

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

KUŽELOSEČKY KOLEM NÁS

Daniela Koudelková

České Budějovice 2006

Poděkování:

Mé poděkování patří panu docentu Pechovi za příkladné vedení a motivaci při práci

KVADRIKY

- KVADRIKY JAKO KŘIVKY 3. STUPNĚ

Soustava souřadná je dána počátkem P a vektory $\overset{P}{e}_1, \overset{P}{e}_2, \overset{P}{e}_3$. Každá rovina je v této soustavě souřadné dána rovnicí $px + qy + rz + s = 0$, tedy lineární rovnicí, která neobsahuje členy x^2 , y^2 , z^2 ani xy , xz , yz . Existují ale i plochy v prostoru, které jsou množinou bodů, jejichž souřadnice splňují rovnici, která obsahuje členy v druhé mocnině nebo členy xy , xz , yz , tedy je

v obecném tvaru

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

kde $a_{ij} \in R$ a $(a_{11})^2 + (a_{22})^2 + (a_{33})^2 + (a_{12})^2 + (a_{13})^2 + (a_{23})^2 \neq 0$, tedy alespoň jeden z koeficientů $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ je různý od nuly. Rovnici lze také zapsat v maticovém tvaru a to jako

$$(x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

označíme-li $(x \ y \ z \ 1)$ jako X , pak je matice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ tvaru X^T a matici

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ označíme jako K lze rovnici kvadriky zapsat také ve tvaru

$$X \cdot K \cdot X^T = 0, \text{ přičemž matice } K \text{ je symetrická, tedy } K = K^T.$$

Definice:

Nechť je dána rovnice ve tvaru $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$, v níž alespoň jedno z čísel $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ je různé od nuly, popřípadě její nenulový násobek, pak množina všech bodů $X = [x, y, z]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici nazveme kvadrikou, přesněji kvadrikou danou nebo určenou rovnicí $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$. Body, které této rovnici vyhovují jsou body kvadriky.

Příklady kvadrik:

- $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, kulová plocha se středem v počátku a poloměrem 1
- obecně $(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 - r^2 = 0$, kulová plocha se středem v bodě $S = [m, n, p]$ a poloměrem r
- $(2x - 3y + z - 1)(4x + y - 5z + 3) = 0$, dvě různé roviny
- obecně $(ax + by + cz + d)(px + qy + rz + s) = 0$, dvě různé roviny, které mohou splýnout v jednu v případě, že $(ax + by + cz + d) = k \cdot (px + qy + rz + s)$
- $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 6)^2 = 0$, jediný bod o souřadnicích $X = [1, -3, -6]$
- obecně $(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = 0$, jediný bod o souřadnicích $X = [m, n, p]$
- $x^2 + 3y^2 + 9z^2 - 18 = 0$, elipsoid
- obecně $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, elipsoid
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$, válcová plocha s poloměrem 1, jejíž osa je rovnoběžná s osou z
- obecně $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, kde alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly, je válcová plocha. S každým bodem $A = [x_0, y_0, 0]$, jehož souřadnice splňují rovnici, vyhovují rovnici i všechny body $A' = [x_0, y_0, z]$, kde z je libovolné.
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, kuželová plocha s vrcholem v počátku

- obecně $ax^2 + 2bxy + 2gxz + cy^2 + 2hyz + jz^2 = 0$, kuželová plocha. S každým bodem $A = [x_0, y_0, z_0]$, který náleží této kvadrice splňují rovnici i body $A' = [tx_0, ty_0, tz_0]$. Tedy s každým bodem A kvadriky, různým od počátku, leží na kvadrice celá přímka spojující bod A s počátkem.

- PRŮSEČÍK PŘÍMKY S KVADRIKOU

Mějme kvadriku κ danou rovnicí $XKX^T = 0$ a přímku o rovnici $p: X = M + t\vec{u}$, kde bod M a vektor \vec{u} mají souřadnice $M = [m, n, p]$, $\vec{u} = (u, v, w)$. Průsečíky přímky s kvadrikou můžeme řešit stejně jako u kuželoseček. Pro parametr t společných bodů kvadriky a přímky dostaneme i nyní rovnici ve tvaru $At^2 + 2Bt + C = 0$, kde

$$A = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw$$

$$B = u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})$$

$$C = a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14}m + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44}$$

Mohou nastat tyto případy:

- $A = 0, B \neq 0$, rovnice je lineární s jedním kořenem, přímka má s kvadrikou společný jeden bod
- $A = 0, B = 0, C \neq 0$, rovnice nemá žádný kořen, přímka nemá s kvadrikou společný žádný bod
- $A = B = C = 0$, rovnice je splněna pro každé t , každý bod přímky je bodem kvadriky, přímka leží celá na kvadrice
- $A \neq 0, B^2 - AC > 0$, rovnice má dva různé reálné kořeny, přímka má s kvadrikou společné dva různé body
- $A \neq 0, B^2 - AC = 0$, rovnice má jeden dvojnásobný kořen, přímka má s kvadrikou společný jeden dvojnásobný bod
- $A \neq 0, B^2 - AC < 0$, rovnice nemá reálné kořeny, přímka kvadriku neprotíná

- VZÁJEMNÁ POLOHA ROVINY A KVADRIKY

Zvolme kartézskou soustavu souřadnou tak, aby rovina φ měla rovnici $z = 0$ a předpokládejme, že rovnice kvadriky κ je $\kappa: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$. Potom průnikem je křivka (kuželosečka) o rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0.$$

To znamená, že průnikem kvadriky s rovinou může být elipsa, parabola, hyperbola, dvě různoběžky, dvě rovnoběžky, přímka, bod či prázdná množina.

- STŘED KVADRIKY, SINGULÁRNÍ BOD KVADRIKY

V rovnici $At^2 + 2Bt + C = 0$ je koeficient B roven $u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})$ ten je roven nule bez ohledu na souřadnice vektoru \vec{u} v případě, že souřadnice bodu M splňují rovnice

$$a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} = 0$$

$$a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} = 0$$

$$a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} = 0$$

Tím pádem je rovnice ve tvaru $At^2 + C = 0$. Jestliže je kořenem této rovnice t , pak i $-t$. Na kvadrice leží při libovolné volbě vektoru \vec{u} bod $M + t\vec{u}$ a také bod $M - t\vec{u}$. Bod M je středem souměrnosti kvadriky, tedy jejím středem. V případě, že bod M je středem kvadriky a zároveň na kvadrice leží

$$(a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14}m + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44} = 0)$$

vypadne v rovnici $At^2 + 2Bt + C = 0$ absolutní člen a rovnice bude mít pro každé u, v, w řešení $t=0$ a pro $a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw \neq 0$ je rovnice

$At^2 + 2Bt = 0$ kvadratickou rovnicí. Protože je bod M středem kvadriky a také jejím bodem, musí druhý průsečík přímky, která je daná bodem M a vektorem \vec{u} , splynout s bodem M . Koeficient B musí být roven 0, a to pro každý vektor $\vec{u} = (u, v, w)$, jehož směr není asymptotický. Proto musí $a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} = 0$, $a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} = 0$, $a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} = 0$ a

$a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14}m + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44} =$
 $= m(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + n(a_{12}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + p(a_{13}m + a_{23}n + a_{33}p + a_{34}) +$
 $+ a_{14}m + a_{24}n + a_{34}p + a_{44}$ musí platit i $a_{14}m + a_{24}n + a_{34}p + a_{44} = 0$. Tento bod M nazveme singulárním bodem kvadriky, je to bod, který je zároveň jejím středem. Bod $X = [x, y, z]$ je singulárním bodem tehdy, když jeho souřadnice splňují rovnice

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0$$

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0$$

tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V případě, že bod M je singulárním bodem kvadriky má rovnice $(a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw)t^2 + (u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{12}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{13}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}))t + a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14}m + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44}$ tvar $(a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw)t^2$.

Věta:

Každá, přímka procházející singulárním bodem kvadriky, leží buď celá na kvadrice (v případě, že její směr je asymptotický) nebo má s kvadrikou společný pouze tento singulární bod (v případě, že její směr není asymptotický)

Kvadrika, která obsahuje singulární bod, se skládá ze dvou různoběžných rovin nebo z jediné roviny (dvě splývající), pouze z tohoto bodu, jde o plochu kuželovou nebo válcovou.

- SINGULÁRNÍ KVADRIKY

Determinantem matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ rozumíme číslo

$$\begin{aligned} & a_{11}(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{24}a_{33}a_{42} - a_{22}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44}) + \\ & + a_{12}(a_{21}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{43} - a_{24}a_{33}a_{41} - a_{21}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{31}a_{44}) + \\ & + a_{13}(a_{21}a_{32}a_{44} + a_{22}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{42} - a_{24}a_{32}a_{41} - a_{21}a_{34}a_{42} - a_{22}a_{31}a_{44}) + \\ & + a_{14}(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{22}a_{33}a_{41} + a_{23}a_{31}a_{42} - a_{23}a_{32}a_{41} - a_{21}a_{33}a_{42} - a_{22}a_{31}a_{43}), \end{aligned}$$

které označíme Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Platí

tedy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{24}a_{33}a_{42} - a_{22}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44}) +$$

$$\begin{aligned}
& + a_{12}(a_{21}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{43} - a_{24}a_{33}a_{41} - a_{21}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{31}a_{44}) + \\
& + a_{13}(a_{21}a_{32}a_{44} + a_{22}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{42} - a_{24}a_{32}a_{41} - a_{21}a_{34}a_{42} - a_{22}a_{31}a_{44}) + \\
& + a_{14}(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{22}a_{33}a_{41} + a_{23}a_{31}a_{42} - a_{23}a_{32}a_{41} - a_{21}a_{33}a_{42} - a_{22}a_{31}a_{43}).
\end{aligned}$$

Je-li číslo $\Delta = 0$, je kvadrika singulární (v opačném případě jde o kvadriku regulární).

Věta:

Obsahuje-li kvadrika singulární bod, pak je singulární, tedy $\Delta = 0$.

DK:

Nechť bod $X = [x, y, z]$ je singulárním bodem kvadriky, to znamená, že splňuje rovnice

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0$$

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0$$

Podle Frobeniovy věty má tato soustava rovnic alespoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy $h(A)$ je rovna hodnosti matice soustavy rozšířené $h(A, b)$, tedy

$$h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -a_{44} \end{pmatrix}$$

Hodnost levé matice $h(A) \leq 3$, a z toho vyplývá, že $h(A, b) < 4$, a tedy determinant této matice je roven nule, $\Delta = 0$.

Pozn: Obrácená věta neplatí, válcová plocha je singulární kvadrikou, ale singulární bod neobsahuje.

Př 1: Dokaž, že dvojnásobná rovina daná rovnicí $(ax + by + cz + d)^2 = 0$ je singulární kvadrikou.

$$\text{Řešení: } (ax + by + cz + d)^2 = (a)^2 x^2 + (b)^2 y^2 + (c)^2 z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz +$$

$+ 2adx + 2bdy + 2cdz + (d)^2$ a matice má tedy tvar $\begin{pmatrix} (a)^2 & ab & ac & ad \\ ab & (b)^2 & bc & bd \\ ac & bc & (c)^2 & cd \\ ad & bd & cd & (d)^2 \end{pmatrix}$ po vydělení

prvního řádku členem a , druhého členem b , třetího c a čtvrtého d , dostaneme matici ve

tvaru $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Jak je patrné, je hodnota této matice rovna jedné, determinant této

matice je tedy roven nule, $\Delta = 0$ a jde o kvadriku singulární.

Př 2: Dokaž, že válcová plocha daná rovnicí $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ je singulární kvadrikou.

Řešení: Matice koeficientů rovnice má tvar $\begin{pmatrix} a & c & 0 & d \\ c & b & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 & f \end{pmatrix}$ a jak je zřejmé, determinant

této matice je roven nule, tedy $\Delta = 0$. Jde o kvadriku singulární.

- REGULÁRNÍ KVADRIKY, TEČNÁ ROVINA KVADRIKY

Definice:

Kvadrika se nazývá *regulární* jestliže platí:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bod kvadriky je regulárním bodem, jestliže není singulární.

Z předcházejících úvah již víme, že pro každou regulární kvadriku platí $\Delta \neq 0$. Předpokládejme,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

že je regulární kvadrika a že bod $M = [m, n, p]$ na ní leží. Pak je alespoň jedno z čísel $a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} = 0$, $a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} = 0$, $a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} = 0$ různé od nuly a v rovnici $At^2 + 2Bt + C = 0$ je absolutní člen nulový pro libovolnou volbu vektoru $\vec{h} = (u, v, w)$ (tvar absolutního členu je vlastně rovnicí kvadriky pro $M = [m, n, p]$, proto je člen roven nule).

Aby se rovnal nule i koeficient lineárního členu je třeba zvolit směr roviny (M, \vec{h}, \vec{v}) tak, aby vektory \vec{h}, \vec{v} byly kolmé na vektor $((a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}), (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}), (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}))$, tento vektor tedy musí být vektorovým součinem vektorů \vec{h}, \vec{v} . Pro určení obecné rovnice tečné roviny (značíme τ) tyto vektory ovšem nepotřebujeme. Užijeme vektor k nim kolmý (normálový), tedy vektor $((a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}), (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}), (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}))$. Po

menších úpravách (s využitím symetričnosti matice kvadriky K a toho, že bod M leží v tečné rovině) vypočítáme absolutní člen obecné rovnice tečné roviny. Dostáváme tedy:

$$(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14})x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24})y + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})z + (a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44}) = 0$$

maticově zapsáno:

$$\tau : \begin{pmatrix} m & n & p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Každá přímka, která leží v rovině τ a prochází bodem M , se nazývá tečna kvadriky. Kolmici k tečné rovině procházející bodem M označujeme jako normálu kvadriky.

Definice:

Rovina τ , která obsahuje bod M , se nazývá tečná rovina kvadriky o rovnici $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$. Bod M je bodem dotyku.

- PÓL A POLÁRNÍ ROVINA

Budeme hledat tečné roviny, které prochází bodem $R = [r, s, t]$, který není bodem kvadriky o rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Předpokládejme, že známe nějakou tečnou rovinu procházející bodem R a její bod dotyku s kvadrikou označíme jako $M = [m, n, p]$. Tato tečná rovina má potom rovnici

$$(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14})x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24})y + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})z + (a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44}) = 0$$

a protože bod R na ní leží, musí platit

$$(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14})r + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24})s + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})t + (a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44}) = 0,$$

což lze zapsat také ve tvaru

$$(a_{11}r + a_{21}s + a_{31}t + a_{41})m + (a_{12}r + a_{22}s + a_{32}t + a_{42})n + (a_{13}r + a_{23}s + a_{33}t + a_{43})p + (a_{14}r + a_{24}s + a_{34}t + a_{44}) = 0,$$

alespoň jedno z čísel $a_{11}r + a_{21}s + a_{31}t + a_{41}$, $a_{12}r + a_{22}s + a_{32}t + a_{42}$, $a_{13}r + a_{23}s + a_{33}t + a_{43}$ musí být nenulové, jinak by nemohl existovat bod M , který by splňoval poslední rovnici. Existoval by jedině v případě, že by se rovnal nule i výraz $a_{14}r + a_{24}s + a_{34}t + a_{44}$. V takovém případě by ovšem bod R musel být singulárním bodem kvadriky, ale regulární kvadrika nemá žádný singulární bod, proto je rovnice

$$(a_{11}r + a_{21}s + a_{31}t + a_{41})x + (a_{12}r + a_{22}s + a_{32}t + a_{42})y + (a_{13}r + a_{23}s + a_{33}t + a_{43})z +$$

$$+(a_{14}r + a_{24}s + a_{34}t + a_{44}) = 0$$

rovnici roviny, která se nazývá polární rovina (značíme π) bodu R vzhledem k dané kvadrice a body dotyků tečných rovin vedených ke kvadrice bodem R musí na této polární rovině ležet. Leží-li bod M kvadriky o souřadnicích $M = [m, n, p]$ na polární rovině bodu R , je

$$\begin{aligned} & \text{splněna} \qquad \qquad \qquad \text{rovnice} \\ & (a_{11}r + a_{21}s + a_{31}t + a_{41})m + (a_{12}r + a_{22}s + a_{32}t + a_{42})n + (a_{13}r + a_{23}s + a_{33}t + a_{43})p + \\ & + (a_{14}r + a_{24}s + a_{34}t + a_{44}) = 0 \qquad \text{(případně} \qquad \text{rovnice} \qquad \text{s ní} \qquad \text{totožná} \\ & (a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14})r + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24})s + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})t + \\ & + (a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44}) = 0) \text{ a bod } R \text{ leží na tečné rovině kvadriky jdoucí bodem } M. \end{aligned}$$

Definice:

Rovina π , o rovnici

$$(a_{11}r + a_{21}s + a_{31}t + a_{41})m + (a_{12}r + a_{22}s + a_{32}t + a_{42})n + (a_{13}r + a_{23}s + a_{33}t + a_{43})p + (a_{14}r + a_{24}s + a_{34}t + a_{44}) = 0,$$

se nazývá polární rovina bodu $R = [r, s, t]$ vzhledem ke kvadrice $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$. Bod R nazýváme pólem roviny π vzhledem ke kvadrice. Rovnici polární roviny lze také zapsat maticově ve tvaru

$$\pi : \begin{pmatrix} r & s & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Body dotyku tečných rovin vedených ke kvadrice bodem R leží na polární rovině bodu R a obráceně tečná rovina každého bodu kvadriky, který leží na polární rovině bodu R , prochází bodem R . Podle toho, kolik existuje průsečíků polární roviny bodu R s kvadrikou (žádný, jeden nebo nekonečně mnoho), tolik existuje tečných rovin, vedených bodem R ke kvadrice. Polární rovinou bodu kvadriky je tečná rovina vedená tímto bodem.

Věta:

Leží-li bod S na polární rovině bodu R , leží bod R na polární rovině bodu S .

DK:

Označme $S = [s, t, u]$, $R = [p, q, r]$. Leží-li bod S na polární rovině bodu R , platí:
 $(a_{11}p + a_{12}q + a_{13}r + a_{14})s + (a_{21}p + a_{22}q + a_{23}r + a_{24})t + (a_{31}p + a_{32}q + a_{33}r + a_{34})u +$
 $+ (a_{41}p + a_{42}q + a_{43}r + a_{44}) = 0$. Tato rovnice je ale ekvivalentní rovnici
 $(a_{11}s + a_{12}t + a_{13}u + a_{14})p + (a_{21}s + a_{22}t + a_{23}u + a_{24})q + (a_{31}s + a_{32}t + a_{33}u + a_{34})r +$
 $+ (a_{41}s + a_{42}t + a_{43}u + a_{44}) = 0$. Což znamená, že bod R leží na polární rovině bodu S .

- SDRUŽENÉ PRŮMĚRY KVADRIKY

Rovnicí $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ je dána regulární kvadrika a bodem $M = [m, n, p]$ a vektorem $\vec{u} = (u, v, w)$ přímka s parametrickým vyjádřením

$$x = m + tu$$

$$y = n + tv, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pro parametr t společného bodu kvadriky a přímky platí
 $(a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw)t^2 +$
 $+ 2(u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}))t +$
 $a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14}m + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44} = 0$.

Předpokládejme, že směr vektoru $\vec{u} = (u, v, w)$ není asymptotický, tedy $a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw \neq 0$. Předcházející rovnice pro průsečíky přímky s kvadrikou je pak kvadratickou rovnicí pro t . Počet kořenů určí znaménko diskriminantu. Je-li jeho hodnota kladná, má přímka s kvadrikou společné dva různé body $M_1 = M + t_1\vec{u}$, $M_2 = M + t_2\vec{u}$ a střed X tětivy M_1M_2 má vyjádření
 $X = M + \frac{t_1 + t_2}{2}\vec{u}$. V případě, že je diskriminant roven nule, má přímka s kvadrikou

společný jeden dvojnásobný bod, je tedy její tečnou s bodem dotyku

$M + t_1 \vec{u} = M + \frac{t_1 + t_2}{2} \vec{u}$. Jde o zvláštní případ předcházející situace, kdy body M_1, M_2, X splynou v jediný bod. Z vlastností kořenů kvadratické rovnice víme, že $t_1 + t_2 = \frac{-2(u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}))}{a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw}$ a

bod X má tedy souřadnice

$x = m + \frac{t_1 + t_2}{2} u$, $y = m + \frac{t_1 + t_2}{2} v$, $z = m + \frac{t_1 + t_2}{2} w$. Po několika jednoduchých, ale obsáhlých úpravách jednotlivých souřadnic a vyloučení parametru t , získáme obecnou rovnici

$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)x + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)y + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)z + (a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w) = 0$ Tu nazýváme průměrovou rovinou kvadriky sduženou se směrem určeným vektorem $\vec{u} = (u, v, w)$. Což lze zapsat také v maticovém tvaru jako

$$(u \quad v \quad w \quad 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

nebo také

$$(x \quad y \quad z \quad 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

- Hlavní směry kvadriky

Definice:

Hlavní rovinou kvadriky nazveme tu rovinu, která je kolmá ke směru vektoru, se kterým je sdužená (hlavní směr). Osou kvadriky nazveme průsečnici dvou hlavních rovin (pokud existují). Vlastní průsečík kvadriky s její osou se nazývá vrchol kvadriky.

Postup hledání hlavních směrů kvadriky je analogický postupu hledání hlavních směrů kuželosečky. Mějme hlavní rovinu kvadriky o rovnici $(a_{11}r + a_{21}s + a_{31}t + a_{41})x + (a_{12}r + a_{22}s + a_{32}t + a_{42})y + (a_{13}r + a_{23}s + a_{33}t + a_{43})z + (a_{14}r + a_{24}s + a_{34}t + a_{44}) = 0$. Hledáme tedy takové číslo λ , aby platilo, že hledaný vektor \vec{h} je kolmý k hlavní rovině, což znamená, že musí být rovnoběžný s normálovým vektorem této roviny, $\vec{h} = \lambda \vec{h}'$. Tedy:

$$a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w = \lambda u$$

$$a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w = \lambda v$$

$$a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w = \lambda w$$

tato soustava má netriviální řešení tehdy, jestliže

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Po upravení determinantu získáme kubickou rovnici, která má vždy alespoň jeden reálný kořen.

Věta:

Rovnice $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ má všechny tři kořeny reálné.

DK:

Kubická rovnice má vždy alespoň jeden reálný kořen, který označíme jako λ_1 . Provedeme transformaci soustavy souřadnic tak, aby osa x měla směr určený λ_1 . Po několika úpravách získáme tyto výsledky: $\lambda_1 = a_{11}$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, determinant je pak ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tedy $(\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$. Vedle známého kořenu λ_1 má rovnice i další dva kořeny

dané rovnicí $(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}^2 = 0$. Po úpravě má rovnice tvar $\lambda^2 - \lambda(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0$. Diskriminant této kvadratické rovnice má tvar $(a_{22} + a_{33})^2 - 4(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = (a_{22} - a_{33})^2 + 4a_{23}^2$. Diskriminant je tedy vždy nezáporný a rovnice má dva reálné kořeny – původní kubická rovnice má tedy tři reálné kořeny.

Rovnici

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

říkáme charakteristická rovnice a číslům λ_i , která jsou jejím řešením, vlastní čísla. Jejich hodnota se nemění s transformací souřadné, vlastní čísla jsou tedy invarianty. Jejich dosazením do rovnic

$$a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w = \lambda u$$

$$a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w = \lambda v$$

$$a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w = \lambda w$$

nebo v upraveném tvaru

$$(a_{11} - \lambda)u + a_{12}v + a_{13}w = 0$$

$$a_{21}u + (a_{22} - \lambda)v + a_{23}w = 0$$

$$a_{31}u + a_{32}v + (a_{33} - \lambda)w = 0$$

a vypočtením u, v, w dostaneme vlastní vektory kvadriky.

- ASYMPTOTICKÉ SMĚRY KVADRIKY

V rovnici $At^2 + 2Bt + C = 0$ je koeficient A roven $a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw$ a není tedy závislý na bodě $M = [m, n, p]$,

ale pouze na vektoru $\vec{l} = (u, v, w)$. Kdybychom místo vektoru \vec{l} vzali jeho násobek $k\vec{l} = (ku, kv, kw)$, zvětšil by se koeficient A k^2 krát. O nenulových vektorech \vec{l} , $k\vec{l}$ říkáme, že jsou to vektory stejného směru. Nenulovost koeficientu A závisí pouze na volbě vektoru \vec{l} , nezávisí ani na tom, zda vezmeme rovnici kvadriky ve tvaru $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ nebo její nenulový násobek

Definice:

Směr v prostoru, který je daný nenulovým vektorem $\vec{l} = (u, v, w)$, se nazývá asymptotickým směrem kvadriky s rovnicí $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$, jestliže $a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 0$.

Hledáme asymptotické směry, tj. ty vektory $\vec{l} = (u, v, w)$, pro které $a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 0$ to znamená $u(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w) + v(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w) + w(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w) = 0$. Jde o průměry, které se dotýkají kvadriky v nevlastních bodech. Tedy průměry, které protínají kvadriku v nevlastních bodech, jsou její nevlastní tečny vedené jejím středem. Tyto tečny jdoucí středem kvadriky tvoří kužel. Rovnice tohoto kužele má tvar $\delta \cdot f_{(x,y,z)} - \Delta = 0$, kde

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ je malý determinant, } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ je velký determinant a}$$

$f_{(x,y,z)} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$ je rovnicí kvadriky. Je-li kvadrika nestředová, je $\delta = 0$ a asymptotický kužel přejde ve dvojnásobnou asymptotickou rovinu.

- KLASIFIKACE REGULÁRNÍCH KVADRIK

Rovnicí $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ je dána regulární kvadrika. Zvolíme normované vektory $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\vec{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$, $\vec{u}_3 = (u_3, v_3, w_3)$ jejichž směry nejsou asymptotické tak, že jde o sdružené vektory kvadriky. Musí tedy splňovat rovnice

$$(a_{11} - \lambda)u + a_{12}v + a_{13}w = 0$$

$$a_{21}u + (a_{22} - \lambda)v + a_{23}w = 0$$

$$a_{31}u + a_{32}v + (a_{33} - \lambda)w = 0$$

Nyní provedeme transformaci soustavy souřadnic, jejíž maticové vyjádření má tvar $X = X'A$ dosazením do rovnice kvadriky (o rovnici $XX^T = 0$) dostáváme $X'AKA^T X'^T = 0$. Matice kvadriky má tedy v čárkované soustavě souřadnic tvar AKA^T . Kvůli jednoduchosti matice kvadriky zvolíme matici A ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{pmatrix},$$

kde $P = [p, q, r]$ je zatím neznámý bod. Matice kvadriky má tedy tvar:

$$AKA^T = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & p \\ u_2 & v_2 & w_2 & q \\ u_3 & v_3 & w_3 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{21}v_1 + a_{31}w_1 & a_{12}u_1 + a_{22}v_1 + a_{32}w_1 & a_{13}u_1 + a_{23}v_1 + a_{33}w_1 & a_{14}u_1 + a_{24}v_1 + a_{34}w_1 \\ a_{11}u_2 + a_{21}v_2 + a_{31}w_2 & a_{12}u_2 + a_{22}v_2 + a_{32}w_2 & a_{13}u_2 + a_{23}v_2 + a_{33}w_2 & a_{14}u_2 + a_{24}v_2 + a_{34}w_2 \\ a_{11}u_3 + a_{21}v_3 + a_{31}w_3 & a_{12}u_3 + a_{22}v_3 + a_{32}w_3 & a_{13}u_3 + a_{23}v_3 + a_{33}w_3 & a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3 \\ a_{11}p + a_{21}q + a_{31}r + a_{41} & a_{12}p + a_{22}q + a_{32}r + a_{42} & a_{13}p + a_{23}q + a_{33}r + a_{43} & a_{14}p + a_{24}q + a_{34}r + a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & p \\ u_2 & v_2 & w_2 & q \\ u_3 & v_3 & w_3 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_1 v_1 & \lambda_1 w_1 & a_{14}u_1 + a_{24}v_1 + a_{34}w_1 \\ \lambda_2 u_2 & \lambda_2 v_2 & \lambda_2 w_2 & a_{14}u_2 + a_{24}v_2 + a_{34}w_2 \\ \lambda_3 u_3 & \lambda_3 v_3 & \lambda_3 w_3 & a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3 \\ a_{11}p + a_{21}q + a_{31}r + a_{41} & a_{12}p + a_{22}q + a_{32}r + a_{42} & a_{13}p + a_{23}q + a_{33}r + a_{43} & a_{14}p + a_{24}q + a_{34}r + a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & p \\ u_2 & v_2 & w_2 & q \\ u_3 & v_3 & w_3 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní rozlišíme dva případy:

- a) středový - $A_{44} \neq 0$
- b) nestředový - $A_{44} = 0$

kde A_{44} je rozvoj matice $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{pmatrix}$ podle posledního řádku, tedy

$$A_{44} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- a) středový případ

Hodnota determinantu A_{44} je ± 1 , protože vektory $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\vec{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$, $\vec{u}_3 = (u_3, v_3, w_3)$ tvoří ortogonální matici. Nechť bod $P = [p, q, r]$ je středem kvadriky. Matice AKA^T má pak po několika úpravách s využitím ortogonality vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ a

determinantu A_{44} tvar $AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{A_{44}} \end{pmatrix}$, kde A označuje velký determinant,

$A = \Delta$. A_{44} označujeme jako malý determinant, $A_{44} = \delta$. Rovnice kvadriky má pak tvar

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0. \text{ Dále rozlišíme dva případy:}$$

aa) regulární středová kvadrika - $\Delta \neq 0$

ab) singulární středová kvadrika - $\Delta = 0$

aa) Pro regulární středovou kvadriku má rovnice kvadriky tvar $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$. Pokud jsou všechna znaménka λ_i stejná, jde o elipsoid,

pokud jsou různá, jde o hyperboloid. Po úpravách dostáváme:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \text{ řešením je množina prázdná - imaginární elipsoid}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 - \text{elipsoid}$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 - \text{dvojdílný hyperboloid}$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 - \text{jednodílný hyperboloid}$$

obecně lze tvar kvadriky, kde λ_i má různá znaménka, upravit vždy na tvar 3) nebo 4).

ab) Pro singulární středovou kvadriku má rovnice tvar $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0$. Tento tvar lze upravit, a to opět v závislosti na znaménkách λ_i .

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ této rovnici vyhovuje jediný bod o souřadnicích } [0,0,0],$$

jde o imaginární kuželovou plochu

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ - kuželová plocha}$$

tvar kvadriky, kde λ_i má různá znaménka, lze upravit vždy na tvar 2).

b) nestředový případ

Hodnota determinantu $A_{44} = 0$. Dále opět rozlišíme dva případy:

ba) regulární nestředové kvadriky, $\lambda_3 = 0$

bb) singulární nestředové kvadriky, alespoň jedno z čísel λ_i je rovno nule

$$\text{ba) } AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & m & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 0, \lambda_1, \lambda_2, m \neq 0, \text{ obecně má rovnice}$$

kvadriky tvar $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2mz' = 0$. Nyní opět nastane několik případů v závislosti na znaménkách čísel λ_1, λ_2 :

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2mz = 0, \lambda_1, \lambda_2 \text{ mají stejná znaménka - eliptický paraboloid}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2mz = 0, \lambda_1, \lambda_2 \text{ mají různá znaménka - hyperbolický paraboloid}$$

$$\text{bb) } AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \text{ alespoň jedno z čísel } \lambda_i \text{ je rovno nule. Tento}$$

případ se rozpadne na několik podpřípadů v závislosti na znaménkách λ_i , a na tom, zda $m = 0$:

$$\text{pro } AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} :$$

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, m \neq 0 - \text{imaginární eliptická válcová plocha}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, m \neq 0 - \text{reálná eliptická válcová plocha}$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \pm 1 = 0, m \neq 0 - \text{hyperbolická válcová plocha, obsahuje případy}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, m = 0 - \text{přímka nad počátkem}$$

$$5) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, m = 0 - \text{dvě různoběžné roviny}$$

$$\text{pro } AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} :$$

$$6) \frac{x^2}{a^2} = 0, m = 0 - \text{dvojnásobná rovina (rovina yz)}$$

$$7) \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0, m \neq 0 - \text{prázdná množina}$$

$$8) \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0, m \neq 0 - \text{rovnoběžné roviny}$$

$$\text{pro } AKA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, m \neq 0:$$

$$9) \frac{x^2}{a^2} + 2my = 0 - \text{parabolická válcová plocha}$$

- BLIŽŠÍ ROZBOR NĚKTERÝCH KVADRIK

- Elipsoid o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

- a) $a = b = c$ - kulová plocha

- b) $a = b$ - rotační elipsoid – rotace kolem osy z

- $b = c$ - rotační elipsoid – rotace kolem osy x

- $a = c$ - rotační elipsoid – rotace kolem osy y

Položíme-li jednu souřadnici rovnu nule, protne elipsoid rovinu určenou dvěma zbývajícimi souřadnicemi v elipse.

- Hyperboloid

- a) o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ – dvojdílný hyperboloid

Položíme-li souřadnici $z = 0$, rovnice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ určuje množinu prázdnou, položíme-li rovnu nule souřadnici x nebo y , získáme rovnici hyperboly. Obdobě lze řešit rovnice ve tvaru

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

- b) o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ – jednodílný hyperboloid

Položíme-li souřadnici $z = 0$, rovnice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ určuje elipsu, pro $z = k$ je rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} - 1 = 0, \text{ kde } \frac{k^2}{c^2} \text{ je číslo, rovnice je tedy opět rovnicí elipsy. Položíme-li}$$

rovnu nule souřadnici x nebo y , získáme rovnici hyperboly. Pro $y = b$ získáme dvě přímky.

Opět lze obdobně řešit rovnice ve tvaru $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

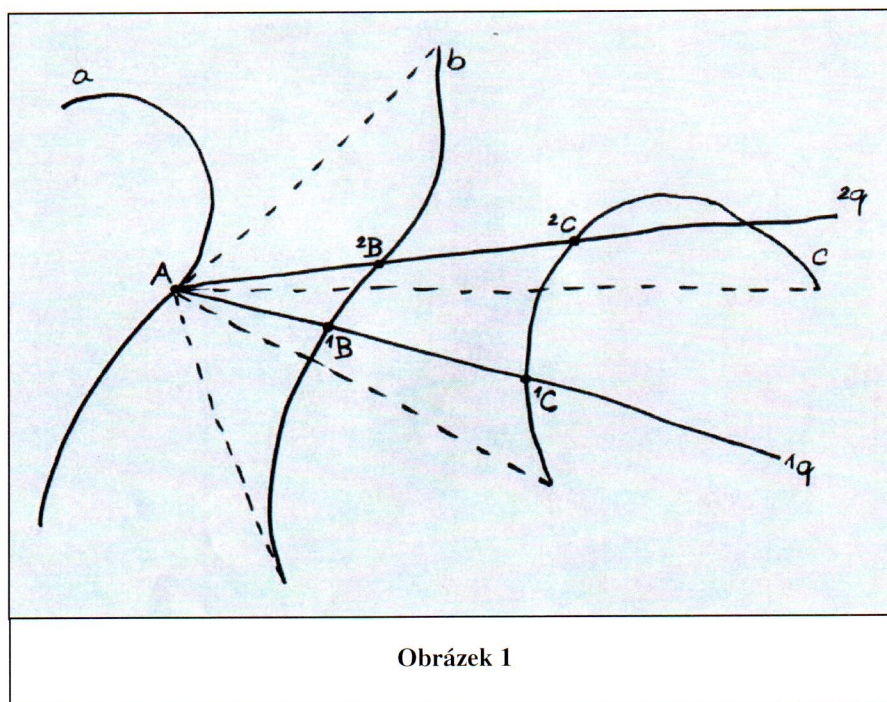
○ Hyperbolický paraboloid o rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

Položíme-li souřadnici $z = 0$, rovnice $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ určuje dvě různoběžky, položíme-li rovní nule souřadnici x nebo y , získáme rovnici paraboly. Pro $z = k$ dostaneme rovnici hyperboly.

ÚVOD DO ZBORCENÝCH PLOCH

Na zborcené ploše náleží každému bodu T , který leží na tvořící přímce q , jiná tečná rovina τ , takže při pohybu bodu T po q se tečná rovina otáčí okolo přímky q a vytváří svazek rovin s osou q .

Nerozvinutelnou přímkovou plochu lze vytvořit pohybem přímky, která protíná tři řídicí křivky nebo se dotýká tří řídicích ploch. Existují i jiné způsoby vytvoření, například rotace přímky kolem mimoběžné osy – takto vzniká jednodílný rotační hyperboloid.



Řídící přímky a , b , c mají obecnou polohu, tj. neleží na téže rozvinutelné ploše, a jsou-li rovinné, neleží v téže rovině a také nemají společné body. Každým bodem A prvku a a postupně křivkami b a c jsou určeny

dvě kuželové plochy (Ab) a (Ac) o společném vrcholu A , jejich společné povrchové přímky protínají všechny tři řídicí křivky a jsou tvořícími přímkami zborcené plochy (obrázek 1).

Plocha určená třemi řídicími křivkami a, b, c stupňů n_1, n_2, n_3 , které nemají společné body je stupně $n, n=2n_1n_2n_3$. Mají-li řídicí křivky společné body, jejichž počty označíme S_{ab}, S_{bc}, S_{ca} je $n, n=2n_1n_2n_3-S_{ab}n_3-S_{bc}n_1-S_{ca}n_2$.

Př: Je-li nerozvinutelná plocha dána kuželosečkou a a přímkami b a c tak, že b protíná a v jediném bodě a c nemá společné body s a ani b , pak je stupeň této plochy $n=2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 3$

Přísluší-li všem bodům tvořící přímky q zborcené plochy jediná tečná rovina τ , pak q se nazývá torzální tvořící přímka a τ torzální tečná rovina. Bod torzální přímky, který tuto vlastnost nemá, tj. v tomto bodě je tečných rovin více, se nazývá kuspídní bod. Kuspídní bod je singulárním bodem plochy s charakterem obdobným vrcholu kuželové plochy.

Je-li q tvořící přímka zborcené přímkové plochy a existují-li na q dva různé regulární body T a U takové, že tečné roviny v těchto bodech splývají ($\tau^T = \tau^U$), pak ve všech regulárních bodech přímky q je tečnou rovinou τ^T a q je torzální přímkou plochy.

Jestliže na přímkové ploše jsou všechny přímky torzální, je plocha rozvinutelná.

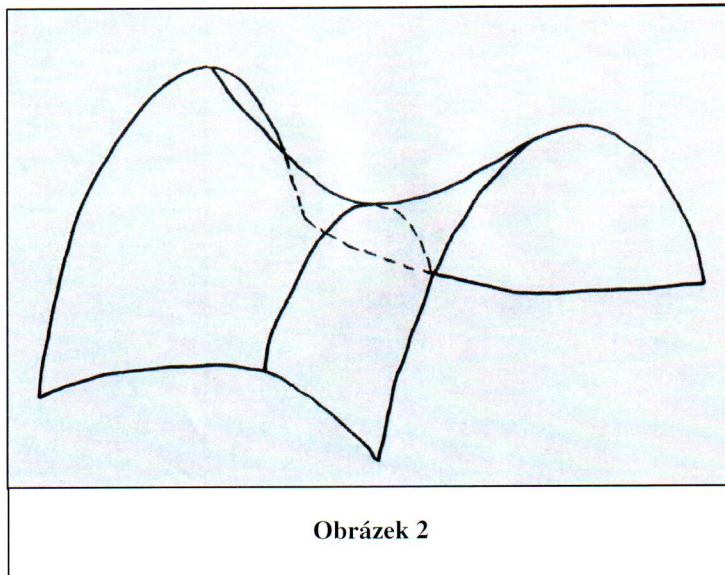
- VYUŽITÍ ZBORCENÝCH PLOCH VE STAVEBNÍ PRAXI

Důvody využití:

- přímkami lze spojit tři řídicí útvary
- výborné statické vlastnosti
- lehký a vzdušný dojem
- nízká spotřeba materiálu
- konstrukční jednoduchost
- vysoká stabilita konstrukce

- **HYPERBOLICKÝ PARABOLOID**

Hyperbolický paraboloid je zborcená plocha, jejímiž řídicími křivkami jsou mimoběžky a, b a nevlastní přímka neobsahující nevlastní body přímek a, b , která je určena řídicí rovinou ρ . Tvořícími přímkami plochy jsou příčky mimoběžek a a b rovnoběžné s řídicí rovinou ρ



(obrázek 2).

Řezem hyperbolického paraboloidu rovinou, která je:

- rovnoběžná s některou řídicích rovin, je tvořící přímka
 - tečnou rovinou plochy
- jsou dvě tvořící přímky
- rovnoběžná s osou

plochy a neplatí první bod je parabola, která má osu rovnoběžnou s osou hyperbolického paraboloidu

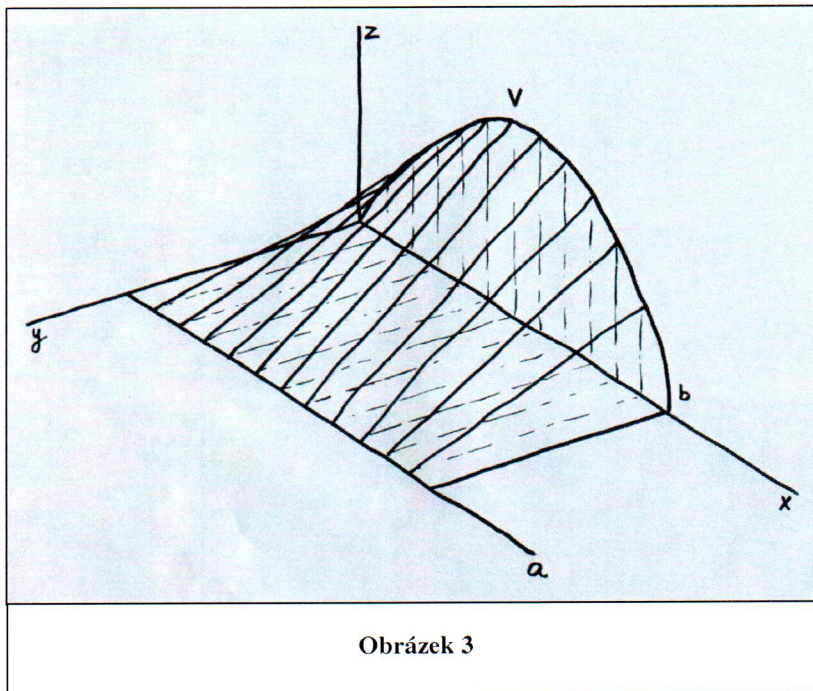
- jiná, je hyperbola, která má asymptoty rovnoběžné s průsečnicemi roviny řezu s řídicími rovinami daného hyperbolického paraboloidu

- **KONOID**

Konoid je zborcená plocha, jejímiž řídicími útvary jsou vlastní a nevlastní přímka a libovolná křivka, případně plocha.

Dělení konoidů:

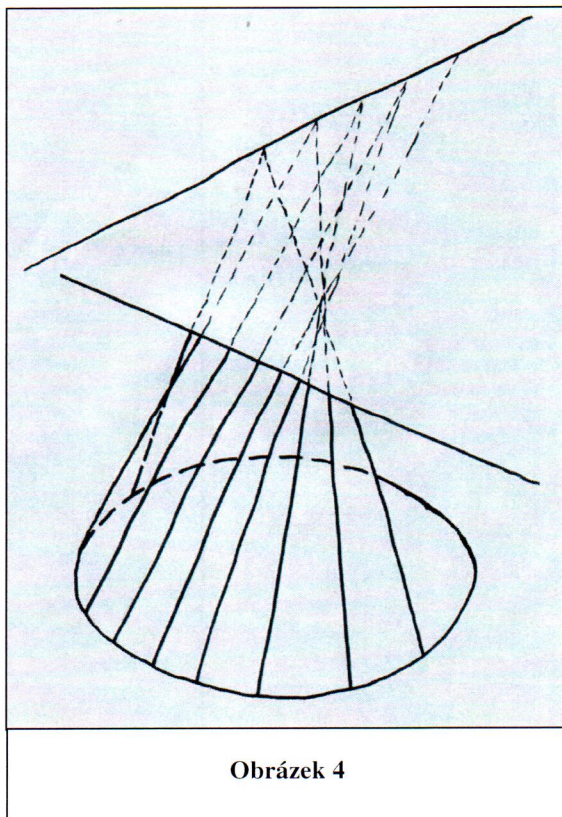
- **PŘÍMÝ KONOID** – vlastní řídicí přímka je kolmá k řídicí rovině
- **ŠIKMÝ (KOSÝ) KONOID** - vlastní řídicí přímka není kolmá k řídicí rovině
- Podle typu řídicí křivky: **KRUHOVÝ, ELIPTICKÝ, ŠROUBOVÝ**



Obrázek 3

Př: Přímý parabolický konoid (obrázek 3) je v kartézské soustavě souřadné určený řídicí rovinou $\mu=yz$, řídicí přímkou a ležící v xy , a rovnoběžná s x a řídicí parabolou b tak, že b leží v rovině xz a je dána vrcholem V , osou o rovnoběžnou s osou z a bodem O . Tvořící

přímky konoidu jsou rovnoběžné s rovinou μ a protínají řídicí křivky a, b . Rovina obsahující

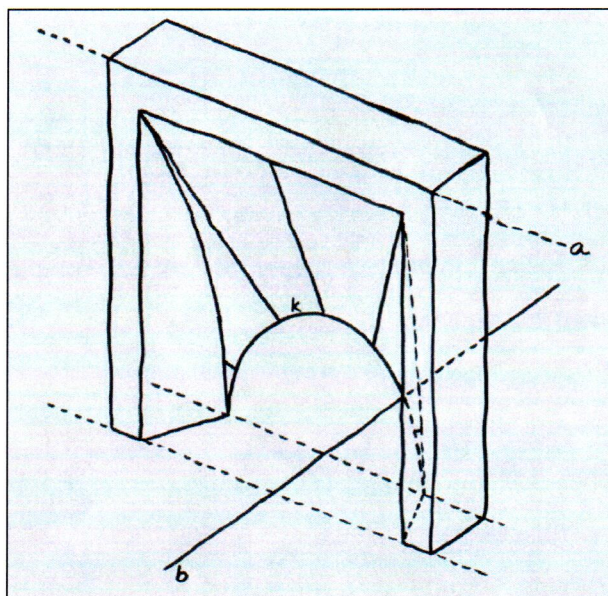


Obrázek 4

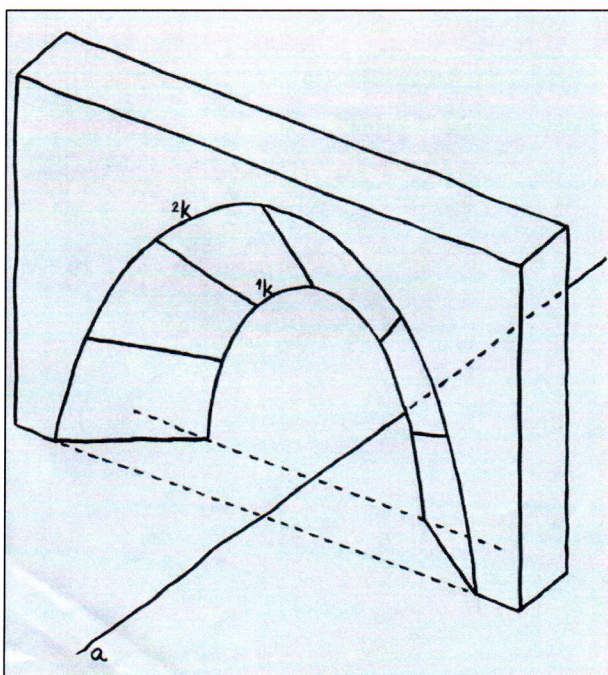
přímku a a dotýkající se řídicí paraboly b ve vrcholu V , je torzální rovinou konoidu a tvořící přímka q (tak, že bod V je prvkem q) je torzální přímkou.

- ŠTRAMBERSKÁ TRÚBA

Řídicími křivkami této plochy jsou dvě mimoběžné navzájem kolmé přímky a, b a kružnice k se středem na ose mimoběžek a, b jejíž rovina je rovnoběžná s přímkami a, b . Plocha je 4. stupně a je souměrná podle rovin $\alpha=ao, \beta=bo$, kde o je osa mimoběžek a, b , plocha má čtyři torzální přímky, které vždy dvě leží v rovinách α, β . Roviny rovnoběžné s rovinou řídicí kružnice k , tj.



Obrázek 5



Obrázek 6

kolmé na osu mimoběžek a , b , protínají plochu v elipsách, které mají vrcholy na torzálních přímkách plochy (obrázek 4). Část této plochy lze použít jako střechu. Její okapovou hranu tvoří kružnice nebo elipsa a hřeben tvoří úsečka řídicí přímky a .

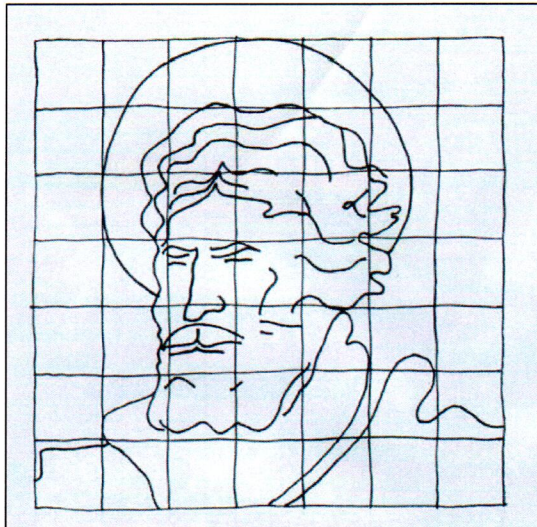
• MONTPELLIERSKÝ
OBLOUK

Řídicími křivkami plochy jsou kružnice k v rovině ρ , přímka b procházející středem kružnice kolmo k rovině ρ a přímka a rovnoběžná s ρ . Plocha je 4. stupně a je souměrná podle roviny procházející přímkou b kolmo k a . Dvě torzální přímky leží v rovinách proložených přímkou a dotýkajících se kružnice k . Kuspidální body jsou na přímce b . Středem kružnice k prochází rovnoběžně s a dvojnásobná tvořící přímka (obrázek 5).

• MARSEILLESKÝ
OBLOUK

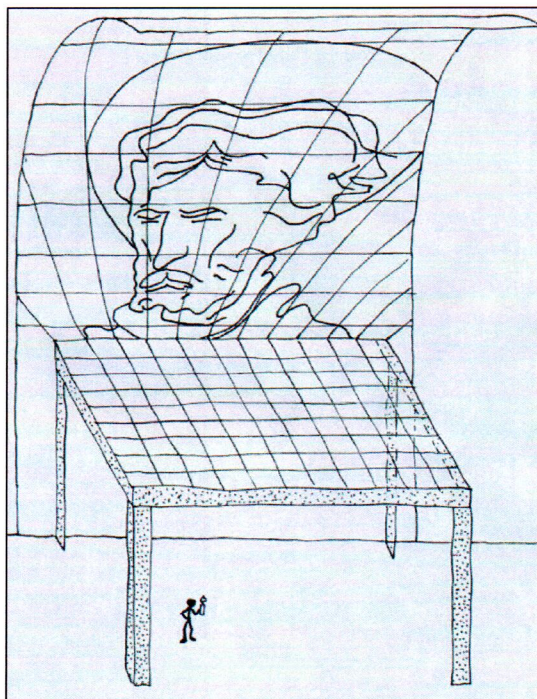
Řídicí křivky jsou v tomto případě dvě kružnice v navzájem rovnoběžných rovinách a přímka procházející středem jedné z kružnic kolmo k jejich rovinám (obrázek 6).

GEOMETRIE V UMĚNÍ

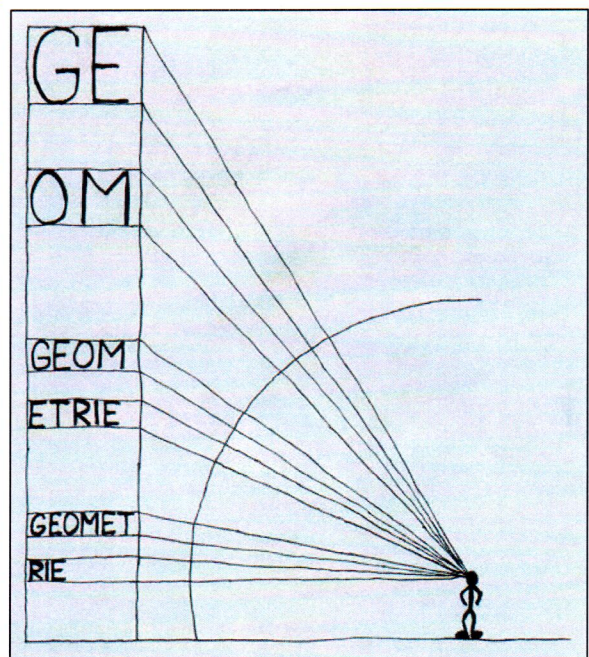


Obrázek 11

Pro malby na klenbách a bočních stěnách se používala čtvercová síť. Pro malbu na klenbě se připravila rovinná skica (obrázek 11) a síť se rozdělila na čtverečky. Pak se pod klenbou pomocí provazců sestrojila velká čtvercová síť a z místa ,odkud měla být malba pozorována, se posvítilo loučí a na klenbě se uhlem obtáhly stíny nepravidelné sítě. Do zkreslených čtverců se pak nanášely části kresby kousek po kousku a opravovaly podle toho ,jak byly pozorovány ze zvoleného bodu (obrázek 12). Perspektivy se využívalo také u nápísů na vysokých zdech, cílem bylo, aby pozorovatel měl pocit, že celý nápis je napsán stejně velkými písmeny. Z místa pozorování musí tedy vidět všechna písmena pod stejným zorným úhlem (obrázek 13).



Obrázek 12



Obrázek 13

CHLADÍCÍ VĚŽE ELEKTRÁREN – ROTAČNÍ HYPERBOLOID

• HISTORIE – OD ANTIKY PO SOUČASNOST

Princip odvádění tepla v mokrých chladících věžích, kde proudící vzduch odebírá vodě teplo konvekcí (prouděním) a vypařováním, je znám velmi dlouho. Již v roce 2500 př. n. l. popisuje Frescos práci otroků, kteří v Řecku ovívali palmovými listy hliněné nádoby s pitnou vodou. Dosahovalo se tím intenzivnějšího odpařování vody, která pronikala stěnami nádoby a voda v nádobě se ochlazovala.

Fyzikální podstaty ochlazování vody jejím odpařováním se začalo v technice využívat až v druhé polovině devatenáctého století. V roce 1834 patentoval v Anglii Samuel Hall¹ parní kondenzátor a brzy nato se k chlazení vody v parních kondenzátorech² začalo využívat zkušeností získaných v solivarech³ při zahušťování solných roztoků. Zahušťování se provádělo v gradovnách⁴, což byly dřevěné konstrukce, v nichž se ohřátý solný roztok rozváděl na svazky prutů z odolného dřeva. Docházelo k odpařování vody do volně proudícího vzduchu a zahuštěný roztok stékal do nádrže ve spodní části gradovny. Název gradovna se začal používat i u zařízení na ochlazování vody, které se jako gradovna v solivarech skládalo z rozvodu vody, chladícího systému a z nádrže na ochlazenou vodu. Z tohoto typu chladiče se vyvinuly později chladící věže, kde bylo volné proudění vzduchu nahrazeno tahovým účinkem komína chladící věže s přirozeným tahem nebo ventilátorem u chladičů ventilátorových.

Nejstarší chladící věže se stavěly na základě zkušeností. Tak se pro chladící věže ke kondenzátorům parních strojů používaly tyto hodnoty: pro ochlazení vody o 10 °C se pro

¹ Samuel Hall, narozen 1781, zemřel 1863

Britský inženýr a vynálezce parního kondenzátoru pro parní stroj (1834) významného milníku své doby. Tento vynález umožnil znovupoužití sladké vody namísto slané, která způsobovala korozi kotlů u parních lodí plujících na moři. Hall patentoval více než 20 vynálezů převážně souvisejících s parními kotli a parním inženýrstvím.

² Parní kondenzátor, zařízení, ve kterém dochází při konstantním tlaku pomocí odnímání tepla ke zkapalňování přiváděných par.

³ Solivar, zařízení používané k vaření soli.

⁴ Gradovna, chladící věž, zařízení k ochlazování vody vzduchem, malé zařízení s přirozeným tahem chladícího vzduchu.

každý kW volil půdorys věže pro věž s přirozeným tahem $0,134 \text{ m}^2$ a pro chladič ventilátorový $0,047 \text{ m}^2$. Plocha chladičeho systému se volila pro oba typy stejná, a to hodnotou $4,023 \text{ m}^2$ pro každý kW. Kondenzátory parních strojů nevyžadovaly nízké vakuum, takže rostla obliba chladičích věží s přirozeným tahem, které sice v porovnání s chladiči ventilátorovými ochlazovaly vodu na vyšší teplotu, ale byly jednodušší a provozně spolehlivější.

U nás v době před 2. světovou válkou stavěly chladičí věže pro potřebu energetiky i průmyslu specializované zahraniční firmy a několik menších podniků domácích, které se vyvinuly z tesařských závodů, protože tahové komíny i vlastní chladičí systém byly dřevěné. Po zavedení železobetonu do stavebních konstrukcí se začalo tohoto nového materiálu používat asi kolem roku 1930 i při stavbě chladičích věží.

Stavěly se věže ventilátorové s velkoventilátorovými chladiči, i chladičí věže s přirozeným tahem, a to jak se železobetonovým tahovým komínem typu Itterson⁵, tak i s komínem tvaru komolého jehlanu s dřevěným bedněním v ocelové konstrukci. U nás, podobně jako v řadě jiných zemí, byly dřevěné chladičí systémy nahrazeny systémy z azbestocementových⁶ desek. Nejdříve tloušťky 4 mm, později též azbestocementovými deskami vlnitými. Tloušťka rovných desek 4 mm sice poskytovala větší teplosměnnou plochu v objemové jednotce chladičeho systému, avšak nepříznivě se projevovala velkým odpadem při montáži následkem značné křehkosti desek a deformacemi desek po delší době provozu. Odpad desek dosahoval až 10 %. Je zajímavé, že azbestocement nahradil dřevo svého času i v kapkových systémech. Například ve Francii se objevily v padesátých letech ve věžích s přirozeným tahem kapkové systémy, kde rozstřikovací latě byly nahrazeny azbestocementovými žlábkami, které byly vyrobeny rozřezáním vlnitých azbestocementových desek.

V poslední době se od azbestocementu upouští a nahrazují ho plasty, které dovolují vytvarování prvků chladičeho systému v libovolných, podle představ projektanta nejvhodnějších tvarech. Tím, že umožňuje vytvoření tenkostěnných prvků, dochází u systémů z plastů k podstatnému snížení jejich hmotnosti v porovnání se systémy z jiných

⁵ Itterson, typ chladičí věže hyperboloidního tvaru.

⁶ Azbestocement, klasický typ kompozitu, který obsahuje portlandský cement vyztužený vlákny azbestu. Po ztuhnutí dosahují výrobky velké ohybové pevnosti, jsou vodotěsné a odolávají mrazu.

materiálů, což se velmi příznivě projevuje i v jejich nosné konstrukci. V době, kdy použití plastů na výrobu chladících systémů bylo v některých zemích omezeno poměrně vysokou cenou základní suroviny, snažili se konstruktéři vytvořit z jednotky hmoty co největší teplosměnnou plochu. To vedlo k návratu ke kapkovým systémům, kde z plastů byly vytvářeny nárazové elementy pro rozstřík praménků na kapky vody. Nyní se z plastů vytvářejí blánové chladící systémy tvarované tak, aby vytvářely optimum mezi požadavky kladenými na jejich mechanické vlastnosti, především tuhost, a jejich tepelné charakteristiky.

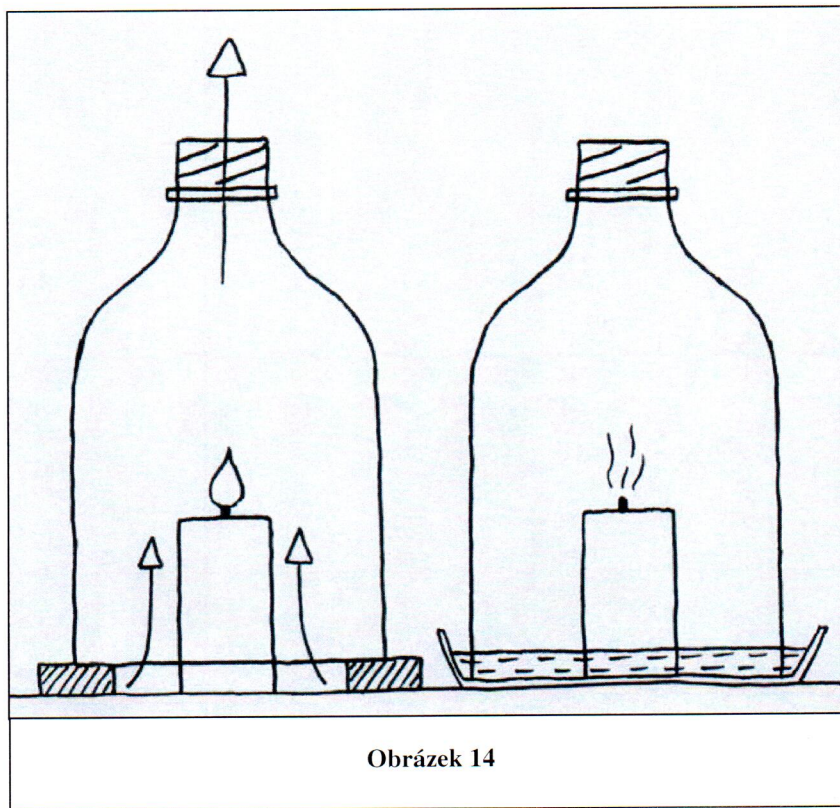
Kromě plastů se objevují chladící systémy i z jiných materiálů, např. i z kovů, a to zvláště u menších ventilátorových chladičů pro klimatizaci apod. Některé firmy vyrábějí chladící systémy dokonce z keramiky. Výhodou těchto provedení je značná odolnost proti chemickým vlivům.

Chladící systémy byly již vyrobeny z nejrůznějších materiálů. Někdy jejich volbu ovlivnila i okamžitá situace v opatřování značného množství potřebného materiálu. Například naše první stometrové chladící věže s přirozeným tahem mají chladící systémy tvořené každá 100 000 kusy azbestocementových desek standardního rozměru 2 500 x 1 200 x 4 mm.

• KONSTRUKČNÍ ŘEŠENÍ CHLADÍCÍCH VĚŽÍ S PŘIROZENÝM TAHEM

Chladící věže jsou nezbytnou a nejnápadnější součástí každé tepelné nebo jaderné elektrárny. Slouží k chlazení vody, která odebírá teplo páře a způsobuje tím její zkapalnění. Chladící věže s přirozeným tahem jsou po konstrukční stránce tvořeny tahovým komínem s jeho podpůrnou částí a chladícím komplexem uloženým na soustavě trémových a sloupových podpěr.

Tahový komín má pouze vytvořit potřebný tah vzduchu chladící soustavou. Pro dosažení tohoto efektu je využito stoupání teplého vzduchu vystupujícího z chladícího systému vzhůru tahovým komínem a chladnějšího vzduchu vně. Tah komína nebo chladící věže lze demonstrovat jednoduchým pokusem (obrázek 14). Odřízneme dno průhledné plastové lahve. Na zapálenou svíčku postavíme upravenou láhev podloženou dřevěnými kvádřičky tak, aby pod lahví byl prostor pro proudění vzduchu do lahve. Vzduch proudí zdola kolem



svíčky a dodává plameni kyslík potřebný k hoření. Svíčka hoří klidným plamenem a zahřátý vzduch stoupá vzhůru - vzniká tah. Proudění vzduchu si můžeme na horním konci lahve ověřit rukou. Pokus změňme tak, že do misky nalijeme trochu vody, postavíme do ní hořící svíčku a přiklopíme lahev.

Voda znemožní přívod vzduchu zdola a jeho proudění v lahvi ustane. Plamen nedostává potřebný kyslík a proto svíčka za chvíli zhasne. Stačí však těsně před zhasnutím láhev trochu nadzvednout a umožnit zdola přístup vzduchu. Plamen se opět rozhoří.

Volbou druhu chladícího komplexu je současně dáno i jeho podepření řešené soustavou sloupů a trámů v radiálním nebo pravoúhlém uspořádání, které nemá vliv na funkci chladiče. Konstrukční řešení tahových komínů chladících věží odpovídá materiálovým a technickým možnostem doby vzniku a můžeme se setkat s těmito konstrukcemi:

- TAHOVÉ KOMÍNY DŘEVĚNÉ

Vyznačují se dřevěnou nosnou konstrukcí z bráněného, popřípadě i uchráněného řeziva, opatřenou vhodným pláštěm. Dřevěné nosné konstrukce tahových komínů byly navrhovány půdorysně jako víceúhelníky, kde byl počet stran volen tak, aby se půdorys co nejvíce přibližoval čtverci, později kruhu. Nosná konstrukce byla tesařsky vázána a jednotlivé strany mnohoúhelníků byly zčásti předmontovány na zemi. Dřevěná nosná konstrukce

tahového komína byla opatřena soustavou lyžin pro upevnění pláště a zachycení účinku větru na stavební konstrukci tahového komína. Konstrukce komínů výšky do 10 m byly vztyčovány na kotevní bloky⁷ umístěné ve sběrné nádrži chladicí věže. Zvýšené nároky na množství chladicí vody vedly k výstavbě mohutnějších chladících věží, kde tahové komíny byly již stavěny na železobetonovém skeletu, který tvořil opěru tahového komína. Stavební výška dřevěných tahových komínů zpravidla nepřesáhla včetně železobetonové stolice 20 m. Plášť dřevěných tahových komínů se zřizuje zásadně na vnitřní straně a je většinou z dřevěných prken. Zavedení vlnitých azbestocementových desek umožnilo stavět pláště dřevěných tahových komínů z tohoto trvanlivějšího materiálu. Dřevěné tahové komíny se v podstatě již nebudují a při údržbě je nutno se zaměřit zejména na včasné opravy pláště komína chladicí věže, kde jeho poškození vede k zahnívání nosné konstrukce.

- **OCELOVÉ TAHOVÉ KOMÍNY**

Ocelové tahové komíny byly progresivním řešením, kde se stavební výška včetně železobetonové stolice blížila 60 m. Byly navrhovány jako komolé jehlany na n-úhelníkové základně. Konstrukční řešení pro výšku 60 m navržené jako komolý jehlan nad dvanáctiúhelníkovou základnou je již opatřeno rozšířením věže v poslední třetině výšky a připomíná tvarem chladicí věže Itterson. Ocelové konstrukce komínů chladících věží se přestaly realizovat v závěru padesátých let, kdy je zcela nahradilo řešení železobetonových komínů chladících věží. Řešení plášťových konstrukcí ocelových tahových komínů chladících věží je v principu obdobou plášťů pro dřevěné tahové komíny s tím, že konstrukční detaily uchycení pláště, který je rovněž na vnitřní stranu tahového komína, jsou uzpůsobeny k aplikaci pro ocelové konstrukční systémy. Dřevěné pláště pro ocelové tahové komíny se již neuvádějí pro velmi nízkou životnost konstrukce. Azbestocementové pláště z vlnitých desek jsou nejčastějším řešením plášťových konstrukcí ocelových tahových komínů a nevyžadují zvláštní údržbu. Při údržbě azbestocementových plášťů je třeba se zaměřit na včasnou opravu eventuálních lokálních poškození pláště, neboť vítr značnou měrou poškozuje narušené části, zejména kmitáním uvolněných a narušených azbestocementových desek.

⁷ Kotevní blok, stavební prvek, který přenáší tahové síly z konstrukce do podloží.

- **ŽELEZOBETONOVÉ TAHOVÉ KOMÍNY**

Železobetonové tahové komíny chladících věží jsou v podstatě výlučným řešením při návrhu nových chladících věží s přirozeným tahem. Navrhované železobetonové konstrukce byly ve skromných počátcích řešení většinou tvaru válce nebo komolého kužele, nepřesahujících stavební výšku 22 m. Železobetonový tahový komín je geometricky řešen jako tenkostěnný rotační útvar posazený na soustavě sloupových prvků, které ve spodní části umožňují vstup chladícího vzduchu do komína. Novější železobetonové tahové komíny chladících věží jsou řešeny jako rotační hyperboloid se stavební výškou 22 až 155 m s tím, že výška pro současné stavební možnosti může přesáhnout 160 m. Železobetonové skořepiny tahových komínů chladících věží jsou velmi citlivé na kvalitu stavebních prací a jejich poškození má původ výlučně v agresivitě prostředí, v němž jsou provozovány s tím, že v případě, že technologická kázeň při výstavbě byla malá bude tento faktor ještě umocněn. Obvyklá životnost železobetonové skořepiny je 40 let s tím, že údržbové práce je během užívání možno zaměřit v podstatě pouze na nepropustné nátěry vnitřního pláště tahového komína s důrazem na část v místě chladícího komplexu. Opravy železobetonových tahových komínů, jsou velmi nákladné a často i velmi málo účinné následkem značného narušení materiálových vlastností tahového komína jako stavebního celku. Komínové chladící věže s železobetonovým tahovým komínem ve tvaru rotačního hyperboloidu, označené jako chladící věže typu Iterson, jsou konstrukčním řešením, pro něž je vynikajícím způsobem zvládnuta technologie stavebně montážních prací a stavební výška je limitována v podstatě pouze dosahem středového jeřábu užívaného pro výstavbu.

- **PROVOZ CHLADÍCÍCH VĚŽÍ**

V místech, kde není dostatek vody pro realizaci průtočného chlazení je možno využít řešení s výparnými chladiči. V chladící věžích se teplo předává do vzduchu vypařováním. Vzduch vstupuje do chladiče, sytí se parou z ohřáté vody, která odnímá vodě výparné teplo. Teplo odvedené vzduchem je asi ze 80% vypařováním a z 20% konvekcí. Vzduch je proháněn buď tahem komína nebo ventilátory.

Konstrukce chladících věží s přirozeným tahem se řeší ve tvaru rotačního hyperboloidu. Ve

věži je v úrovni asi 6-8m nad hladinou mísy či bazénu umístěno vlastní chladicí pásma. Zde je přicházející voda nejprve rozvedena do rozváděcích žlabů z nichž vytéká na rozstříkovací talířky a laťovím zpět do bazénu. Vzduch je nasáván kolem nosných sloupů účinkem tahu vzduchu způsobený komínem. Chladicí věže jsou obvykle monolitické, železobetonové a jejich výška je přes 100m s průměrem bazénu až 80m.

Chladicí pásma lze konstrukčně řešit jako:

1. systém kapkový - chladicí systém je tvořen ze systému latí tak, aby povrch ochlazované vody, která se tříští na kapičky, byl co největší. Zároveň se požaduje co nejjemnější roztržení kapek při dopadu na nejbližších nižších latích
2. systém blánový - voda stéká po svislých nebo šikmých deskách v tenké vrstvě

Oba systémy se často kombinují. Protože se musí odvést stejné množství tepla, jako se odebralo kondenzující páře v kondenzátoru, je odpar chladicí vody při průchodu chladicí věží zhruba stejný. Teoreticky lze ochladit vodu pod teplotu okolí, bylo by to však nevhodné a vyžadovalo by to značné rozměry chladiče. Chladicí věže s přirozeným tahem jsou projektovány v našich klimatických podmínkách na teplotu ochlazení vody 25-27°C (při stavu okolního vzduchu 15°C a relativní vlhkosti 60%).

Při provozu velkých chladících věží vzniká často nepříjemný oblak mlhového vzduchu, zhoršující místní klimatické podmínky a viditelnost. Úplné odstranění těchto jevů je možné pomocí suchých chladících věží, kde pára kondenzuje bez přímého styku se vzduchem. Toto řešení však představuje vysoké investiční náklady (až trojnásobné). Jistým řešením by mohly být polosuché chladicí věže, které mají část suchou, tvořenou obvykle panely ze žebrovaných trubek, a část mokrou obvyklého provedení. Pro porovnání je potřeba chladicí vody při realizaci průtočného chlazení: cirkulačního chlazení: suché kondenzaci v poměru 1000:100:1.

- **VLIV PROVOZU CHLADÍCÍCH VĚŽÍ NA OKOLÍ**

Při výrobě elektrické energie v tepelných elektrárnách se prostřednictvím chladících věží odvádí značné množství tepelné energie do okolí. Předávání tepla do ovzduší spolu s dalšími jevy spojenými s provozem chladících věží ovlivňuje okolní prostředí. Jednotlivé

projevy provozu chladících věží si můžeme rozdělit na projevy spojené s přenosem tepla a hmoty, tj. tepelné znečištění atmosféry, zvýšení vlhkosti vzduchu, vliv vlečky⁸, zvýšení tvorby mraků apod. a na projevy spojené s konstrukcí věže, tj. spad způsobený únosem⁹ a jeho působení na okolí, vynášení tříště z kapkové části vlivem větru, hlučnost věže vyvolaná především dopadem kapek oběhové vody na hladinu sběrné nádrže apod.

Velmi často diskutovanou otázkou projevu provozu chladících věží na okolí jsou tepelné exhalace a jejich vliv na změny teploty a vlhkosti vzduchu v okolí, teploty zemského povrchu, množství srážek, procenta oblačnosti a zvýšení četnosti výskytu mlh.

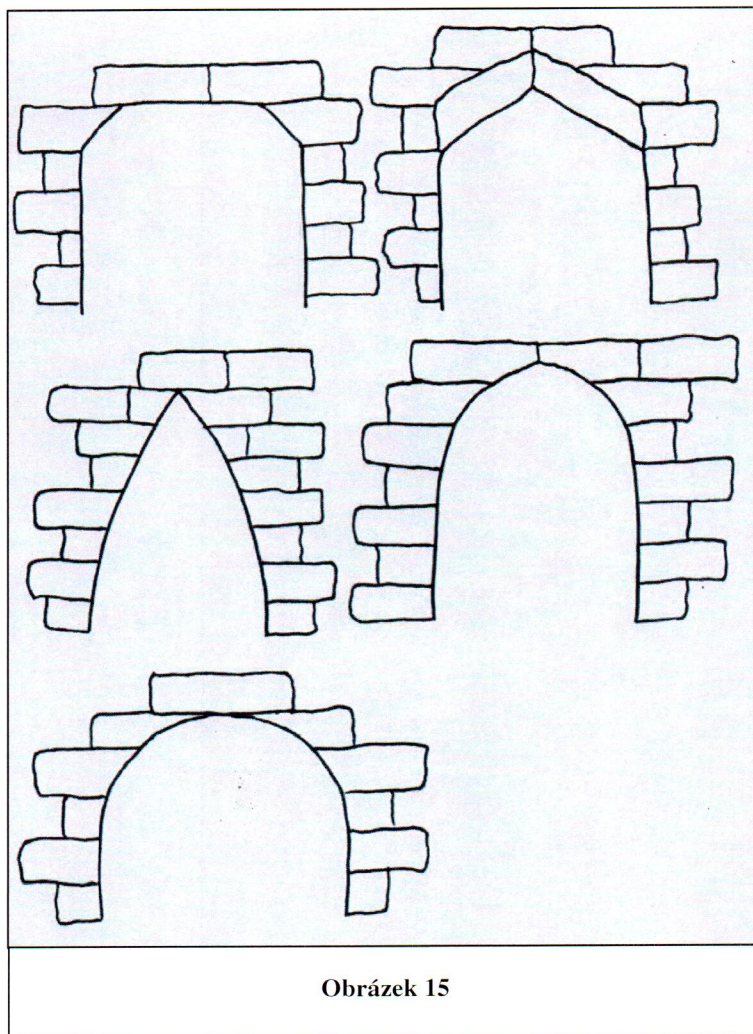
Ke zjištění vlivu tepelných exhalací na změny klimatologických prvků v okolí chladících věží byla především v zahraničí provedena řada studií i provozních měření. Z mnoha posudků meteorologů i z výsledků měření prováděných v různých státech (v Německu, Velké Británii, USA, Francii, Švýcarsku) vyplývá, že znečištění životního prostředí vlivem odvodu tepla z chladících věží je malé a nelze na ně pohlížet jako na znečištění vážné. Účinek exhalací leží uvnitř přirozeného rozptylu hodnot klimatologických prvků.

⁸ Vlečka, soubor částic, unášených z chladící věže. Vlečka je především zdrojem vlhkosti a to v plynné i kapalné formě, projevuje se jako oblak nad chladící věží.

⁹ Spad, hmotnost částic sledované látky, která se usadí ze vzduchu za jednotku času na plochu jednotkového povrchu.

MOSTNÍ OBLOUKY – KRUHOVÝ, ELIPTICKÝ, PARABOLICKÝ TVAR

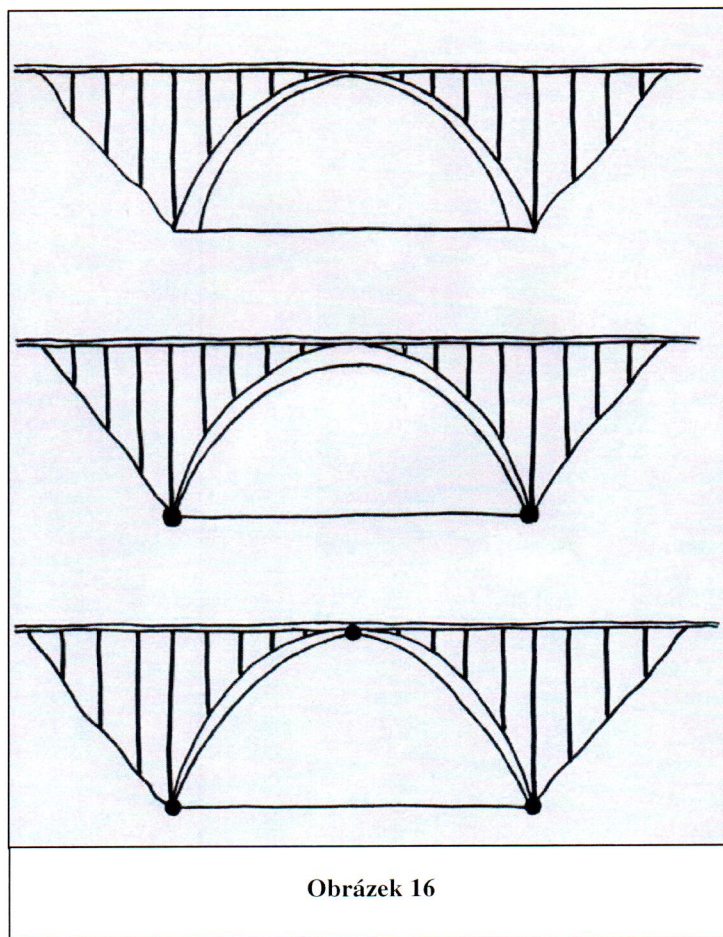
Oblouk, opírající se o dvě opěry, tvoří hlavní nosnou konstrukci mostu. Tvar mostního oblouku může být kruhový, eliptický, parabolický nebo složený. U složeného oblouku se jedná nejčastěji o složení několika kruhových úseků s různými poloměry a středy do jediné křivky. Hovoří se potom o trojstředovém nebo více středovém oblouku. Jeho celkový tvar se pak blíží tvaru paraboly. Mnohem častěji mají ale oblouky tvar paraboly a to buď 2. nebo 4. stupně. Tvar střednice oblouku vychází ze zatížení - pokud je zatížení rovnoměrné, pak by střednicí měla být parabola 2. stupně, to je však výjimka, a proto jsou to obvykle jiné



křivky. U konstrukcí kleneb je výrazné přetížení směrem k pilířům, což vede až ke střednici kruhové - pokud je zatížení jen jedinou silou uprostřed rozpětí (při zanedbání vlastní tíhy), pak by střednice byla lomená čára s vrcholem v místě působení této síly. Pokud k tomu přidáme vlastní tíhu oblouku, pak dostaneme gotický oblouk. Vývoj tvaru oblouku je znázorněn na obrázku 15. Vzepětí oblouku je závislé na zatížení a statické soustavě. Přibližně lze říci, že čím větší zatížení, tím se volí větší vzepětí. Oblouky se staví

monoliticky, případně z obloukových prefabrikovaných žeber, tvořících 1/2 nebo 1/4 oblouku. Výztuž oblouků je nejčastěji z betonářské výztuže, dříve byly navrhovány oblouky s tuhou výztuží. Oblouky se vyztužují u obou povrchů (vnitřního a vnějšího) stejnou výztuží z důvodu docílení stejnoměrného smrštění. Zvláštní úpravou je vytvoření výztužných koster z betonářské oceli, které nesou tíhu čerstvého betonu, čímž odpadá stavění těžké skruže při výstavbě. Aby se aspoň částečně odstranily vlivy, které nepříznivě působí na napjatost oblouků, navrhuje se u některých částí úmyslné deformace, které tyto účinky částečně eliminují. Jsou to například korekce střednice oblouku (lze ovlivnit postupem výstavby, zvětšením vzepětí a jinými postupy).

Římané preferovali půloblouk se svislými tečnami, jejichž zakončení vyjadřuje ukončenost



děje, spočínutí opět na zemi. Totéž platí i o obloucích eliptických.

Segmentový kruhový oblouk byl používán později, a to ve středověku. Tečna v jeho ukončení směřuje šikmo, což vyvolává pocit neukončenosti a pokračování v pohybu.

Je-li zapotřebí, aby jeden z oblouků byl z nějakého důvodu větší, například pro překonání širokého údolí, je třeba rozdíl horizontálních sil sousedních oblouků vyjádřit nějakým dalším prvkem, například hmotnějším pilířem nebo mostní věží.

Parabolický oblouk nejlépe odpovídá průběhu vnitřních sil při rovnoměrném průběhu zatížení. Tvar paraboly simulují trojstředové a více středové složené oblouky.

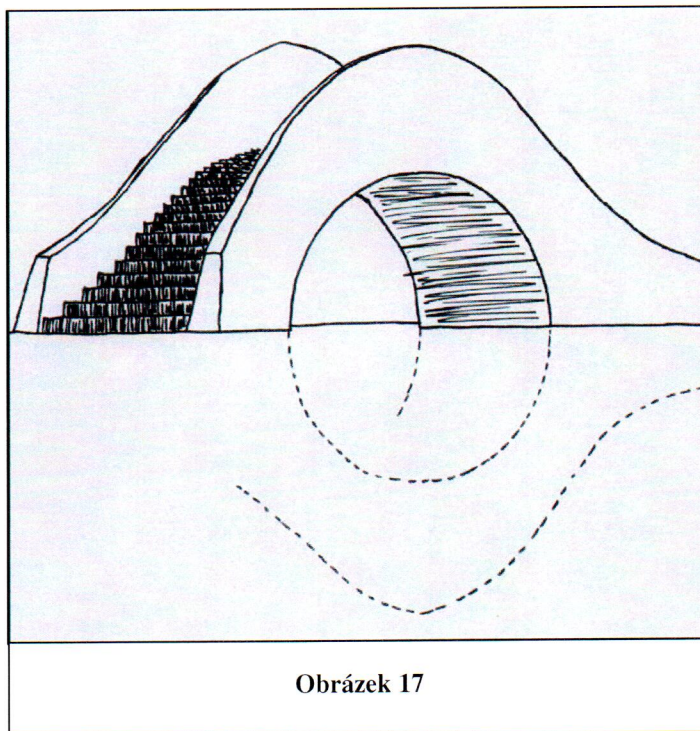
Železobetonové oblouky se nejdříve navrhovaly jako vetknuté. To navazovalo na podobnost s kamennými klenbami. Dnes se vetknuté oblouky volí jen tam, kde jsou spolehlivé základové podmínky. Hlavně ze statických důvodů se stále více prosazují oblouky dvojklobové, jejichž tloušťka se naopak směrem k opěře zmenšuje. V případě, že jsou geologické podmínky staveniště složité, například na území s intenzivní důlní činností, přichází v úvahu i trojklobový oblouk. Na obrázku 16 je znázorněn vetknutý, dvojklobový a trojklobový oblouk.

Příznivěji působí, je-li nosný oblouk pod mostovkou a neruší výhled. V plochém území je ovšem nezbytné navrhovat oblouky nad mostovkou. Toto je vynuceno tím, že mosty často překonávají vodní cesty v rovinném terénu. Mosty potom musí mít nízkou stavební výšku, což si vynutí umístění nosné konstrukce nad mostovku.

- **OBLOUK SLEDOVANÝ NIVELETOU**

Nejpřirozenějším použitím mostu s nosným obloukem je případ, kdy niveleta sleduje průběh oblouku. Výhodou je to,

že nejsou třeba pomocné konstrukce jako vyzdívky nebo stojky mezi obloukem a mostovkou. U více klenutých oblouků je třeba v krajních částech, kde je průběh strmý, vybudovat schodiště, horní část pak pouze opisuje oblouk (obrázek 17). Při řešení nivelety je třeba respektovat prostorový průběh trasy, aby nedocházelo k náhlým změnám (stoupání v klesání a naopak), které by



Obrázek 17

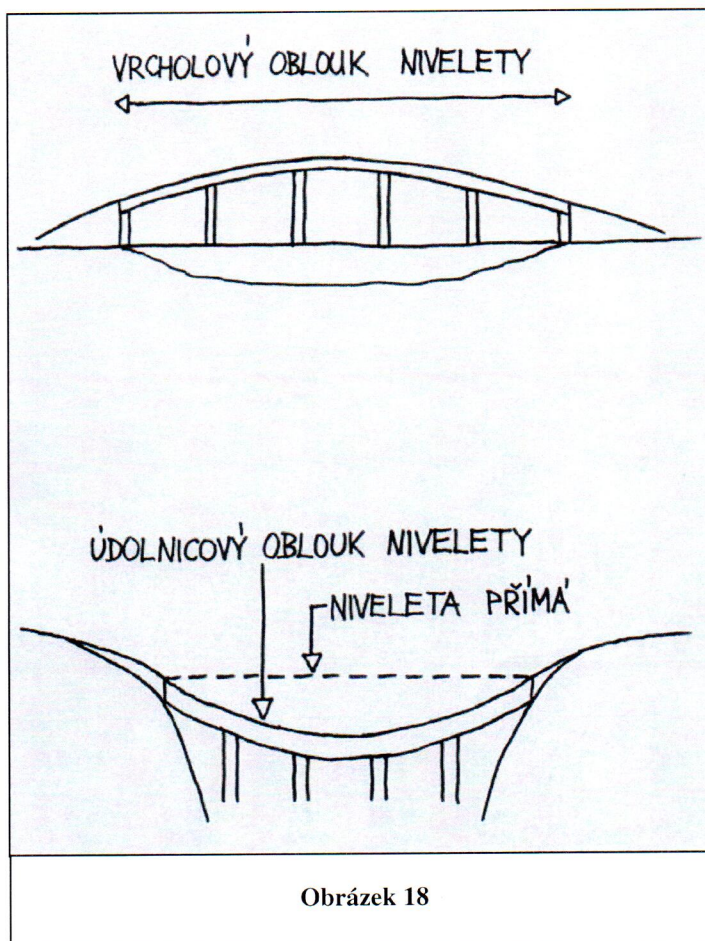
ohrozily bezpečnost. Takovéto situace se řeší vrcholovým obloukem v případě, že silnice před mostem stoupala a obloukem údolnicovým v případě, že klesala (obrázek 18).

Niveleta je čára, která vyznačuje rozdíl dvou bodů na zemském povrchu. Na obrázku 19 je znázorněna niveleta dvou bodů, které jsou spojeny mostem.

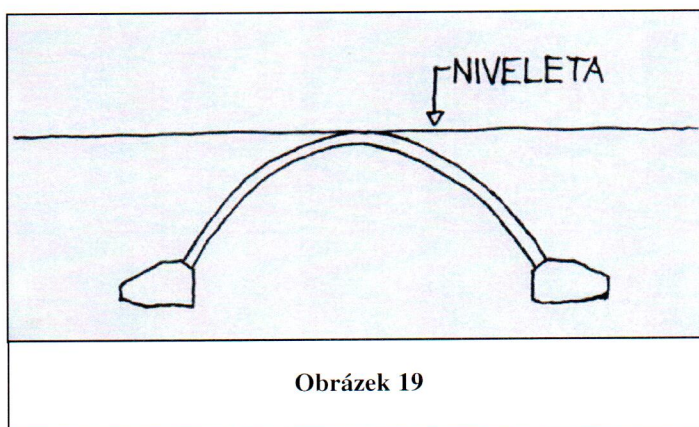
- **OBLOUK POD MOSTOVKOU**

Pokud to dovolí podmínky, tedy je-li dostatek prostoru pod niveletou, je technicky i esteticky vhodnější oblouk umístěný pod mostovkou. Podíváme-li se opět na římské oblouky, zjistíme, že jejich klenební oblouky byly zásadně pod mostovkou. Andrea Palladio¹⁰ napsal o půlkruhových

obloucích: „Tyto oblouky jsou velmi pevné, protože spočívají na pilířích a netlačí na sebe navzájem“. Ideové návrhy Andrea Palladia obsahují zásady, které přešly do návrhů středověkých mostů. Je to například volba lichého počtu



Obrázek 18

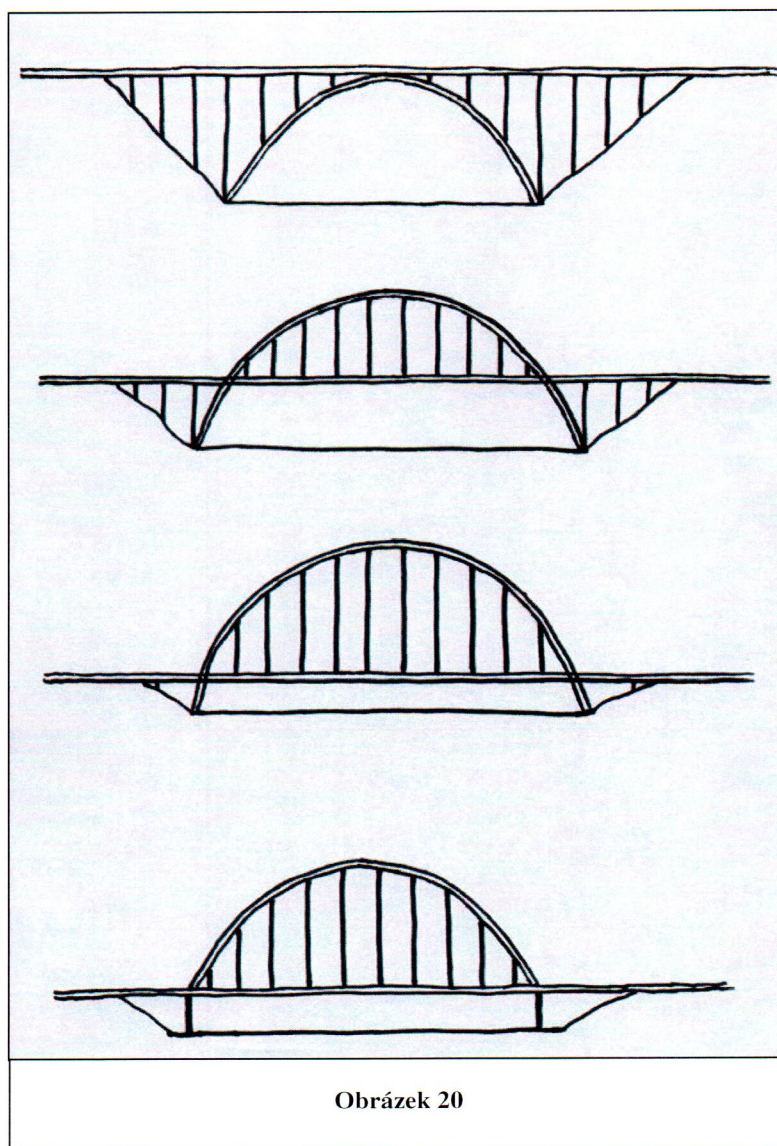


Obrázek 19

¹⁰ Andrea Palladio, narozen 30. 11. 1508, zemřel 19. 8. 1580

Italský architekt a teoretik, ovlivněn Michaelem a studiem antiky. Vytvořil vlastní klasicizující uměřený styl charakteristický užitím vysokého řádu a umírněnou dekorativností, který výrazně ovlivnil evropskou klasicistně orientovanou architekturu. V roce 1580 začal stavět Teatro Olimpico ve Vicenze, které se stalo první novodobou divadelní budovou a svým pojetím ovlivnilo na několik staletí evropskou divadelní architekturu.

oblouků, menší oblouky na okrajích mostu, půlkruhový tvar oblouků a jiné. Například sudý počet podpěr a tedy lichý počet oblouků zdůvodňuje Palladio takto: „Pilířů, které se dělají na šířku řeky, musí být sudý počet, protože vidíme, že příroda stvořila v tomto počtu všechny věci, které ve větším množství než jedna mají podpírat nějaké zatížení, jak o tom



svědčí nohy lidí a všech zvířat, také proto, že takové uspořádání je příjemnější na pohled a činí dílo pevnějším, ježto proud řeky uprostřed, kde je přirozeně silnější, protože je dále od břehu, je volný a neohrožuje pilíře neustálými otřesy".

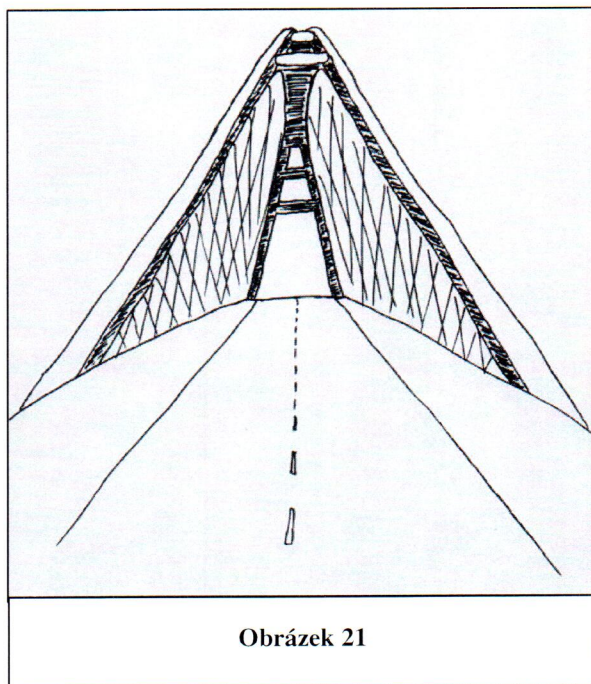
- **OBLOUK NAD MOSTOVKOU**

V případě, že není možné oblouk umístit pod mostovku, objeví se z části nebo zcela nad mostovkou. Takové mosty se navrhují v případě, když most může mít pod mostovkou jen velmi malou stavební

výšku.

Na obrázku 20 je znázorněn oblouk pod mostovkou, oblouk se střední mostovkou a dva typy oblouku nad mostovkou.

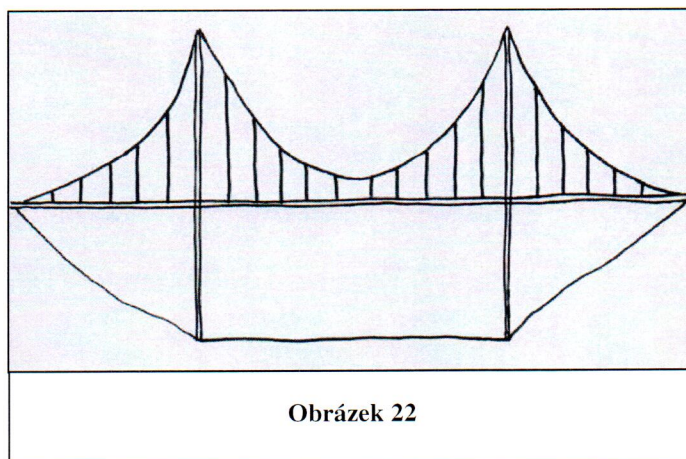
- SKLONĚNÉ OBLOUKY



Obrázek 21

Z dvojice oblouků, které musí být většinou propojeny ztužením, se vyvinula varianta, kdy jsou k sobě oba oblouky nakloněné (obrázek 21). Vzniká tak tuhá stabilní konstrukce, do níž je zavěšena mostovka. Tuhost systému skloněných oblouků plyne ze skutečnosti, že se navzájem při přenášení bočních sil doplňují. Zajímavý návrh vnesl do konstrukce obloukových mostů architekt Santiago Calatrava, jehož mosty mají pouze jediný oblouk, skloněný do šikmé roviny.

- VISUTÉ MOSTY



Obrázek 22

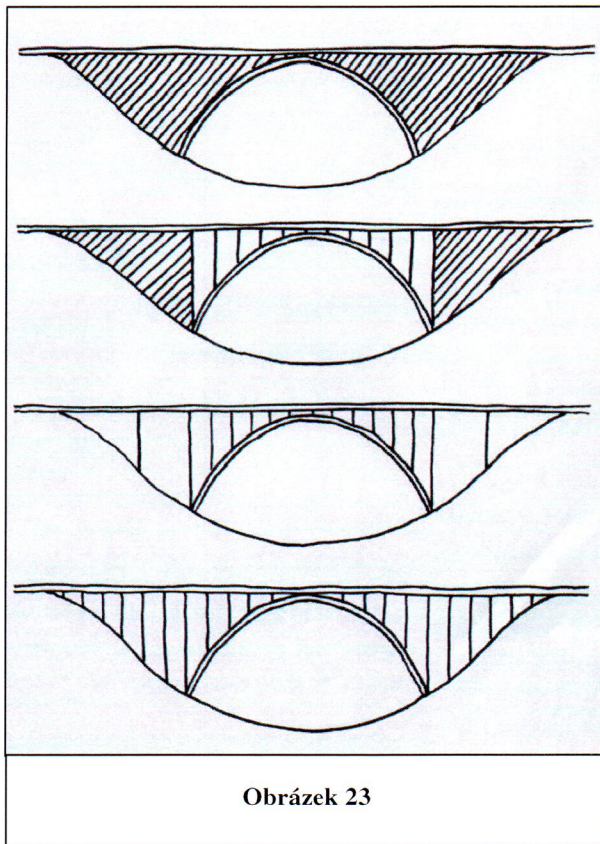
Visuté mosty mají základní tvar nosných lan ve tvaru blízkém řetězovce, která je u moderních visutých mostů zpravidla simulována parabolou (obrázek 22). Visuté mosty mají smysl při rozpětích větších než 300 m. Dříve se jako lana používala vinutá lana ze starých těžních věží, která již

byla v provozu dostatečně protažena, takže nehrozilo jejich další protahování.

- VÝSTAVBA OBLOUKŮ

Oblouky se staví zejména přes hluboká a nepřístupná údolí již od 40 m rozpětí, běžně od 100 m a dnes již nejsou výjimkou mosty delší než 500 m.

- TYPY PODEPŘENÍ MOSTOVKY



Obrázek 23

U obloukových konstrukcí vzniká ten problém, že se většinou nevystačí s obloukem jako jedinou nosnou konstrukcí. Pokud je mostovka nad obloukem, je třeba ji podepřít. Ta ale pokračuje i nad oběma břehy, kde již oblouk není. V těchto místech je možné umístit podpěry dále od sebe. Je to často ekonomičtější i technicky vhodnější, protože zakládání podpěr ve svahu bývá obtížné. Na obrázku 23 jsou znázorněny čtyři typy podepření mostovky, a to varianta plná, polouzavřená a dvě varianty otevřené.

- EVROPSKÉ HISTORICKÉ MOSTY



Obrázek 24

Nejstarší kamenné mosty se vyznačují několika znaky: jednoduchostí, geometričností, preferencí půlkruhu symetrií, stejnými oblouky. Jsou to převážně mosty římské, které ale ovlivnily výstavbu mostů ve většině provincií. Neméně významné jsou římské akvadukty. Začaly se stavět už ve 4. století př. n. l. a mohly se

dokonce vzájemně křížit. Nejdelší římský akvadukt (Claudiův) měl délku 60 km. Doba

středověku nebyla stavbě mostů příznivá. Z obavy před nájezdy se nestavěly silnice a tedy ani mosty. Obrat nastal až ve 12. století. Vznikala a rozrůstala se města, a to si vynutilo i stavbu silnic a mostů. Tyto mosty ovšem byly tvarově i účelově odlišné od římských. Měly funkci obrany a opevnění. Vozovka byla úzká, často přerušená pohyblivým padacím mostem u něhož byla brána nebo mostní věž. Oblouky už nebyly vždy půlkruhové, ale stále

častěji segmentové.



Obrázek 25

Most měl vždy funkci spojování lidí a národů. Příkladem toho, že toto prakticky někdy vadí, je most v Mostaru (model na obrázku 24). Byl postaven v letech 1566 – 1567, byl dlouhý 28 metrů a měl vzepjetí 19metrů. Most byl zbořen v roce 1993 v době války v Jugoslávii. Obnoven byl až v roce 2003. Na začátku 18. století Evropu silně ovlivňoval orient, a to ve všech výtvarných odvětvích .

Spolu s rozvojem zahradní architektury tak vznikalo množství dekorativních zahradních mostků. Jeho výrazným rysem je směrem ke středu stoupající niveleta. Od poloviny 19. století se objevuje nová vlna romantické architektury, znovu se staví mostní věže, které ovšem kontrastovaly s tehdejším používáním ocelových konstrukcí. Koncem 19. století se již od stavění mostních věží (s výjimkou visutých mostů, kde měly své opodstatnění) upouštělo. Nejvýznamnější stavbou této doby je pařížský most Pont Alexandre III. (obrázek 25), postavený u příležitosti návštěvy ruského císaře Alexandra III. v Paříži.

PŘEHLED ČESKÝCH MOSTŮ S GEOMETRICKY ZAJÍMAVÝMI OBLOUKY

- BECHYNĚ

Mohutný železobetonový obloukový most se klene téměř 40 m nad hladinou řeky Lužnice. Oblouk mostu nijak neruší okolní krajinu a dává vyniknout okolním vysokým stromům, které ovšem brání pohledu na most ze břehu (obrázek 26). Po mostovce nevede pouze silnice z Bechyně do Sudoměřic, ale také trať u nás první elektrifikované železnice. Bechyňskému mostu říkají místní obyvatelé také „duhový“.



Obrázek 26

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s vysokým vzepětím, oblouk tvaru paraboly (obrázek 27)

DÉLKA: 190,50 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: železobeton

DOBA STAVBY: 1925 - 1928

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Lužnice



Obrázek 27

- BĚLÁ NAD RADBUZOU

Tato stará barokní památka, postavená v letech 1700-1710 v Bělé, má osm oblouků s malým, asi dvoumetrovým rozpětím, a šest kamenných pilířů (obrázek 28). Materiálem je



Obrázek 28

žula. Na podezdívkách stojí pískovcové sochy z roku 1720. Most trpěl za druhé světové války přejezdy vojenských vozidel. I když je horní okraj zábradlí jen 3,5 m nad hladinou Radbuzy, řeka stavbu povodněmi neohrozila, protože její prameny jsou vzdáleny pouze 20 km.

TYP KONSTRUKCE: nízký obloukový most s polokruhovými oblouky (obrázek 29)

DÉLKA: 45 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: žula, pískovcová výzdoba



Obrázek 29

DOBA STAVBY: 1700 – 1710, 1720 výzdoba
PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Radbuza

- ČERVENÁ LHOTA



Obrázek 30

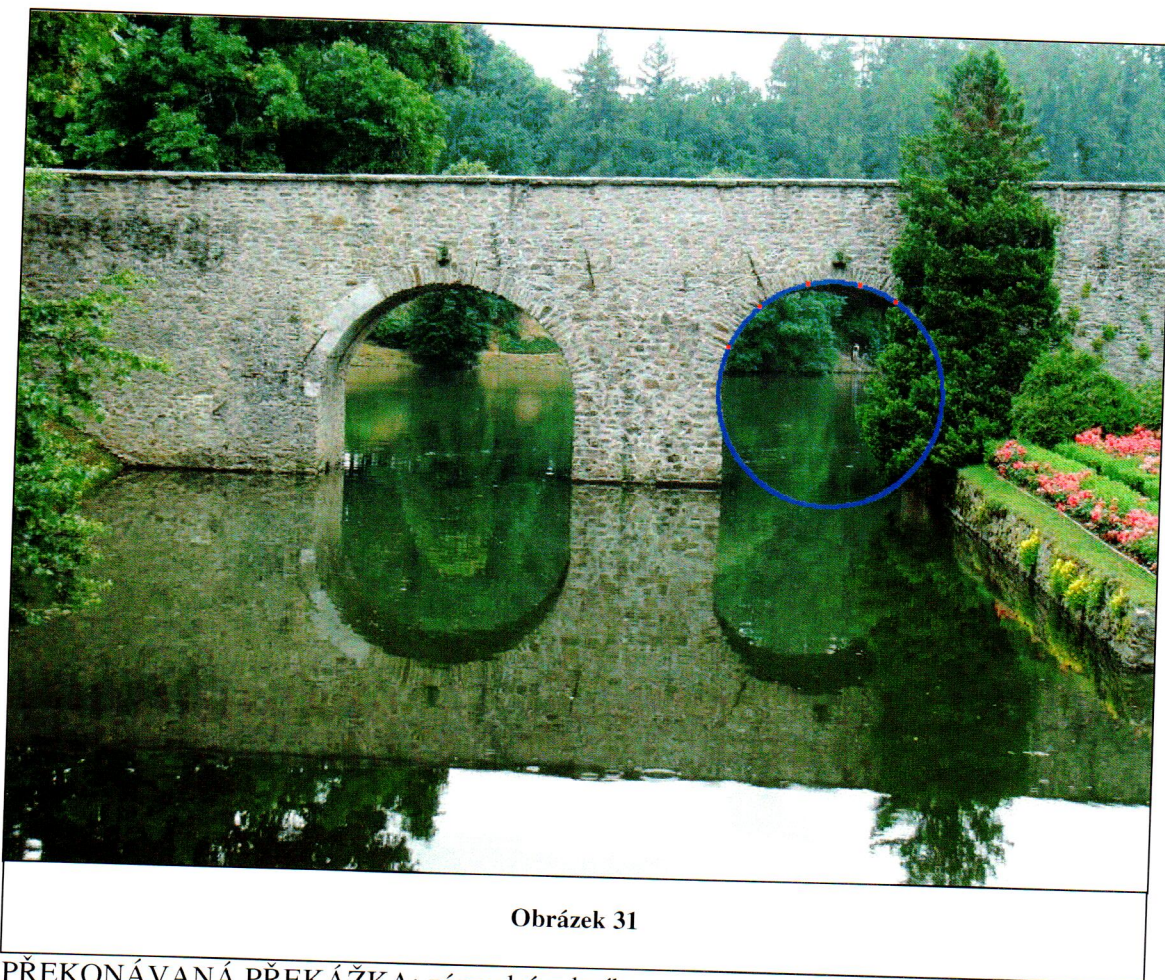
Původně gotická tvrz ze 14. století Červená Lhota, se nachází mezi Soběslaví a Jindřichovým Hradcem. V roce 1530 byla přestavěna na renesanční vodní zámek a v 17. století prošla barokními úpravami. Z té doby také pochází hradní most, který je téměř stejně dlouhý jako hrad. Přístupový most je dlouhý 28 m, je obloukový, polokruhový o dvou polích o nestejném rozpětí (obrázek 30).

TYP KONSTRUKCE: půlkruhový obloukový most o dvou polích (obrázek 31)

DÉLKA: 28 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen

DOBA STAVBY: počátek 17. století



Obrázek 31

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: zámecký rybník

- ČESKÉ BUDĚJOVICE - LÁVKA PŘES MALŠI

Oblouky jsou navrženy ve tvaru paraboly 2. stupně se vzepětím 8.000 mm od střednice trámu v jeho vrcholu.

TYP KONSTRUKCE: lávka s parabolickým obloukem nad mostovkou (obrázek 32)



Obrázek 32

DÉLKA: 46,2 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: ocel

DOBA STAVBY: rekonstrukce 2003

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Malše

- DĚČÍN – KAMENNÝ MOST

Jde o most ze 16. století, vybudovaný přes Ploučnici v blízkosti jejího vyústění do Labe (obrázek 33). Stavba je zajímavá plastickým zubořezem na parapetu odvozeným z



Obrázek 33

gotického cimbuří a sousoším od M. J. Brokoffa z roku 1714. Mostní zdivo je pískovcových kvádrů. Čtyři půlkruhovitě oblouky mají nestejně rozpětí. Stavba je památkově chráněná a dnes slouží pouze pro pěší.

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s polokruhovými klenbami (obrázek 34)

DÉLKA: 84,60 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: pískovcové kvádry



Obrázek 34

DOBA STAVBY: 1564 - 1567

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Ploučnice

- DĚČÍN - PODMOKLY



Obrázek 35

Pozoruhodný raně barokní kamenný most, nazývaný Ovčí (obrázek 35) se nachází v Děčíně - Podmoklech. Překlenuje Jílovský potok vysoce vyklenutým obloukem, který stoupá od vstupu na most k jeho středu o 1,5 metru. O původu vyklenutí existuje pověst: Poddaní sedláci odmítli panu Rudolfovi z Býnova pomáhat při stavbě mostu. Došlo ke sporu, který pán z Býnova prohrál. Proto údajně vystavěl most tak, aby ho mohl používat jen dobytek a ne vozy. Odtud také název "Ovčí most". Stavebním materiálem je pískovec. Stavba mostu je chráněnou památkou.

TYP KONSTRUKCE: vysoce klenutý obloukový most s jedním půlkruhovým obloukem (obrázek 36)

DĚLKA: 18,40 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: pískovec

DOBA STAVBY: 1620



Obrázek 36

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: Jílovský potok

- DOBŘANY

Dobřanský most (obrázek 37) dnes slouží pouze pěším a cyklistům, protože hlavní silnice



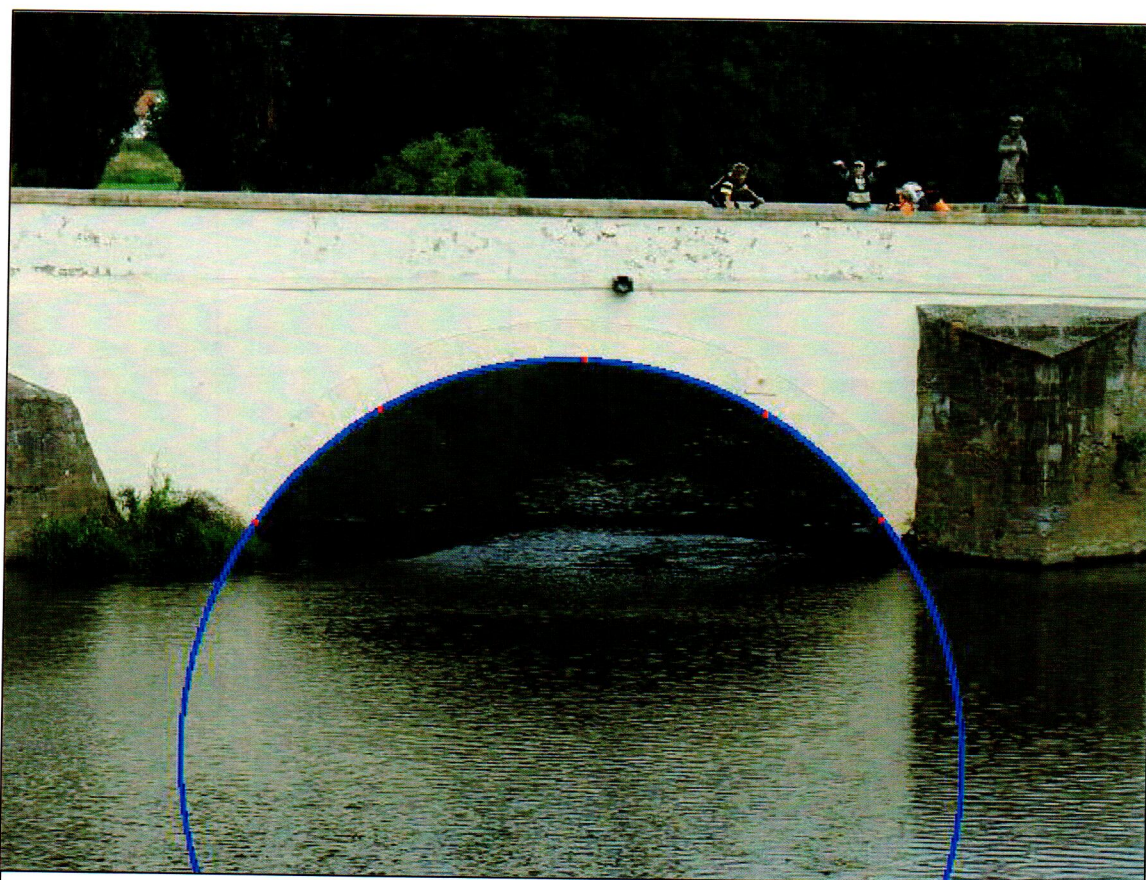
Obrázek 37

se před několika desetiletími přesunula o 200m. Most se nedochoval v původní středověké podobě. Na gotickém jádře byl několikrát přestavován. O tom svědčí i jeho nepravidelné tvary. Nejzápadnější oblouk je segmentový, zbylé dva jsou polokruhové. Dobřanský most se nacházel na důležité cestě ze Staré Plzně do Bavorska. Pověst vypráví o tom, že přes něj přecházel v letech 1419 – 1421 Jan Žižka se svými vojsky.

TYP KONSTRUKCE: segmentový a půlkruhový, obloukový most o třech polích (obrázek 38)

DÉLKA: 50 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: pískovec, cihly



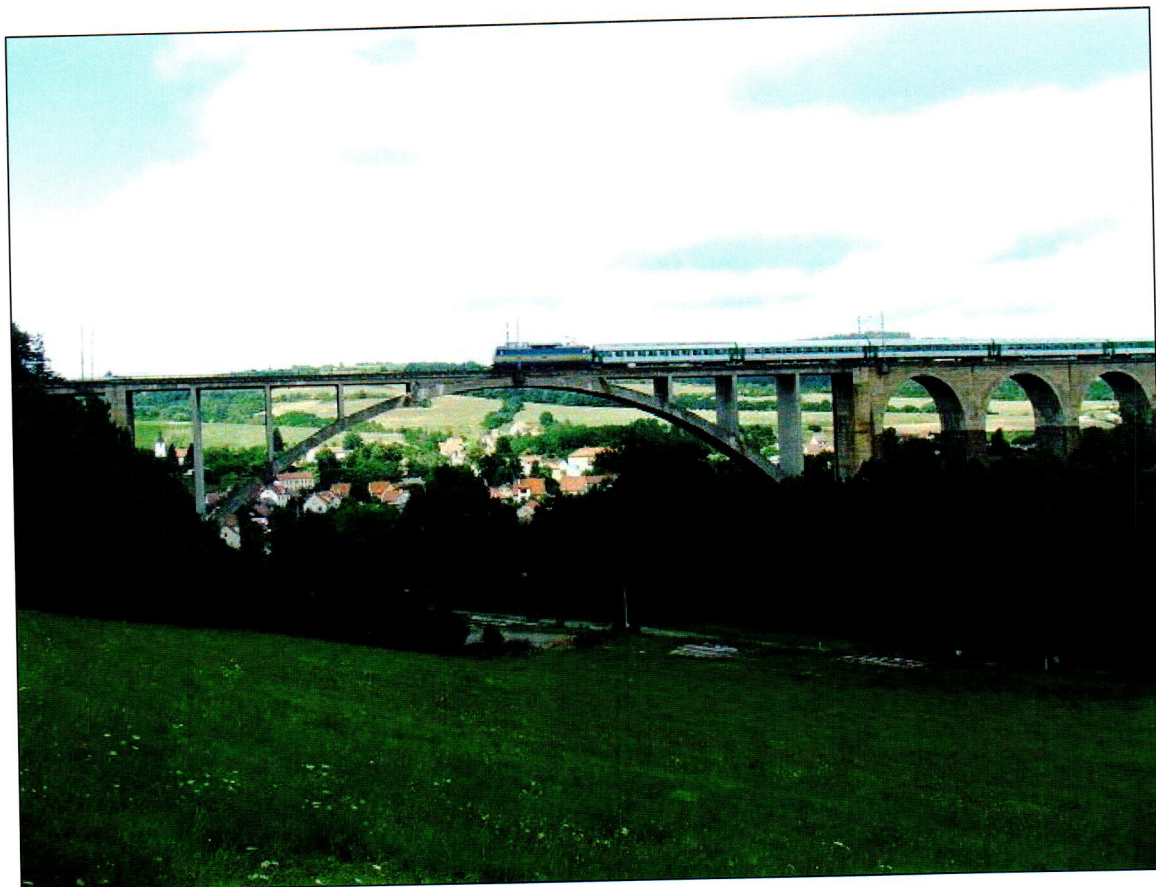
Obrázek 38

DOBA STAVBY: není přesně známa

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Radbuza

- DOLNÍ LOUČKY

Železniční viadukt vedoucí přes údolí potoka Libochovky je jeden z největších střeoevropských železobetonových viaduktů (obrázek 39). Původní projekt výstavby byl



Obrázek 39

změněn za německé okupace kvůli úspoře na oceli. Největší oblouk parabolického tvaru má rozpětí 110 m.

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s parabolickým hlavním obloukem (obrázek 40)

DÉLKA: 300 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: železobeton, žula na obklady

DOBA STAVBY: 1939 - 1953



Obrázek 40

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: údolí mezi Pasníkem a Mírovou

- **HOLKOV**

Nejstarší a nejnámější koněspřežná železnice vedla z Českých Budějovic přes rakouské hranice u Dolního Dvořiště do Linzu. Úsek z Českých Budějovic na dnešní hranice byl dán do provozu v roce 1828. Do této doby spadá i stavba prvních železničních mostů; na této trati jich bylo 214. Většinou šlo o mosty dřevěné ze špalíkových roštů, ze kterých zůstaly jen kamenné opěry. Výjimkou je zachovalý a pěkný mostek v Holkově (20 km jižně od Č.



Obrázek 41

Budějovic, obrázek 41). Tento malý klenutý mostek je prvním evropským železničním mostem. Stavební materiál je kámen. Most překonává místní vodoteč. Projektantem celé trasy koněspřežky je F. J. Gerstner.

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s polokruhovou klenbou (obrázek 42)

DÉLKA: 3 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen

DOBA STAVBY: 1828



Obrázek 42

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: vodoteč

- JEZERNICE

Na trati z Přerova do Bohumína je poblíž obce Jezernice železniční viadukt více než 300 m



Obrázek 43

dlouhý o 41 obloucích (obrázek 43). Sestává se v podstatě ze dvou starých železničních mostů vedle sebe (obrázky 44 a 45), 35 oblouků má rozpětí 6,5 m a 6 menších 5,2 m. Celková výška mostu je 10,6 m. Asi v polovině mostu pod jedním obloukem protéká říčka Jezernice. Most u Jezernice pochází ze staré trati – Severní dráhy císaře Ferdinanda - z Vídně do Bochnie otevřená v roce 1847. Šlo o trať velice využívanou. Původní předpoklad byl, že trať využije 40000 lidí ročně, skutečný počet byl ale desetkrát vyšší.



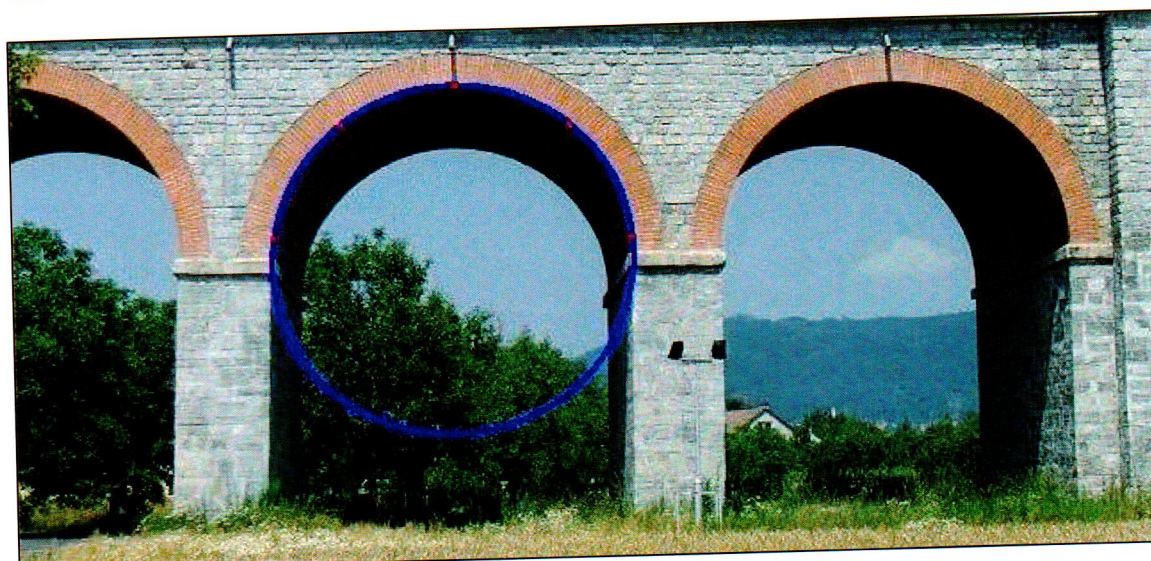
Obrázek 44



Obrázek 45

TYP KONSTRUKCE: železniční viadukt s půlkruhovými klenbami (obrázek 46)

DÉLKA: 343 m



Obrázek 46

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen, cihly

DOBA STAVBY: 1847

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: terénní nerovnosti, říčka Jezernice, místní komunikace

- KAČINA

Most u empírového zámku Kačina, postavený v letech 1802 – 1822, se nachází severovýchodně od hlavní budovy zámku, vedle jezera. Klenba jediného oblouku je z opracovaných kamenných kvádrů, další části z cihel, nízké zábradlí je zdobené litinovými ornamenty.

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s polokruhovou klenbou (obrázek 47)



Obrázek 47

DÉLKA: 12 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen, cihly, litina (výzdoba)

DOBA STAVBY: 1802 – 1822

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: výtok z jezera

- LEDNICE – AKVADUKT

V období romantismu se stalo módou v zámeckých parcích stavět čínské pavilony, egyptské sfingy, maurské minarety, římské triumfální oblouky. V této době vznikla zámeckém parku v Lednici mimo jiné napodobenina římského akvaduktu, který je zřejmě jediným akvaduktem v Čechách. Lednický akvadukt má devět pilířů, cihlových kleneb je osm. Jeho koryto ovšem nikdy nikam vodu nepřivádělo (obrázek 48).



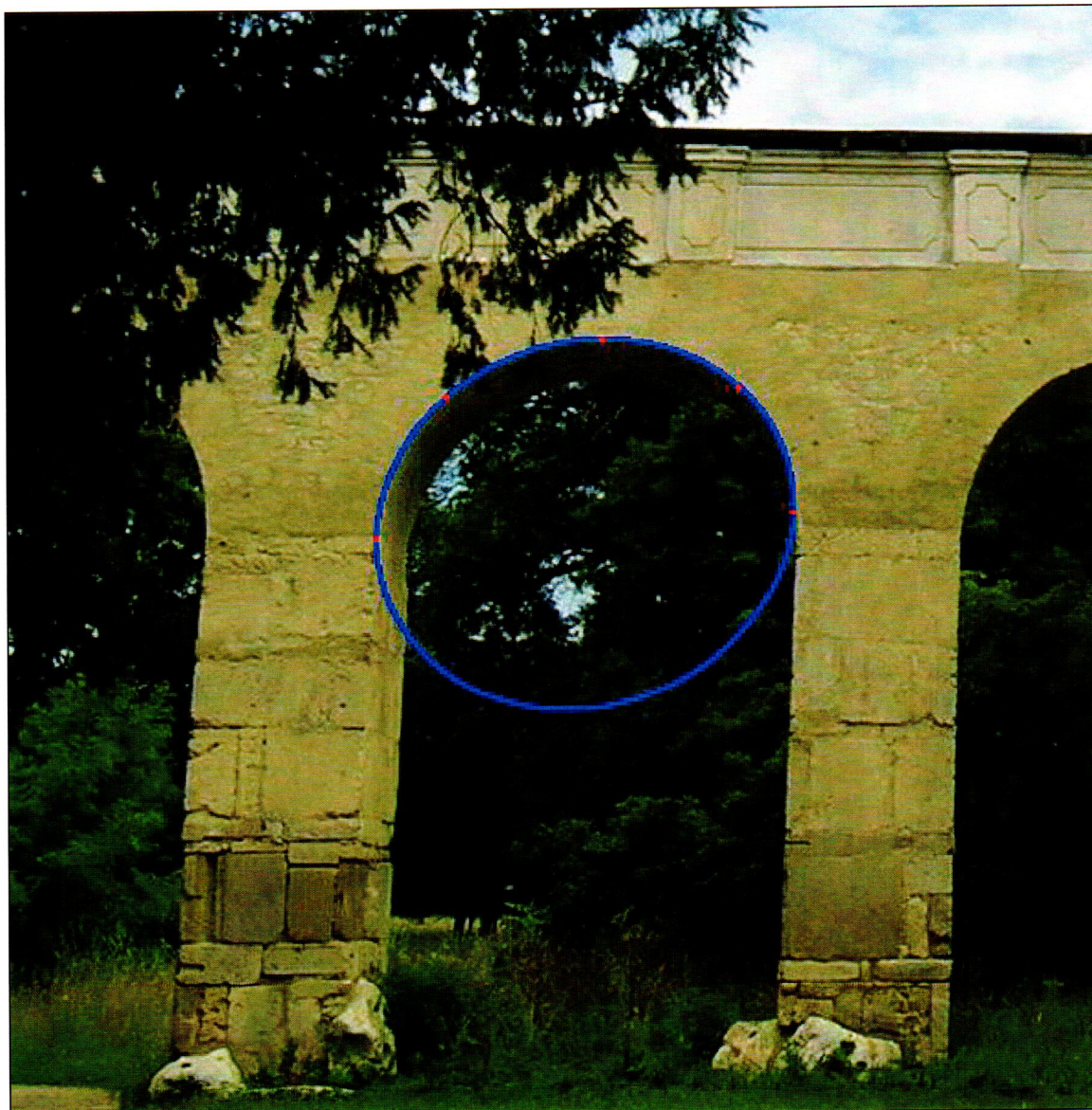
Obrázek 48

TYP KONSTRUKCE: akvadukt s polokruhovými oblouky (obrázek 49)

DÉLKA: 30,90 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen, cihly

DOBA STAVBY: počátek 19. století



Obrázek 49

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: parková cesta

- LITOVEL

V Litovli, nedaleko Olomouce, se nachází jeden z našich velmi starých mostů. První zmínka o Litovelském mostě je z roku 1592 (obrázek 50). Šlo o důležitou dopravní stavbu,



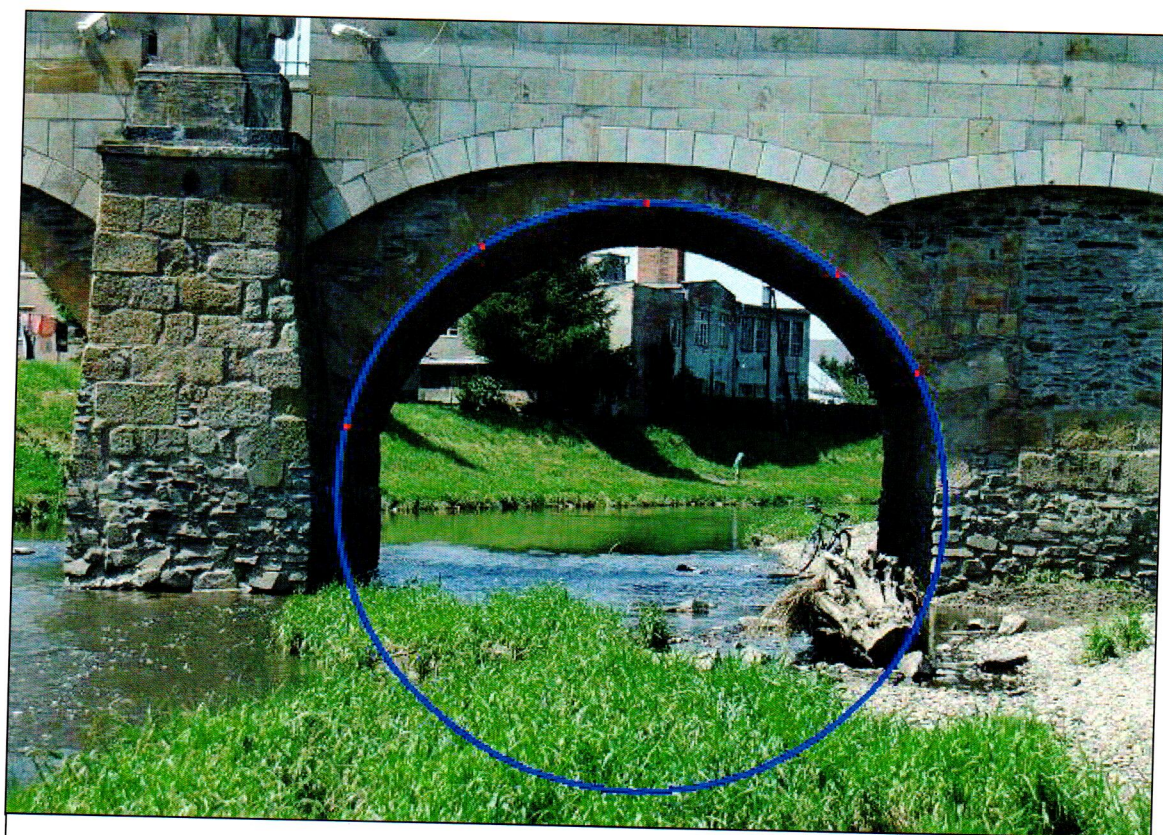
Obrázek 50

kteřá spojovala město s jeho severní částí zvanou „předměstí před Uničovskou branou“. I přes velký počet lávek a mostků přes Moravu v okolí Litovle byl tento kamenný most až do 19. století jedinou velkou mostní stavbou ve městě. Most má šest polokruhových oblouků o rozpětí čtyř metrů, mostovka směrem ke středu mírně stoupá.

TYP KONSTRUKCE: most o polokruhových obloukových klenbách (obrázek 51)

DÉLKA: 55 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen



Obrázek 51

DOBA STAVBY: první zmínka z roku 1592

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Morava

• NÁMĚŠŤ NAD OSLAVOU



Obrázek 52

Náměšťský most (obrázek 52), zvaný také „malý moravský Karlův“, dal postavit roku 1737 hrabě Václav Adrian z Enckenvoitru, pocházející z Belgie. Sedmiobloukový most postavil údajně italský stavitel. Stavbu často ohrožovaly povodně a kry, které musely být odstřelovány. V roce 1945 umístili fašisté na střed mostu čtyři padesátikilové letecké bomby a chtěli jej odpálit před postupující sovětskou armádou. Čtyřem občanům se ale podařilo přestřihnout odpalovací dráty a bomby zlikvidovat. Model mostu je vystaven na stavební fakultě Vysokého učení technického v Brně.

TYP KONSTRUKCE: obloukový most se sedmi půlkruhovými klenbami (obrázek 53)

DÉLKA: 62 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen, cihly

DOBA STAVBY: 1737 - 1744



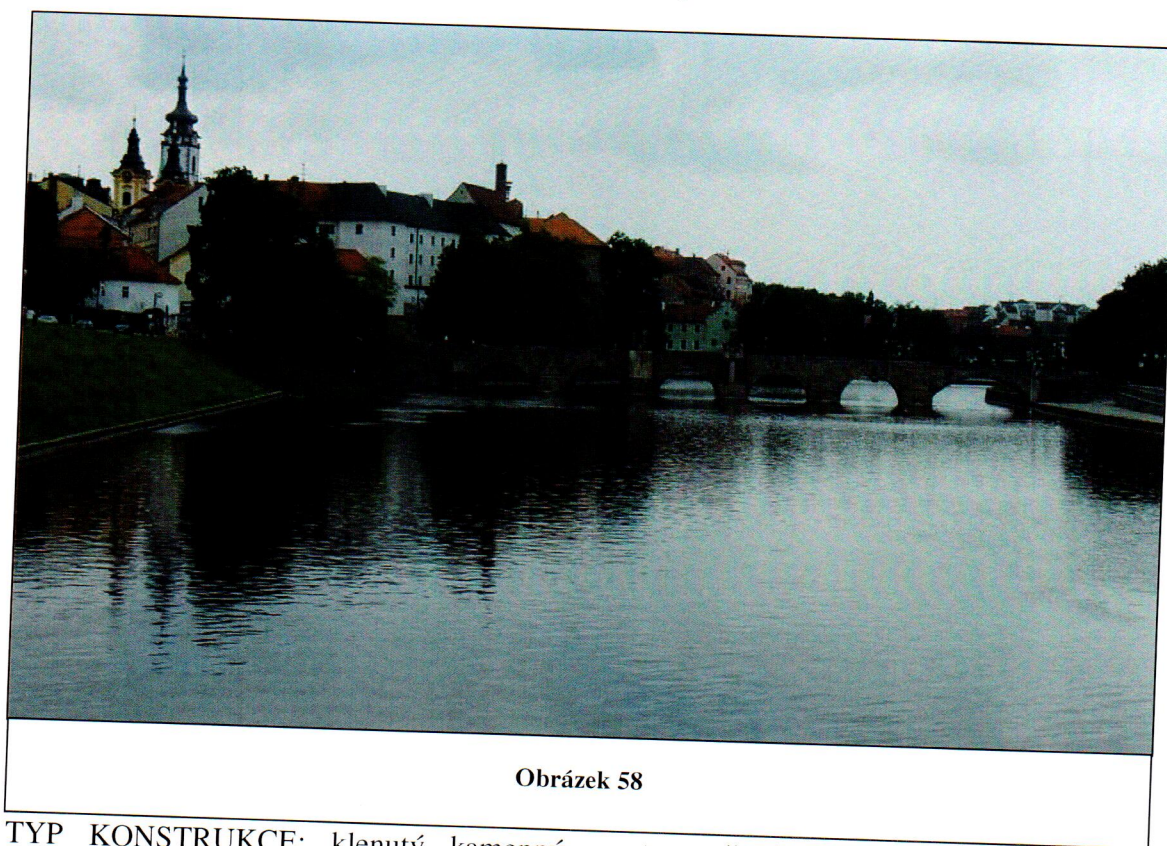
Obrázek 55

DOBA STAVBY: 1880

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: část Karlovické vodní nádrže

- PÍSEK

Přes Otavu, na komunikaci z historického jádra Písku, se klene náš nejstarší zachovaný raně gotický kamenný most. Bývala to významná dopravní stavba na tzv. Zlaté stezce, důležité obchodní cestě v Čechách, vedoucí z Bavorska, z Passau přes Volary, Prachatice, Protivín a Písek do Prahy. Na stavbě mostu se zřejmě podílelo královské město a král Přemysl Otakar II. Je domněnka, že most stavělo „Mostní bratrstvo“, jehož členové stavěli most v Avignonu a ve 14.století v Roudnici. Mostní pilíře jsou ze žulových kvádrů a jsou založeny v hloubce 1,8 m pode dnem řečiště, jako tomu bylo u Karlova mostu v Praze. Písecký most míval dvě mostecké věže. První, na Pražském předměstí, se zřítla při povodni v r. 1768 i s hlásným a druhá byla stržena v zájmu volné dopravy. Most je dlouhý 100 m a má šest půlkruhových oblouků (obrázek 58).

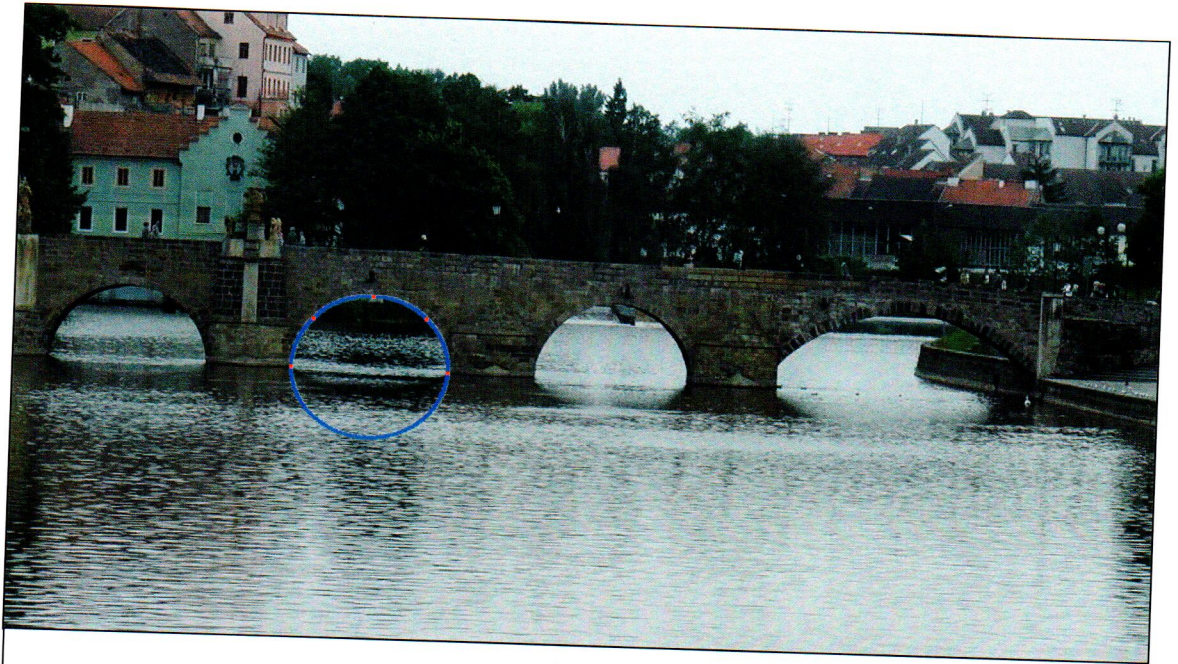


Obrázek 58

TYP KONSTRUKCE: klenutý kamenný most se šesti polokruhovými a jedním segmentovým obloukem (obrázek 59)

DÉLKA: 111m

STAVEBNÍ MATERIÁL: žulové kvádry

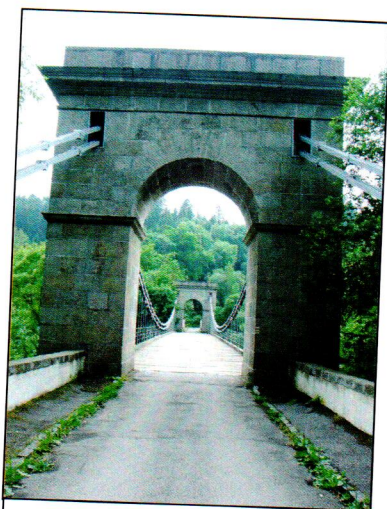


Obrázek 59

DOBA STAVBY: 70. léta 13. století

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Otava

- **PODOLSKO**



Obrázek 60

Zcela osobité místo mezi našimi železobetonovými mosty zaujímá most podolský. Nahradil řetězový most postavený v roce 1841, který byl rozebrán a přenesen na Lužnici ke Stádleci, kde slouží dodnes (obrázek 60). Oba mosty vedle sebe v Podolsku stály 18 let. Podolský most patří k našim největším železobetonovým mostním konstrukcím. Jeho hlavní oblouk měl být původně polokruhový, ale ze statických důvodů musel být nahrazen dvěma úseky paraboly třetího stupně. Hlavní oblouk má rozpětí 150 a výšku 58 metrů. Most byl vyznamenán zlatou medailí na mezinárodním kongresu a dostalo se mu názvu „Le beau



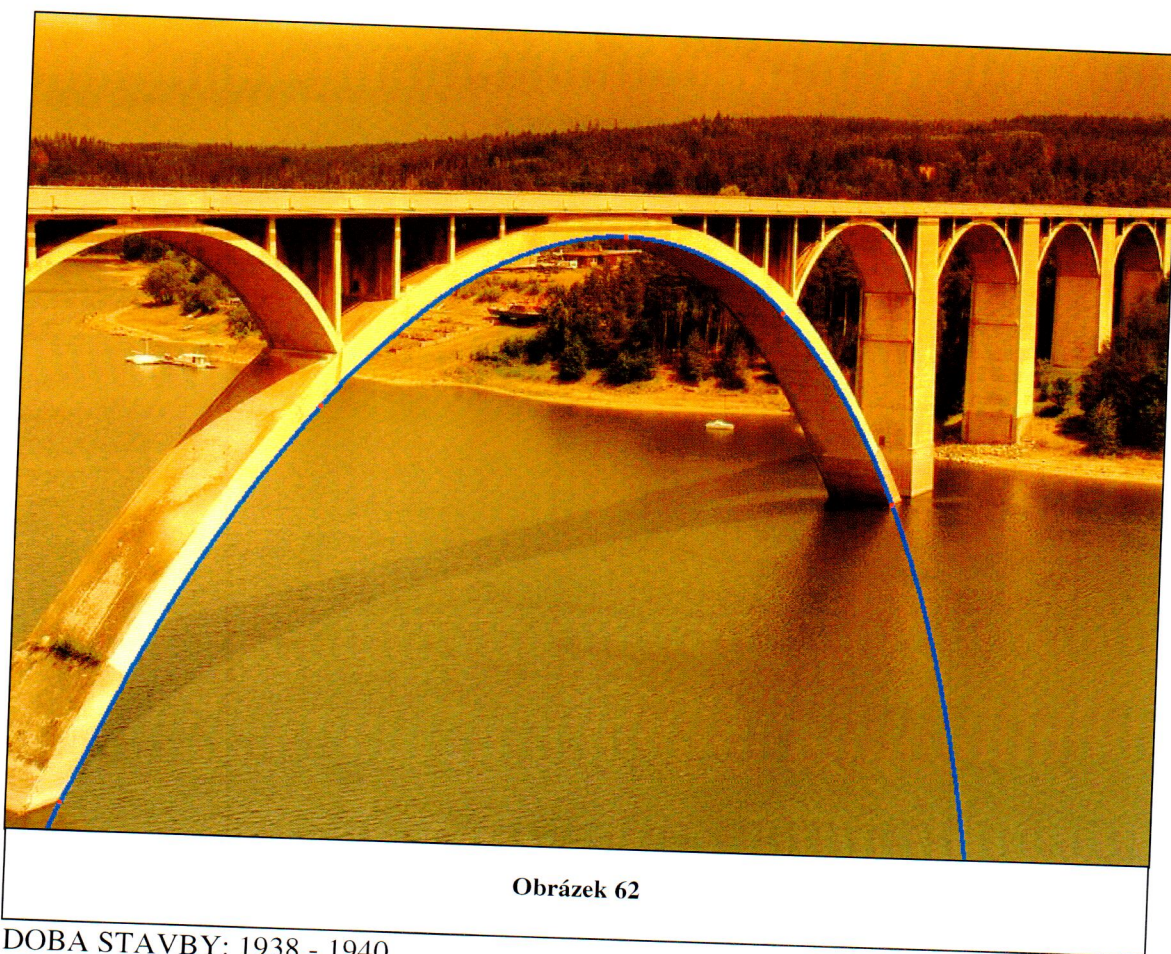
Obrázek 61

pont de l'Europe" – „Krásný most Evropy" (obrázek 61).

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s hlavním polem dlouhým 150 metrů (obrázek 62)

DÉLKA: 510 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: železobeton



DOBA STAVBY: 1938 - 1940

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: orlická přehradní nádrž

- PRAHA – KARLŮV MOST



Obrázek 63

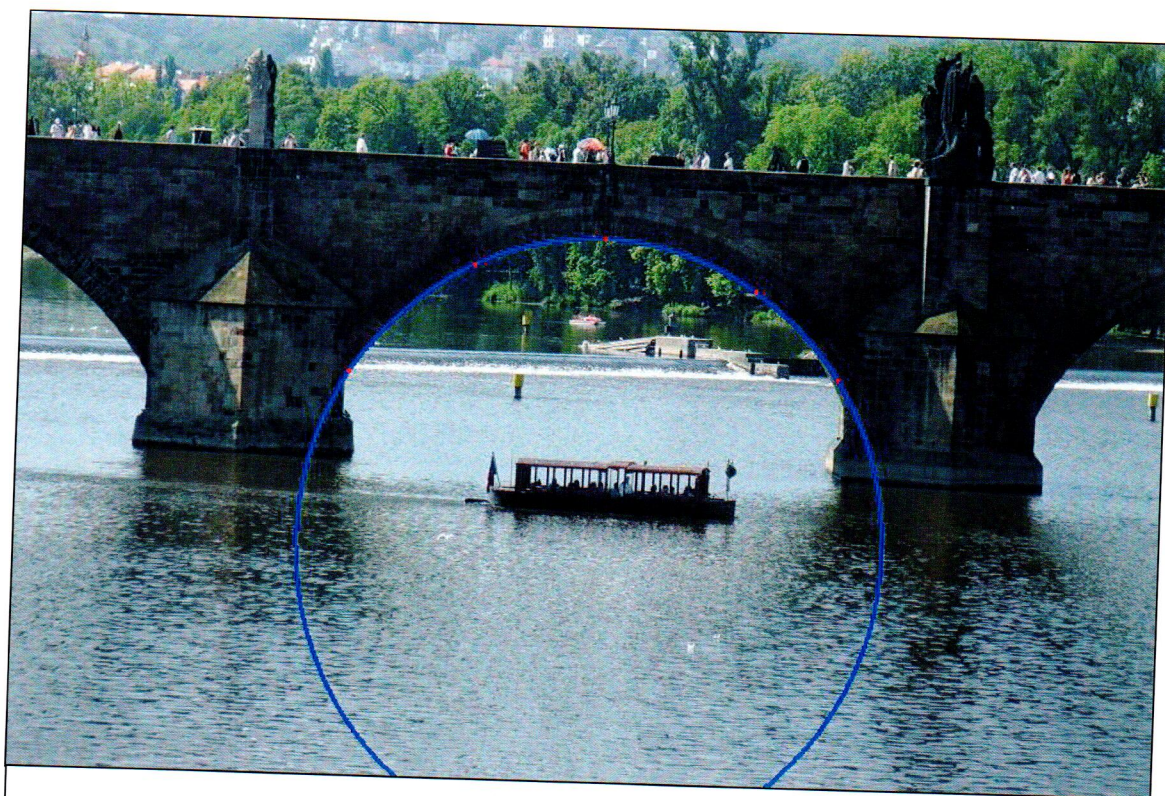
Karlův most (obrázek 63) stojí na místě bývalého Juditina mostu (postaven v letech 1169 – 1174), který se zřítíl po povodni v roce 1342. Základní kámen mostu položil sám Karel IV. A to v roce 1357, 9. 7. v 5:31 podle rady astrologů byla pro určení doby použita číselná řada 135797531. Most projektoval a jeho stavbu 40 let vedl Petr Parléř, byl však dokončen až tři roky po jeho smrti v roce 1402. Na mostě se vybíralo mýtné do roku 1783, později byl jediným pražským mostem, jehož přejezd byl zdarma. Most ohrozilo mnoho povodní, řada jich také most značně poškodila. V roce 1496 se zřítílo 5 pilířů, v roce 1890 2 pilíře a 3 klenby. Poslední rozsáhlá rekonstrukce mostu proběhla v letech 1969 – 1974. Staré a vlhké kvádry byly vyměněny za nové a rub kleneb byl zaizolován asfaltem.

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s šestnácti půlkruhovými klenbami (obrázek 64)
DÉLKA: 515 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: žula, opuka, pískovec

DOBA STAVBY: 1357 - 1402

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: severní část břehu na Kampě, Vltava, Čertovka



Obrázek 64

- PRAHA – LÁVKA PRO PĚŠÍ V CHODOVĚ



Obrázek 65

Lávka pro pěší nad nulým kilometrem dálnice D1 symbolicky vytváří vstup do Prahy. Nosná konstrukce se skládá ze dvou skloněných parabolických oblouků se zavěšenou mostovkou. Lávka získala titul „Mostní dílo roku 1995“ (obrázek 65).

TYP KONSTRUKCE: most se skloněnými parabolickými oblouky a zavěšenou mostovkou

DÉLKA: 58,4 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: ocel

DOBA STAVBY: 1995

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: dálnice D1

- SYCHROV

Sychrovský viadukt (obrázek 68) je součástí tratě z Pardubic do Liberce, nachází se asi 6



Obrázek 7

km od Turnova. Jeho oblouky jsou vystavěny ve dvou řadách nad sebou a klenby mají polokruhový tvar.

TYP KONSTRUKCE: most se dvěma patry polokruhových oblouků (obrázek 69)

DÉLKA: 120 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen



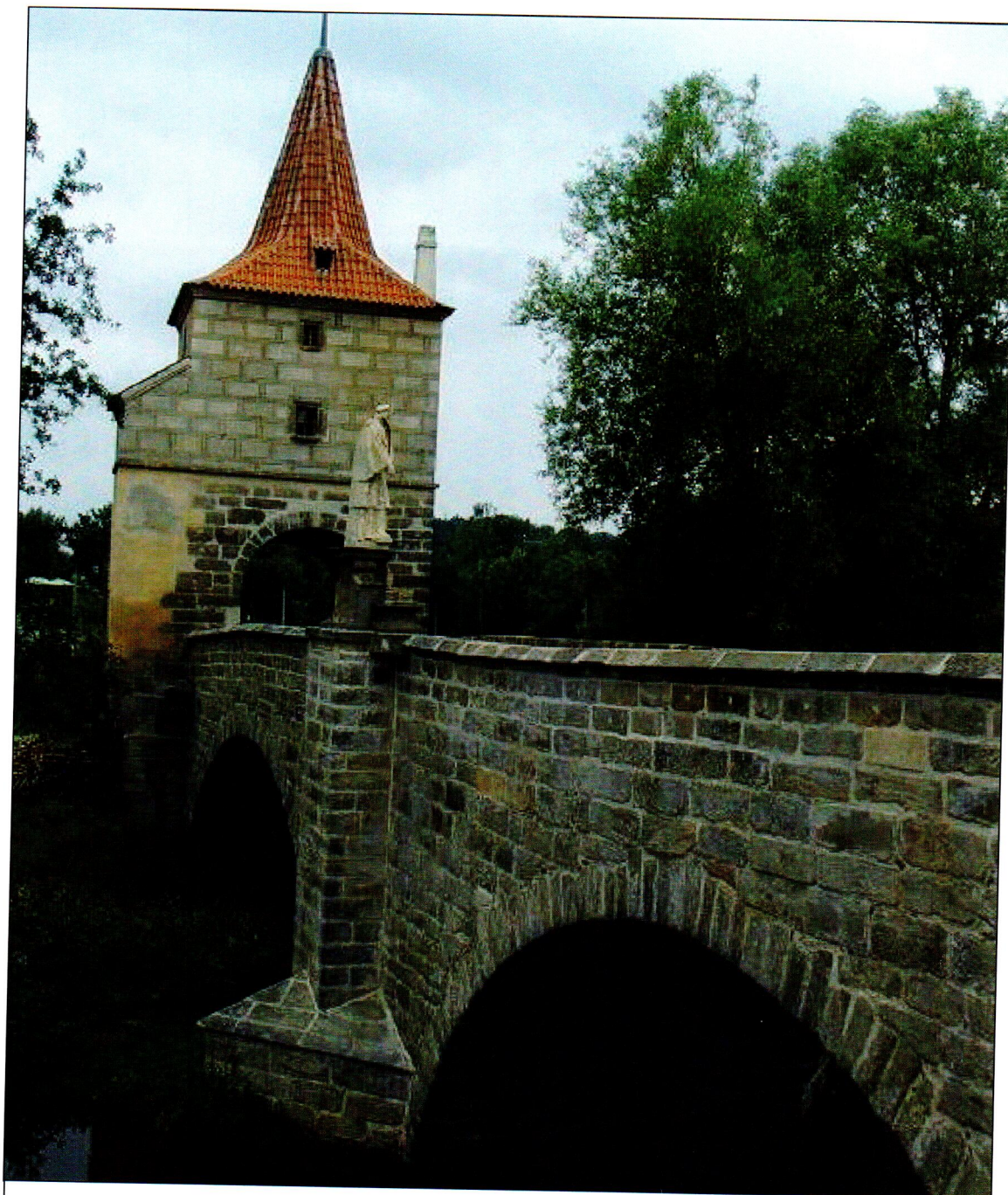
Obrázek 8

DOBA STAVBY: 1857 - 1859

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: údolí Mohelky

- STŘÍBRO

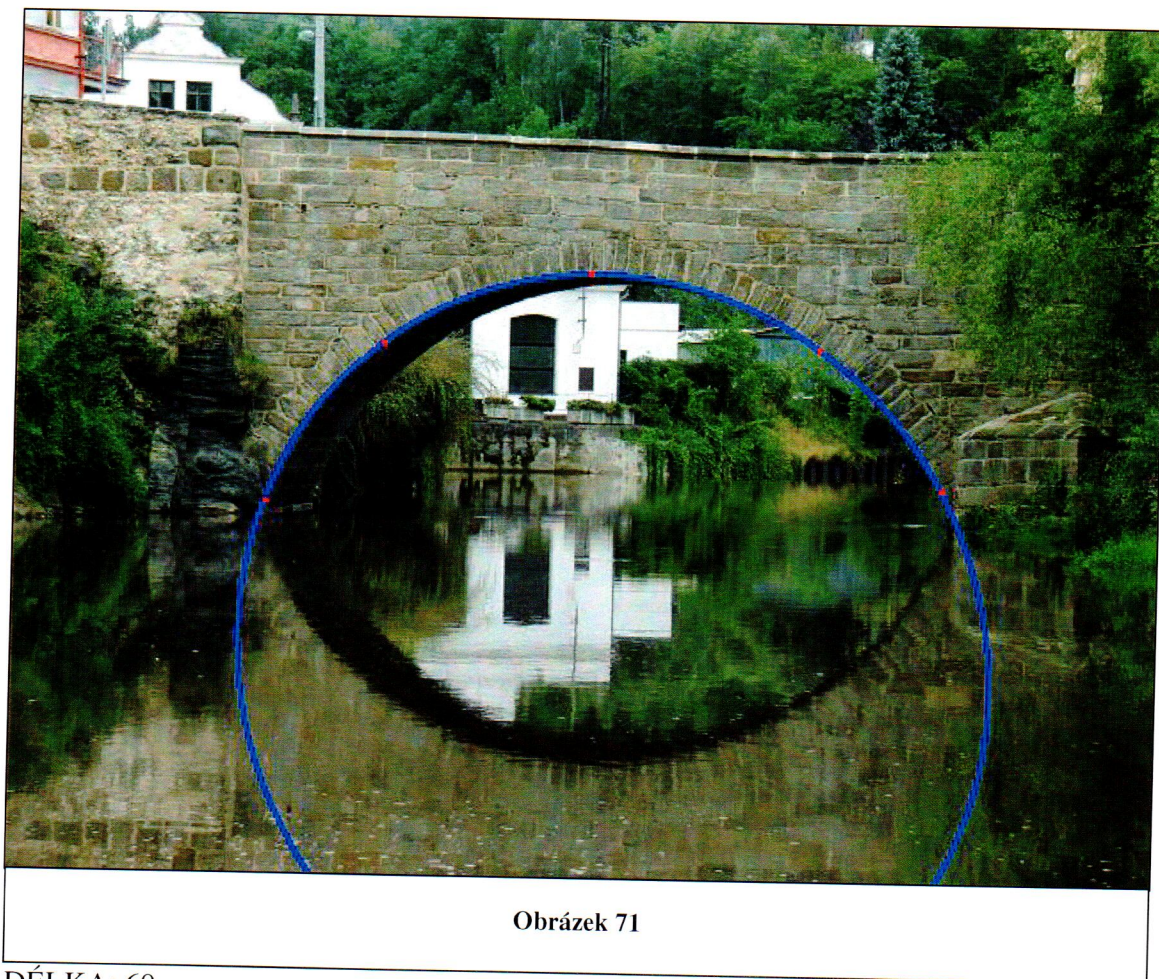
V letech 1555 – 1560 byl přes řeku Mži v západočeském horním městě Stříbře postaven



Obrázek 70

několika obloukový kamenný most o délce 60 m (obrázek 70). Šlo zřejmě o důležitou pevnostní stavbu. Takzvaná Koubkova věž rozděluje most na dvě části. Most i věž postavil Benedikt Volch ze španělského El Ferrolu. Tento stavitel podle záznamů obdržel od města odměnu 550 tolarů a deset čtvrtí bílého piva. Celá mostní věž se zachovala v původním stavu. Byla, stejně jako most, postavena z pískovcových kvádrů, těžných v blízkých lomech. Most je cennou ukázkou pozdně gotického stavitelství.

TYP KONSTRUKCE: obloukový most s půlkruhovými klenbami (obrázek 71)



Obrázek 71

DÉLKA: 60 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: pískovec, cihly

DOBA STAVBY: 1555 - 1560

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: řeka Mže

- VALDŠTEJN

Dva hradní mosty se nacházejí u zřícenin gotického hradu Valdštejn nedaleko Jičína a Turnova. Části hradu byly vytesány ve skále stejně jako části prvního, delšího hradního mostu dlouhého 40 metrů (obrázek 72), který probíhá po dvou sloupových pilířích a



Obrázek 72

jednom skalním. Druhý most je podstatně kratší. Tyto mosty jsou příkladem harmonického spojení přírodního terénu a technického díla.

TYP KONSTRUKCE: obloukové mosty s půlkruhovými klenbami (obrázek 73)

DÉLKA: 40 m a 6 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: kámen

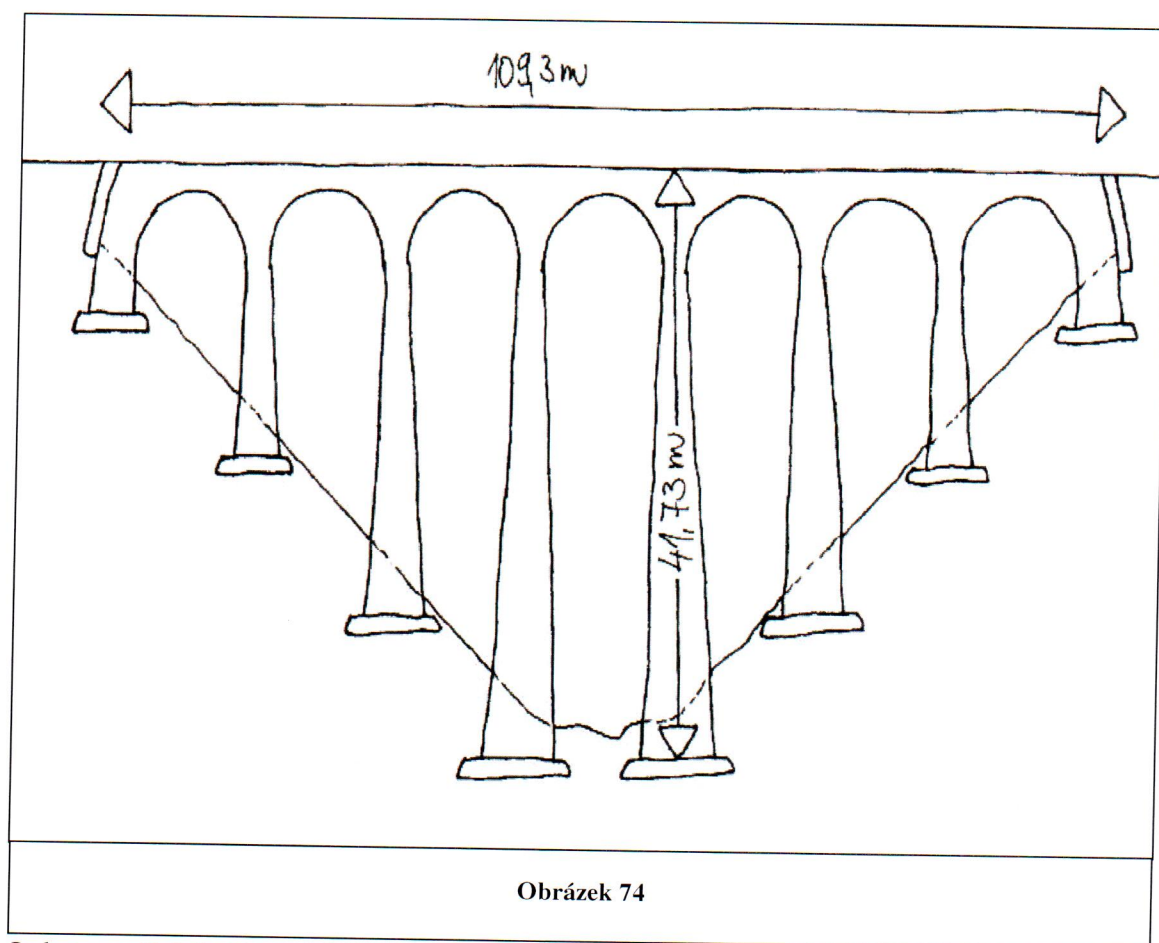


Obrázek 73

DOBA STAVBY: před rokem 1704

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: terénní nerovnost

- ŽAMPACH



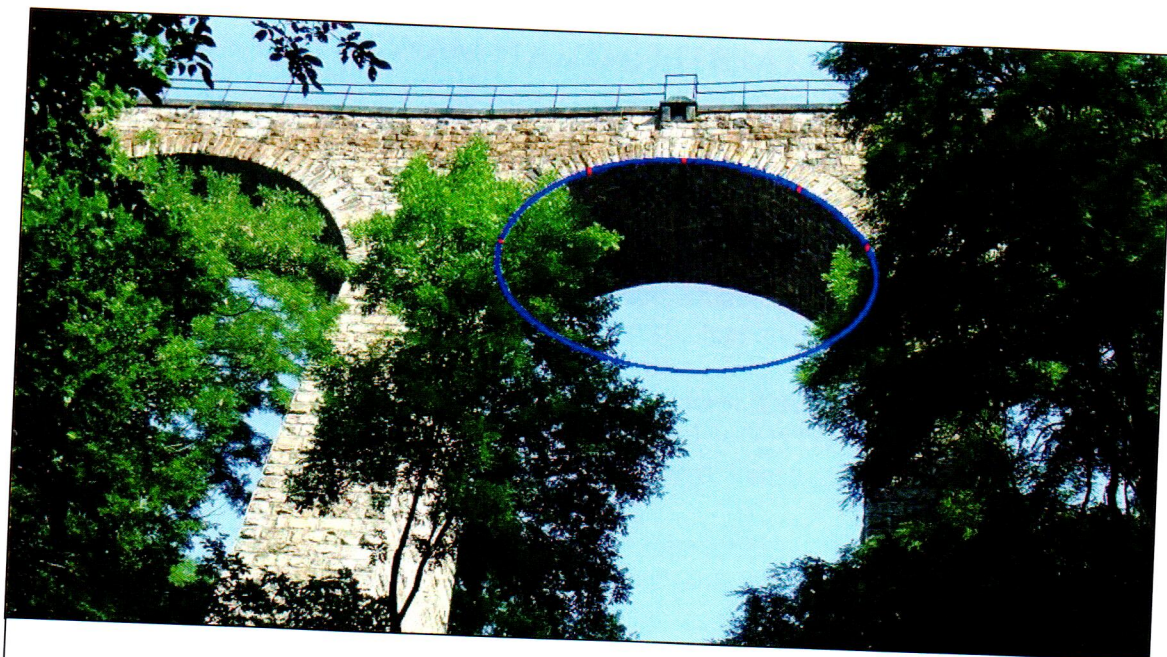
Jeden z našich kamenných železničních mostů se nachází podél Sázavy přes Studený potok nad strží Kocour. Viadukt je dlouhý 110 metrů, má sedm oblouků o rozpětí 12,5 metru a je vysoký 41,5 metrů. Pro srovnání - Nuselský most je vysoký 42,5 metrů. Nákres mostu je na obrázku 74. Svými rozměry se řadí k monumentálním železničním viaduktům, je nejvyšším mostem postaveným na železnici v Čechách. Most má podélnou osu tvořenou obloukem o poloměru 180 metrů. Byl stavěn italskými odborníky, do provozu uveden 1. května 1900 a dodnes nenese známky žádného poškození (obrázek 76).

TYP KONSTRUKCE: obloukový most se sedmi půlkruhovými klenbami (obrázek 75)

DÉLKA: 109,33 m

STAVEBNÍ MATERIÁL: žula (gabro od Pecerad)

DOBA STAVBY: 1898 - 1899



Obrázek 75

PŘEKONÁVANÁ PŘEKÁŽKA: strž Kocour, Studený potok



Obrázek 76

PARDUBICE – ZÁMECKÝ ZDOBENÝ MOST	76
PÍSEK	78
PODOLSKO	80
PRAHA – KARLŮV MOST	82
PRAHA – LÁVKA PRO PĚŠÍ V CHODOVĚ	84
PRAHA – NEGRELLIHO VIADUKT	85
SYCHROV	87
STRÍBRO	89
VALDŠTEJN	91
ŽAMPACH	93
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	95
SEZNAM POUŽITÝCH OBRÁZKŮ	96