Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

SLOŽENÁ FUNKCE VE VÝUCE MATEMATICKÉ ANALÝZY

Diplomová práce

Autor: Kateřina Macová

Vedoucí diplomové práce: Ing. Eva Zmeškalová, CSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně na základě vlastních zjištění a s použitím literatury uvedené v závěru.

V Českých Budějovicích dne 20. 4. 2006 Kateřina Macová
....

Děkuji především vedoucí mé diplomové práce Ing. Evě Zmeškalové, CSc., za její odborné vedení, poskytnutí odborné literatury, cenných rad a připomínek.

OBSAH

ÚVOD

Většina lidí má se studiem matematické analýzy asociováno studium funkcí a jejich vlastností, protože matematická analýza se soustředí především na tuto problematiku. Jedná se o velmi rozsáhlý vědní obor, který nemůže obsáhnout ani studium na vysoké škole. A proto je tato práce rozšířením znalostí nabytých při absolvování matematických oborů a zabývá se právě studiem funkcí.

Funkce, jež vznikají skládáním a prostřednictvím aritmetických operací, jsou nejčastěji se vyskytující funkce v matematické analýze, a proto se zaměříme na studium jedné z těchto kategorií, kterou jsou právě složené funkce. Samozřejmě nejdříve budeme muset složené funkce definovat a poté se zaměříme na témata s nimi spojená, jako jsou limity, derivace a integrace složených funkcí.

Ke každému tématu uvedeme definice, věty a k nim příslušné důkazy. Problematiku procvičíme na vhodných příkladech. Studium matematické analýzy podpoříme i grafickou informací, a proto se u některých příkladů vyskytnou i grafy, které byly vytvořeny v matematickém softwaru Cabri II Plus. Pro funkce obecně, tzn. nejen pro funkce složené, je dobré umět je nakreslit nebo umět pro tuto činnost využít nějakého softwaru. Existuje celá řada programů, které slouží jako didaktická pomůcka při studiu i výuce grafů matematických funkcí. Pokud nemáme k dispozici Cabri II Plus, lze využít programu, který je na internetu k dispozici ke stažení zcela zdarma. Lze ho stáhnout ze serveru www.slunecnice.cz pod označením Funkce 2.01.

Terminologii, kterou užíváme, přejímáme především z literatury [1], [2] a [3].

A nyní už jen několik moudrých slov, jejichž autorem je Brahmagupta:

„Jako slunce zastiňuje hvězdy svým jasem,

tak i vzdělaný člověk může zastínit slávu druhých lidí,

bude-li předkládat matematické úlohy,

a dosáhne ještě víc, bude-li je řešit.“

REÁLNÉ FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. DEFINICE SLOŽENÉ FUNKCE

Abychom se mohli začít zabývat problematikou složených funkcí, musíme si je nejprve definovat.

Definice 1.1: Nechť jsou dány funkce f,g. Funkci h takovou, pro kterou platí $D_h=\{x\in D_g, g(x)\in D_f\}; h(x)=f(g(x))$, nazýváme složenou funkcí z $f,g;(g\circ f)$; g je vnitřní funkce, f je vnější funkce.

Uvědomění si vnitřní a vnější funkce u složené funkce a definičního oboru jak složené, tak i vnitřní, resp. vnější funkce je základním stavebním kamenem pro studium dalších kapitol.

Příklad 1.1: Určete vnější a vnitřní funkci f,g zadané složené funkce $h:h(x)=f(g(x))$.

$$h:y=f(g(x))$$

$$h:y=\frac{|x+1|}{x+2}$$

Řešení:[1])

1. možnost: $g:y=x+1$

$$h:y=\frac{|x+1|}{x+1+1}$$

$$f:y=\frac{|x|}{x+1}$$

2. možnost: $g:y=x+2$

---

[1]) Z příkladu 1.1 je vidět, že řešení není jednoznačné. Jedna složená funkce může vzniknout složením celé řady dvojic (trojic, čtveřic, ...) funkcí.

$$h: y=\frac{|x+2-1|}{x+2}$$

$$f: y=\frac{|x-1|}{x}$$

Příklad 1.2: Určete vnější funkci f zadané složené funkce $h: h(x)=f(g(x))$, pokud znáte vnitřní funkci g.

$$h(x)=f(g(x))$$

$$h(x)=\frac{x+3\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$$

$$g(x)=\sqrt{x}$$

Řešení:[2])

$$h(x)=\frac{(\sqrt{x})^2+3(\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x})^4+(\sqrt{x})^2+1}$$

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^4+x^2+1}$$

Příklad 1.3: Vypočtěte $f(x)$, je-li $f(x+1)=x^2-3x+2$.

Řešení:[3])

$$f(x+1)=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=(x+1-3)(x+1-2)$$

$$f(x)=(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$$

---

[2]) Pokud máme pro složenou funkci $h: h(x)=f(g(x))$ nalézt vnější (resp. vnitřní) funkci při zadané vnitřní (resp. vnější) funkci, je řešení jednoznačné.

[3]) Zadání příkladu 1.3 je ekvivalentní k zadání typu: „Najděte vnější funkci f ke složené funkci $h: h(x)=f(g(x))$, pokud znáte vnitřní funkci g."

Příklad 1.4: Vypočtěte $f(x)$, je-li $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2},\left(|x|\geq 2\right)$.

Řešení:[4])

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=(x)^2+2(x)\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^2-2(x)\left(\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$f(x)=x^2-2,\left(|x|\geq\frac{5}{2}\right)$$

Příklad 1.5: Vypočtěte $f(x)$, je-li $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2},(x>0)$.

Řešení:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=\frac{1+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}}{\frac{1}{x}}$$

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Příklad 1.6: Vypočtěte $f(x)$, je-li $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

Řešení:

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2=\left(\frac{x}{1}\right)^2=\left(\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}\right)^2=\left(\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1+x-x}{x+1}}\right)^2=\left(\frac{\frac{x}{x+1}}{1-\frac{x}{x+1}}\right)^2$$

$$f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

---

[4]) Užití vztahu $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Příklad 1.7: Určete vnitřní funkci g zadané složené funkce $h: h(x) = f(g(x))$, pokud znáte vnější funkci f.

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h(x) = \frac{|x+2|}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x}$$

Řešení:

$$h(x) = \frac{|(x+1)+1|}{(x+1)}$$

$$g(x) = x + 1$$

Příklad 1.8: Určete vnitřní funkci g zadané složené funkce $h: h(x) = f(g(x))$, pokud znáte vnější funkci f.

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h(x) = \frac{\ln x^2}{x^2 - 1}$$

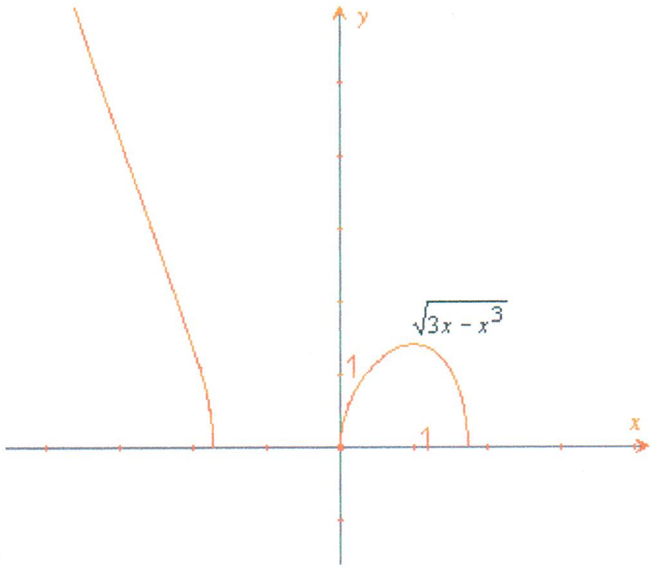
$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Řešení:[5]

$$h(x)=\frac{\ln\left(\left(x^2-1\right)+1\right)}{\left(x^2-1\right)}$$

$$g(x)=x^2-1$$

Příklad 1.9: Určete definiční obor funkce $h: h(x)=\sqrt{3x-x^3}$, viz obrázek 1.1.



Obrázek 1.1:

Řešení:

$$f(g(x))=\sqrt{3x-x^3}$$

$$f(y)=\sqrt{y}\Rightarrow D_f=\{y\in R; y\geq 0\}$$

$$g(x)=3x-x^3\Rightarrow D_g=R$$

$$y\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq 0\Leftrightarrow 3x-x^3\geq 0\Leftrightarrow x\left(3-x^2\right)\geq 0$$

---

[5]) Záleží na pořadí skládání jednotlivých funkcí:

$$g: g(x)=2x-1,\ f: f(x)=x^3$$

$$h_1: f(g(x))=(2x-1)^3,\ h_2: g(f(x))=2x^3-1$$

a) $(x \geq 0) \wedge (3 - x^2 \geq 0)$

$\Leftrightarrow$

$(x \geq 0) \wedge (|x| \leq \sqrt{3})$

$\Leftrightarrow$

$x \in \langle 0; \sqrt{3} \rangle$

b) $(x \leq 0) \wedge (3 - x^2 \leq 0)$

$\Leftrightarrow$

$(x \leq 0) \wedge (|x| \geq \sqrt{3})$

$\Leftrightarrow$

$x \in (-\infty; -\sqrt{3} \rangle$

$D_h = (-\infty; -\sqrt{3} \rangle \cup \langle 0; \sqrt{3} \rangle$

Definiční obor složené funkce h vznikne průnikem definičního oboru vnitřní funkce g a intervalu, který vznikne, když obor hodnot vnitřní funkce g padne do definičního oboru vnější funkce f.

Příklad 1.10: Určete definiční obor funkce $h : h(x) = \log\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$.

Řešení:

$h(x) = f(g(k(x))); k(x) = \frac{\pi}{x}; g(y) = \sin y; f(z) = \log z$

$k(x) = \frac{\pi}{x} \Rightarrow D_k = R - \{0\}$

$g(y) = \sin y \Rightarrow D_g = R$

$f(z) = \log z \Rightarrow D_f = (0; \infty)$

$$(x \neq 0) \wedge \left(\sin\frac{\pi}{x} > 0 \right)$$

$$\frac{\pi}{x} \in (2k\pi; (2k+1)\pi); k \in Z$$

$$\left(2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \right) \Leftrightarrow \left(2k < \frac{1}{x} < 2k+1 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \right) \text{ pro } k \neq 0$$

$$\text{pro } k = 0 \quad \left(0 < \frac{1}{x} < 1 \right) \Leftrightarrow x > 1$$

$$D_h = \left(\frac{1}{2k+1}; \frac{1}{2k} \right); \text{ pro } k \in Z - \{0\}$$

$$D_h = (1; \infty); \text{ pro k} = 0$$

Příklad 1.11: Určete definiční obor funkce $h : h(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x}$.

Řešení:

$$h(x) = f(g(x))$$

$$g(x) = \frac{2x}{1+x} \Rightarrow D_g = R - \{-1\}$$

$$f(y) = \arcsin y \Rightarrow D_f = \langle -1; 1 \rangle$$

$$(x \neq -1) \wedge \left(-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x \neq -1) \wedge (2|x| \leq |1+x|)$$

a) $x \in (-\infty; -1)$

$$-2x \leq -(1+x)$$

$$x \geq 1$$

$$x = \varnothing$$

b) $x \in \left(-1;0\right\rangle$

$-2x \leq 1 + x$

$x \geq -\dfrac{1}{3}$

$x \in \left\langle -\dfrac{1}{3};0 \right\rangle$

c) $x \in (0;\infty)$

$2x \leq 1 + x$

$x \leq 1$

$x \in \left(0;1\right\rangle$

$D_h = \left\langle -\dfrac{1}{3};1 \right\rangle$

Příklad 1.12: Určete definiční obor funkce $h: h(x) = \log[\cos(\log x)]$.

Řešení:

$h(x) = f(g(k(x))); k(x) = \log x; g(y) = \cos y; f(z) = \log z$

$k(x) = \log x \Rightarrow D_k = (0;\infty)$

$g(y) = \cos y \Rightarrow D_g = R$

$f(z) = \log z \Rightarrow D_f = (0;\infty)$

$$\Rightarrow ((x > 0) \wedge (\cos(\log x) > 0)) \Rightarrow \left((x > 0) \wedge \left(\log x \in \left(\frac{2k-1}{2}\pi; \frac{2k+1}{2}\pi\right), k \in Z\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2k-1}{2}\pi < \log x < \frac{2k+1}{2}\pi\right) \Rightarrow \left(10^{\frac{2k-1}{2}\pi} < x < 10^{\frac{2k+1}{2}\pi}\right)$$

$$D_h = \left(10^{\frac{2k-1}{2}\pi}; 10^{\frac{2k+1}{2}\pi}\right); k \in Z$$

Příklad 1.13: Určete definiční obor funkce $h : h(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

Řešení:

$$h(x) = f(g(k(x))); k(x) = \log_4 x; g(y) = \log_3 y; f(z) = \log_2 z$$

$$D_k = D_g = D_f = (0;\infty)$$

$$\Rightarrow ((x>0) \wedge (\log_4 x > 0) \wedge (\log_3 \log_4 x > 0)) \Rightarrow ((x>0) \wedge (x>1) \wedge (\log_4 x > 1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((x>0) \wedge (x>1) \wedge (x>4)) \Rightarrow (x>4)$$

$$D_h = (4;\infty)$$

Příklad 1.14: Určete definiční obor funkce $h : h(x) = \sqrt[4]{\log \tan x}$.

Řešení:

$$h(x) = f(g(k(x))); k(x) = \tan x; g(y) = \log y; f(z) = \sqrt[4]{z}$$

$$k(x) = \tan x \Rightarrow D_k = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$g(y) = \log y \Rightarrow D_g = (0;\infty)$$

$$f(z) = \sqrt[4]{z} \Rightarrow D_f = \langle 0;\infty)$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right) \wedge (\tan x > 0) \wedge (\log \tan x \geq 0)$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right) \wedge (\tan x > 0) \wedge (\tan x \geq 1)$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right) \wedge (\tan x \geq 1)$$

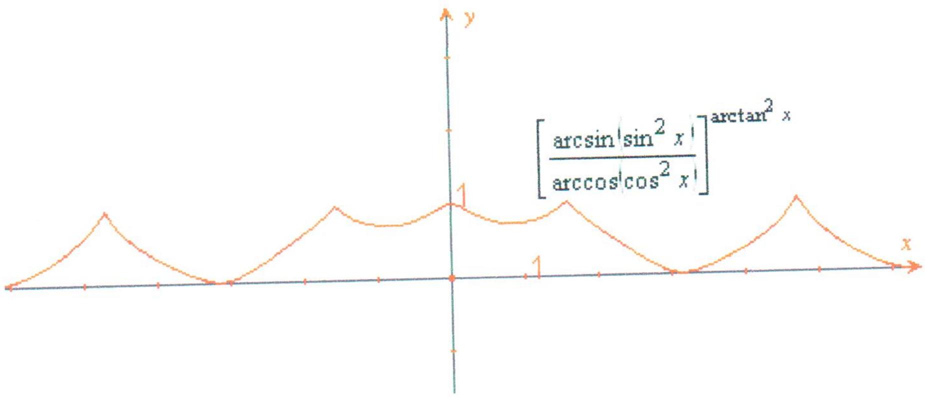
$$x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in Z$$

$$D_h = \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in Z$$

Na předchozích příkladech je vidět, že při zjišťování definičního oboru funkcí se nejčastěji zaměřujeme na stanovení podmínek, jako např. jmenovatel je nenulový, pod odmocninou je nezáporný výraz, v argumentu logaritmu je kladný výraz, nebo omezujeme definiční obor u některých cyklometrických funkcí, jelikož nejsou definovány na celém R. Ale u složených funkcí musíme dát ještě pozor na to, aby obor hodnot vnitřní funkce splňoval podmínky pro definiční obor funkce vnější.

Příklad 1.15: Zapište jeden z možných postupů, jak získat funkci y z funkcí, které jsou základními elementárními funkcemi, pomocí znalostí operací s funkcemi.

$$y=\left[\frac{\arcsin\left(\sin^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}\right]^{\arctan^2 x}$$, viz obrázek 1.2.



Obrázek 1.2:

Řešení:

Funkce y je ve tvaru $y=[f(x)]^{g(x)}$. Vyjádříme ji nejdříve pomocí exponenciální funkce ve formě $[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$, tedy v našem případě je $y=e^{\arctan^2 x \ln\frac{\arcsin\left(\sin^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}}$.

Námi užité základní elementární funkce jsou cos, sin, arccos, arcsin, ln, arctan, kvadratická a exponenciální funkce. Užijeme operací skládání, součinu a podílu funkcí.

Skládání funkcí: $\beta=\cos x$ vnitřní funkce, $z=\beta^2$ vnější funkce

Skládání funkcí: $z=\cos^2 x$ vnitřní funkce, $w_2=\arccos z$ vnější funkce

Skládání funkcí: $\alpha=\sin x$ vnitřní funkce, $t=\alpha^2$ vnější funkce

Skládání funkcí: $t = \sin^2 x$ vnitřní funkce, $w_1 = \arcsin t$ vnější funkce

Podíl funkcí: $w_2 = \arccos(\cos^2 x)$, $w_1 = \arcsin(\sin^2 x)$, $w = \frac{w_1}{w_2}$

Skládání funkcí: $w = \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}$ vnitřní funkce, $u_2 = \ln w$ vnější funkce

Skládání funkcí: $v = \arctan x$ vnitřní funkce, $u_1 = v^2$ vnější funkce

Součin funkcí: $u_2 = \ln \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}$, $u_1 = \arctan^2 x$, $u = u_1 . u_2$

Skládání funkcí: $u = \arctan^2 x \ln \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}$ vnitřní funkce, $y = e^u$ vnější funkce

Věta 1.1 (vlastnosti složených funkcí): Nechť f, g jsou takové funkce, že $g \circ f = h$, tj. g je vnitřní funkce, f je vnější funkce a h je složená funkce z f, g. Potom platí:

- Jsou-li f, g prosté $\Rightarrow$ je funkce h také prostá.
- Mají-li funkce f, g stejný typ monotonie $\Rightarrow$ funkce h je rostoucí.
- Mají-li funkce f, g různý typ monotonie $\Rightarrow$ funkce h je klesající.

Důkaz 1.1:

Máme dokázat, že f, g jsou prosté $\Rightarrow$ h je prostá.

Tzn. máme dokázat, že $\forall x_1, x_2 \in D_h, x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) = f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)) = h(x_2)$.

g je prostá $\forall x_1, x_2 \in D_g, x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$.

f je prostá $\forall g(x_1), g(x_2) \in D_f, g(x_1) \neq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$.

Dokážeme například: g je rostoucí, f je klesající $\Rightarrow$ h je klesající.

Tzn. máme dokázat, že $h: h(x) = f(g(x))$ je klesající $\forall x_1, x_2 \in D_h, x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) = f(g(x_1)) > f(g(x_2)) = h(x_2)$.

g je rostoucí v D_g $\forall x_1, x_2 \in D_g, x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

f je klesající v D_f $\forall g(x_1), g(x_2) \in D_f, g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2))$.

Je zřejmé, že v důkazu jde pouze o změnu nerovnosti za symbolem implikace. Pokud bude tedy funkce rostoucí, nerovnost se nezmění, pokud bude funkce klesající, dojde ke změně nerovnosti. Proto se stačí omezit na počet změn nerovnosti. Pokud bude počet změn sudý (f, g stejný typ monotonie), bude složená funkce h rostoucí, pokud bude lichý (f, g různý typ monotonie), bude funkce h klesající.

□

Příklad 1.16: Mějme složenou funkci $h: h(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

a) Dokažte, že funkce h není prostá.

b) Vyšetřete monotonii funkce h.

Řešení:[6])

a) Kdy je funkce h prostá? $\forall x_1, x_2 \in D_h, x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) = f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)) = h(x_2)$

$$x_1 = 1 - \frac{b}{2a}$$

$$x_2 = -1 - \frac{b}{a}$$

$$x_1 \neq x_2$$

$$h(x_1) = a\left(1 - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(1 - \frac{b}{2a}\right) + c = a - b + \frac{b^2}{4a} + b - \frac{b^2}{2a} + c = a + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$h(x_2) = a\left(-1 - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-1 - \frac{b}{2a}\right) + c = a + b + \frac{b^2}{4a} - b - \frac{b^2}{2a} + c = a + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$h(x_1) = h(x_2)$$

Funkce h není prostá.

---

[6]) Chceme-li dokázat, že funkce $h: h(x) = f(g(x))$ není prostá, stačí najít jeden protipříklad, kdy definice prosté funkce není splněna.

b)

$$h(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$h:h(x)=f(g(x));\ g(x)=x+\frac{b}{2a};\ f(y)=ay^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$g(x)=x+\frac{b}{2a}\Rightarrow D_g=R,H_g=R$$

$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2a}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

g je rostoucí.

$$f(y)=ay^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\Rightarrow D_f=R$$

$$H_f=\left\langle\frac{4ac-b^2}{4a};\infty\right)\text{pro } a>0$$

$$H_f=\left(-\infty;\frac{4ac-b^2}{4a}\right\rangle\text{pro } a<0$$

Pro $(a>0\wedge\forall y_1,y_2>0)$, resp. $(a<0\wedge\forall y_1,y_2<0)$

$$y_1<y_2\Leftrightarrow ay_1^{\ 2}+\frac{4ac-b^2}{4a}<ay_2^{\ 2}+\frac{4ac-b^2}{4a}\Leftrightarrow f(y_1)<f(y_2)$$

f je rostoucí na $(0;\infty)$, resp. $(-\infty;0)$.

Pro $(a<0\wedge\forall y_1,y_2>0)$, resp. $(a>0\wedge\forall y_1,y_2<0)$

$$y_1<y_2\Leftrightarrow ay_1^{\ 2}+\frac{4ac-b^2}{4a}>ay_2^{\ 2}+\frac{4ac-b^2}{4a}\Leftrightarrow f(y_1)>f(y_2)$$

f je klesající na $(0;\infty)$, resp. $(-\infty;0)$.

Vnitřní funkce $g(x)=x+\dfrac{b}{2a}=y$ nám upraví krajní meze intervalů pro monotonii složené funkce.

Pro $a > 0$ je h rostoucí na $\left(\frac{-b}{2a}; \infty\right)$; pro $a < 0$ na $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$.

Pro $a > 0$ je h klesající na $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$; pro $a < 0$ na $\left(\frac{-b}{2a}; \infty\right)$.

h není na celém svém definičním oboru ryze monotónní (ani monotónní).

Pokud máme dokázat, že platí určitá vlastnost vycházející z nějaké věty, ověříme jednoduše platnost předpokladů a poté platnost závěru, protože většina vět je ve tvaru implikace. Věta by sice byla pravdivá i v případě, kdyby předpoklady splněny nebyly, ale tím bychom se o závěru nic nedozvěděli – a o ten nám jde především. Pokud však máme dokázat, že nějaká vlastnost neplatí (např. funkce není prostá nebo monotónní), pak stačí najít jediný protipříklad, který danou vlastnost nesplňuje, a tím je důkaz proveden.

Příklad 1.17: Vyšetřete monotonii funkce f, je-li $f(x) = \frac{3x^4 + 20x^2 + 33}{5x^2 + 15}$.

Řešení:[7])

$$f(x) = \frac{3x^4 + 20x^2 + 33}{5x^2 + 15} = \frac{3(x^4 + 6x^2 + 9) + 2x^2 + 6}{5(x^2 + 3)} = \frac{3(x^2 + 3)^2 + 2(x^2 + 3)}{5(x^2 + 3)}$$

$$f(x) = g_1(g_2(x)); \; g_1(y) = \frac{3y^2 + 2y}{y} = 3y + 2, \; y \neq 0; \; g_2(x) = x^2 + 3$$

$y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0$, ale tato rovnice není nikdy splněna, proto vnitřní funkce splňuje podmínku v každém bodě svého definičního oboru.

$g_1(y) = 3y + 2$:

$y_1 < y_2 \Rightarrow 3y_1 < 3y_2 \Rightarrow 3y_1 + 2 < 3y_2 + 2 \Rightarrow g_1$ je rostoucí.

$g_2(x) = x^2 + 3$:

---

[7]) Pokud při vyšetřování monotonie funkce připustíme rovnost, není funkce ryze monotónní, ale pouze monotónní.

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 (x_1, x_2 > 0) \Rightarrow x_1^2 + 3 < x_2^2 + 3 (x_1, x_2 > 0) \Rightarrow g_2$ je rostoucí na $(0; \infty)$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 (x_1, x_2 < 0) \Rightarrow x_1^2 + 3 > x_2^2 + 3 (x_1, x_2 < 0) \Rightarrow g_2$ je klesající na $(-\infty; 0)$.

Funkce f je rostoucí na $(0; \infty)$, klesající na $(-\infty; 0)$ $\Rightarrow$ funkce f není ryze monotónní (ani monotónní) na svém definičním oboru.

2. LIMITA SLOŽENÉ FUNKCE

Při studiu limit se zabýváme chováním funkce v nějakém okolí určitého bodu. Limita složené funkce v bodě c nezávisí na tom, zda c patří či nepatří do definičního oboru složené funkce. Limita je vlastnost funkce v okolí bodu c, a tedy, jak již bylo řečeno, charakterizuje chování funkce v okolí daného bodu, z čehož plyne, že v okolí bodu c musí být složená funkce definovaná.

Věta 2.1 (o limitě složené funkce): Nechť f, g jsou takové funkce, že $g \circ f = h$, tj. g je vnitřní funkce, f je vnější funkce a h je složená funkce z f, g.

- Nechť existuje limita vnitřní funkce g v bodě c a je rovna číslu b ($\lim_{x \to c} g(x) = b$).
- Nechť v některém prstencovém δ-okolí bodu c je funkční hodnota vnitřní funkce g v bodě x různá od čísla b ($\exists \delta > 0; (\forall x \in P_\delta(c))(g(x) \neq b)$).
- Nechť existuje limita vnější funkce f v bodě b a je rovna číslu A ($\lim_{y \to b} f(y) = A$).

Potom existuje limita složené funkce $g \circ f$ v bodě c a je rovna číslu A ($\lim_{x \to c} f(g(x)) = A$).

Důkaz 2.1:

Z předpokladů přepíšeme obě limity podle definice limity:

$$\lim_{y \to b} f(y) = A \Rightarrow ((\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(y \in P_\eta(b) \Rightarrow f(y) \in U_\varepsilon(A)))$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = b \Rightarrow ((\forall \eta > 0)(\exists \delta_1 > 0)(x \in P_{\delta_1}(c) \Rightarrow g(x) \in U_\eta(b)))$$

Volíme $\varepsilon > 0$ a nalezneme k němu podle předpokladu $\lim_{y \to b} f(y) = A$ η. K tomuto η nalezneme podle předpokladu $\lim_{x \to c} g(x) = b$ δ_1.

Volíme $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta)$, aby funkční hodnoty vnitřní funkce g padly do prstencového η-okolí bodu b.

Odtud plyne, že

$$\left(x \in P_{\delta_0}(c) \Rightarrow \left(g(x) \in U_\eta(b) \wedge g(x) \neq b\right) \Rightarrow g(x) \in P_\eta(b) \Rightarrow f(g(x)) \in U_\varepsilon(A)\right) =$$

$$= \lim_{x \to c} f(g(x)) = A.$$

□

Při výpočtu limit složených funkcí užíváme některých známých limit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}; a > 0, a \neq 1,$$

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1; a > 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; a > 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Příklad 2.1: Vypočtěte $\lim_{x \to 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$.[8])

---

[8]) Záleží na vhodné volbě vnitřní funkce. Při výpočtu limity $\lim_{x \to 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$ je vhodnou vnitřní funkcí funkce $g : g(x) = \frac{x}{3} - 1$ a každá jiná volba vnitřní funkce je volbou nevhodnou. Jedná se tedy o cílené hledání vnější a vnitřní funkce, viz příklad 1.1.

Řešení:[9])

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(\frac{x}{3}-1+1\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{3}\frac{\ln\left(\frac{x}{3}-1+1\right)}{\frac{x}{3}-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(\frac{x}{3}-1+1\right)}{\frac{x}{3}-1}=\frac{1}{3}$$

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x}{3}-1=0$

2) $\delta>0;(\forall x\in P_{\delta}(3))\left(\frac{x}{3}-1\neq 0\right)$ splněno

3) $\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$

Příklad 2.2: Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

Řešení:[10])

a) Pro $a=0$

$$\lim_{x\to\infty}1^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln 1}=\lim_{x\to\infty}e^{0}=1$$

---

[9]) Užití vztahu $\log_c a-\log_c b=\log_c\frac{a}{b}$.

[10]) Užití vztahu $a^{x}=e^{x.\ln a}$. Této úpravy se užívá při výpočtu limit velmi často, a to v situaci, kdy se neznámá vyskytuje jak v základu, tak v exponentu.

b) Pro $a \neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x.\ln\left(\frac{x+a}{x-a}-1+1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{x.\ln\left(\frac{2a}{x-a}+1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(\frac{2a}{x-a}+1\right)}{\frac{2a}{x-a}}\cdot\frac{2ax}{x-a}} =$$

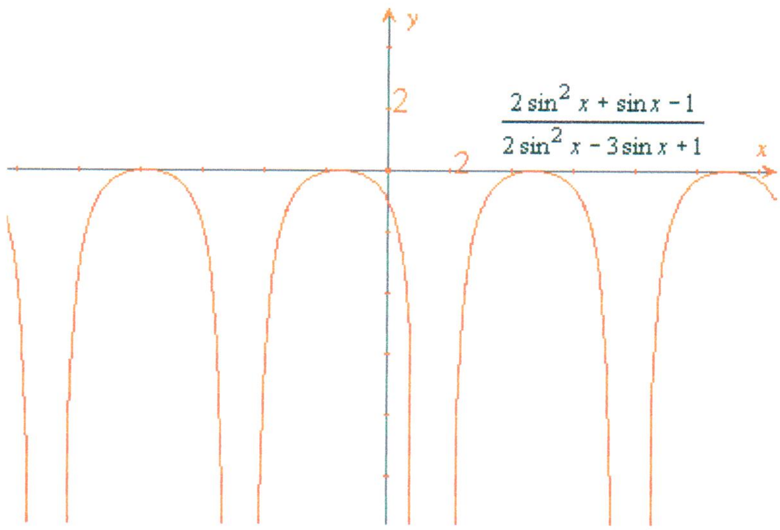
$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(\frac{2a}{x-a}+1\right)}{\frac{2a}{x-a}}\cdot\frac{2ax}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2a}{x-a}+1\right)}{\frac{2a}{x-a}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2a}{x-a} = 0$

2) $\delta > 0; \left(\forall x \in P_\delta(\infty)\right)\left(\frac{2a}{x-a} \neq 0\right)$ splněno

3) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y} = 1$

Příklad 2.3: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$, viz obrázek 2.1.



Obrázek 2.1:

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = -3$$

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$

2) $\delta > 0; \left(\forall x \in P_\delta\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\sin x \neq \frac{1}{2}\right)$ splněno

3) $$\lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)(y+1)}{\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-1)} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{y+1}{y-1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

Příklad 2.4: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[6]{\cos x}\right)^3-\left(\sqrt[6]{\cos x}\right)^2}{1-\left(\sqrt[6]{\cos x}\right)^{12}} = -\frac{1}{12}$$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[6]{\cos x} = 1$

2) $\delta > 0; \left(\forall x \in P_\delta(0)\right)\left(\sqrt[6]{\cos x} \neq 1\right)$ splněno

3) $$\lim_{y\to 1} \frac{y^3-y^2}{1-y^{12}} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2(y-1)}{\left(1+y^6\right)\left(1-y^6\right)} = \lim_{y\to 1} \frac{-y^2(1-y)}{\left(1+y^6\right)\left(1+y^3\right)\left(1-y^3\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{-y^2(1-y)}{\left(1+y^6\right)\left(1+y^3\right)(1-y)\left(1+y+y^2\right)} = \lim_{y\to 1} \frac{-y^2}{\left(1+y^6\right)\left(1+y^3\right)\left(1+y+y^2\right)} = -\frac{1}{12}$$

Příklad 2.5: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x ; (a_1 > 0, a_2 > 0)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$$

a) Pro $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_1x+b_2}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{a_1x+b_1}{a_1x+b_2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right)}{\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}}\frac{(b_1-b_2)x}{a_1x+b_2}} =$

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right)}{\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(b_1-b_2)x}{a_1x+b_2}} = e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b_1-b_2}{a_1x+b_2} = 0$

2) $\delta > 0; (\forall x \in P_\delta(+\infty))\left(\dfrac{b_1-b_2}{a_1x+b_2} \neq 0\right)$. Výraz $\dfrac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}$ se rovná nule pouze pro $b_1 = b_2$, ale podle předpokladu je $b_1 \neq b_2$. Podmínka je tedy splněna.

3) $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$

b) Pro $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^0 = 1$

c) Pro $a_1 > a_2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2}}{a_2x+b_2}\right)^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2}}{a_2x+b_2} = 0$; $\dfrac{a_1}{a_2} > 1$; pro $a > 1$ je $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

d) Pro $a_1 < a_2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2}}{a_2x+b_2}\right)^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2}}{a_2x+b_2} = 0$; $\dfrac{a_1}{a_2} < 1$; pro $a < 1$ je $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

Příklad 2.6: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}=1$$

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^2-1=0$

2) $\delta>0;(\forall x\in P_\delta(1))(x^2-1\neq 0)$, tzn. nalezneme $\delta>0$ tak, že $x^2-1\neq 0$ pro všechna x, pro něž $0<|x-1|<\delta$. Výraz x^2-1 se rovná nule pouze pro $x=1$ a $x=-1$. Je-li tedy $0<|x-1|<2$, je jistě $x\neq 1$, $x\neq -1$, a tedy $x^2-1\neq 0$. Smíme tedy volit $\delta=2$.

3) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$

Věta 2.2 (o limitě složené funkce se spojitou vnější funkcí): Nechť f,g jsou takové funkce, že $g\circ f=h$, tj. g je vnitřní funkce, f je vnější funkce a h je složená funkce z f,g.

- Nechť vnější funkce f je spojitá v bodě b.
- Nechť existuje limita vnitřní funkce g v bodě c a je rovna číslu b ($\lim\limits_{x\to c} g(x)=b$).

Potom existuje limita složené funkce h v bodě c a je rovna funkční hodnotě vnější funkce f v bodě b ($\lim\limits_{x\to c} f(g(x))=f(b)$).

Důkaz 2.2:

Z předpokladů víme, že

$$\lim_{y\to b} f(y)=f(b)\Rightarrow((\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(y\in U_\eta(b)\Rightarrow f(y)\in U_\varepsilon(f(b)))),$$

$$\lim_{x\to c} g(x)=b\Rightarrow((\forall\eta>0)(\exists\delta_1>0)(x\in P_{\delta_1}(c)\Rightarrow g(x)\in U_\eta(b))).$$

Volíme $\varepsilon > 0$ a nalezneme k němu podle předpokladu $\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$ η. K tomuto η nalezneme podle předpokladu $\lim_{x \to c} g(x) = b$ δ_1.

Odtud plyne, že

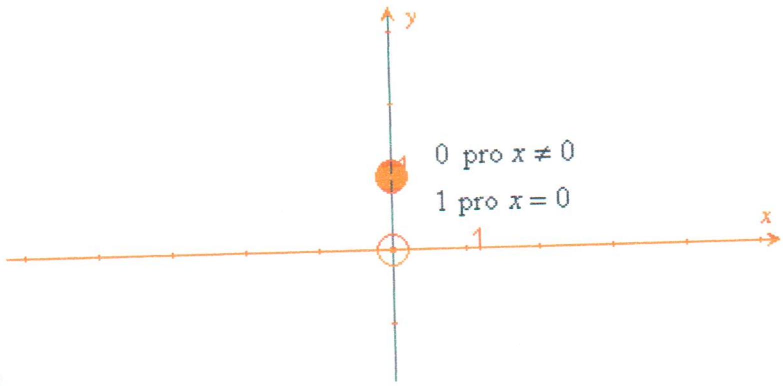
$$(x \in P_{\delta_1}(c) \Rightarrow g(x) \in U_\eta(b) \Rightarrow f(g(x)) \in U_\varepsilon(f(b))) = \lim_{x \to c} f(g(x)) = f(b).$$

□

Příklad 2.7: Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 0} f(g(x))$ složené funkce $g \circ f$, je-li

$$y = g(x) = 0; \forall x \in R,$$

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \neq 0, \\ 1, & \text{pro } y = 0, \end{cases}$$ viz obrázek 2.2.



Obrázek 2.2:

Řešení:

$f(g(x)) = 1; \forall x \in R$, neboť $g(x) = 0; \forall x \in R$, a tedy $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1$

1) $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

2) $\delta > 0; (\forall x \in P_\delta(0))(0 \neq 0)$, což není splněno pro žádné x.

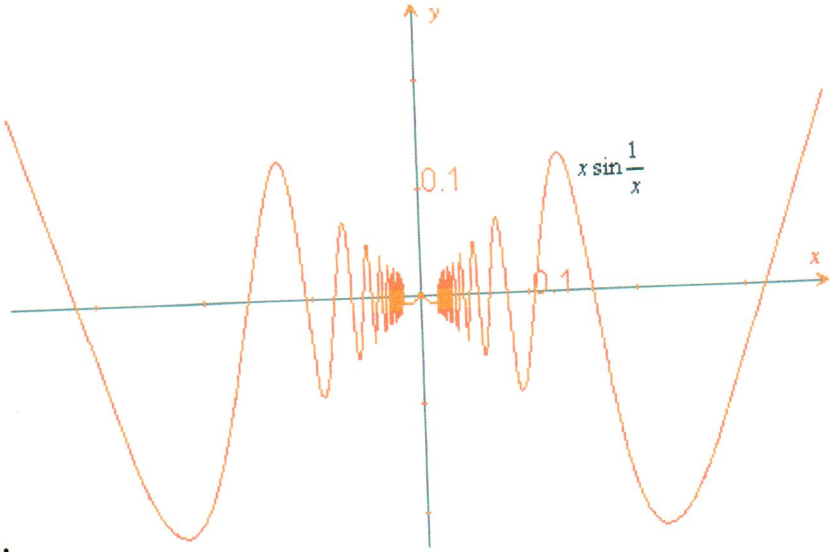
3) $\lim_{y \to 0} f(y) = 0$, a tedy limita složené funkce není rovna limitě vnější.

Nesplněním předpokladů věty 2.1 ztrácí tato věta svoji platnost. Nemůžeme tedy podle ní rozhodnout, zda funkce $g \circ f$ má, či nemá limitu, a tudíž ani určit hodnotu případné limity.

Příklad 2.8: Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ složené funkce $g \circ f$, kde

$g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 0$, viz obrázek 2.3,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x = 0, \\ 1, & \text{pro } x \neq 0. \end{cases}$$



Obrázek 2.3:

Řešení:

f není spojitá v bodě 0, protože $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$, a proto nejsou splněny předpoklady věty 2.2.

$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, jelikož víme, že limita součinu nulové a omezené funkce je rovna 0.

Funkce x je nulová pro $x \to 0$ a funkce $\sin\frac{1}{x}$ je omezená, tj. $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$.

$\exists\delta > 0; \forall x \in P_\delta(0) : x\sin\frac{1}{x} \neq 0$. $x\sin\frac{1}{x} = 0$ je roven nule pro $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in Z - \{0\}$, a tedy nelze nalézt takové δ, protože existuje v okolí bodu 0 nekonečně mnoho bodů, pro které platí $x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Podle Heineho věty o limitě funkce můžeme zvolit posloupnosti bodů $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $y_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, které splňují podmínky $0 \neq x_n \to 0$, $0 \neq y_n \to 0$, ale pro všechna $n \in N$ je $g(x_n) = 0$ ($\lim_{x_n \to 0} g(x_n) = 0$), $g(y_n) = 1$ ($\lim_{y_n \to 0} g(y_n) = 1$), tedy $f(g(x_n)) = 0$ ($\lim_{x_n \to 0} f(g(x_n)) = 0$), $f(g(y_n)) = 1$ ($\lim_{y_n \to 0} f(g(y_n)) = 1$), a potom limita $\lim_{x \to 0} f(g(x))$ složené funkce $g \circ f$ neexistuje.

Příklad 2.9: Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 0} f(g(x))$ složené funkce $g \circ f$, kde

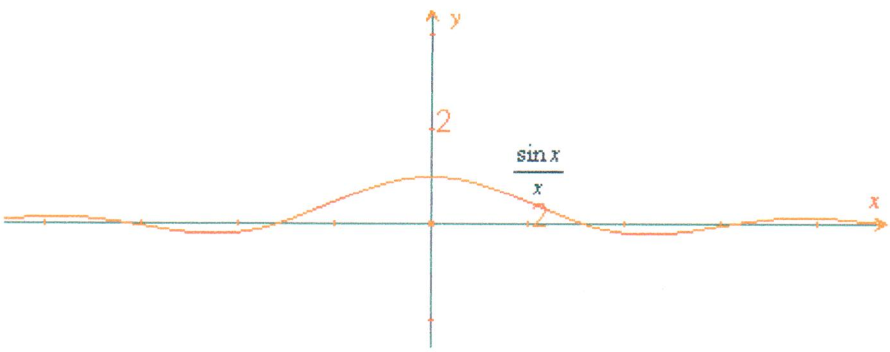
a) $f(x) = \sin x$,

b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$, viz obrázek 2.4,

c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$,

d) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0)$ není definováno

a ve všech případech je $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 0$, viz obrázek 2.3.



Obrázek 2.4:

Řešení:

a) (podle věty 2.2)

f je spojitá v každém bodě, a tedy i v bodě 0.

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, viz příklad 2.8.

Předpoklady jsou splněny, a proto existuje limita funkce $g \circ f$ pro $x \to 0$, tj.

$\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

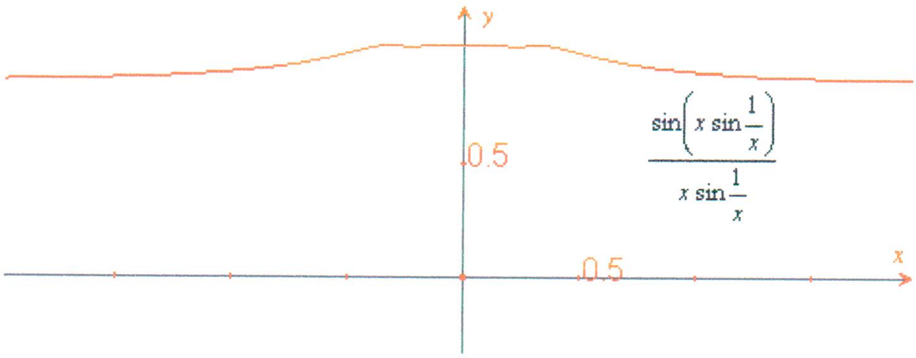
b) (podle věty 2.2)

f je spojitá v každém bodě i v bodě 0, protože $f(0) = 1$ a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, viz příklad 2.8.

Předpoklady jsou splněny, a proto existuje limita funkce $g \circ f$ (viz obrázek 2.5)

pro $x \to 0$, tj. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x} \right)}{x \sin \frac{1}{x}} = 1$.



Obrázek 2.5:

c) f není spojitá v bodě 0, protože $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$, a proto nejsou splněny předpoklady věty 2.2.

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, viz příklad 2.8.

Nejsou splněny ani předpoklady věty 2.1, viz příklad 2.8.

Podle Heineho definice limity funkce můžeme zvolit posloupnosti bodů $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $y_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, které splňují podmínky $0 \neq x_n \to 0$, $0 \neq y_n \to 0$, ale pro všechna $n \in N$ je $g(x_n) = 0$ ($\lim\limits_{x_n \to 0} g(x_n) = 0$), $g(y_n) = 1$ ($\lim\limits_{y_n \to 0} g(y_n) = 1$), tedy $f(g(x_n)) = 0$ ($\lim\limits_{x_n \to 0} f(g(x_n)) = 0$), $f(g(y_n)) = \sin 1$ ($\lim\limits_{y_n \to 0} f(g(y_n)) = \sin 1$), a potom limita $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x))$ složené funkce $g \circ f$ neexistuje.

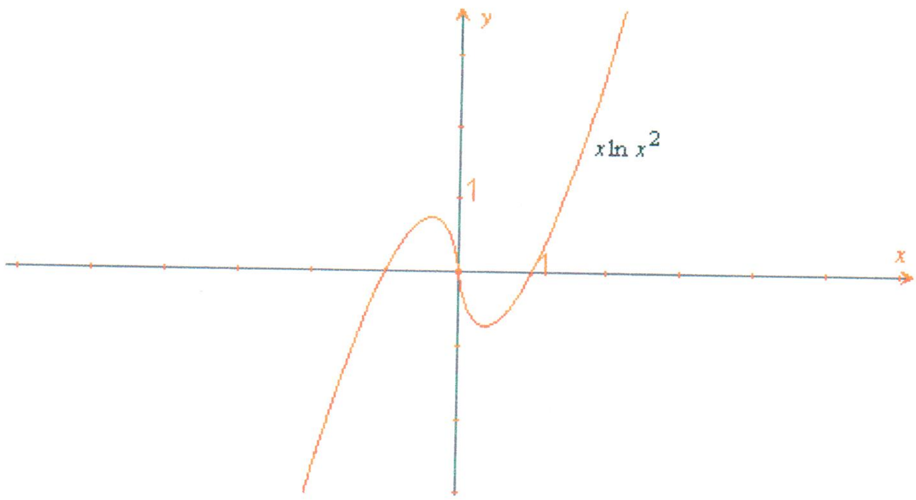
d) f není spojitá v bodě 0, protože není v bodě 0 definovaná, a proto nejsou splněny předpoklady věty 2.2.

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, viz příklad 2.8.

Nejsou splněny ani předpoklady věty 2.1, viz příklad 2.8.

Složená funkce $g \circ f$ opět limitu v bodě 0 nemá, protože není definovaná v nekonečně mnoha bodech $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in Z - \{0\}$ okolí bodu 0, a nesplňuje tedy nutnou podmínku existence limity.

Příklad 2.10: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x))$ složené funkce $g \circ f$, kde $f(x) = x \ln x^2$ pro $x \neq 0$, $f(0) = a \in R$, viz obrázek 2.6, $g(x) = x \cos \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 0$.



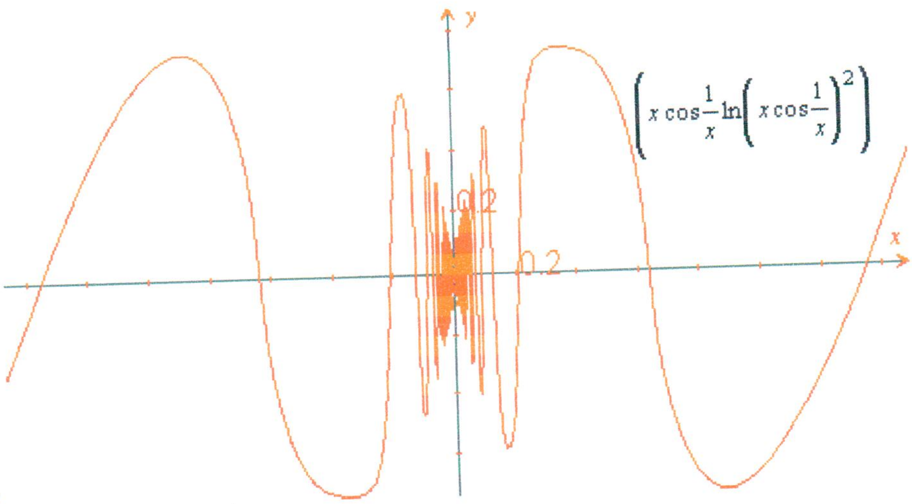
Obrázek 2.6:

Řešení:

a) Pro $a=0$: f je spojitá v bodě 0, protože $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 = 0 = f(0)$.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-2x) = 0^{11})$$

Vnitřní funkce má limitu $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ (limita součinu nulové (x pro $x\to 0$) a omezené ($-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$) je rovna 0). Proto podle věty 2.2 má složená funkce $g\circ f$ limitu $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\ln\left(x\cos\frac{1}{x}\right)^2\right) = 0$, viz obrázek 2.7.



Obrázek 2.7:

b) Pro $a\ne 0$: f není spojitá v bodě 0, protože $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 = 0 \ne a = f(0)$, a proto nejsou splněny předpoklady věty 2.2.

Vnitřní funkce má limitu $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$.

---

[11]) Užití L´Hospitalova pravidla.

$\exists\delta > 0; \forall x \in P_\delta(0): x\cos\frac{1}{x} \neq 0$. $x\cos\frac{1}{x} = 0$ je roven nule pro $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, kde $k \in Z$, a tedy nelze nalézt takové δ, protože existuje v okolí bodu 0 nekonečně mnoho bodů, pro které platí $x\cos\frac{1}{x} = 0$.

Podle Heineho definice limity funkce můžeme zvolit posloupnosti bodů $x_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $y_n = \frac{1}{n\pi}$, které splňují podmínky $0 \neq x_n \to 0$, $0 \neq y_n \to 0$, ale pro všechna $n \in N$ je $g(x_n) = 0$ ($\lim\limits_{x_n \to 0} g(x_n) = 0$), $g(y_n) = 1$ ($\lim\limits_{y_n \to 0} g(y_n) = 1$), tedy $f(g(x_n)) = a \neq 0$ ($\lim\limits_{x_n \to 0} f(g(x_n)) = a \neq 0$), $f(g(y_n)) = 0$ ($\lim\limits_{y_n \to 0} f(g(y_n)) = 0$) a potom limita $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x))$ složené funkce $g \circ f$ neexistuje.

Předpoklady věty 2.1, resp. 2.2 o limitě složené funkce jsou nezbytné. Jejich nesplněním věta ztrácí platnost.

První část věty 2.1 je poněkud složitější, protože kromě podmínek o limitách vnitřní a vnější funkce je v ní další podstatný předpoklad. V druhém předpokladu věty 2.1 nesmíme připustit existenci posloupnosti $\{x_n\}$, pro niž je $c \neq x_n \to c$ a $g(x_n) = b$ pro všechna n. Je to proto, že podmínka $\lim\limits_{y \to b} f(y) = A$ nemá obecně nic společného s $f(b)$, takže ze samotných předpokladů (prvního a druhého) nelze nic odvodit. Na příkladech 2.7, 2.8 a 2.9c), d) jsme ukázali, že druhá podmínka věty 2.1 je opravdu podstatná, tj. že zbylé dvě podmínky samy o sobě nezaručují, že $\lim\limits_{x \to c} f(g(x)) = A$.

Ve větě 2.2 je situace zcela odlišná, protože b je bodem spojitosti funkce f, rovnost $g(x_n) = b$ (pro některá nebo pro všechna n) nečiní žádné obtíže.

Jak v teorii, tak i v početní praxi se často vyskytují i jednostranné limity složených funkcí. Je proto důležité vědět, jak máme předpoklady věty 2.1, resp. 2.2 modifikovat, abychom dostali příslušná tvrzení. Ve větě 2.1 může být buď $c = \pm\infty$ (a limita je ve skutečnosti pouze jednostranná), nebo $c \in R$, načež lze mluvit nejen o (oboustranné) limitě funkce g pro $x \to c$, ale i o jednostranných limitách pro $x \to c\pm$. Analogických pět případů může nastat pro limitu funkce f. Bylo by značně neúčelné považovat všech

25 možných kombinací za 25 nezávislých tvrzení a každé z nich vyslovit a dokazovat. Protože nevíme, se kterými z těchto případů se v budoucnu setkáme, nebylo by ani účelné rozhodovat předem, které z nich vyslovíme a dokážeme a které ne.

Jediným racionálním přístupem k celému problému limity složené funkce je pochopit obecně úlohu druhé podmínky věty 2.1, která zřejmě koordinuje zbývající podmínky. Úplné pochopení principů této koordinace je zárukou správné formulace i aplikace nejen kterékoli z 25 variant věty 2.1 o limitě složené funkce, ale i všech variant věty 2.2.

Je-li v prvním předpokladu věty 2.1 pod znakem lim místo $x \to c$ symbol $x \to c+$, resp. $x \to c-$, bude týž symbol pod znakem lim i v tvrzení a ve třetím předpokladu bude místo (oboustranného) prstencového okolí $P_\delta(c)$ jednostranné okolí $P_\delta^+(c)$, resp. $P_\delta^-(c)$.

Je-li ve třetím předpokladu věty 2.1 pod znakem lim místo $y \to b$ symbol $y \to b+$, resp. $y \to b-$, je třeba v druhé podmínce místo $g(x) \neq b$ předpokládat $g(x) > b$, resp. $g(x) < b$ (v příslušném prstencovém okolí bodu c – buď oboustranném, nebo jednostranném, jak jsme již řekli v předchozím odstavci). Podle těchto zásad lze modifikovat větu 2.1.

Ve větě 2.2, v níž je funkce f spojitá v bodě b, žádná podmínka prstencového okolí není. Nahradíme-li však oboustrannou spojitost spojitostí zprava, resp. zleva, je třeba tuto podmínku doplnit a předpokládat, že $g(x) \geq b$, resp. $g(x) \leq b$ (v jistém oboustranném, resp. jednostranném okolí bodu c – viz přecházející odstavce).

Správné pochopení právě uvedených zásad si můžete ověřit na následujícím příkladu.

Příklad 2.11: Dokažte, je-li $g(c+) = b \in R$, $f(b+) = A \in R$ a existuje-li $P_\delta^+(c)$ tak, že $g(P_\delta^+(c)) \subset (b,+\infty)$, je $\lim\limits_{x \to c+} f(g(x)) = A$.

Řešení:

Z předpokladů věty 2.1 přepíšeme obě limity podle definice limity:

$$\lim_{y \to b+} f(y) = A \Rightarrow \big((\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)\big(y \in P_\eta^+(b) \Rightarrow f(y) \in U_\varepsilon^+(A)\big)\big)$$

$\lim\limits_{x\to c+} g(x)=b \Rightarrow ((\forall \eta>0)(\exists \delta_1>0)(x\in P^+_{\delta_1}(c) \Rightarrow g(x)\in U^+_\eta(b)))$

Volíme $\varepsilon>0$ a nalezneme k němu podle předpokladu $\lim\limits_{y\to b+} f(y)=A$ η. K tomuto η nalezneme podle předpokladu $\lim\limits_{x\to c+} g(x)=b$ δ_1.

Volíme $\delta_0=\min(\delta_1,\delta)$, aby funkční hodnoty vnitřní funkce g padly do jednostranného (pravého) prstencového η-okolí bodu b.

Odtud plyne, že

$(x\in P^+_{\delta_1}(c) \Rightarrow (g(x)\in U^+_\eta(b) \wedge g(x)>b) \Rightarrow g(x)\in P^+_\eta(b) \Rightarrow f(g(x))\in U^+_\varepsilon(A)) =$

$= \lim\limits_{x\to c+} f(g(x))=A$.

Věta 2.3 (o spojitosti složené funkce): Nechť $g\circ f$ je složená funkce, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Nechť vnitřní funkce g je spojitá v bodě a. Nechť vnější funkce f je spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f(g(x))$ je spojitá v bodě a $(\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(g(a)))$.

Důkaz 2.3:

Z předpokladů víme, že

g je spojitá v bodě $a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$,

f je spojitá v bodě $g(a) \Rightarrow \lim\limits_{y\to g(a)} f(y)=f(g(a))$.

Z toho podle věty 2.2 plyne $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))$.

□

Věta 2.4 (o spojitosti složené funkce v otevřeném intervalu): Nechť $g\circ f$ je složená funkce, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Funkce g budiž spojitá v otevřeném intervalu[12]) $(\alpha;\beta)$. Funkce f budiž spojitá v otevřeném intervalu

[12]) Omezeném nebo neomezeném.

$(a;b)$. Pro každé x intervalu $(\alpha;\beta)$ nechť hodnota $g(x)$ leží v intervalu $(a;b)$. Potom funkce $g \circ f$ je spojitá v intervalu $(\alpha;\beta)$.

Důkaz 2.4:[13])

Budiž x_0 libovolný bod intervalu $(\alpha;\beta)$. Tedy je g spojitá v bodě x_0 a hodnota $g(x_0)$ leží podle předpokladu v $(a;b)$, takže funkce f je spojitá v bodě $g(x_0)$. Podle věty 2.3 je tedy funkce $g \circ f$ spojitá v bodě x_0. Jelikož x_0 byl libovolný bod intervalu $(\alpha;\beta)$, je $g \circ f$ spojitá v intervalu $(\alpha;\beta)$.

□

Příklad 2.12: Rozhodněte, zda funkce $\ln(x^2+1)$ je spojitá v každém bodě.

Řešení:

Položíme $z = \ln y$, $y = x^2+1$, čili $z = \ln(x^2+1)$. Zde je y spojitou funkcí x v každém bodě a. Příslušná hodnota $b = a^2+1$ je kladná, takže z je spojitou funkcí y v bodě b. Tedy je podle věty 2.3 z spojitou funkcí x v každém bodě a.

Příklad 2.13: Rozhodněte, zda funkce x^x je spojitá v každém bodě $a > 0$.

Řešení:

$$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$$

Položíme $z = e^y$, $y = x\ln x$, takže $z = x^x$. Lineární funkce x je spojitá v každém bodě a logaritmická funkce $\ln x$ je spojitá v každém bodě $a > 0$, a tedy i funkce $x\ln x$ je spojitá v každém bodě $a > 0$. Funkce e^y je spojitá v každém bodě. Z toho plyne podle věty 2.3, že z je spojitou funkcí x v každém bodě $a > 0$.

Příklad 2.14: Rozhodněte, zda funkce $\dfrac{e^{x^2}-1}{2e^{x^2}-1}$ je spojitá v každém bodě.

---

[13]) Lze dokázat i pro uzavřený interval.

Řešení:

Položíme $u = \frac{z-1}{2z-1}$, $z = e^y$, $y = x^2$. Funkce x^2 je spojitá v každém bodě. Příslušná hodnota y je ≥ 0. Tedy příslušná hodnota z je $\geq e^0 = 1$. z je spojitou funkcí y v každém bodě. u je spojitou funkcí z v každém bodě, vyjma bodu $z = \frac{1}{2}$. Ale příslušná hodnota z je jistě ≥ 1, takže ta výjimečná hodnota $\frac{1}{2}$ nevadí, tedy je u vskutku spojitou funkcí x v každém bodě.

A proč se vlastně zabýváme otázkou limity a spojitosti složené funkce? Protože bez těchto znalostí se neobejdeme v následujících kapitolách. Těžko bychom se mohli zabývat derivací či integrováním funkce, kdybychom neměli k dispozici tyto nástroje. V řadě vět se objevují předpoklady spojitosti funkce a je třeba nezapomínat na ně, jelikož, jak už bylo řečeno, bez splnění předpokladů ztrácí věta platnost. A nejde jen o formální splnění předpokladů, ale o uvědomění si důvodů, proč musí být daná vlastnost splněna, což bývá při vlastních výpočtech často opomíjeno a právě toto je zdrojem nejčastějších chyb. Často bereme předpoklady jen jako další fakta a nezamýšlíme se nad jejich významem.

3. DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

S tématem derivace složené funkce se setkáváme již na některých středních školách, ale ve většině případů nám uniká vlastní význam a nedokážeme tyto znalosti aplikovat v konkrétních praktických případech. Derivace funkce v bodě je směrnicí tečny dané funkce v tomto bodě, což platí jak pro složené funkce, tak pro všechny funkce obecně. Je to pěkná definice a její geometrický význam je snadno čitelný, ale k čemu nám je tato informace v praxi? Pokud nemáme k dispozici třeba i jednoduchý matematický software pro vykreslení grafu příslušné funkce, pak si musíme poradit sami. Metoda, pomocí které dokážeme nakreslit graf řady funkcí, se nazývá vyšetřování grafu funkce a v té se velmi často užívá právě derivace funkce, a to například při zjišťování extrémů funkce, protože v takovém bodě je tečna rovnoběžná s osou x, a tedy směrnice, tj. derivace, je zde nulová.

V této kapitole se budeme většinou zabývat derivací složené funkce v daném bodě, kde vnitřní i vnější funkce mají v tomto bodě vlastní derivace, což právě znamená, že jsou zde spojité. Ale co se stane, když spojité nejsou nebo jsou spojité, ale i přesto zde vlastní derivace nemají? V praxi se může vyskytnout i případ, kdy vnitřní, popř. vnější funkce nebo obě mají v tomto bodě nevlastní derivaci nebo derivace vůbec neexistuje. Vypočítat derivace, tak jak se je učíme na střední škole, není problém. Jedná se vlastně o rutinní dosazování do vzorců, takže jsme schopni derivovat jakoukoli funkci. Ovšem nesmíme zapomínat na již zmiňované předpoklady. Zde již není řešení tak jednoduché, protože vyžaduje jistou početní zběhlost a právě zamyšlení nad tím, co plyne z nesplnění předpokladů. Řada vět je ve tvaru implikace, takže nesplnění předpokladů nám nesdělí vůbec nic.

Věta 3.1: Nechť $g \circ f$ je složená funkce, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě x_0. Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$. Potom má funkce $g \circ f$ v bodě x_0 derivaci $f'(y_0)g'(x_0)$.[14])

---

[14]) Za y_0 dosadíme do $f'(y_0)$ příslušnou hodnotu $g(x_0)$ a získáme rovnici ve tvaru $f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Důkaz 3.1:

Jde o limitu podílu $\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$ pro $h \to 0$. Položili jsme již $g(x_0)=y_0$. Položme ještě $\lambda(h)=g(x_0+h)-g(x_0)$, tj. $g(x_0+h)=y_0+\lambda(h)$.[15]) Jelikož funkce g má v bodě x_0 vlastní derivaci, je g spojitá v bodě x_0, a tedy λ je funkce spojitá v bodě $h=0$ a $\lambda(0)=0$.

Definujeme ještě funkci F takto: Pro $k \neq 0$ klademe $F(k)=\frac{f(y_0+k)-f(y_0)}{k}$, pro $k=0$ pak položme $F(0)=f'(y_0)$.[16]) Je tedy $f(y_0+k)-f(y_0)=kF(k)$, a to i pro $k=0$ (protože potom obě strany rovnice $f(y_0+k)-f(y_0)=kF(k)$ jsou rovny nule).

Podle $F(k)=\frac{f(y_0+k)-f(y_0)}{k}$ je $\lim_{k\to 0} F(k)=f'(y_0)=F(0)$, takže funkce F je spojitá v bodě $k=0$.

Ve výrazu $\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$ je $g(x_0)=y_0$, $g(x_0+h)=y_0+\lambda(h)$, takže čitatel ve výrazu má hodnotu $f(y_0+\lambda(h))-f(y_0)=\lambda(h)F(\lambda(h))$. Dosadíme-li za $\lambda(h)$ podle $\lambda(h)=g(x_0+h)-g(x_0)$, vidíme, že zlomek $\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$ má pro $h\neq 0$ hodnotu $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}F(\lambda(h))$. Zde je $\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=g'(x_0)$. A funkce λ je v bodě $h=0$ spojitá a má v něm hodnotu $\lambda(0)=0$. Funkce F je pak spojitá v bodě $k=0$. Tedy podle věty 2.3 je funkce $\lambda \circ F$ spojitá v bodě $h=0$, takže podle věty o spojitosti funkce je $\lim_{h\to 0}F(\lambda(h))=F(\lambda(0))=F(0)=f'(y_0)$. Tedy $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ má podle $\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=g'(x_0)$ pro $h\to 0$ limitu $g'(x_0)$

---

[15]) $\lambda(h)$ je ovšem definováno pro hodnoty h, pro něž je definováno $g(x_0+h)$.

[16]) $F(k)$ je ovšem definováno pro hodnoty k, pro něž je definováno $f(y_0+k)$.

a $F(\lambda(h))$ má podle $\lim_{h \to 0} F(\lambda(h)) = F(\lambda(0)) = F(0) = f'(y_0)$ limitu $f'(y_0)$, takže podle věty o limitě součinu má výraz $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} F(\lambda(h))$ neboli výraz $\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$ pro $h \to 0$ limitu $f'(y_0)g'(x_0)$.

□

Věta 3.2: Nechť $g \circ f$ je složená funkce, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Nechť funkce g má derivaci v intervalu $(\alpha;\beta)$.[17]) Nechť funkce f má derivaci v intervalu $(a;b)$.[18]) Nechť pro každé x intervalu $(\alpha;\beta)$ hodnota funkce g leží v intervalu $(a;b)$. Potom funkce $g \circ f$ má v intervalu $(\alpha;\beta)$ derivaci $f'(g(x))g'(x)$.

Důkaz 3.2:[19])

Je-li x jakákoliv hodnota intervalu $(\alpha;\beta)$, existuje derivace $g'(x)$ a hodnota $y = g(x)$ leží v intervalu $(a;b)$, takže funkce f má derivaci v bodě $y = g(x)$. Z věty 3.1 tedy plyne, že existuje v bodě x derivace funkce $g \circ f$ rovná číslu $f'(g(x))g'(x)$.

□

Jak už jsme se zmínili na začátku kapitoly, aplikace těchto dvou vět je jednoduchá, jen nesmíme zapomenout na fakt, že jak vnitřní, tak vnější funkce musí mít derivaci v příslušném bodě, resp. intervalu. Samozřejmě je také nutná znalost základních derivací, které najdeme například v matematických tabulkách.

Příklad 3.1: Nalezněte derivaci funkce $\sqrt{e^{x^2}+1}$.

Řešení:

Položíme-li $z = \sqrt{y}$, $y = e^u + 1$, $u = x^2$, máme

---

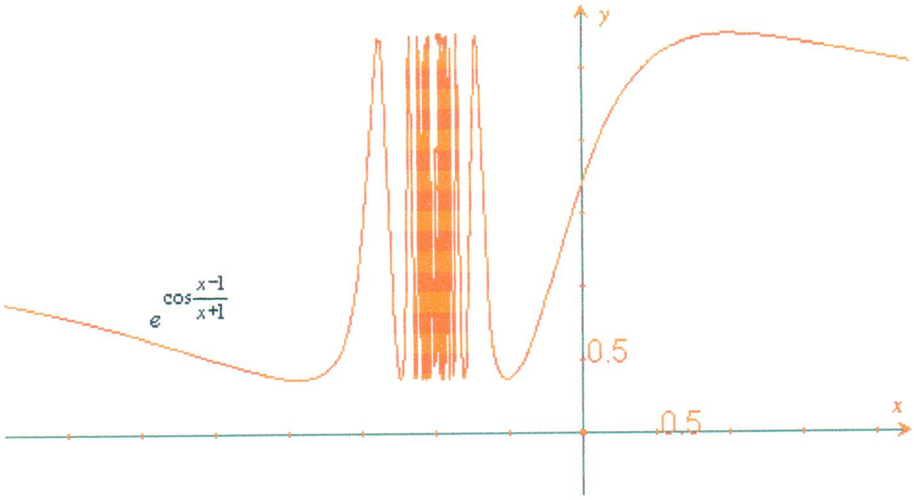
[17]) To znamená, že funkce g má derivaci v každém bodě intervalu $(\alpha;\beta)$.

[18]) Intervaly $(\alpha;\beta)$, $(a;b)$ mohou být i neomezené.

[19]) Lze dokázat i pro uzavřený interval.

$$\left(\sqrt{e^{x^2}+1}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{u}.2x = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e^{x^2}+1}}e^{x^2}.2x = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+1}} \text{ pro každé } x \in R.$$

Příklad 3.2: Nalezněte derivaci funkce $e^{\cos\frac{x-1}{x+1}}$, viz obrázek 3.1.



Obrázek 3.1:

Řešení:

$$\left(e^{\cos\frac{x-1}{x+1}}\right)' = e^{\cos\frac{x-1}{x+1}}\left(-\sin\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = -2e^{\cos\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{(x+1)^2}\sin\frac{x-1}{x+1}, \quad \text{pokud}$$

$x \in R - \{-1\}$.

Příklad 3.3: Nalezněte derivaci složené funkce $f(ax+b)$.

Řešení:

Často se vyskytuje tento speciální případ věty 3.1: $z = f(y)$, $y = ax+b$. Jsou-li a, b konstanty a má-li f vlastní derivaci v bodě $y = ax+b$, má složená funkce vlastní derivaci v bodě x, a to $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$ (ale $f'(ax+b)$ znamená hodnotu funkce f' v bodě y pro $y = ax+b$). Tedy derivace funkce $f(ax+b)$ se provede tak, že vynásobíme derivaci vnější funkce f v bodě $y = ax+b$ konstantou a.

Např.:

$$\left(e^{3x-2}\right)' = 3e^{3x-2}$$

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$$

$$\left(\sin(2x+1)\right)' = 2\cos(2x+1)$$

$$\left(\operatorname{arctan}(2x+1)\right)' = \frac{2}{(2x+1)^2+1}$$

Příklad 3.4: Nalezněte derivace složených funkcí:

a) $\ln f(x)$

b) $f(x)^{g(x)}$

Řešení:

a) $\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, pokud $f'(x)$ existuje a $f(x) > 0$. $\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ se nazývá logaritmická derivace.

b) Funkci $f(x)^{g(x)}$ nelze derivovat jako mocninu, protože mocnitel není konstantní, ani jako exponenciální funkci, protože základ není konstantní. Věta 3.1 nám dává tuto metodu: je-li $f(x) > 0$ v jistém bodě x a existují-li v tomto bodě vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$, dostáváme

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g(x)\ln f(x)\right)' =$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Tedy funkci $f(x)^{g(x)}$ derivujeme tak, že ji nejprve upravíme na tvar $e^{g(x)\ln f(x)}$ [20]) a poté derivujeme jako exponenciální funkci.

Předchozí dva příklady, tj. 3.3 a 3.4 nemají sloužit jako vzorce pro počítání takovýchto případů, ale spíše jako návod na zautomatizování některých kroků, jako

---

[20]) Užití vztahu $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$.

třeba v příkladu 3.4b), kde danou funkci musíme upravit na exponenciální funkci o základu e, na což by začátečník pravděpodobně hned nepřišel.

Příklad 3.5: Nalezněte derivaci funkce $\ln\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$.

Řešení:

$$\left(\ln\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\right)' =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{x+b}^2-\sqrt{x+a}^2}{\sqrt{x+a}\sqrt{x+b}}-\dfrac{\sqrt{x+a}^2-\sqrt{x+b}^2}{\sqrt{x+a}\sqrt{x+b}}}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)^2} =$$

$$=\frac{b-a}{(a-b)\sqrt{(x+a)(x+b)}}=\frac{-1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$ pro $x>-b$ a $a>b$. Pro $a\le b$ by neměla funkce vůbec smysl, protože musí platit, že $\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}>0$, tedy $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}>0$, tj. $a>b$.

Protože derivování této funkce je zdlouhavé a časově náročné, uvádíme postup s vynecháním několika kroků. V některých případech je vhodnější funkci nejdříve upravit, než abychom ji derivovali přímo bez předchozí úpravy. Naši funkci upravíme rozšířením zlomku v argumentu logaritmu a derivování se tím značně zjednoduší.

$$\left(\ln\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\right)'=\left(\ln\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\cdot\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}\right)' =$$

$$=\left(\ln\frac{2x+a+b-2\sqrt{(x+a)(x+b)}}{a-b}\right)' =$$

$$=\frac{\left(2-\dfrac{2x+a+b}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\right)}{2x+a+b-2\sqrt{x+a}\sqrt{x+b}}=\frac{-1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$

Příklad 3.6: Nalezněte derivaci funkce $\arccos\sqrt{\dfrac{ax^2+1}{Ax^2+1}}$, $0 < a < A$.

Řešení:

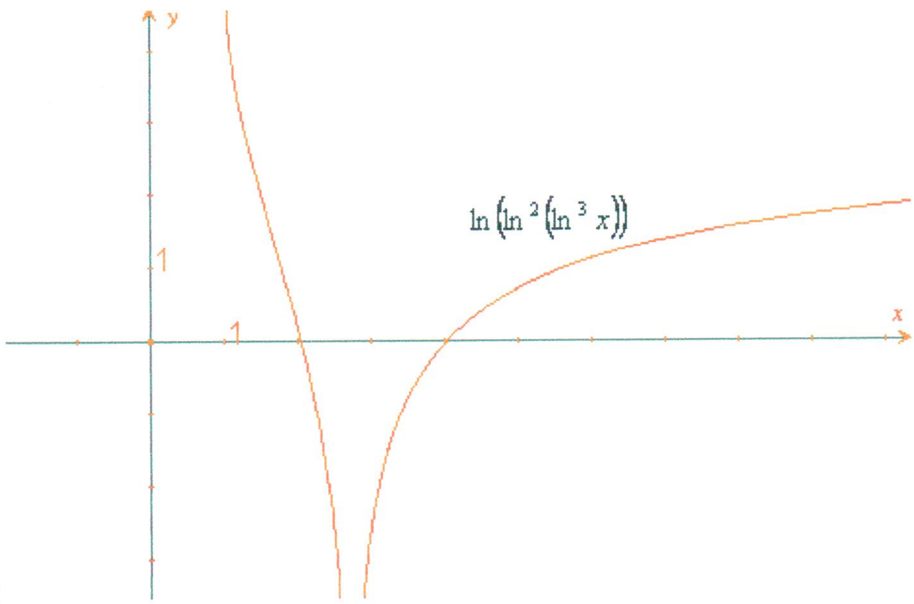
$$\left(\arccos\sqrt{\frac{ax^2+1}{Ax^2+1}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{ax^2+1}{Ax^2+1}}^{\,2}}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{ax^2+1}{Ax^2+1}}}\,\frac{2ax(Ax^2+1)-2Ax(ax^2+1)}{(Ax^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x(a-A)}{\sqrt{\frac{Ax^2+1-ax^2-1}{Ax^2+1}\,\frac{ax^2+1}{Ax^2+1}}\,(Ax^2+1)^2} = \pm\frac{a-A}{\sqrt{A-a}\sqrt{ax^2+1}\,(Ax^2+1)} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{A-a}{ax^2+1}}\,\frac{1}{Ax^2+1}$$ pro $x \neq 0$; horní znamení $(+)$ pro $x > 0$, dolní $(-)$ pro $x < 0$.

Je velmi užitečné, abychom po zvládnutí aplikace věty 3.1, resp. 3.2 počítali příklady, kde se objevují parametry (příklady 3.5, 3.6 a 3.10), protože nás vedou k zamyšlení nad všemi možnými variantami a alespoň částečně nás odtrhávají od rutinního dosazování do vzorců, což připomíná spíše počty než matematiku.

Příklad 3.7: Nalezněte derivaci funkce $\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$, viz obrázek 3.2.



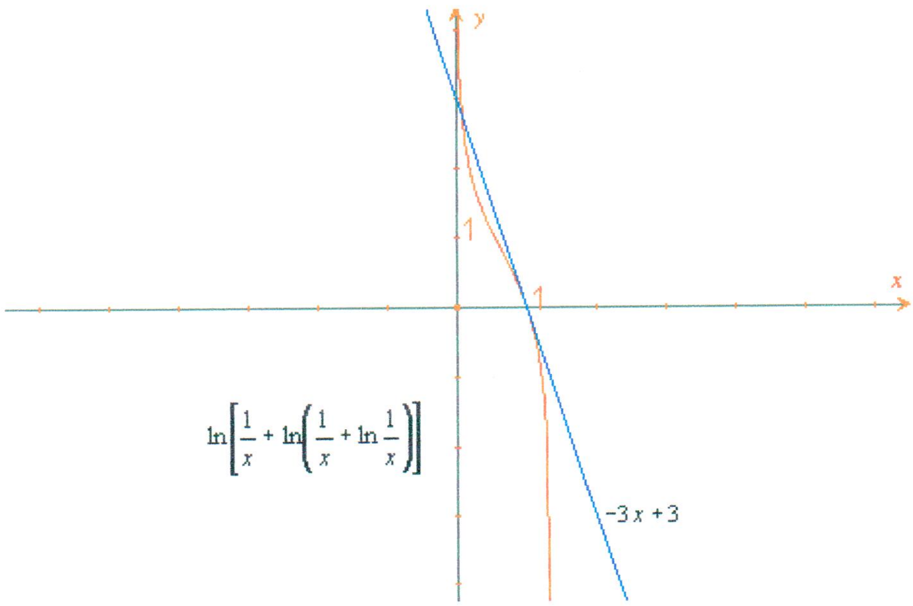
Obrázek 3.2:

Řešení:

$$\left(\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\ln^2\left(\ln^3 x\right)} 2\ln\left(\ln^3 x\right)\frac{1}{\ln^3 x} 3\ln^2 x \frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln x \ln\left(\ln^3 x\right)},$$ pokud $x > 1$, protože musí platit, že $\ln^2\left(\ln^3 x\right) > 0$, $\ln^3 x > 0$ a $x > 0$.

Příklad 3.8: Nalezněte derivaci funkce $\ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]$, viz obrázek 3.3.



Obrázek 3.3:

Řešení:

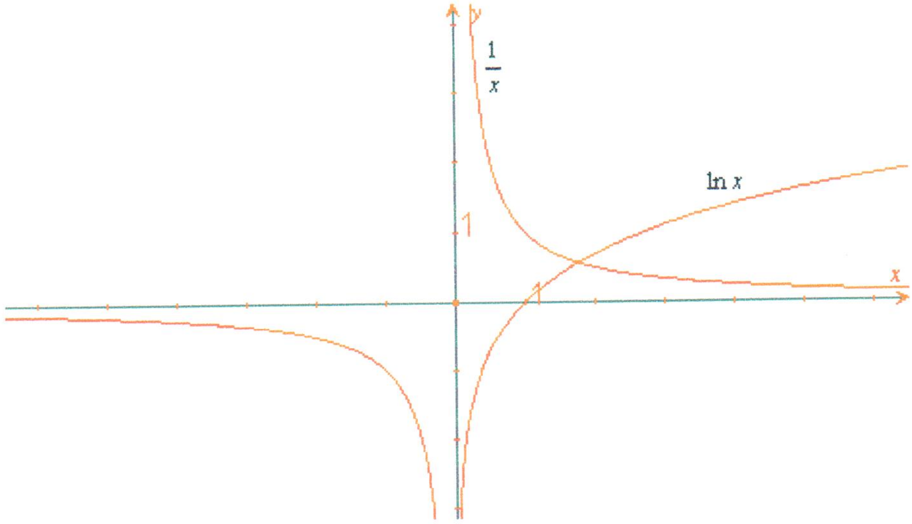
$$\left(\ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]\right)' =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}\right)\right] = -\frac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}{\left(1 + x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1 + x\ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]},$$

pokud platí, že $\frac{1}{x} > 0$, $\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x} > 0$ a $\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right) > 0$.

Pro $\frac{1}{x} > 0$ je $x > 0$.

Pro $\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}>0$ je $\frac{1}{x}-\ln x>0$ a odtud úpravou získáme $\ln x<\frac{1}{x}$. Snažíme se tedy řešit rovnici $\ln x=\frac{1}{x}$, ale ta není elementárně řešitelná. Řešení této rovnice leží v intervalu $x_0\in(1;e)$, a tedy $0<x<x_0$, viz obrázek 3.4.



Obrázek 3.4:

Pro $\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)>0$ je $\ln\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)>-\frac{1}{x}$ a odtud úpravou získáme $\frac{1}{x}-\ln x>e^{-\frac{1}{x}}$. Podle předchozího odstavce víme, že $\frac{1}{x}-\ln x>0$, a tudíž platí i $\frac{1}{x}-\ln x>e^{-\frac{1}{x}}$, a tedy $0<x<x_0$.

Všimněme si ještě tečny v bodě $x=1$ na obrázku 3.3. Řekli jsme, že derivace funkce v daném bodě je směrnicí tečny v tomto bodě. Pro $x=1$ je derivace rovna -3 a tečna v tomto bodě je přímka $y=-3x+3$, což potvrzuje zmíněný geometrický význam derivace funkce.

Příklad 3.9: Zjistěte, zda funkce $h=g\circ f$ má derivaci v daném bodě $x=x_0$, jestliže:

a) funkce f má derivaci v bodě $x=g(x_0)$ a g nemá derivaci v bodě $x=x_0$,

b) funkce f nemá derivaci v bodě $x=g(x_0)$ a g má derivaci v bodě $x=x_0$,

c) funkce f nemá derivaci v bodě $x = g(x_0)$ a g nemá derivaci v bodě $x = x_0$,

d) funkce f má nevlastní derivaci v bodě $x = g(x_0)$ a g má derivaci v bodě $x = x_0$.

Řešení:

a) Vezměme si například funkce $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ a rozhodněme o existenci derivace složené funkce v bodě $x_0 = 0$. Složená funkce je $h(x) = |x|^2 = x^2$, a tedy má derivaci v bodě $x_0 = 0$. Ale když vezmeme za vnější funkci $f(x) = x$, dostaneme složenou funkci $h(x) = |x|$ a ta nemá derivaci v bodě $x_0 = 0$. A můžeme tedy říci, že složená funkce může i nemusí mít derivaci, když vnitřní funkce derivaci nemá a vnější má.

b) Pokud vezmeme například funkce $f(x) = |x|$ a $g(x) = x^2$, bude situace obdobná jako v předchozím případě, a tedy složená funkce $h(x) = \left|x^2\right| = x^2$ bude mít derivaci v bodě $x_0 = 0$. A pokud opět vezmeme za vnitřní funkci $g(x) = x$, nebude mít funkce $h(x) = |x|$ derivaci v bodě $x_0 = 0$. Můžeme opět říci, že složená funkce může i nemusí mít derivaci, když vnitřní funkce derivaci má a vnější nemá.

c) Vezměme si například funkce $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ a bod $x_0 = 0$. Složená funkce je $h(x) = 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right| = x$, a tedy má derivaci v bodě $x_0 = 0$. Ale když vezmeme vnitřní funkci $g(x) = |x| + 3x$, dostaneme složenou funkci $h(x) = 2(|x| + 3x) + \left||x| + 3x\right|$ a ta nemá derivaci v bodě $x_0 = 0$. A můžeme tedy říci, že složená funkce může i nemusí mít derivaci, když vnitřní i vnější funkce derivaci nemají.

d) Vezmeme-li funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a $g(x) = x^2$, pokládáme si otázku, zda existuje derivace složené funkce $h = g \circ f$ v bodě $x_0 = 0$. Získáme složenou funkci $h(x) = \operatorname{sgn} x^2$ a ta nemá derivaci v bodě $x_0 = 0$, tj. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sgn} x^2 - 0}{x - 0}$ neexistuje, protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{sgn} x^2}{x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{\operatorname{sgn} x^2}{x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$. Pokud ovšem zvolíme vnitřní funkci $g(x) = e^x$, získáme složením funkcí f a g konstantní funkci $h(x) = 1$, která má derivaci v každém bodě, a tedy i v bodě $x_0 = 0$. Když si ale vezmeme jako vnitřní funkci $g(x) = \operatorname{sgn} x$ a vnější $f(x) = e^x$ (vnější má vlastní a vnitřní nevlastní derivaci v bodě $x_0 = 0$), zjistíme, že složená funkce $h = g \circ f$ má nevlastní derivaci v bodě $x_0 = 0$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sgn} x} - 1}{x} = +\infty$, protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{e^{\operatorname{sgn} x} - 1}{x} = \frac{e-1}{0_+} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{e^{\operatorname{sgn} x} - 1}{x} = \frac{\frac{1}{e} - 1}{0_-} = +\infty$. A pokud bychom skládali funkci sgn samu se sebou (vnější i vnitřní funkce mají nevlastní derivaci v bodě $x_0 = 0$), tak získáme opět funkci sgn, která, jak již bylo řečeno, má nevlastní derivaci v bodě $x_0 = 0$. Z toho vyplývá, že složená funkce může i nemusí mít derivaci (vlastní či nevlastní), když vnější funkce má nevlastní, resp. vlastní derivaci a vnitřní má vlastní, resp. nevlastní derivaci.

Z tohoto příkladu a věty 3.1, resp. 3.2 vyplývá, že věta nám sice zaručuje existenci derivace složené funkce s předpokladem vlastních derivací vnitřní i vnější funkce, ale neříká nic o tom, jak bude vypadat případ, kdy předpoklady splněny nebudou. V případě, kdy vnitřní nebo vnější funkce nemá vlastní derivaci, musíme řešit příklad bez užití výše zmíněných vět, a to nejčastěji podle definice derivace.[21]) Tedy zjistíme derivaci zprava a zleva, a pokud se rovnají, pak funkce derivaci má.

Příklad 3.10: Nechť funkce φ a ψ jsou funkce, které mají vlastní derivace v bodě x.

Najděte derivaci funkce y, je-li:

---

[21]) Derivace funkce f v bodě x_0 je rovna $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a v případě derivace zprava, resp. zleva se jedná o příslušnou jednostrannou limitu.

a) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$,

b) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ a $\psi(x)\neq 0$,

c) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ a $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$.

Řešení:

a) $$y'=\frac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}\left(2\varphi(x)\varphi'(x)+2\psi(x)\psi'(x)\right)=\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$$

pro $\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0$.

b) $$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2}\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$$

pro $\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0$.

c) Funkci $\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ nelze derivovat jako logaritmus o obecném základu, jelikož základ není konstantní. Musíme tedy funkci nejdříve upravit[22]) a až poté derivovat.

$$y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$$

$$y'=\frac{\frac{\psi'(x)\ln\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)}}{\ln^2\varphi(x)}=\frac{\varphi(x)\psi'(x)\ln\varphi(x)-\psi(x)\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)\psi(x)\ln^2\varphi(x)}=$$

$$=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$$

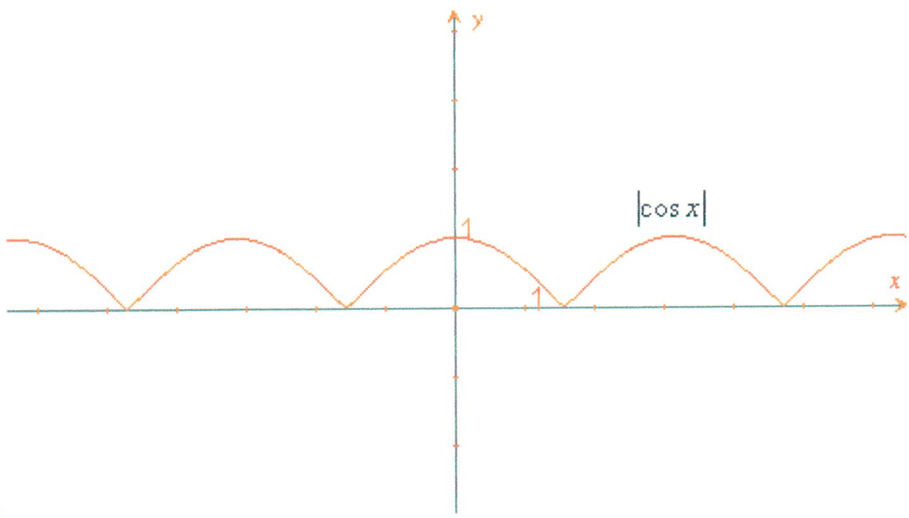
Následující příklady na derivování složených funkcí mohou činit jisté potíže, protože se zde vyskytují ony kritické body, kde by derivace existovat nemusela. Obzvláště zajímavé jsou v tomto ohledu funkce periodické, kde musíme promýšlet nejen

---

[22]) Užití vztahu $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

opakování kritických bodů vzhledem k periodičnosti, ale také jejich rozdělení do skupin podle jednostranných derivací, protože všechny body, u kterých máme podezření na neexistenci derivace, nemusí mít stejné derivace zprava, resp. zleva. Abychom předešli případným chybám v úvaze, je dobré prohlédnout si graf funkce, který nám vždy napoví, jak by derivace měly vypadat, jelikož jsme se v úvodu této kapitoly zmínili o jejím geometrickém významu.

Příklad 3.11: Nalezněte derivaci funkce $|\cos x|$, viz obrázek 3.5.



Obrázek 3.5:

Řešení:

Derivaci funkce $|\cos x|$ zjistíme tak, že vypočítáme derivaci funkce $|y|$ v bodě $y = \cos x$ a vynásobíme ji derivací funkce $\cos x$. Derivaci funkce $|y|$ získáme zvlášť pro interval $(-\infty;0)$ a interval $(0;+\infty)$ a poté zjistíme derivaci v bodě $y = 0$.

Pro $(-\infty;0)$ je $(-y)' = -1$, pro $(0;+\infty)$ je $(y)' = 1$. Derivaci funkce $|y|$ v bodě $y = 0$ vypočítáme podle definice derivace, tzn. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}$, tj. $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{-x}{x} = -1$. Z toho vyplývá, že funkce $|y|$ nemá derivaci v bodě $y = 0$.

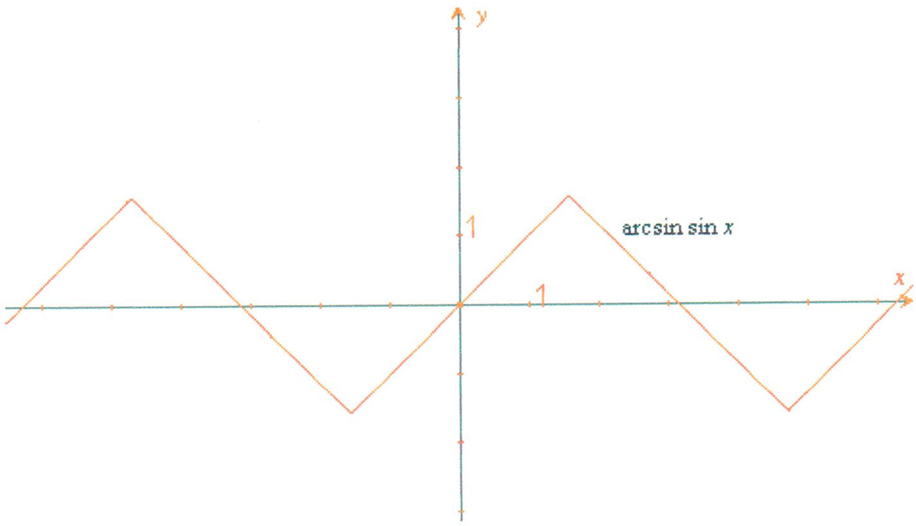
$(\cos x)' = -\sin x$

$\cos x = 0$ pro $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, proto pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ je $(|\cos x|)' = -\sin x$ a pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ je $(|\cos x|)' = \sin x$. A pro $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ platí, že $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$ a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{-\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$. Z toho plyne, že v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ funkce $|\cos x|$ nemá derivaci.

Příklad 3.12: Nalezněte derivaci funkcí $f(x) = \arcsin \sin x$, $g(x) = \sin \arcsin x$.

Řešení:

Derivaci funkce $f(x) = \arcsin \sin x$ (viz obrázek 3.6) zjistíme tak, že vypočítáme derivaci funkce $\arcsin y$ v bodě $y = \sin x$ a vynásobíme ji derivací funkce $\sin x$. Derivaci funkce $\arcsin y$ získáme pro každé y, kde $|y| < 1$.



Obrázek 3.6:

$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ pro $|y| < 1$. Funkce $\arcsin y$ v bodě $y = \pm 1$ nemá derivaci.

$(\sin x)' = \cos x$

$f' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cos x = \dfrac{\cos x}{\cos x} = 1$ pro $|\sin x| < 1$, tj. pro $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ a pro $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ nemá funkce f derivaci, tj. funkce má v $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ derivaci zleva různou od derivace zprava.

Pro $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\arcsin\sin x - \arcsin\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\cos x}{|\cos x|} = 1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} \frac{\arcsin\sin x - \arcsin\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} \frac{\cos x}{|\cos x|} = -1$$ [23])

Pro $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}_+} \frac{\arcsin\sin x + \frac{\pi}{2}}{x+\frac{\pi}{2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_+} \frac{\cos x}{|\cos x|} = 1$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}_-} \frac{\arcsin\sin x + \frac{\pi}{2}}{x+\frac{\pi}{2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\cos x}{|\cos x|} = -1$$

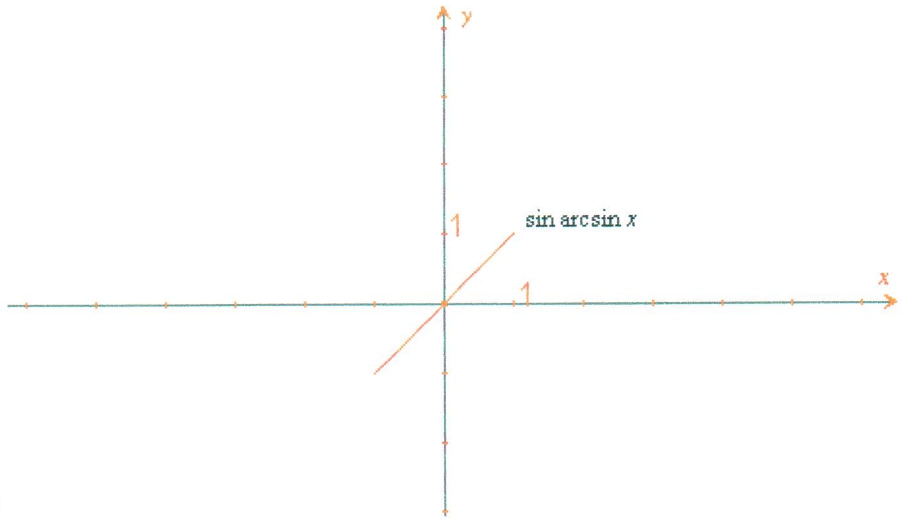
Složená funkce $g(x) = \sin\arcsin x$ (viz obrázek 3.7) má definiční obor $\langle -1;1\rangle$, a tedy pro $x \in (-1;1)$ je $g(x) = x$ a $g' = \dfrac{\cos\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 1$. [24])

---

[23]) Při odmocňování druhé mocniny si musíme dát pozor na to, že výsledkem není výraz, kde se druhá mocnina a odmocnina „vyruší“, ale výsledkem je absolutní hodnota výrazu, tj. $\sqrt{x^2} = |x|$, což bývá zdrojem nejčastějších chyb.

Ovšem pro $x = \pm 1$ derivace neexistují, protože existují pouze jednostranné derivace, tj. pro $x = 1$ derivace zleva $\lim_{x \to 1_-} \frac{\sin \arcsin x - 1}{x - 1} \overset{L'H}{=} 1$ a pro $x = -1$ derivace zprava

$$\lim_{x \to -1_+} \frac{\sin \arcsin x + 1}{x + 1} \overset{L'H}{=} 1.$$



Obrázek 3.7:

[24]) Úpravu $\cos \arcsin x = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2}$ můžeme provést, aniž bychom se museli zabývat otázkou předchozí poznámky, tj. $|x| = \sqrt{x^2}$, protože funkce $\cos \arcsin$ je nezáporná v každém bodě svého definičního oboru.

4. SUBSTITUCE VE VÝPOČTU RIEMANNOVA INTEGRÁLU A VE VÝPOČTU PRIMITIVNÍ FUNKCE

K tématu funkcí zajisté patří i zmínka o primitivní funkci a konkrétně u složených funkcí se zabýváme substitucí ve výpočtu primitivní funkce. Dá se říci, že integrování je v jistém smyslu inverzní operací derivování funkce. Na rozdíl od derivování je ale integrování nejednoznačné, protože derivace konstanty je nula. A pokud hledáme primitivní funkci k zadané funkci, výsledkem může být nekonečné množství funkcí, které se liší právě o konstantu. Druhým zásadním rozdílem od derivování je fakt, že nedokážeme integrovat každou funkci, i když integrovatelná je, protože tato operace může být velmi složitá. Snažíme se tedy najít nějaké univerzální metody, pomocí nichž budeme umět integrovat alespoň ty nejzákladnější funkce. A jak již bylo řečeno, u složených funkcí využíváme substitucí, které nám mohou integrovanou funkci značně zjednodušit. Výhodou je ovšem i fakt, že se derivováním získané primitivní funkce můžeme přesvědčit o správnosti svého výpočtu.

Stejně jako v předchozích kapitolách dbáme na to, aby byly splněny předpoklady užívaných vět. A pokud splněny nejsou, nemůžeme říci o integrálu složené funkce nic, protože věty jsou ve tvaru implikace.

Věta 4.1 (o substituci): Nechť $g \circ f$ je složená funkce, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Funkce f je spojitá v intervalu $(a;b)$. Funkce g má v intervalu $(\alpha;\beta)$ derivaci $g'(x)$. Pro každé x intervalu $(\alpha;\beta)$ hodnota $g(x)$ leží v intervalu $(a;b)$. Potom platí v intervalu $(\alpha;\beta)$ rovnice $\int f(y)dy = \int f(g(x))g'(x)dx$,[25])

---

[25]) Abychom z integrálu $\int f(y)dy$, který stojí vlevo, dostali integrál vpravo, dosazujeme za prvé do integrované funkce f za y podle rovnice $y = g(x)$. Za druhé dosazujeme formálně za symbol dy podle rovnice $dy = g'(x)dx$, což je právě rovnice, kterou dostaneme diferencováním rovnice $y = g(x)$. Celý postup se tedy redukuje na mechanické dosazování (čili „substituci"), a proto se metodě, obsažené ve větě 4.1, říká „metoda substituční".

dosadíme-li do primitivní funkce, kterou nám představuje integrál na levé straně, $g(x)$ za y.

Důkaz 4.1:

V intervalu $(a;b)$ položme $F(y)=\int f(y)dy$.[26]) Naše věta tvrdí, že v intervalu $(\alpha;\beta)$ je funkce $g \circ F$ primitivní funkcí k funkci $(g \circ f)g'$. To plyne okamžitě z věty 3.2. Protože funkce g má derivaci v intervalu $(\alpha;\beta)$ a funkce F má derivaci $F'(y)=f(y)$ v intervalu $(a;b)$. Pro každé x intervalu $(\alpha;\beta)$ leží hodnota funkce g v intervalu $(a;b)$. Tedy podle věty 3.2 má funkce $g \circ F$ v intervalu $(\alpha;\beta)$ derivaci, jejíž hodnota je $F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$. Tedy je funkce $g \circ F$ v intervalu $(\alpha;\beta)$ primitivní funkcí k funkci $(g \circ f)g'$.

□

Vzorce $\int f(y)dy = \int f(g(x))g'(x)dx$ můžeme užít dvojím způsobem.

První způsob spočívá v tom, že máme vypočítat $\int f(g(x))g'(x)dx$. Jsou-li splněny předpoklady věty 4.1, můžeme vypočítat tento integrál, tj. dokážeme-li nalézt funkci F, která je primitivní funkcí k funkci f, je předložený integrál vypočten. Postup výpočtu lze naznačit stručně takto: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy = = F(y) = F(g(x))$.

Druhý způsob spočívá v tom, že máme vypočítat $\int f(y)dy$. Snažíme se převést tento integrál substitucí $y=g(x)$ na integrál $\int f(g(x))g'(x)dx$, který může být jednodušší než integrál $\int f(y)dy$. Výsledek vyslovíme později jako zvláštní větu (věta 4.2).

Nechť funkce g je definovaná v intervalu $(\alpha;\beta)$. Nechť tato funkce g zobrazuje interval $(\alpha;\beta)$ na interval $(a;b)$.[27]) Potom tedy každé hodnotě y intervalu $(a;b)$

[26]) Tento integrál existuje, protože f je spojitá v $(a;b)$. Ke každé funkci spojité v intervalu $(a;b)$ existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

[27]) Tento výrok znamená, že interval $(a;b)$ je množinou všech hodnot $g(x)$ pro všechna $x \in (\alpha;\beta)$.

odpovídá aspoň jedna hodnota x intervalu $(\alpha;\beta)$ tak, že platí rovnice $g(x)=y$, $x\in(\alpha;\beta)$. Vybereme pro každé y z intervalu $(a;b)$ jednu hodnotu x intervalu $(\alpha;\beta)$ tak, aby platila rovnice $g(x)=y$, $x\in(\alpha;\beta)$. Potom toto x bude funkcí proměnné y, definovanou v intervalu $(a;b)$. Označme ji znakem φ. Hodnoty funkce φ leží v intervalu $(\alpha;\beta)$. Pro každé y intervalu $(a;b)$ bude pak splněna rovnice $g(x)=y$, $x\in(\alpha;\beta)$, dosadíme-li do ní za x hodnotu $\varphi(y)$, tj. pro každé y intervalu $(a;b)$ je $g(\varphi(y))=y$.[28])

Věta 4.2: Nechť $g\circ f$ je složená funkce, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Funkce g nechť má derivaci v intervalu $(\alpha;\beta)$. Nechť funkce g zobrazuje interval $(\alpha;\beta)$ na interval $(a;b)$. Definujeme funkci φ v intervalu $(a;b)$ tak, aby pro každé y tohoto intervalu platila rovnice $g(x)=y$, $x\in(\alpha;\beta)$, když do ní za x dosadíme $\varphi(y)$.[29]) Funkce f nechť je spojitá v intervalu $(a;b)$. Potom je v intervalu $(a;b)$ $\int f(y)dy=\int f(g(x))g'(x)dx$, položíme-li v primitivní funkci, kterou nám představuje integrál vpravo, $x=\varphi(y)$.

Důkaz 4.2:

Nechť F je nějaká primitivní funkce k funkci f v intervalu $(a;b)$, tj. nechť platí $F'(y)=f(y)$ v intervalu $(a;b)$ (existence funkce F plyne ze spojitosti funkce f). V intervalu $(\alpha;\beta)$ je (protože hodnoty funkce g leží v $(a;b)$, viz věta 3.2) $F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$. Funkce $g\circ F$ je tedy primitivní funkcí k funkci $(g\circ f)g'$ v intervalu $(\alpha;\beta)$. Nechť H je libovolná primitivní funkce k funkci $(g\circ f)g'$ v intervalu $(\alpha;\beta)$ (existenci takové primitivní funkce jsme právě dokázali,

---

[28]) Obzvlášť jednoduchý případ je ten, kdy funkce g je buď rostoucí, nebo klesající v intervalu $(\alpha;\beta)$. Tedy ke každé hodnotě y intervalu $(a;b)$ existuje jen jedna hodnota x intervalu $(\alpha;\beta)$, pro kterou platí rovnice $g(x)=y$. Tato hodnota x je tedy funkcí proměnné y, $x=\varphi(y)$, definovanou v intervalu $(a;b)$, a tuto funkci φ nazýváme funkcí inverzní k funkci g.

[29]) Viz to, co bylo řečeno před větou 4.2.

protože $g \circ F$ je taková primitivní funkce), tj. budiž $H(x) = \int f(g(x))g'(x)dx$ (v intervalu $(\alpha;\beta)$).

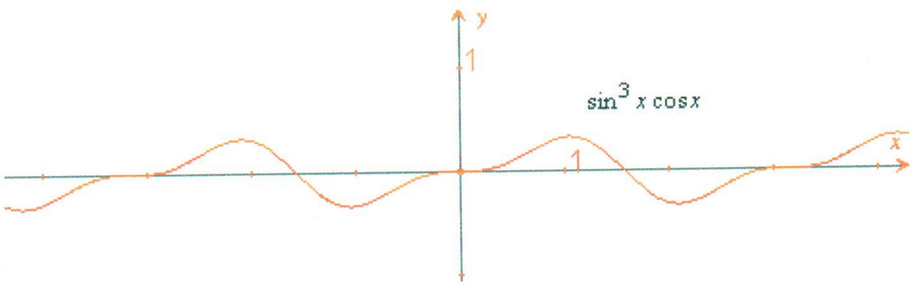
Máme dokázat, že funkce $\varphi \circ H$ je v intervalu $(a;b)$ funkcí primitivní k funkci f.

Protože funkce $g \circ F$ je, stejně jako funkce H, primitivní funkcí k funkci $(g \circ f)g'$ v $(\alpha;\beta)$, je $F(g(x)) = H(x) + c$ v intervalu $(\alpha;\beta)$, kde c je konstanta. Nechť y je libovolné číslo intervalu $(a;b)$ a položme $x = \varphi(y)$, takže je $y = g(x)$ a x leží v intervalu $(\alpha;\beta)$. Z rovnice $F(g(x)) = H(x) + c$ plyne pak $F(y) = H(\varphi(y)) + c$. Tato rovnice platí v celém intervalu $(a;b)$. Protože funkce F je primitivní funkcí k funkci f v $(a;b)$, platí totéž o funkci $\varphi \circ H$, $H(\varphi(y)) = F(y) - c$.

□

Použití této věty spočívá v tom, že chceme vypočítat $\int f(y)dy$. Substitucí $y = g(x)$ dostaneme $\int f(g(x))g'(x)dx$. Předpokládejme, že tento integrál dovedeme vypočítat – tento integrál je tedy funkcí H proměnné x. Zavedeme-li do této funkce H opět y podle rovnice $x = \varphi(y)$, dostaneme hledaný integrál $\int f(y)dy = H(\varphi(y))$ (jsou-li všechny podmínky věty 4.2 splněny). Stručně lze znázornit postup výpočtu tímto schématem: $\int f(y)dy = \int f(g(x))g'(x)dx = H(x) = H(\varphi(y))$.

Příklad 4.1: Vypočtěte integrál $\int \sin^3 x \cos x dx$, viz obrázek 4.1.



Obrázek 4.1:

Řešení: (podle věty 4.1)

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int \sin^3 x \cos x dx$

V řadě příkladů vidíme na první pohled, kterou funkci budeme substituovat, protože se v předpisu funkce, která se má integrovat, vyskytuje součin složené funkce a derivace funkce vnitřní, stejně jako v tomto příkladu. Jelikož je zřejmé, že funkce $\cos$ je derivací funkce $\sin$, která je vnitřní funkcí funkce $\sin^3$, je volba substituované funkce snadno čitelná. A tedy $f(g(x))g'(x)=\sin^3 x\cos x$, $f(g(x))=\sin^3 x$, $g(x)=\sin x$ a $g'(x)=\cos x$.

$$\int \sin^3 x\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ \cos x dx = dt\end{matrix}\right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4}+c=\frac{1}{4}\sin^4 x + c$$

Příklad 4.2: Vypočtěte integrál $\int \tan x dx$.

Řešení:[30]) (podle věty 4.1)

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$$

Zde se musíme omezit na interval, v němž se $\cos x$ nikdy nerovná nule, a vypočítat neurčitý integrál pro danou funkci v každém intervalu, tj. v každém bodě definičního oboru funkce. Intervaly, kde se $\cos x$ nerovná nule, jsou $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ a $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$.

a) Řešení pro interval $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$:

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t, t\in (0;1\rangle\\ -\sin x dx = dt\end{matrix}\right| = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t|+c = -\ln|\cos x| + c$$

b) Řešení pro interval $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$:

---

[30]) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left|\begin{matrix}f(x)=t\\ f'(x)dx = dt\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c$

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t, t \in \langle -1;0) \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

V obou předchozích příkladech se objevují integrály (tj. $\int f(g(x))g'(x)dx$, $\int \frac{g'(x)}{f(g(x))}dx$), kde jsou potřebné substituce vidět na první pohled. Jejich provedení bychom si měli zautomatizovat, protože se často vyskytují jako dílčí kroky při počítání složitějších integrálů. Pokud si úlohu ještě trochu ztížíme přítomností parametrů ve složené funkci, jako v následujícím příkladu, je to ideální postup na procvičení užívaných metod při integrování složené funkce, jak už jsme se ostatně zmínili na začátku této kapitoly.

Příklad 4.3: Vypočtěte integrál $\int (1+x^2)^n x dx$.

Řešení: (podle věty 4.1)

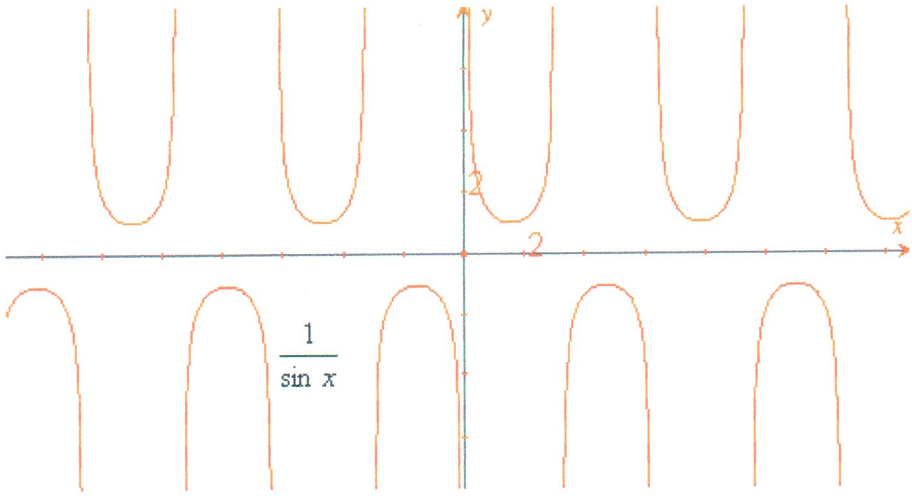
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int (1+x^2)^n x dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^n 2x dx$$

a) Pro $n \neq -1$

$$\frac{1}{2}\int (1+x^2)^n 2x dx = \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t, t \geq 1 \\ 2x dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{2(n+1)} + c = \frac{(1+x^2)^{n+1}}{2(n+1)} + c$$

b) Pro $n = -1$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t, t \geq 1 \\ 2x dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln t + c = \ln\sqrt{t} + c = \ln\sqrt{1+x^2} + c$$



Obrázek 4.2:

Příklad 4.4: Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sin x}$, viz obrázek 4.2.

Řešení: (podle věty 4.1)

Zde se musíme omezit na interval, v němž se $\sin x$ nikdy nerovná nule, a vypočítat neurčitý integrál pro danou funkci v každém intervalu (jako v příkladu 4.2), tj. v každém bodě definičního oboru funkce. Intervaly, kde se $\sin x$ nerovná nule, jsou $(k\pi;(k+1)\pi)$, $k \in Z$.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$ [31])

$$\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = t, t \in \left(\frac{k\pi}{2};\frac{(k+1)\pi}{2}\right) \\ \frac{dx}{2} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{1}{\tan t}\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int \frac{1}{\tan t}\frac{dt}{\cos^2 t}$$

---

[31]) Užití vztahu $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

$$\int \frac{1}{\tan t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \left| \begin{array}{l} \tan t = u, u > 0 \text{ pro } t \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ \qquad u < 0 \text{ pro } t \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi \right) \\ \frac{dt}{\cos^2 t} = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\tan t| + c =$$

$$= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$$

Příklad 4.5: Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$.

Řešení: (podle věty 4.2)

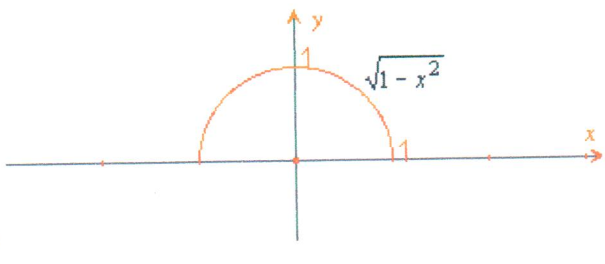
$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$x = g(t) = at$$

$$t = \varphi(x) = \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left| \begin{array}{l} x = at \\ dx = adt \end{array} \right| = \int \frac{adt}{a^2(t^2 + 1)} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} t + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{x}{a} + c$$

Příklad 4.6: Vypočtěte integrál $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$, viz obrázek 4.3.



Obrázek 4.3:

Řešení: (podle věty 4.2)

Zde se musíme omezit na interval, v němž je $1 - x^2$ větší nebo rovno nule. Jedná se tedy o interval $\langle -1; 1 \rangle$.

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$x = g(t) = \sin t$ [32])

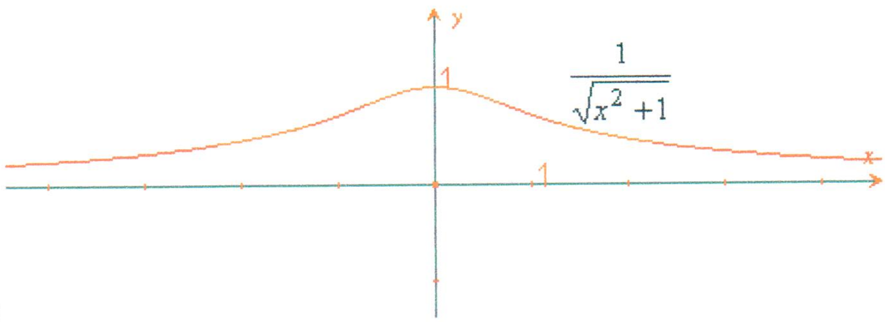
$t = \varphi(x) = \arcsin x$, $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = ^{33})$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int 2\cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c$$

podle věty 4.1 $\frac{1}{4}\int 2\cos 2t dt = \begin{vmatrix} 2t = u \\ 2dt = du \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int \cos u = \frac{\sin 2t}{4} + c_1$

Příklad 4.7: Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, viz obrázek 4.4.



Obrázek 4.4:

Řešení: (podle věty 4.2)

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$x = g(t) = \mathrm{cotg}\, t$, $t \in (0; \pi)$. Probíhá-li t interval $(k\pi; (k+1)\pi)$, $k \in Z$, probíhá $\mathrm{cotg}\, t$ právě celý interval $(-\infty; \infty)$.

$t = \varphi(x) = \mathrm{arccotg}\, x$

---

[32]) Můžeme volit také substituci $x = \cos t$.

[33]) Užití vztahů $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{cotg} t, t \in (k\pi;(k+1)\pi) \\ dx = -\dfrac{dt}{\sin^2 t} \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\sin^2 t \sqrt{1+\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}} = -\int \frac{dt}{\sin^2 t \sqrt{\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t}}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sin^2 t \left|\dfrac{1}{\sin t}\right|} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| = \ln\left|\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right| = \ln\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} x\right)\right| \text{ [34]}$$

Při výpočtu integrálu složené funkce se mimo jiné zabýváme otázkou, zda můžeme říci, že složená funkce je integrovatelná, pokud víme, že vnitřní i vnější funkce jsou integrovatelné. Jak je vidět na následujícím příkladu, složená funkce může i nemusí být integrovatelná za předpokladu integrovatelnosti funkcí, z nichž je složená. V předpokladech věty 4.1 požadujeme za prvé spojitost vnější funkce a za druhé existenci derivace vnitřní funkce. Takže věta neříká nic o tom, jak se bude chovat složená funkce, když vnitřní i vnější funkce budou, resp. nebudou integrovatelné nebo třeba jedna bude a druhá nebude integrovatelná.

Příklad 4.8: Zjistěte, zda funkce $h = g \circ f$ je integrovatelná, jestliže vnější i vnitřní funkce jsou integrovatelné.

Řešení:

Vezměme si třeba případ, kde $f(x) = \begin{cases} 0; \text{pro } x = 0 \\ 1; \text{pro } x \neq 0 \end{cases}$ a $g(x) = \begin{cases} 0; \text{pro } x \text{ racionál.} \\ \dfrac{1}{n}; \text{pro } x = \dfrac{m}{n} \end{cases}$, kde m, n $(n \geq 1)$ jsou vzájemně nesoudělná celá čísla, je Riemannova funkce. Obě funkce jsou integrovatelné.

Výsledkem složení je funkce $h(x) = \begin{cases} 0; \text{pro } x \text{ iracionál.} \\ 1; \text{pro } x = \dfrac{m}{n}, \text{kde } m, n \text{ jsou nesoud.} \end{cases}$, což je vlastně Dirichletova funkce, která se v literatuře nejčastěji značí χ.

---

[34]) $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|$, viz příklad 4.4.

Víme, že pro vnější funkci je $\int_a^b f(x)dx = b - a$, pro vnitřní funkci je $\int_a^b g(x)dx = 0$.[35])

A nyní si dokážeme, že integrál $\int_a^b \chi(x)dx$ neexistuje pro žádná $a, b \in R$, $a \neq b$.

Zvolíme D libovolné dělení intervalu $\langle a; b\rangle$, které je definované dělícími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. M_i je supremum a m_i je infimum funkce χ v intervalu $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$. Je vidět, že $M_i = 1$ a $m_i = 0$, a tedy horní součet $S(D) = \sum_{i=1}^{n} 1.\Delta x_i = b - a$, $s(D) = \sum_{i=1}^{n} 0.\Delta x_i = 0$.[36]) Protože všechny horní součty jsou rovny číslu $b-a$, je i jejich infimum rovno číslu $b-a$. A tedy horní integrál je $\int_a^{\bar{b}} \chi(x)dx = b - a$ a obdobně dolní integrál je $\int_{\underline{a}}^{b} \chi(x)dx = 0$. A proto $\int_a^b \chi(x)dx$ neexistuje.

Příklad 4.9: Zjistěte, zda funkce $h = g \circ f$ je integrovatelná, jestliže vnější je a vnitřní není integrovatelná funkce.

Řešení:

Vezměme si třeba případ, kde $f(x) = |x|$ a $g(x) = 2x\left(\chi(x) - \frac{1}{2}\right)$, kde χ je Dirichletova funkce.

Pokud vnitřní funkci upravíme, dostaneme funkci $g(x) = \begin{cases} x; \text{pro } x \text{ racionální} \\ -x; \text{pro } x \text{ iracionál.} \end{cases}$ a chceme dokázat, že tato funkce není integrovatelná, tj. nemá Riemannův integrál od a do b pro žádná $a, b \in R$, $a \neq b$.

---

[35]) My se zde tímto integrálem zabývat nebudeme, ale je možné jej nastudovat v literatuře [7].

[36]) Δx_i je šířka intervalu $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$.

Vezměme si například interval $\langle 0;1\rangle$ s dělením D_n, které rozdělí interval na n stejných dílů. Dělícími body budou tedy $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ..., $x_n = \frac{n}{n} = 1$. Označíme $\nu(D_n)$ normu tohoto dělení, tj. největší z čísel Δx_i. V našem případě je norma dělení $\nu(D_n) = \frac{1}{n}$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$, a tedy podle vět o horním, resp. dolním integrálu jako limitě horních, resp. dolních součtů je $\lim\limits_{n\to\infty} S(D_n) = \overline{\int_0^1} g(x)dx$, $\lim\limits_{n\to\infty} s(D_n) = \underline{\int_0^1} g(x)dx$. Musíme nyní spočítat $S(D_n)$ a $s(D_n)$. Supremum funkce g v intervalu $\langle x_{i-1}; x_i\rangle = \left\langle \frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right\rangle$ je $\frac{i}{n}$ a infimum $-\frac{i}{n}$. Z toho vyplývá, že

$$S(D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} \quad \text{a} \quad s(D_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = -\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

A tedy horní integrál $\overline{\int_0^1} g(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ a dolní integrál $\underline{\int_0^1} g(x)dx = -\frac{1}{2}$.

A protože se sobě integrály nerovnají, $\int_0^1 g(x)dx$ neexistuje.

Také víme, že $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |x|dx$ existuje a pro $0 \le a \le b$ $\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}$, pro $a \le b \le 0$ $\int_a^b -xdx = \frac{a^2 - b^2}{2}$, pro $a < 0 < b$ $\int_a^0 -xdx + \int_0^b xdx = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Na závěr musíme vyřešit složení funkcí g a f. Jak je vidět, složená funkce $h = g \circ f$ je opět funkce $h(x) = |x|$, o které víme, že je integrovatelná.

Příklad 4.10: Zjistěte, zda funkce $h = g \circ f$ je integrovatelná, jestliže vnější a vnitřní nejsou integrovatelné funkce.

Řešení:

Vezměme si třeba případ, kde $f(x) = g(x) = \chi(x)$, kde χ je Dirichletova funkce.

O Dirichletově funkci víme, že není integrovatelná, viz příklad 4.8. A jelikož funkce je ve tvaru $\chi(x) = \begin{cases} 1;\ \text{pro } x \text{ racionální} \\ 0;\ \text{pro } x \text{ iracionál.} \end{cases}$, tak prvky oboru hodnot funkce χ jsou racionální čísla. Proto když složíme tuto funkci samu se sebou, vznikne konstantní funkce $h(x) = 1$, která je integrovatelná a $\int_a^b h(x)dx = b - a$.

Z předchozích tří příkladů je tedy vidět, že pokud nemáme zaručeny předpoklady vět 4.1, 4.2 a také 4.3, nemůžeme o integrálu složené funkce nic prohlásit, jak už bylo několikrát řečeno. V takovémto případě se snažíme dokázat existenci či neexistenci Riemannova integrálu příslušné funkce například pomocí vět o horních a dolních integrálech, resp. horních a dolních součtech, jako jsme obdobně dokazovali existenci a neexistenci limity či derivace zjišťováním jednostranných limit či derivací.

Následující věta se již týká určitých integrálů, o jejichž užití jsme se dozvěděli většinou až na vysoké škole. Při výpočtech obsahů složitějších obrazců již nevystačíme se známými vzorci v tabulkách, ale musíme zapojit i znalosti matematické analýzy, a to právě integrování funkcí, protože složité obrazce se dají popsat několika funkcemi a výsledný obsah je pak součtem, popř. rozdílem určitých integrálů příslušných funkcí. Určitý integrál vlastně určuje plocha omezená shora, resp. zdola zadanou funkcí, zdola, resp. shora osou x a zprava a zleva kolmicí na osu x v bodech, které udávají meze integrálu.

Věta 4.3 (o integraci substitucí pro Riemannův integrál): Nechť $g \circ f$ je složená funkce, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce. Funkce g nechť má v intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$ spojitou derivaci $g'(x)$ (přičemž slovo „derivace" a znak $g'(x)$ pro $x = \alpha$ znamená derivaci zprava a pro $x = \beta$ derivaci zleva).[37]) Funkce f nechť

---

[37]) Funkce $g(x)$ je tedy spojitá v intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$.

je spojitá v intervalu $\langle A; B\rangle$ a pro každé x intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$ [38]) je $A \leq g(x) \leq B$.

Položíme-li $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$, je $\int_a^b f(y)dy = \int_\alpha^\beta f(g(x)).g'(x)dx$.

Důkaz 4.3:

Jelikož funkce f je spojitá v intervalu $\langle A; B\rangle$, existuje podle věty o existenci určitého integrálu integrál $\int_A^B f(u)du$. Položme $F(y) = \int_A^y f(u)du$. Podle věty o integrálu jako funkci horní meze je funkce F definována v intervalu $\langle A; B\rangle$ a má v tomto uzavřeném intervalu derivaci $F'(y) = f(y)$ (znak $F'(A)$ značí derivaci zprava v bodě A a znak $F'(B)$ značí derivaci zleva v bodě B). Protože funkce g má derivaci v intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$ [39]) a protože hodnoty funkce g leží v intervalu $\langle A; B\rangle$, má funkce $g \circ F$ podle věty 3.2 pro uzavřený interval v intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$ derivaci $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ (v bodě $x = \alpha$ rozumíme slovem derivace opět derivaci zprava, v bodě $x = \beta$ derivaci zleva). Funkce $g \circ F$ je tedy spojitá v intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu $(\alpha; \beta)$ derivaci $f(g(x))g'(x)$. Funkce

---

[38]) Zde jsme mluvili o intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$, takže jsme předpokládali $\alpha < \beta$, ale také pro $\alpha > \beta$ platí vzorec $\int_a^b f(y)dy = \int_\alpha^\beta f(g(x)).g'(x)dx$ za příslušných předpokladů: protože ve vzorci vlevo i vpravo můžeme vyměnit dolní integrační mez za horní a naopak (násobíme prostě obě strany činitelem -1).

[39]) V bodě α zprava, v bodě β zleva.

$(g \circ f)g'$ je spojitá v intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$ [40]) a tedy existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(g(x)).g'(x)dx$ (podle věty o existenci určitého integrálu). Podle věty o souvislosti primitivní funkce s určitým integrálem je tedy $\int_\alpha^\beta f(g(x)).g'(x)dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a)$ (protože $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$). Ale podle $F(y) = \int_A^y f(u)du$ je (protože hodnoty $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ leží v intervalu $\langle A; B \rangle$) $F(b) - F(a) = \int_A^b f(u)du - \int_A^a f(u)du =$ $= \int_a^b f(u)du$. Dosadíme-li z této rovnice do pravé strany rovnice $\int_\alpha^\beta f(g(x)).g'(x)dx =$ $= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a)$, dostáváme rovnici $\int_a^b f(y)dy = \int_\alpha^\beta f(g(x)).g'(x)dx$, neboť $\int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy$.

□

Vzorce $\int_a^b f(y)dy = \int_\alpha^\beta f(g(x)).g'(x)dx$ můžeme použít buď k výpočtu integrálu vlevo, známe-li integrál vpravo, nebo k výpočtu integrálu vpravo, známe-li integrál vlevo. Mechanismus je stejný jako u neurčitých integrálů, jen musíme dát pozor na to, že se současně i meze mění podle substituce $y = g(x)$, kde $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$. Zde musíme dát také pozor na to, jsou-li podmínky věty splněny. U neurčitých integrálů se můžeme po výpočtu dodatečně derivováním přesvědčit, zda jsme počítali správně. U určitých integrálů tuto možnost zkoušky nemáme.

---

[40]) Protože g je spojitá v $\langle \alpha; \beta \rangle$ a nabývá jen hodnot intervalu $\langle A; B \rangle$ a funkce f je spojitá v $\langle A; B \rangle$, funkce $g \circ f$ je spojitá v $\langle \alpha; \beta \rangle$ podle věty 2.4 pro uzavřený interval a funkce g' je spojitá v $\langle \alpha; \beta \rangle$ podle předpokladu.

Pokud existuje na intervalu $\langle a;b\rangle$ funkce F vzniklá spojitým dodefinováním primitivní funkce k funkci, z níž počítáme určitý integrál, v bodech a,b, pak při výpočtu určitého integrálu můžeme nejdříve vyřešit příslušný neurčitý integrál a poté s danými mezemi vypočítat určitý integrál jako rozdíl $F(b)-F(a)$, kde a je zadaná dolní mez, b je zadaná horní mez a F je primitivní funkce k zadané funkci, z níž počítáme určitý integrál.

Nebo počítáme určitý integrál za použití vhodné substituce s vypočtením nových mezí α, β dle této substituce a již se nevracíme k původní integrační proměnné a mezím, ale dosazujeme přímo meze α, β do získané primitivní funkce.

Příklad 4.11: Vypočtěte určitý integrál $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení:

Příklad spočítáme oběma způsoby zmíněnými v předchozích dvou odstavcích a můžeme je vzájemně porovnat především z hlediska časové náročnosti. Je zřejmé, že v mnohých případech je mnohem delší varianta počítání příslušného neurčitého integrálu a poté rozdílu $F(b)-F(a)$. Pokud bychom zvolili druhý způsob, můžeme si práci ulehčit, jelikož se integrovaná funkce vhodnou substitucí značně zjednoduší.

a) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \dfrac{\arcsin x}{2} + \dfrac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c$ (viz příklad 4.6)

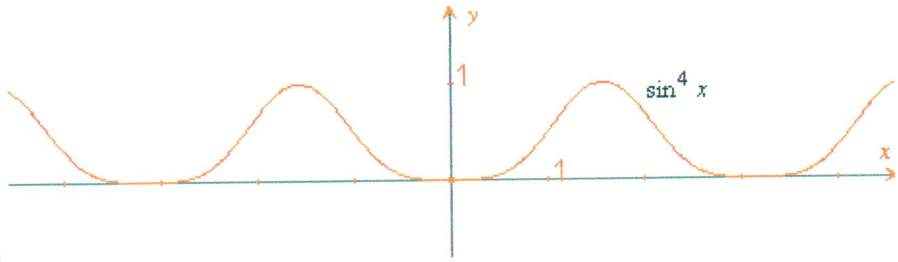
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin 1}{2} + \frac{\sin(2\arcsin 1)}{4} + c - \frac{\arcsin 0}{2} - \frac{\sin(2\arcsin 0)}{4} - c = \frac{\pi}{4}$$

b) $x \in \langle -1;1\rangle$, $t \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$ (viz příklad 4.6)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \\ 0 = \sin 0; 1 = \sin \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Příklad 4.12: Vypočtěte určitý integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$, viz obrázek 4.5.



Obrázek 4.5:

Řešení:

Pro porovnání si také spočítáme i tento příklad oběma způsoby uvedenými v posledních dvou odstavcích před příkladem 4.11.

a) $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx =$ [41])

$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c$$

---

[41]) Užití vztahu $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{8}\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{4} + \frac{\sin 4\frac{\pi}{2}}{32} - 0 + \frac{\sin 0}{4} - \frac{\sin 0}{32} = \frac{3\pi}{16}$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}\right) dx = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{3}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

Jelikož víme, že funkce sin je v $k\pi$, $k \in Z$ vždy rovna nule a je primitivní funkcí k funkci cos, nemusíme se integrací zbylých dvou členů zabývat, protože je na první pohled zřejmé, že oba členy budou nulové.

Při výpočtu neurčitého integrálu používáme stejných metod integrování jako u určitého integrálu, takže je zbytečné, abychom zde předkládali další řadu příkladů, které by v podstatě až na závěrečné dosazování mezí kopírovaly úlohy na integrály určité.

ZÁVĚR

Ve čtyřech základních kapitolách jsme se pokusili nastínit problematiku složených funkcí, která je velmi rozsáhlá, a proto jsme vybrali jen ta nejdůležitější fakta pro její předvedení a pochopení. Ukázali jsme ji také na příkladech, které se běžně ve škole neobjevují, ale nutí nás k zamyšlení nad tímto problémem a vedou nás k lepšímu pochopení vazeb mezi teorií a praxí, jelikož většina studentů se naučí příklady počítat pouze podle určité „kuchařky" a nepřemýšlejí nad významem a různými variantami. Proto se zde objevují případy, kde se vyskytují parametry, nebo případy, které nevyhovují předpokladům užívaných vět, což nutí studenty vystoupit ze stereotypu dosazování do vzorců a kopírování postupů již předvedených příkladů a vede je právě cestou vlastních závěrů ke skutečnému porozumění probírané problematice.

Doufám, že tato práce umožní zájemcům o matematickou analýzu prohloubit své znalosti z tohoto vědního oboru.

LITERATURA

[1] Jarník, V.: Diferenciální počet (I), Academia, Praha 1984.

[2] Jarník, V.: Integrální počet I, Československá akademie věd, Praha 1956.

[3] Jarník, V.: Úvod do počtu integrálního, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha 1948.

[4] Černý, I.: Diferenciální a integrální počet 1, Technická univerzita v Liberci, Liberec 2002.

[5] Děmidovič, B. P.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, Havlíčkův Brod 2003.

[6] Fichtengolc, G. M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija I, Nauka, Moskva 1969.

[7] Fichtengolc, G. M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija II, Nauka, Moskva 1969.

[8] Fichtengolc, G. M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija III, Nauka, Moskva 1969.