zjednodušení se omezíme na interval $\langle 0; 2\pi \rangle$. Tento interval se nám rozpadne na tři části:

$$I_1 = \left\langle 0; \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right\rangle, I_2 = \left\langle \frac{\sqrt{3}\pi}{2}; \frac{12\pi}{11} \right\rangle, I_3 = \left\langle \frac{12\pi}{11}; 2\pi \right\rangle.$$

Nyní určíme zbývající derivace:

$$\ddot{x}(\varphi) = -2 \sin \varphi - \varphi \cos \varphi,$$

$$\dot{y}(\varphi) = \sin \varphi + \varphi \cos \varphi,$$

$$\ddot{y}(\varphi) = 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi.$$

Vypočítáme první derivaci a určíme její nulové body:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi} = 0$$

$$\sin \varphi + \varphi \cos \varphi = 0$$

$$-\varphi = \tan \varphi$$

$$\varphi \doteq \frac{16\pi}{25}, \frac{39\pi}{25}.$$

V těchto bodech má křivka lokální extrém, v prvním případě lokální maximum, ve druhém lokální minimum.

Druhá derivace a její nulové body jsou:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{(2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - (-2 \sin \varphi - \varphi \cos \varphi)(\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^3} = \\ &= \frac{2 + \varphi^2}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^3} = 0 \end{aligned}$$

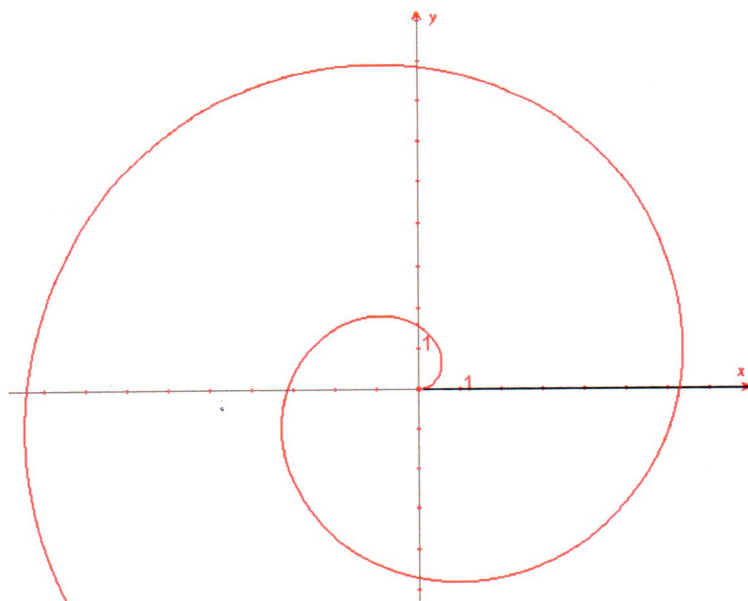
$$2 + \varphi^2 = 0$$

Tato rovnice nemá v R řešení, neexistují tedy inflexní body.

Nyní vyšetříme křivku v jednotlivých intervalech. Pro určení monotonie se nám interval I_2 a I_3 rozpadá na další 2 intervaly, vzhledem k tomu, že v těchto intervalech má křivka lokální extrém. Monotonii určíme podle následující tabulky.

φ	$\left\langle 0; \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right\rangle$	$\left\langle \frac{\sqrt{3}\pi}{2}; \frac{16\pi}{25} \right\rangle$	$\left\langle \frac{16\pi}{25}; \frac{12\pi}{11} \right\rangle$	$\left\langle \frac{12\pi}{11}; \frac{39\pi}{25} \right\rangle$	$\left\langle \frac{39\pi}{25}; 2\pi \right\rangle$
$\frac{dy}{dx}$	+	-	+	-	+
$\frac{d^2 y}{dx^2}$	+	-	-	+	+
monotonie	rostoucí	klesající	rostoucí	klesající	rostoucí
konvexnost	konvexní	konkávní	konkávní	konvexní	konvexní
konkávnost					

Nyní již můžeme sestavit graf zadané křivky (obr. 1.4.4).



Obr. 1.4.4: Archimédova spirála

2. Délka rovinné křivky

V této kapitole rozebereme problematiku délky rovinné křivky a na příkladech ukážeme její výpočet. Uvedeme zde definice a věty, které budeme v příkladech používat.

Definice 2.1 - Křivka

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a < b$. Řekneme, že křivka určená funkcí f na intervalu $\langle a, b \rangle$ je množina $C(a, b, f)$, pro kterou platí:

$$C(a, b, f) = \{[x, y] \in R \times R : x \in \langle a, b \rangle \wedge y = f(x)\}.$$

Definice 2.2 – Dělení intervalu $\langle a, b \rangle$

Konečnou posloupnost bodů $\{x_i\}_{i=0}^n$ nazveme dělením intervalu $\langle a, b \rangle$ jestliže platí:

$$x_0 = a; x_n = b; (\forall i = 0, \dots, n) : x_i < x_{i+1}.$$

Tuto posloupnost značíme D .

Definice 2.3 – Délka lomené čáry

Nechť D je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ s dělicími body $\{x_i\}_{i=0}^n$. Množinu $L(D, f)$ označíme jako délku lomené čáry určené body $[x_i, f(x_i)]_{i=0}^n$ a dělením D .

Definice 2.4 – Délka rovinné křivky na intervalu $\langle a, b \rangle$

Nechť D je libovolné dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Jestliže množina čísel $L(D, f)$ je shora omezená, říkáme, že křivka $C(a, b, f)$ má konečnou délku a délku $L(a, b, f)$ této křivky nazýváme číslo $\sup\{L(D, f), D \text{ je libovolné dělení intervalu } \langle a, b \rangle\}$.

Poznámka 2.1:

Existuje křivka, která je grafem funkce spojitě na omezeném intervalu. Tato křivka nemá konečnou délku (příklad 2.1).

Příklad 2.1

Mějme 2 posloupnosti bodů

$$A_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), B_n\left(\frac{1}{n}, 0\right).$$

Určete délku lomené čáry dané body $B_1A_2, A_2B_3, \dots, A_{2n}B_{2n+1}, \dots$

Řešení:

Tato lomená čára je na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ spojitá.

Označme L_1 délku lomené čáry B_1A_2, A_2B_3 , L_2 délku lomené čáry $B_3A_4, A_4B_5, \dots, L_n$.

(obr. 2.1)

L_1 je větší než délka kolmice A_2B_2 .

$$L_1 > |A_2B_2| = 2 \frac{1}{2} = 1,$$

analogicky platí pro další členy posloupnosti

$$L_2 > \frac{1}{3}, L_3 > \frac{1}{4}, \dots, L_n > \frac{1}{n}.$$

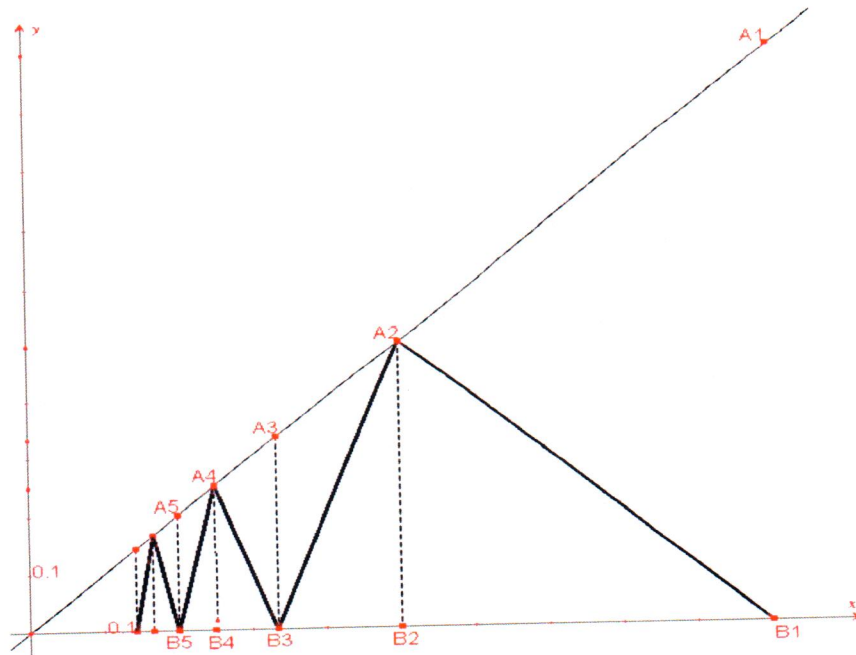
Pro délku lomené čáry platí

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

Označme $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Dále platí $L > S_n$. Posloupnost součtů S_n má nevlastní

limitu $+\infty$.

Z výše uvedeného vyplývá, že posloupnost délek lomených čar není shora omezená a nemá tedy konečnou délku.



Obr. 2.1

Pro odvození délky křivky se můžeme opřít o fyzikální představu křivky. Z tohoto pohledu je to trajektorie bodu, který se pohybuje v čase, který je dán intervalem $\langle a, b \rangle$.

Tento časový interval rozdělíme na kousky o velikosti dt . Každý takový časový podinterval určuje kousek křivky. Budeme předpokládat, že díky své malé velikosti jsou tyto kousky přímé. Jejich velikost nalezneme pomocí Pythagorovy věty. Ujijeme přitom substituci a dostáváme

$$L = \sum_{t=a}^{t=b} \sqrt{dx + dy} = \sum_{t=a}^{t=b} \sqrt{[x'(t)dt]^2 + [y'(t)dt]^2} = \sum_{t=a}^{t=b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} * dt \quad , \text{ což můžeme}$$

aproximovat integrálem a dostáváme tedy

$$\sum_{t=a}^{t=b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} * dt \approx \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Po úpravě dostáváme

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} dt.$$

Podle věty o derivaci parametricky zadané funkce, kterou jsme uvedli v první kapitole, víme, že

$\frac{y'(t)}{x'(t)} = f'(x)$ a tedy dostáváme

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Z předchozích úvah pak dokážeme následující větu.

Věta 2.1 – Výpočet délky rovinné křivky

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, f má vlastní derivaci ve všech bodech intervalu $\langle a, b \rangle$ výjimkou konečného počtu bodů. Nechť existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \text{ pak}$$

křivka $C(a, b, f)$ má konečnou délku

$$L(a, b, f(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Důkaz:

$$\text{Označme } I = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

$$I = \sup\{L(D, f), D \text{ je libovolné dělení intervalu } \langle a, b \rangle\}.$$

Nyní máme dokázat:

1. $L(D, f) \leq I$ pro libovolné dělení D .
2. $\forall \varepsilon > 0; \exists D; I - \varepsilon < L(D, f) \leq I$.

D je libovolné dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Nyní sestrojíme dělení D_1 tak, že každý částečný interval dělení D rozdělíme na polovinu dalším dělicím bodem. Tak sestrojíme až dělení D_m , které vznikne zjemněním předcházejícího dělení. Proto platí

$$L(D, f) \leq L(D_1, f) \leq \dots \leq L(D_m, f) \tag{1}$$

Nyní dokážeme, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L(D_m) = I. \quad (2)$$

Podle (1) platí

$$L(D, f) \leq L(D_m, f) \text{ pro každé } m \text{ a tedy platí } L(D, f) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} L(D_m, f) \text{ (viz poznámka)}$$

\Rightarrow

$L(D, f) \leq I$ pro libovolné dělení D . Tím je bod 1. dokázán.

Je-li $\varepsilon > 0$ jakékoliv číslo, nalezneme podle (2) takový index m , že zjemněné dělení D_m splňuje nerovnost $I - \varepsilon < L(D_m, f)$, kde $D_m = D^*$. Druhá část nerovnosti je dokázána v 1.

Nyní zbývá dokázat rovnici (2).

$$\text{Označme } g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

D_m je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$,

$L(D_m, f) = l_1 + l_2 + \dots + l_n$, kde l_j je délka úsečky spojující body $[x_{j-1}, f(x_{j-1})]$, $[x_j, f(x_j)]$.

$$l_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} \quad (3)$$

Funkce $f(x)$ je spojitá v každém intervalu $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$ a má vlastní derivaci v každém vnitřním bodě intervalu $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$. Podle věty o přírůstku funkce existuje číslo ξ_j takové, že platí:

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } x_{j-1} < \xi_j < x_j.$$

Podle (3) platí

$$l_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f'(\xi_j))^2 (x_j - x_{j-1})^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2} (x_j - x_{j-1}) = g(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Protože $x_{j-1} < \xi_j < x_j$, $g(x)$ má Riemannův integrál $\int_a^b g(x) dx = I$ a $\lim_{m \rightarrow \infty} \nu(D_m) = 0$,

platí:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L(D_m, f) = \int_a^b g(x) dx. \quad \text{C.B.D}$$

Poznámka 2.2:

Existuje-li $\lim a_n$ a je-li $a_n \leq b$ pro všechna $n > n_1$, platí, že $\lim a_n \leq b$.

Poznámka 2.3:

Pro odvození délky rovinné křivky v polárních souřadnicích stačí do předchozího výrazu dosadit za $x(t)$, $y(t)$ výrazy

$$x = r(\varphi) \cos \varphi,$$

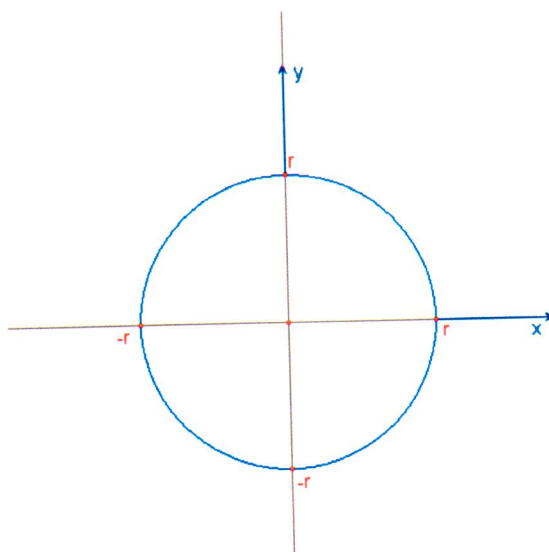
$$y = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Odtud pak dostáváme výraz

$$\int_a^b \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi.$$

Příklad 2.2

Odvoďte vzorec pro obvod kružnice pomocí délky křivky.



Obr. 2.2: Kružnice

Vzhledem k souměrnosti podle osy x budeme počítat pouze délku horního oblouku v prvním kvadrantu, který má rovnici

$$x^2 + y^2 = r^2$$

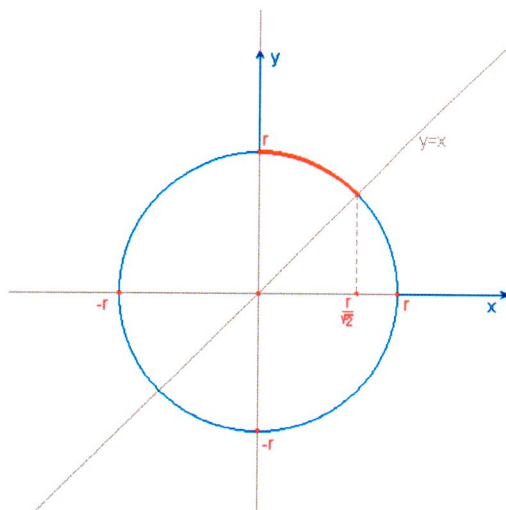
pro úpravě

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Vypočítáme derivaci $f'(x)$ a dostáváme

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Vzhledem k tomu, že $y'(x)$ nemá v bodě $[r,0]$ vlastní limitu a vzhledem k symetrii podle přímky $y = x$, omezíme se na čtvrtinu horního oblouku v prvním kvadrantu, která bod $[r,0]$ neobsahuje.



obr. 2.3

Nyní už můžeme vypočítat délku oblouku podle vzorce

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \text{ kde } a = 0, b = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$L = \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= r \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx = r \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx, \text{ nyní použijeme substituci } \left[\frac{x}{r} = t; dx = r dt \right] \text{ a}$$

dostaneme

$$= r \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = r [\arcsin(t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi r}{4}$$

Nyní jsme vypočítali $\frac{1}{8}$ délky kružnice, proto výsledek ještě vynásobíme 8 a dostáváme vzorec $O = 2\pi r$.

Příklad 2.3

Vypočítejte délku křivky (asteroidy) o rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kde $a > 0$ je dané reálné číslo.

Řešení:

Po úpravě dostaneme

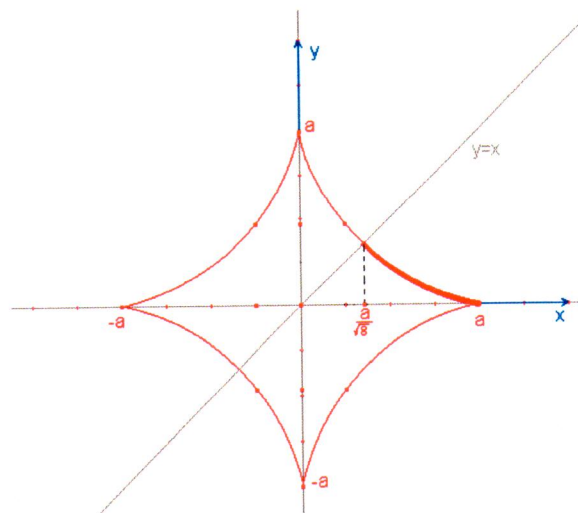
$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \text{ definiční obor } D = \langle -a, a \rangle.$$

Křivka je osově souměrná podle osy x a y .

Nyní vypočítáme derivaci

$$f'(x) = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}} > 0 \text{ v intervalu } \langle 0, a \rangle.$$

Vzhledem k symetrii se omezíme na část křivky v prvním kvadrantu pro x z intervalu $\left\langle \frac{a}{\sqrt[3]{8}}, a \right\rangle$.



obr. 2.4

Délka křivky tedy bude

$$L = 8 \int_{\frac{a}{\sqrt{8}}}^a \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})x^{\frac{-2}{3}}} dx =$$
$$= 8 \int_{\frac{a}{\sqrt{8}}}^a \sqrt{1 + a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{-2}{3}} - 1} dx = 8 \int_{\frac{a}{\sqrt{8}}}^a a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{-1}{3}} dx = 6a.$$

Délka křivky (asteroidy) je $6a$.

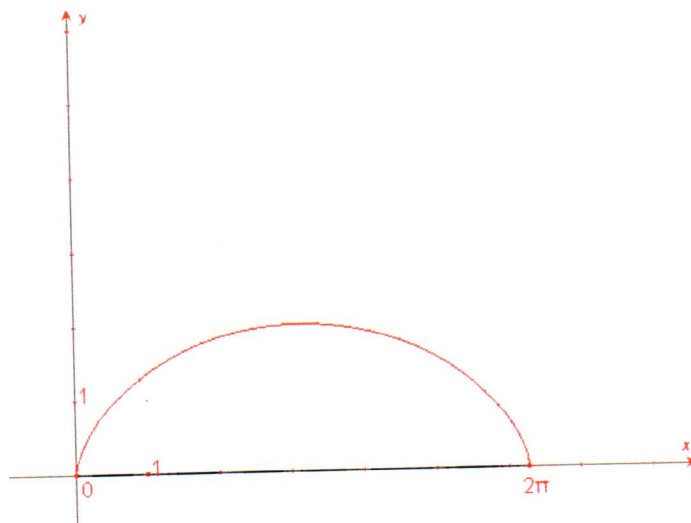
Příklad 2.5

Vypočtete délku jednoho oblouku křivky (cykloidy) o rovnicích

$$x = r(t - \sin(t)),$$

$$y = r(1 - \cos(t)) \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, r > 0.$$

Řešení:



Obr. 2.5

Pro určení mezí vyřešíme nejprve rovnici $x = 0$. Tato rovnice má řešení pro $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Pro výpočet délky určíme derivace $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$:

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)),$$

$$\dot{y}(t) = r \sin(t).$$

Délka křivky bude

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 * (1 - \cos(t))^2 + r^2 * \sin^2(t)} dt = 4r \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\frac{t}{2})}{2} dt = 4r \left[-\cos(\frac{t}{2}) \right]_0^{2\pi} = 8r .$$

Délka jednoho oblouku cykloidy je $8r$.

3. Křivkový integrál

V této kapitole se budeme zabývat křivkovým integrálem 1. druhu. Nejprve uvedeme některé definice potřebné pro zavedení křivkového integrálu.

Definice 3.1 – Oblouk v prostoru R^n

Nechť existuje vektorová funkce $g : \langle a, b \rangle \rightarrow R^n, a < b$ s těmito vlastnostmi:

1. Funkce $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má spojitě derivace v otevřeném intervalu (a, b) .
2. $\forall t \in \langle a, b \rangle$ je $\dot{g}_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.
3. Je-li $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle \wedge t_1 \neq t_2$, pak $g(t_1) \neq g(t_2)$.

Pak množinu $O = \{x \in R^n, x = g(t), t \in \langle a, b \rangle\}$ nazveme obloukem (nebo hladkým obloukem) v R^n .

Vektorovou funkci g nazýváme parametrizací oblouku O .

Definice 3.2 – Křivka v prostoru R^n

Nechť O_1, O_2, \dots, O_n jsou oblouky v prostoru R^n s parametrizacemi

$g_k \langle a_k, b_k \rangle \rightarrow R^n, k = 1, 2, \dots, n$ s těmito vlastnostmi:

1. Žádné tři oblouky nemají společný bod.
2. Dva různé oblouky se neprotínají, nebo mají společný pouze některé ze svých krajních bodů.
3. Pro krajní body jednotlivých oblouků je $g_k(b_k) = g_{k+1}(a_{k+1}), k = 1, 2, \dots, n$.

Pak množinu $K = \bigcup_{k=1}^r O_k$ nazýváme křivkou v R^n .

Parametrizace křivky nazýváme množinu $g = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, která se skládá z jednotlivých parametrizací oblouků tvořících křivku K .

Příklad 3.1

Určete, zda daná vektorová funkce určuje křivku.

a) $\mathbf{g}(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení:

Vidíme, že se jedná o kružnici se středem v počátku a poloměrem r . Lze ji rozložit na dva oblouky a příslušnou parametrizaci upravit takto:

$$g_1(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in \langle 0, \pi \rangle,$$

$$g_2(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in \langle \pi, 2\pi \rangle.$$

b) $\mathbf{g}(t) = (r \cos t, r \sin 2t), t \in \langle 0, \frac{3\pi}{2} \rangle$.

Řešení:

Pokusíme se danou množinu rozložit na oblouky. Určíme funkční hodnoty pro

$$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbf{g}(t) = (0, 0),$$

$$t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \mathbf{g}(t) = (0, 0).$$

Z těchto výsledků můžeme usoudit, že se nejedná o křivku, protože hodnoty pro

$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ splývají. Nelze tedy danou množinu rozdělit na oblouky (odporuje

2. požadavku v definici 4.2).

Definice 3.3 – Křivkový integrál 1. druhu po oblouku

Nechť O je oblouk v R^n , funkce $\mathbf{g}: \langle a, b \rangle \rightarrow R$ je jeho parametrizace. Nechť

$f: O \rightarrow R^n$ je funkce. Existuje-li Riemannův integrál

$$\int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \|\dot{\mathbf{g}}(t)\| dt,$$

Pak toto číslo značíme

$$\int_O f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \|\dot{\mathbf{g}}(t)\| dt$$

a nazýváme ho křivkovým integrálem 1. druhu funkce f po oblouku O .

Poznámka 3.1:

Křivkový integrál 1. druhu funkce f po oblouku O je definován pomocí jednorozměrného Riemannova integrálu, a proto přejímá jeho vlastnosti, z nichž některé uvedeme ve větě 3.1.

Poznámka 3.2:

Výraz $\|\dot{\mathbf{g}}(t)\|$ definujeme jako

$$\|\dot{\mathbf{g}}(t)\| = \sqrt{(\dot{g}_1(t))^2 + (\dot{g}_2(t))^2 + \dots + (\dot{g}_n(t))^2}.$$

Příklad 3.2

Určete hodnotu integrálu $\int_O x^2 ds$, kde $O = \{(x, y) \in R^2; y = \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle\}$.

Řešení:

Nejprve zvolíme vhodnou parametrizaci oblouku O a určíme $\dot{\mathbf{g}}(t)$.

Tedy

$$x = g_1(t) = t, y = g_2(t) = \ln t; \dot{\mathbf{g}}(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right) \neq \mathbf{0}.$$

Nyní můžeme vypočítat hodnotu integrálu

$$\begin{aligned} \int_O x^2 ds &= \int_1^2 t^2 \left\| \left(1, \frac{1}{t}\right) \right\| dt = \\ &= \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt = \left. \begin{array}{l} t^2 + 1 = u, 2t dt = du \\ t = 1 \Rightarrow u = 2 \\ t = 2 \Rightarrow u = 5 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_2^5 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 = \frac{1}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

Příklad 3.3

Určete hodnotu integrálu $\int_O \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, kde O je jeden závit šroubovice o rovnicích

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = rt, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, r > 0.$$

Řešení:

Nejprve určíme $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-r \sin t, r \cos t, r) \neq \mathbf{0}$. Nyní můžeme určit hodnotu integrálu.

Tedy

$$\int_0^{2\pi} \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 t^2}{r^2} \sqrt{(-r \sin t)^2 + r^2 \cos t + r^2} dt = r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = r\sqrt{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8r\pi^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Hodnota daného integrálu je $\frac{8r\pi^3 \sqrt{2}}{3}$.

Věta 3.1 – Vlastnosti křivkového integrálu

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, f, g jsou funkce. Pak platí rovnost

$$\int_0^1 (af + bg) ds = a \int_0^1 f ds + b \int_0^1 g ds, \quad (1)$$

existují-li výrazy na pravé straně.

Nechť O_1, O_2 jsou oblouky, jejich sjednocení $O = O_1 \cup O_2$ je oblouk a jejich průnik

$O_1 \cap O_2$ obsahuje nejvýše krajní body oblouků O_1, O_2 . Pak platí rovnost

$$\int_0^1 f ds = \int_{O_1 \cup O_2} f ds = \int_{O_1} f ds + \int_{O_2} f ds, \quad (2)$$

Existují-li výrazy na pravé straně.

Důkaz:

Důkaz plyne ihned z následujících vlastností Riemannova integrálu:

1. Nechť $a < b$, nechť existují integrály $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$, pak existuje integrál

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2. Nechť $a < b$, $c \in \mathbb{R}$, nechť existuje $\int_a^b f(x)$, pak existuje integrál

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

3. Necht' $a < b < c$, necht' existují integrály $\int_a^b f(x) dx$, $\int_b^c f(x) dx$, pak existuje

$$\text{integrál } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Vlastnost (1) plyne ihned z bodů 1., 2. K důkazu vlastnosti (2) položíme rovnost

$$\int_0^c f ds = \int_a^c f ds,$$

$$\int_0^b f ds = \int_a^b f ds,$$

$$\int_0^c f ds = \int_b^c f ds.$$

Nyní aplikujeme bod 3. na výše uvedené rovnosti.

C.B.D.

Příklad 3.4

Určete hodnotu integrálu $\int_0^O \operatorname{arctg} \frac{x}{y} ds$, kde O je část Archimédovy spirály, která má

v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = \varphi$ a leží uvnitř kruhu o poloměru $r < \frac{\pi}{2}$.

Řešení:

Nejprve parametrizujeme oblouk O . Vhodné bude použití polárních souřadnic $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Po dosazení do rovnice oblouku $r(\varphi) = \varphi$

dostaneme parametrizaci

$$g_1(\varphi) = \varphi \cos \varphi, g_2(\varphi) = \varphi \sin \varphi, 0 < \varphi < r.$$

Vypočteme derivace $\dot{g}_1(\varphi) = \cos \varphi - \sin \varphi$, $\dot{g}_2(\varphi) = \sin \varphi + \cos \varphi$. Vzhledem k tomu, že

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, je $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi) = \varphi$. Nyní již můžeme určit hodnotu integrálu, tedy

$$\int_0^O \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^r \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi) \sqrt{\cos^2 \varphi - 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2\varphi \sin \varphi \cos \varphi + \varphi^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\
&= \int_0^r \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \left. \begin{array}{l} t = 1 + \varphi^2 \\ \varphi = 0 \quad t = 1 \\ \varphi = r \quad t = 1 + r^2 \end{array} \right| = \int_1^{1+r^2} \sqrt{t} dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{1+r^2} = \frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}} + 1}{3}.
\end{aligned}$$

Hodnota daného integrálu je tedy $\frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}} + 1}{3}$.

Příklad 3.5

Určete hodnotu integrálu $\int_O \frac{1}{x^2 + y^2} ds$, kde O je oblouk s parametrickými rovnicemi

$$g_1(t) = e^t \cos t, g_2(t) = e^t \sin t, g_3(t) = e^t, t \in \langle 0, \ln 2 \rangle.$$

Řešení:

Pro danou parametrizaci vypočítáme derivace

$$\dot{g}_1(t) = e^t (\cos t - \sin t), \dot{g}_2(t) = e^t (\sin t + \cos t), \dot{g}_3(t) = e^t.$$

Určíme hodnotu integrálu

$$\begin{aligned}
\int_O \frac{1}{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t} \sqrt{e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt = \\
&= \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{2t}} \sqrt{3e^{2t}} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{2t}} e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^t} dt = \sqrt{3} [-e^{-t}]_0^{\ln 2} = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Hodnota hledaného integrálu je $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Příklad 3.6

Určete hodnotu integrálu $\int_O \sqrt{2y} ds$, kde O je oblouk cykloidy o parametrických

rovnicích $g_1(t) = a(t - \sin t)$, $g_2(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a < 0$.

Řešení:

Určíme derivace $\dot{g}_1(t) = a(1 - \cos t)$, $\dot{g}_2(t) = a \sin t$. Vypočítáme hodnotu integrálu

$$\int_O \sqrt{2y} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a(1 - \cos t)} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^3(1 - \cos t)^2} dt =$$

$$= 2\sqrt{a^3} \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2} dt = 2\sqrt{a^3} [t - \sin t]_0^{2\pi} = 4\pi a^{\frac{3}{2}}.$$

Hledaný integrál má tedy hodnotu $4\pi a^{\frac{3}{2}}$.

Definice 3.4 – Křivkový integrál 1. druhu po křivce

Nechť $K = O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_r$ je křivka v prostoru R^n , g je parametrizace křivky K taková, že $g_k : \langle a_k, b_k \rangle \rightarrow R^n$ je parametrizace oblouku O_k , $k = 1, 2, \dots, r$. Nechť $f : K \rightarrow R^n$ je daná funkce. Existují-li integrály $\int_{O_k} f ds$, $k = 1, 2, \dots, r$, pak číslo

$$\int_K f ds = \sum_{k=1}^r \int_{O_k} f ds$$

nazveme křivkovým integrálem 1. druhu funkce f po křivce K .

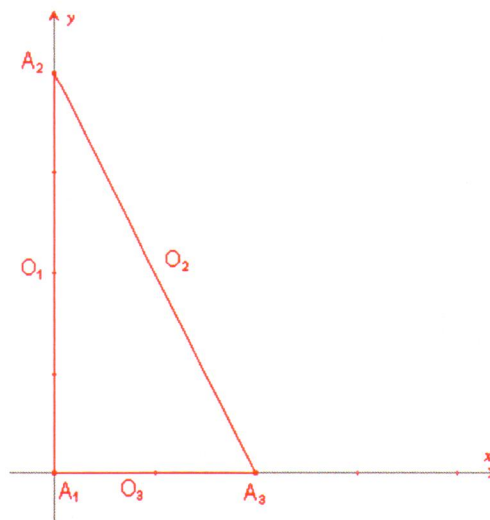
Příklad 3.7

Určete hodnotu integrálu

$$\int_K (x+y) ds, \text{ kde } K \text{ je obvod trojúhelníka s vrcholy } A_1 = [0,0], A_2 = [0,2], A_3 = [1,0].$$

Řešení:

Křivka K je určena třemi oblouky (obr. 3.1).



Obr. 3.1

Nyní určíme parametrizace jednotlivých oblouků (přímek).

$$g_1(t) : x = 0, \quad y = 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$g_2(t) : x = t, \quad y = 2 - 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$g_3(t) : x = 1 - t, \quad y = 0, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Vypočteme $\dot{g}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\dot{g}_1(t) = (0, 2), \quad \dot{g}_2(t) = (1, -2), \quad \dot{g}_3(t) = (-1, 0).$$

Určíme hodnotu integrálu

$$\begin{aligned} \int_K (x+y) ds &= \int_{O_1} (x+y) ds + \int_{O_2} (x+y) ds + \int_{O_3} (x+y) ds = \\ &= \int_0^1 2t \sqrt{4} dt + \int_0^1 (2-t) \sqrt{1+4} dt + \int_0^1 (1-t) \sqrt{1} dt = \int_0^1 4t + (2-t)\sqrt{5} + (1-t) dt = \\ &= \left[2t^2 + \sqrt{5} \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) + t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Hodnota daného integrálu je $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$.

Příklad 3.8

Určete hodnotu integrálu

$$\int_K (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

kde K je šroubovice o rovnicích

$$x = a \cos t,$$

$$y = a \sin t,$$

$$z = bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Řešení:

Parametrizace šroubovice je $\mathbf{g}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Nyní určíme $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, $|\dot{\mathbf{g}}(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Určíme hodnotu integrálu

$$\begin{aligned} \int_K (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\int_0^{2\pi} a^2 + b^2 t^2 dt \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(a^2 \int_0^{2\pi} 1 dt + b^2 \int_0^{2\pi} t^2 dt \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(a^2 [t]_0^{2\pi} + b^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(a^2 2\pi + b^2 \frac{8\pi^3}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4b^2 \pi^2). \end{aligned}$$

Hodnota hledaného integrálu je tedy

$$\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4b^2 \pi^2).$$

Příklad 3.9

Určete hodnotu integrálu $\int_K xy ds$, kde K je obvod obdélníka ABCD s vrcholy $A=[0,0]$,

$$B=[0,2], C=[4,2], D=[4,0].$$

Řešení:

Křivka K je určena čtyřmi oblouky o parametrických rovnicích

$$g_1(t) : x = t, y = 0, t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

$$g_2(t) : x = 2, y = t, t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

$$g_3(t) : x = t, y = 4, t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

$$g_4(t) : x = 0, y = t, t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

$$\text{Určíme derivace } \dot{g}_1(t) = (1, 0), \dot{g}_2(t) = (0, 1), \dot{g}_3(t) = (1, 0), \dot{g}_4(t) = (0, 1).$$

Nyní vypočteme hodnotu integrálu

$$\begin{aligned} \int_K xy ds &= \int_{O_1} xy ds + \int_{O_2} xy ds + \int_{O_3} xy ds + \int_{O_4} xy ds = \int_0^2 0 dt + \int_0^2 2t dt + \int_0^2 4t dt + \int_0^2 0 dt = \\ &= 0 + [t^2]_0^2 + [2t^2]_0^2 + 0 = 16 + 8 = 24. \end{aligned}$$

Hodnota hledaného integrálu je tedy 24.

Příklad 3.10

Vypočítejte hodnotu integrálu $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde K je kružnice o rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad a < 0.$$

Řešení:

Kružnici K parametrizujeme pomocí polárních souřadnic $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$. Po dosazení dostáváme $r = 2a \cos \varphi$.

Dosadíme-li do rovnic $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$, dostáváme parametrizaci

$$g_1(\varphi) = 2a \cos^2 \varphi, \quad g_2(\varphi) = 2a \sin \varphi \cos \varphi.$$

Vypočteme derivace $\dot{g}_1(\varphi) = -2a \sin 2\varphi$, $\dot{g}_2(\varphi) = 2a \cos 2\varphi$. Nyní můžeme určit hodnotu integrálu

$$\begin{aligned} \int_K \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^\pi \sqrt{4a^2 \cos^4 \varphi + 4a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \sqrt{4a^2 \sin^2 2\varphi + 4a^2 \cos^2 2\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \sqrt{16a^4 \cos^2 \varphi} d\varphi = 4a^2 \int_0^\pi |\cos \varphi| d\varphi = 4a^2 \left[\sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4a^2 \left[-\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right] \right] = 8a^2. \end{aligned}$$

Ve výpočtu integrálu jsme využili toho, že $|\cos \varphi| = \cos \varphi$, v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a

$$|\cos \varphi| = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ v intervalu } \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle.$$

Hodnota daného integrálu je tedy $8a^2$.

Příklad 3.11

Určete hodnotu integrálu $\int_K z ds$, kde K je kuželová šroubovice o rovnicích

$$x = t \cos t,$$

$$y = t \sin t,$$

$$z = t, \quad t \in \langle 0, t_0 \rangle.$$

Řešení:

Pro danou parametrizaci vypočítáme derivace

$$\dot{g}_1(t) = \cos t - t \sin t, \quad \dot{g}_2(t) = \sin t + t \cos t, \quad \dot{g}_3(t) = 1.$$

Určíme hodnotu integrálu

$$\int_K z \, ds = \int_0^{t_0} t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} \, dt = \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} \, dt = \left. \begin{array}{l} u = 2 + t^2 \\ t = 0 \rightarrow u = 2 \\ t = t_0 \rightarrow u = 2 + t_0^2 \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{2} \int_2^{2+t_0^2} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_2^{2+t_0^2} = \frac{1}{3} \left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right].$$

Hledaný integrál má tedy hodnotu $\frac{1}{3} \left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right]$.

Příklad 4.3

Vypočtete délku části křivky (šroubovice) zadané rovnicemi

$$x(t) = a \cos(t),$$

$$y(t) = a \sin(t),$$

$$z(t) = bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

od bodu $[a, 0, 0]$ do bodu $[a, 0, 2b\pi]$.

Řešení

Pro výpočet nejprve určíme meze. Vyřešíme tedy rovnice $a \cos(t) = a, bt = 2b\pi$.

Z těchto rovnic dostáváme $t = 0$ (dolní mez) a $t = 2\pi$ (horní mez).

Nyní určíme derivace

$$\dot{x}(t) = -a \sin(t),$$

$$\dot{y}(t) = a \cos(t),$$

$$\dot{z}(t) = b.$$

Derivace jsou definované a spojité na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Pro délku šroubovice dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + b^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \sqrt{a^2 + b^2} [t]_0^{2\pi} =$$

$$2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Délka šroubovice je $2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$.

Závěr

Pokusili jsme se nastínit problematiku rovinné křivky a její délky. Ilustrovali jsme na příkladech vyšetřování grafů zajímavých křivek pro různé způsoby zadání a výpočet jejich délky. Na těchto příkladech jsme také ukázali, že některé způsoby zadání křivky jsou z hlediska vyšetřování grafů výhodnější. Jedná se například o zavedení polárních souřadnic, které nám velmi usnadní práci. Opřeli jsme se přitom o základní poznatky z matematické analýzy, které se týkají především vyšetřování grafů funkcí. Tato problematika je však velice rozsáhlá, proto jsme zde uvedli jen základní definice a věty. Ostatní lze nalézt v některé z publikací uvedených v seznamu použité literatury. V závěru jsme se zaměřili na téma křivkového integrálu a na příkladech jsme ukázali jeho výpočet. Křivkový integrál má široké uplatnění především ve fyzice. Z hlediska matematické analýzy jsme vybrali jednu z mnoha aplikací, jenž se týká délky prostorové křivky.

Čtenář zde dostává komplexnější pohled na téma křivek a jejich vlastností. Doufám, že tato práce pomůže zájemcům o toto téma k lepšímu poznání a pochopení dané problematiky.

Seznam použité literatury

- [1] Černý, I.: Diferenciální a integrální počet 1, Technická univerzita v Liberci, Liberec, 2002.
- [2] Děmidovič, B. P.: Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.
- [3] Fichtengolc, G. M.: Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija I, Nauka, Moskva, 1969.
- [4] Fichtengolc, G. M.: Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija II, Nauka, Moskva, 1969.
- [5] Fichtengolc, G. M.: Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija III, Nauka, Moskva, 1969.
- [6] Grebenča, M. K., Novoselov, S. I., Učebnice matematické analýzy I., Praha, 1955.
- [7] Jarník, V.: Diferenciální počet I, Československá akademie věd, Praha, 1955.
- [8] Jarník, V.: Integrální počet I, Academia, Praha, 1974.
- [9] Kojecká, J., Závodný, M.: Příklady z matematické analýzy I., Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 1999.
- [10] Nagy, J., Taufer, J.: Integrální počet funkcí více proměnných, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999.
- [11] Rossiová, D. A.: Encyklopedie matematiky, Mladá fronta, Praha, 1988.