Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

ZLATÝ ŘEZ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Mgr. Kateřina ŠTIKOVÁ

České Budějovice, duben 2007

Poděkování

Děkuji RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc, poskytnutí potřebných materiálů a cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích …………………. 2007   …………………………

Anotace

Název: Zlatý řez
Vypracovala: Mgr. Kateřina Štiková
Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Planimetrie, zlatý řez, historie matematiky.

Práce obsahuje postupy konstrukcí zlatého řezu, výpočet zlatého čísla a jeho vlastnosti. Ukazuje souvislost zlatého řezu s Fibonacciho posloupností, fraktály a příklady výskytu zlatého řezu jak v planimetrii, tak v umění a přírodě.

Title: The Golden section
Autor: Mgr. Kateřina Štiková
Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Key words: Planimetry, golden section, history of mathematics.

The work includes the procedur sof golden section, the calculation of golden numer and its charakteristice. It show the connection of Fibonacci progression with golden section, fractals and examples of occirence of golden section in planimetry and the art and nature.

<u>Obsah</u>

1. Úvod

Zlatý řez, přesněji řečeno poměr zlatého řezu, patří mezi klasické pojmy matematiky a je znám již od starověku. Od J. Keplera pochází následující citát:

„Geometrie má dva poklady. Pythagorovu větu a zlatý řez.
První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen“.

Je obtížné nalézt krásnou krajinu, rostlinu, zvíře či člověka, dobrý obraz, sochu, stavbu, na které bychom neodhalili užití zlatého řezu. Zlatý řez je od starověku ať už náhodně nebo cíleně zvoleným prostředkem vyjádření krásy. Nacházíme jej jak v uspořádání obrovských souhvězdí ve vesmíru, tak i v nejmenších detailech krystalických struktur a složení chemických látek, v biologii, architektuře, výtvarném umění aj.

Proto má rozhodně smysl o zlatém řezu hovořit, i když ze školních osnov matematiky už dávno vymizel. Nejedná se přitom o nikterak složitý pojem; z matematického hlediska je teorie i konstrukce zlatého řezu přístupná i středoškolákům, včetně některých jeho aplikací (přírodopis, výtvarné umění apod.).

2. Historie

Zlatý řez má velmi dlouhou historii, která údajně začíná již ve starém Egyptě před téměř pěti tisíci lety při stavbě pyramid. Rhindův papyrus (asi 1788 – 1580 př.n.l.) říká: *„V pyramidách je utajen tajemný kvocient nazvaný seqt"*. Domněnka, že tento kvocient je právě zlaté číslo není doposud ani potvrzena, ani vyvrácena. Dokonce na Cheopsově pyramidě v Gíze byl objeven poměr blízký zlatému číslu.

První písemné zmínky o zlatém řezu pocházejí z antiky, z helénského Řecka od matematika Euklida (kol. 340 – 287 př. n. l.). Zlatý řez se v Základech objevuje na několika místech. Jeho první definice, týkající se obsahů, se nepřímo podává ve druhé knize. V Základech, Kniha II, Věta 11 je úloha:

> *„Rozděl danou přímku tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající."*

Jak později ukážu, řešením této úlohy je právě rozdělení dané úsečky v poměru zlatého řezu. Se zlatým řezem se u Eukleida setkáváme i později, zlatý řez je zde zaveden pomocí poměrů. Základy, Kniha VI., Definice 3. :

> *„Pravíme, že přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka se má k menší jako celá k větší."*

Euklides se dále zabýval konstrukcí pravidelného pětiúhelníku (ve 4. knize Základů), který je opět štědrým zdrojem tohoto poměru a konstrukcí dvacetistěnu a dvanáctistěnu (ve 13. knize Základů).

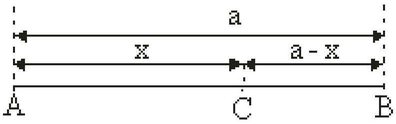
Po antickém období nastává dlouhá pomlka a se zlatým poměrem se setkáváme až v období renesance (15. století). V této době byli matematici tak okouzleni tímto poměrem, že byl nazýván „božským poměrem" (divina proportio). V dějinách zlatého řezu představovala renesance výrazný přelom – celý koncept se přestal omezovat pouze na matematiku, zlatý řez začal přispívat k vysvětlování přírodních jevů a nacházet místo v umění. Jeden z renesančních matematiků Luca Paciolli vydal roku 1509 pojednání nazvané „O božském poměru" s ilustracemi Leoparda da Vinci. Toto pojednání bylo vydáno v krásné úpravě znovu roku 1956. Obsahuje nesmírně zajímavý soubor příkladů výskytu poměru φ v rovinných obrazcích i tělesech (např. v desetiúhelníku vepsaném do kružnice).

Označení „zlatý řez“, „zlatý poměr“ se užívají až od 19. století. V současné době ustoupila teorie zlatého čísla do pozadí. Jednou z mála osobností zabývající se touto problematikou ve 20. století byl francouz Matila Ghyka, který roku 1931 vydal v Paříži knihu „Le Nombre d'Or“ (v překladu „Zlaté číslo“), o něco později, roku 1946, pak vyšla ve Velké Británii jeho kniha „The geometry of Art and Life“ (v překladu „Geometrie umění a života“). V obou dílech se zabývá výskytem zlatého čísla v přírodě i v architektuře, jeho vlastnostmi a využitím od starověkého Egypta přes antiku až po současnost.

V dnešní době o přítomnosti zlatého čísla svědčí například „pyramida v Louvre“ (prosklená budova z 80. let 20. století sloužící jako vstupní brána do galerie) nebo budova La Géode v Paříži (největší panoramatické kino na světě). Tohoto poměru se využívá také ve fotografii, plastické chirurgii a v dalších odvětvích, kde je kladen důraz mimo jiné na estetiku.

3. Zlatý řez a jeho vlastnosti

Zlatý řez je rozdělení úsečky AB na dva díly tak, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k větší části. Bod C dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu (obr. 1).



Obr. 1

tedy platí : $$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$$

poměr *a/x* (tedy i poměr *x/(a-x)*) nazýváme zlatým poměrem a značíme řeckým písmenem φ.

Hodnota zlatého řezu

Hodnotu zlatého řezu můžeme zjistit snadno. Vycházíme z poměru zlatého řezu

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$$

po úpravě řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

celou rovnici vydělíme x^2 a dostáváme rovnici

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{x}\right) - 1 = 0 \qquad (1)$$

jejíž kladný kořen je

$$\frac{a}{x} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803$$

Číslo 1,61803 je pouze přibližné, $\sqrt{5}$ je totiž iracionální číslo a proto je i zlomek $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ iracionální číslo.

Zlatý řez můžeme vyjádřit dvěma způsoby : $\frac{a}{x} = 1{,}61803$

nebo : $\frac{x}{a} = \frac{1}{0{,}61803}$

V příloze 1. uvádím číslo φ na 2000 desetinných míst.

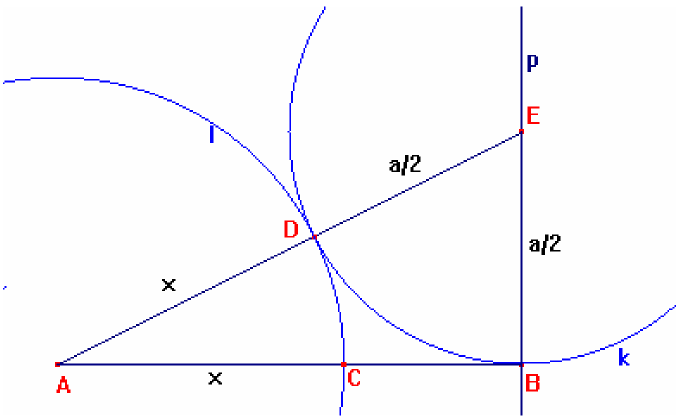
4. Konstrukce zlatého řezu

V této kapitole ukážu, jak jednoduše zlatý řez sestrojit. Uvedu zde čtyři konstrukce – v první známe úsečku *AB* a chceme najít bod *C*, který úsečku rozdělí v poměru zlatého řezu. U dalších dvou konstrukcí známe jen jeden z dílů úsečky *AB* a chceme najít celou úsečku. Poslední konstrukce ukáže, jak sestrojit zlatý řez úsečky bez rýsování, pouze pomocí skládání papíru.

Konstrukce 1

Dáno: Úsečka *AB* libovolné délky.
Úkol: Najít bod *C*, který dělí úsečku *AB* zlatým řezem.

Jde vlastně o geometrické řešení rovnice (1), v níž *a* je délka dané úsečky.



Obr. 2

1. $p; p \perp AB, B \in p$
2. $E; E \in p, |EB| = \frac{1}{2}|AB|$
3. $k; k(E, |EB|)$
4. $D; D \in k \cap AE$
5. $l; l(A, |AD|)$
6. $C; C \in l \cap AB$

Bod *C* dělí úsečku *AB* v poměru zlatého řezu. Tato konstrukce pochází od Heróna (1.st.př.n.l.) a lze ji odvodit z vyjádření zlatého poměru a Pythagorovy věty.

Důkaz:

V trojúhelníku *ABE* (obr. 2) označíme $|AB| = a, |AE| = y, |BE| = \frac{a}{2}, |AC| = |AD| = x$

Podle Pythagorovy věty potom platí:

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Z obr.2 je vidět, že $|AD| = |AC|$ a $|DE| = |BE|$, po dosazení dostaneme tuto rovnici:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 .$$

Odtud úpravou

$$a^2 - ax - x^2 = 0 ,$$

po vydělení číslem $x \neq 0$ dostaneme následující rovnici:

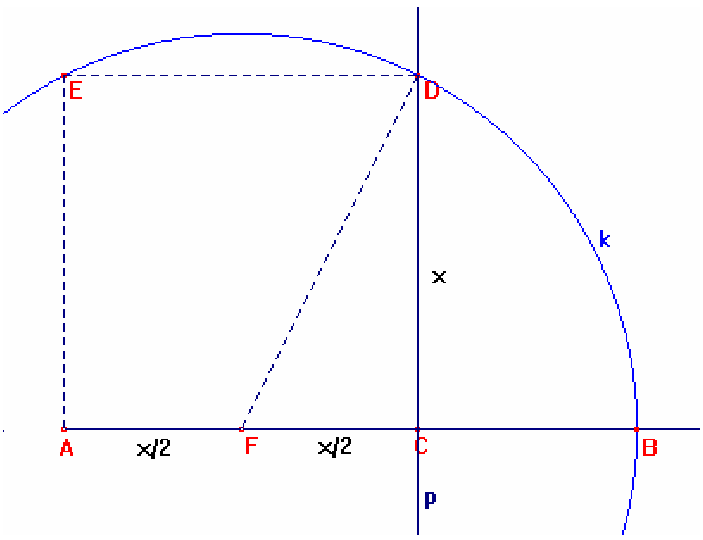
$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{x}\right) - 1 = 0 ,$$

což je rovnice (1) pro poměr zlatého řezu, s kořenem $\frac{a}{x} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Konstrukce 2

Dáno: Úsečka AC libovolné délky.

Úkol: Najít na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB zlatým řezem a přitom úsečka AC byla větší než BC.



1. $F; F \in \frac{1}{2}|AC|$
2. $p; p \perp AC, C \in p$
3. $D; D \in p, |CD| = |AC|$
4. $k; k(F, r = |FD|)$
5. $B; B \in k \cap AC$

Obr. 3

Důkaz:

Dělí-li bod C úsečku AB v poměru zlatého řezu, musí platit poměr $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \varphi$.

Zadanou úsečku AC označíme x. Z konstrukce (obr. 3) jsou zřejmé tyto rovnosti:

$$|AC| = |CD| = x$$

$$|AF| = |FC| = \frac{x}{2}$$

$$|FD| = |FB| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

Nyní ještě musíme pomocí již známých velikostí vyjádřit velikosti stran AB a CB:

$$|AB| = |AF| + |FB| = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

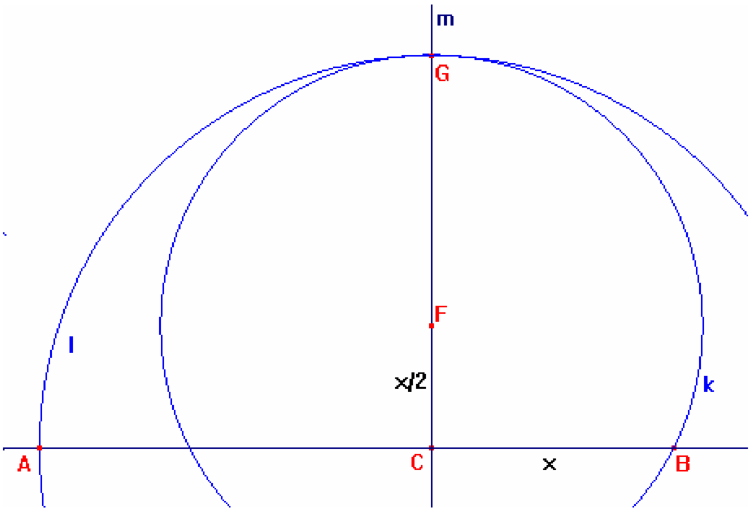
Teď už jen stačí zjistit hodnotu daných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{x\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}}{x} = \frac{x\left(\sqrt{5}+1\right)}{2x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

Konstrukce 3

Dáno: Úsečka *BC* libovolné délky.

Úkol: Najít na polopřímce *BC* bod *A* tak, aby bod *C* dělil úsečku *AB* zlatým řezem a přitom úsečka *AC* byla větší než *BC*.



1. $m;\ m \perp BC, C \in m$
2. $F;\ F \in m, |FC| = \frac{1}{2}|FB|$
3. $k;\ k(F, r = |FB|)$
4. $G;\ G \in k \cap CF$
5. $l;\ l(C, r = |CG|)$
6. $A;\ A \in l \cap BC$

Obr. 4

Důkaz:

Dělí-li bod *C* úsečku *AB* v poměru zlatého řezu, musí platit poměr $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \varphi$.

Zadanou úsečku *CB* označíme *x*. Z konstrukce (obr. 4) jsou zřejmé tyto rovnosti:

$$|FC| = \frac{x}{2}$$

$$|FB| = |FG| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$|CG| = |AC| = |CF| + |FG| = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

Nyní ještě musíme pomocí již známých velikostí vyjádřit velikost strany *AB*:

$$|AB| = |AC| + |BC| = \frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} + x = \frac{x\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}$$

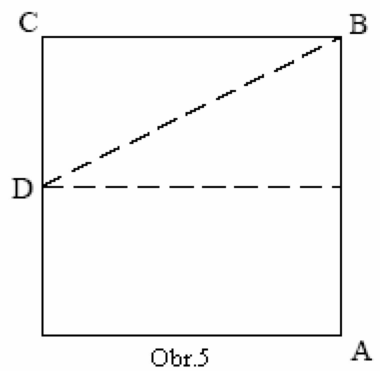
Teď už jen stačí zjistit hodnotu daných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{\frac{x\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}}{\frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{2x\left(3+\sqrt{5}\right)}{2x\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)}=\frac{3-2\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$$

Konstrukce 4 – konstrukce „přehýbáním papíru“

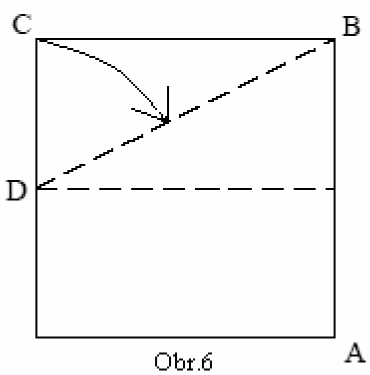
Poslední postup, jak rozdělit úsečku zlatým řezem je zajímavý tím, že k němu nepotřebujeme nic víc než kus papíru, ze kterého si na začátku vystřihneme čtverec. Za délku strany čtverce volíme velikost úsečky, kterou chceme zlatým řezem rozdělit.

Mějme tedy čtverec se stranou *AB*. Přeložíme jej napůl (vznikne obdélník) a opět rozevřeme. Střed strany protější ke straně *AB* si označíme *D*, druhý krajní bod úhlopříčky z bodu *A* si označíme *C*. Dále přehneme papír podle vyznačené přerušované čáry *BD* a opět rozložíme (obr. 5).

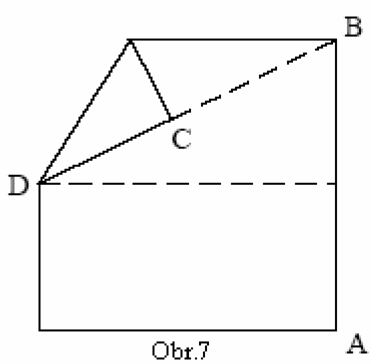


Obr.5

Teď vezmeme vrchol *C* a přiložíme jej na přehyb *BD*, tak aby úsečka *CD* byla částí úsečky *BD* a poloha bodu *D* se nezměnila (obr. 6 a 7).

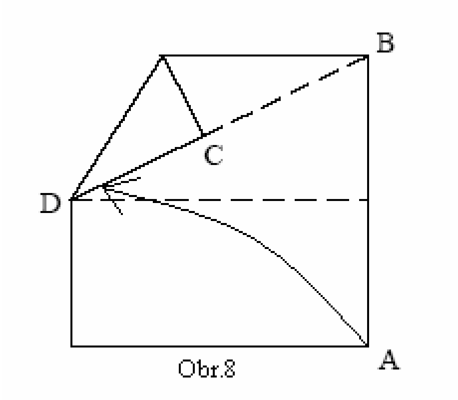


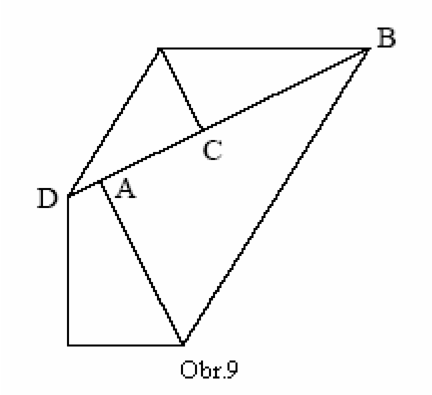
Obr.6



Obr.7

Nyní přiložíme vrchol *A* opět na přehyb *BD*. Úsečka *AB* splývá s částí úsečky *BD*, poloha bodu *B* se nezměnila (obr. 8, 9).





Skládanka je hotová – bod C dělí úsečku AB ve zlatém řezu tak, že úsečka BC je větším dílem úsečky AB. Tuto konstrukci uvedla Chmelíková V. ve své bakalářské práci [9].

Důkaz:

Chceme dokázat, že $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \varphi$ (z obr.9).

Označme základní stranu čtverce (obr. 5) a, potom $|AB| = |BC| = a, |CD| = \frac{a}{2}$. Pomocí Pythagorovy věty určíme délku strany BD (obr. 5):

$$|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Ještě musíme zjistit délky úseček AC a BC (obr. 9):

$$|BC| = |BD| - |CD| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2},\ |AC| = |AB| - |BC| = a - \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$$

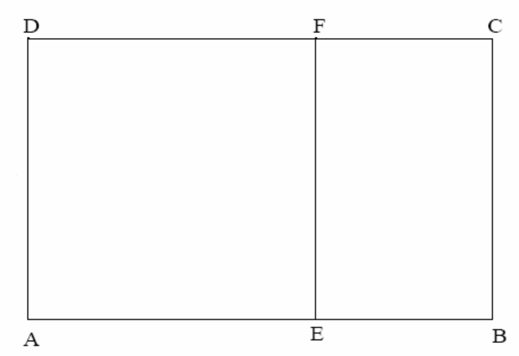
Nyní zjistíme, zda je po zpřehýbání papíru splněn poměr zlatého řezu (obr. 9).

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2a}{a(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

5. Zlatý řez a rovinné útvary

5.1. Zlatý obdélník

Zlatý obdélník je takový obdélník, jehož delší strana *a* ku kratší straně *b* jsou v poměru zlatého řezu (obr. 10).

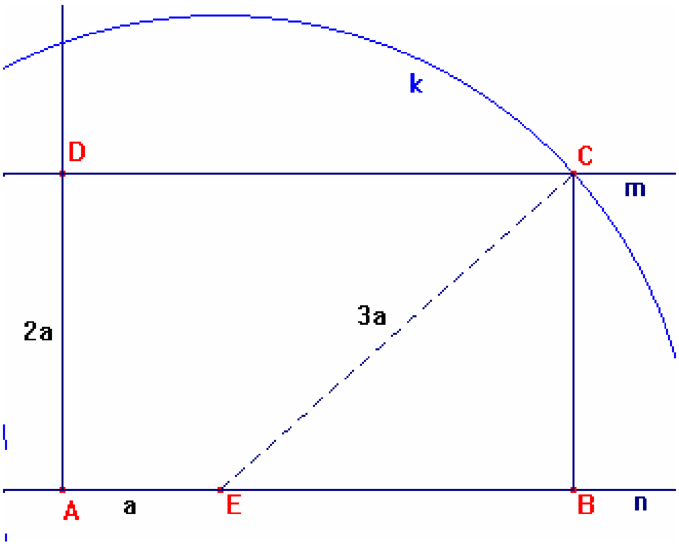


Obr. 10

Konstrukce zlatého obdélníka

Dáno: úsečka *AD* (je vhodné zvolit velikost 2 jednotky délky)

Úkol: sestrojit zlatý obdélník



Obr. 11

1. $m;\ m \perp AD, D \in m$
2. $n;\ n \perp AD, A \in n$
3. $E;\ E \in n, |AE| = \frac{1}{2}|AD|$
4. $k;\ k(E, r = 3|AE|)$
5. $C;\ C \in k \cap m$
6. $B;\ B \in n, |AB| = |CD|$
7. obdélník *ABCD*

Důkaz:

Aby byl sestrojený obdélník zlatý (obr. 11), musí platit poměr $\frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$.

Pokud vezmeme za délku úsečky *AE* libovolné *a*, pak z konstrukce víme, že $|EC| = 3a$, $|BC| = 2a$. Z trojúhelníka *EBC* pomocí Pythagorovy věty zjistíme velikost úsečky *EB*.

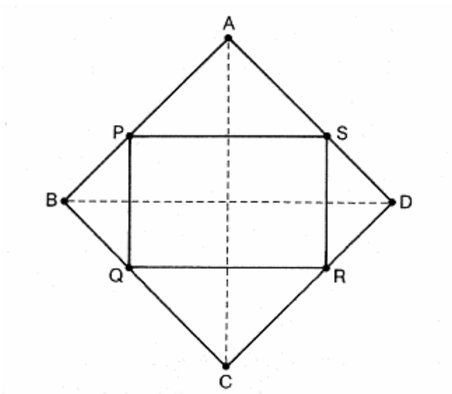
$|EB| = \sqrt{|EC|^2 - |BC|^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Strana obdélníku *AB* poté měří $(a + a\sqrt{5})$.

Poté poměr $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Vlastnosti zlatého obdélníka

1. Vepíšeme-li zlatý obdélník do čtverce, vrcholy obdélníku pak dělí strany čtverce zlatým řezem (obr. 12).



Obr. 12

Důkaz:

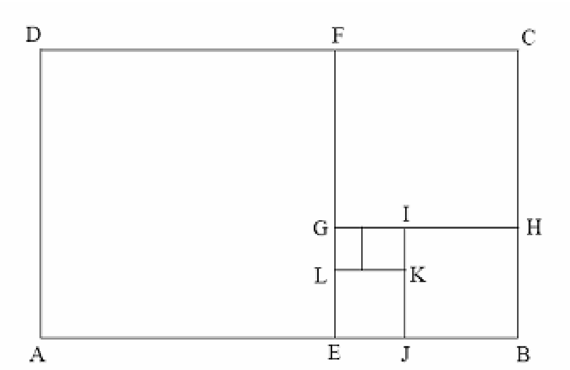
Označme $|PS| = |QR| = a$, $|PQ| = |RS| = b$, $|AP| = |AS| = |CQ| = |CR| = c$, $|BP| = |BQ| = |DS| = |DR| = d$.

Obdélník *PQRS* je zlatý, platí $\frac{a}{b} = \varphi$, chceme dokázat, že $\frac{c}{d} = \varphi$.

Pro trojúhelník *APS* platí: $c^2 + c^2 = a^2$, a odtud $c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Stejně pro trojúhelník *SRD* platí: $d^2 + d^2 = b^2$, a odtud $d = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Tedy $\frac{c}{d} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{b} = \varphi$

2. Oddělíme-li od zlatého obdélníku *ABCD* čtverec *AEFD*, je zbylý obdélník *BCFE* opět zlatý. V oddělování čtverců můžeme stejným způsobem pokračovat a tím získáme další zlaté obdélníky. Rozměry původního obdélníku oproti nově vzniklému jsou násobkem φ (obr. 13).



Obr. 13

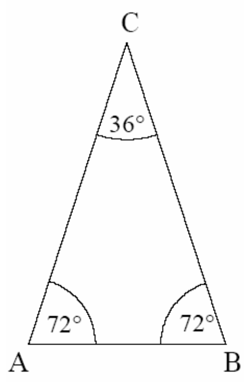
Důkaz:

Označíme strany původního zlatého obdélníka $|AB| = a$, $|BC| = b$. Nově vzniklý obdélník má tedy délky stran *b*, *a*-*b*, jak je vidět z obrázku 13.

Víme, že platí poměr $\frac{a}{b} = \varphi$ (původní obdélník je zlatý), a potřebujeme dokázat, že také $\frac{b}{a-b} = \varphi$. Pokud tedy platí $\frac{a}{b} = \varphi$, musí bod *E* dělit úsečku *AB* v poměru zlatého řezu, protože $|AE| = b$ (od původního obdélníku *ABCD* jsme oddělili čtverec *AEFD* o straně *b*). To ale znamená, že $\frac{|AE|}{|BE|} = \varphi = \frac{b}{a-b}$.

5.2. Zlatý trojúhelník

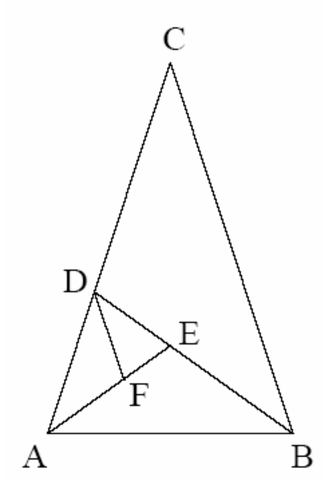
Zlatý trojúhelník je rovnoramenný trojúhelník, v němž poměr délek základny a ramene je roven φ. V takovém trojúhelníku jsou úhly při základně rovny 72° a úhel při vrcholu 36°.



Obr. 14

Pro takovýto trojúhelník opět platí některé zajímavé vlastnosti (obr. 15):

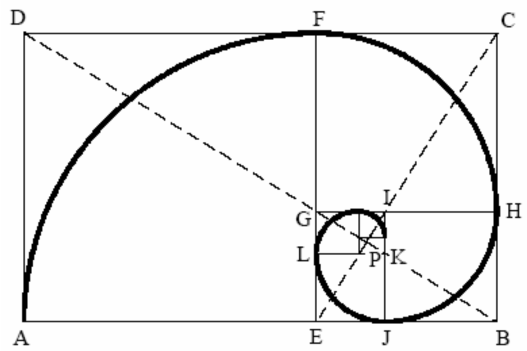
- vepíšeme-li do zlatého trojúhelníku další rovnoramenný trojúhelník s ramenem *AB*, bude nový trojúhelník opět zlatý. Tento postup můžeme jako u zlatého obdélníka libovolněkrát opakovat.
- druhý trojúhelník, který vznikl – trojúhelník *BCD*, kde poměr strany k základně je $\frac{1}{\varphi}$ se označuje jako zlatý gnómon.



Obr. 15

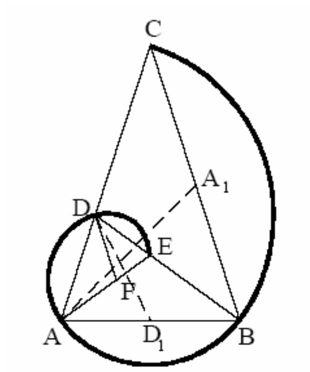
5.3. Zlatá spirála

Zlatou neboli logaritmickou spirálu získáme např. ze zlatého obdélníka (obr. 16) a jedné jeho vlastnosti - oddělíme-li od zlatého obdélníku *ABCD* čtverec *AEFD,* je zbylý obdélník *BCFE* opět zlatý. V oddělování čtverců můžeme stejným způsobem pokračovat a tím získáme další zlaté obdélníky. Po sobě následující body určují křivku, která se zavírá směrem k pólu (bod *P*, kde se protínají úhlopříčky zlatých obdélníků – viz. obrázek 16).



Obr. 16

Stejně můžeme pro zobrazení zlaté spirály použít zlatý trojúhelník (obr. 17). Zde logaritmickou spirálu získáme spojením vrcholů jednotlivých zlatých trojúhelníků.



Obr. 17

Logaritmická spirála má jednu zajímavou vlastnost: všechny polopřímky vycházející z pólu ji protnou pod stejným úhlem.

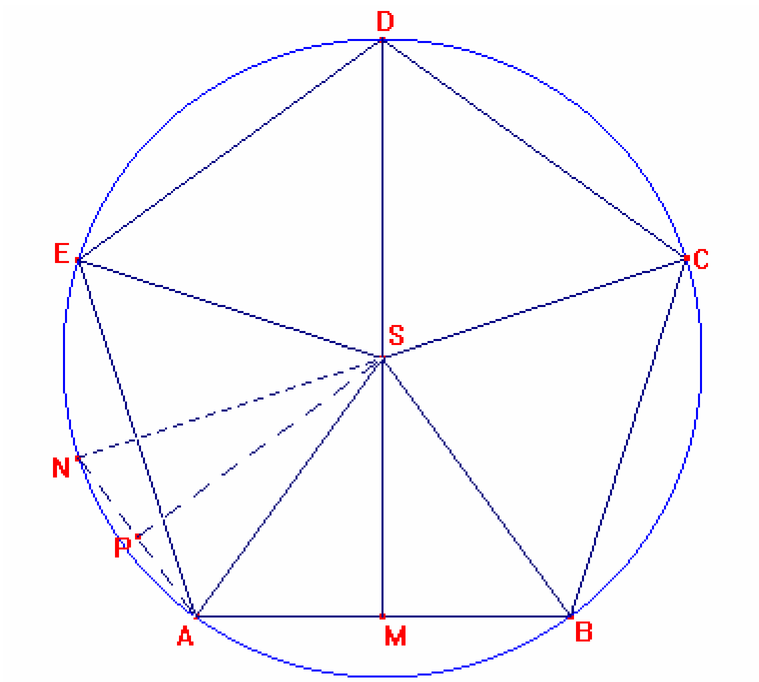
5.4. Pravidelný pětiúhelník

Eukleides používá ve čtvrté knize Základů zlatý řez ke konstrukci pravidelného pětiúhelníka.

Pythagorejci měli za znak pěticípou hvězdu, která je tvořena úhlopříčkami pravidelného pětiúhelníku. Každá úsečka pěticípé hvězdy vzhledem k sousední menší je rozdělena v poměru zlatého řezu. Pravidelný pětiúhelník také tvoří stěny dvanáctistěnu, který pythagorejci považovali za hodný neobyčejné úcty a pozornosti.

Délka strany pravidelného pětiúhelníka

Každý pravidelný pětiúhelník vepsaný kružnici $k(S,r)$ lze rozdělit na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků s úhlem velikosti 72° při vrcholu S a s úhly velikosti 54° při základně délky a_5. (K výpočtu délky strany pravidelného pětiúhelníka potřebujeme znát velikost stany pravidelného desetiúhelníka. Výpočet této velikosti uvádím v příloze.)



Obr. 18

Uvažujme jeden z těchto trojúhelníků *ABS*.

Osa úhlu *ASB* protne stranu *AB* v bodě *M* a rozdělí trojúhelník *ABS* na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky *AMS* a *BMS*.

V Δ *BMS* je $|MB| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}a_5$ a zároveň $|MB| = r \cdot \sin 36° = 2r \cdot \sin 18° \cdot \cos 18°$

(hodnoty sin18° a cos18° určíme z Δ ANS $\cong \Delta$ ENS. Osou úhlu NSA, která protíná stranu NA v bodě P, je Δ NAS rozdělen na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky NPS a APS. V Δ APS je $|PA| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}a_{10}$ *a zároveň* $|PA| = r \cdot \sin 18°$. *Odtud*

$a_{10} = 2r \cdot \sin 18°$. *Dále víme, že* $a_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ *a tak dostáváme sin18°* $= \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$ *a cos18°* $= \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1-\frac{1}{16}\left(6-2\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ *)*

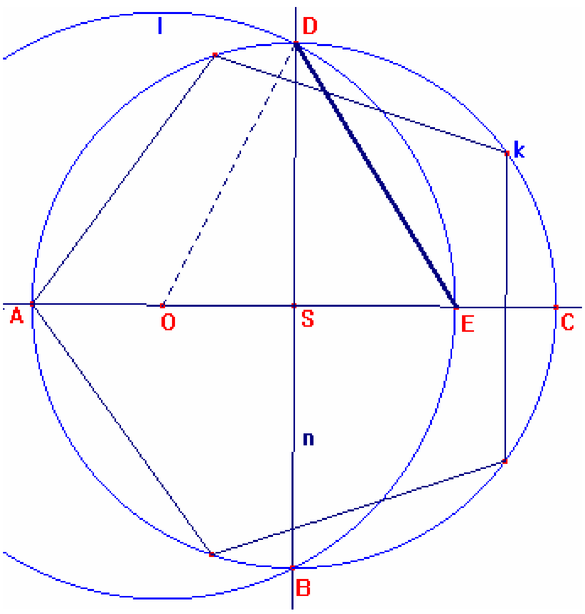
Je tedy $a_5 = 4r \cdot \sin 18° \cdot \cos 18° = \frac{r}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(10+2\sqrt{5}\right) = \frac{r}{4}\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2\left(10+2\sqrt{5}\right)} =$
$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Konstrukce pravidelného pětiúhelníka

Konstrukce 1

Dáno: libovolná kružnice

Úkol: do dané kružnice vepsat pravidelný pětiúhelník



Obr. 19

1. $AC;\ A \in k, C \in k, S \in AC$
2. $n;\ n \perp AC, S \in n$
3. $BD;\ B, D \in n \cap k$
4. $O;\ O \in AS, |AO| = |OS|$
5. $l;\ l(O, |OD|)$
6. $E;\ E \in l \cap AC$

Strana *ED* je strana pravidelného pětiúhelníka. Déle je poloměr kružnice *k* stejný jako délka strany pravidelného šestiúhelníku a velikost úsečky *SE* odpovídá velikosti strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného do stejné kružnice.

Důkaz:

Z konstrukce víme, že $|OS| = \frac{r}{2}$, proto

$$|OE| = |DE| = \sqrt{|DS|^2 + |OS|^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r\sqrt{5}}{2} \quad \text{a tedy}$$

$|ES| = |OE| - |SO| = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = a_{10}$ (viz Příloha 2),

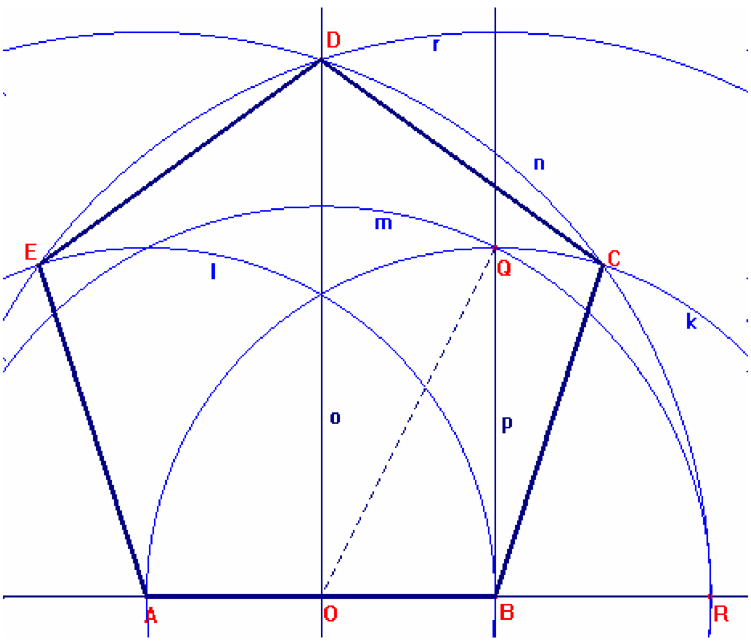
$$|ED| = \sqrt{|SE|^2 + |SD|^2} = \sqrt{\left(\frac{r\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{r^2\left(5-2\sqrt{5}+1\right)}{4} + r^2} = \sqrt{\frac{r^2}{4}\left(6-2\sqrt{5}+4\right)} =$$

$$= \frac{r}{2}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) = a_5 \quad \text{(viz výpočet délky strany pětiúhelníka)}$$

Konstrukce 2

Dáno: strana pětiúhelníka *AB*

Úkol: sestrojit pravidelný pětiúhelník

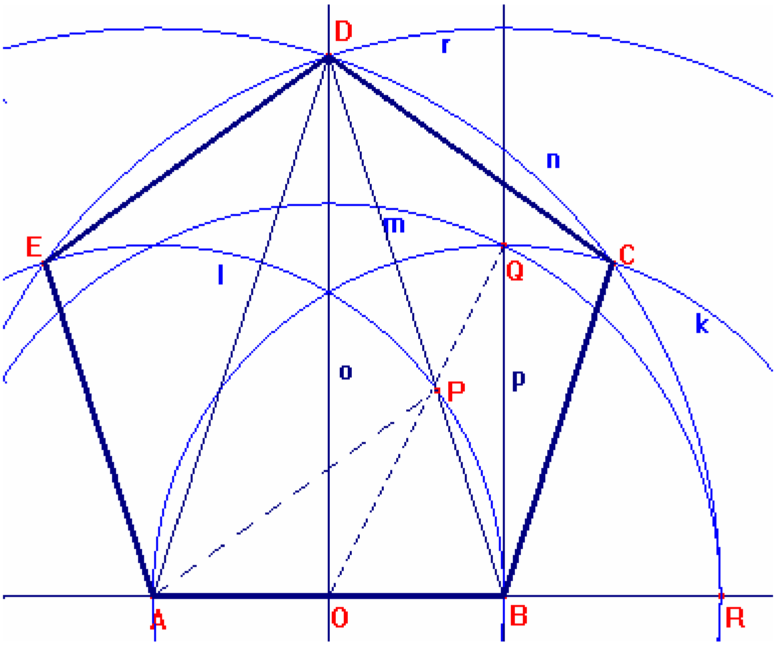


Obr.20

1. $O; |AO| = |OB|$
2. $o; o \perp AB; O \in o$
3. $p; p \,//\, o; B \in p$
4. $k; k(B, a)$
5. $l; l(A, a)$
6. $Q; Q \in k \cap p$
7. $m; m(O, |OQ|)$
8. $R; R \in m \cap OB$
9. $n; n(A, |AR|)$
10. $C; C \in k \cap n$
11. $D; D \in o \cap n$
12. $r; r(B, |AR|)$
13. $E; E \in l \cap r$

Velikost úsečky *AR* se rovná velikosti úhlopříčky v hledaném pravidelném pětiúhelníku, *AB* je strana pětiúhelníka.

Důkaz:



Obr. 21

Je-li *ABCDE* hledaný pravidelný pětiúhelník (obr. 21), je trojúhelník *ABD* rovnoramenný s úhlem 36° při vrcholu *D*. Osa úhlu *DAB* protne stranu *BD* v bodě *P* a rozdělí daný trojúhelník na dva rovnoramenné trojúhelníky, kde $|AB| = |AP| = |PD|$. Z podobnosti těchto trojúhelníku plyne:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{AB}{AD} \quad \text{neboli} \quad \frac{u - a_5}{a_5} = \frac{a_5}{u},$$

úpravou získáme kvadratickou rovnici:

$$u^2 - a_5 u - a_5^2 = 0,$$

jejíž kladný kořen je $u = \frac{a_5}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

Z uvedené konstrukce plyne:

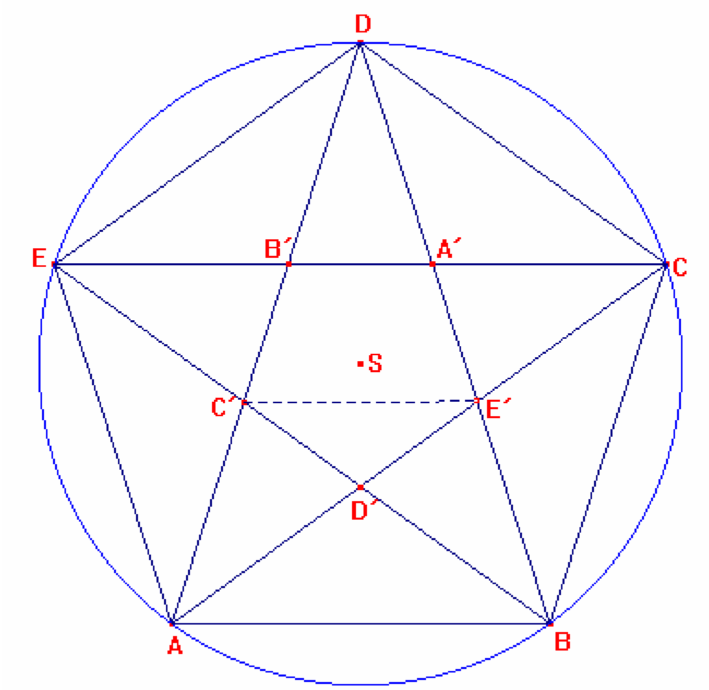
$$|OQ| = \sqrt{|OB|^2 + |QB|^2} = \sqrt{\left(\frac{a_5}{2}\right)^2 + a_5^2} = \frac{a_5\sqrt{5}}{2},$$

takže

$$|AR| = |AO| + |OR| = |AO| + |OQ| = \frac{a_5}{2} + \frac{a_5\sqrt{5}}{2} = \frac{a_5}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = u$$

Vlastnosti pravidelného pětiúhelníku související se zlatým řezem

Úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se kříží v poměru zlatého řezu. Tato vlastnost pravidelného pětiúhelníka je uvedena v Eukleidových Základech, Kniha XIII, věta 9.



Obr. 22

Důkaz:

Důkaz této vlastnosti provedeme pomocí podobnosti trojúhelníků. Pět úhlopříček pětiúhelníka tvoří menší pětiúhelník $A'B'C'D'E'$.

Z podobnosti trojúhelníků $AB'C$ a $AC'E'$ plyne $\frac{|AC|}{|AB'|} = \frac{|AE'|}{|AC'|}$ a ze souměrnosti plyne $|AB'| = |AE'|$ a $|AC'| = |AD'| = |E'C|$,

tedy $\frac{|AC|}{|AE'|} = \frac{|AE'|}{|E'C|}$, z čehož plyne, že bod E' dělí úsečku AC v poměru zlatého řezu.

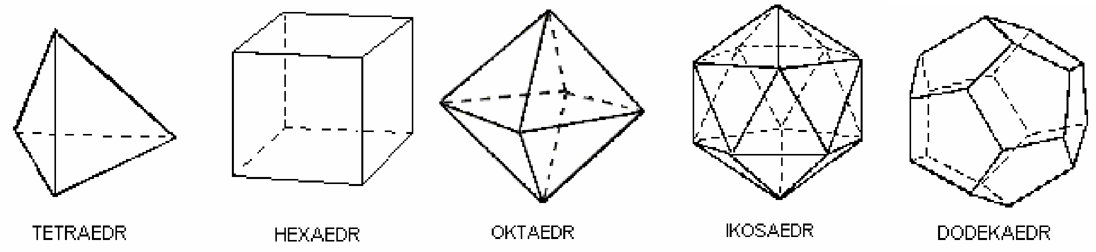
6. Platónská tělesa

V dialogu Timaios si Platón (428 př.n.l – 348 př.n.l) vytkl úkol pojednat o původu a chodu kosmu, především se snažil vysvětlit strukturu hmoty za pomoci pěti pravidelných mnohostěnů.

Platónská tělesa jsou tělesa, jejichž stěny (příslušného tělesa) jsou totožné a rovnostranné a kolem každého tělesa je možno opsat kouli. Na této kouli leží všechny vrcholy tělesa. V trojrozměrném prostoru existuje právě pět takovýchto těles a to: pravidelný čtyřstěn, pravidelný šestistěn (krychle), pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Krychli, osmistěn, čtyřstěn a dvacetistěn považoval za představitele čtyř základních živlů: země, vzduch, oheň a voda (po řadě). Dvanáctistěn podle Platónova učení představoval vesmír jako celek.

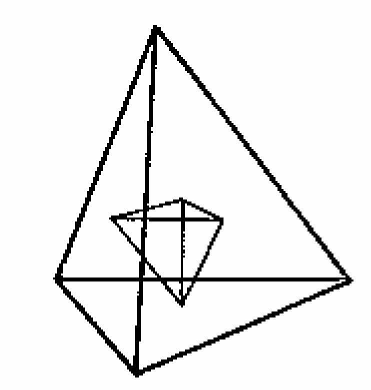
Pro názornost uvádím tabulku se základními údaji o každém z platónských těles včetně obrázku (obr. 23). U každého z uvedených těles se krátce zastavíme a ukážeme si některé zajímavé vlastnosti.

název mnohostěnu	počet			počet hran	
	stěn	vrcholů	hran	jednoho vrcholu	jedné stěny
	s	v	h	m	n
čtyřstěn - tetraedr	4	4	6	3	3
krychle - hexaedr	6	8	12	3	4
osmistěn - oktaedr	8	6	12	4	3
dvanáctistěn - dodekaedr	12	20	30	3	5
dvacetistěn - ikosaedr	20	12	30	5	3



Obr. 23

Pravidelný čtyřstěn

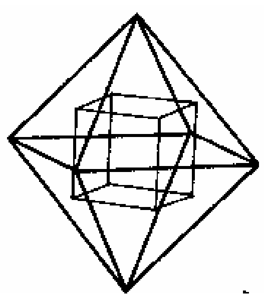


Obr. 24

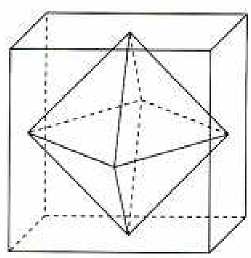
Pravidelný čtyřstěn je tvořen čtyřmi stěnami tvaru rovnostranného trojúhelníku a je duální sám se sebou – středy stěn pravidelného čtyřstěnu jsou vrcholy pravidelného čtyřstěnu (obr. 24).

Pravidelný osmistěn a krychle

Jak si můžeme z tabulky všimnout, krychle (čtyři čtvercové stěny) a osmistěn (osm trojúhelníkových stěn) mají stejný počet hran – dvanáct, počet stěn a vrcholů mají však prohozený (krychle má šest stěn a osm vrcholů, osmistěn osm stěn a šest vrcholů). Tato podobnost umožňuje zobrazení jednoho tělese v druhém. Všimněte si, že středy stěn krychle jsou vrcholy pravidelného osmistěnu (obr. 25) a naopak středy stěn pravidelného osmistěnu jsou vrcholy krychle (obr. 26).

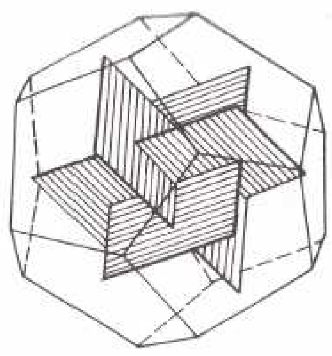


Obr. 25



Obr. 26

Pravidelný dvanáctistěn

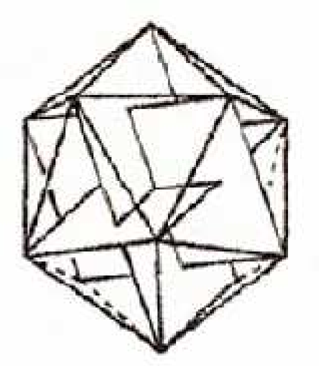


Obr. 27

Jak je z obrázku vidět, stěny dvanáctistěnu tvoří dvanáct pravidelných pětiúhelníků. Už tento fakt zaručuje přítomnost zlatého čísla na tomto tělese. Zajímavá vlastnost tohoto tělesa je fakt, že do něj lze vepsat tři navzájem kolmé zlaté obdélníky a to tak, že jejich vrcholy leží ve středech stěn dvanáctistěnu (obr. 27).

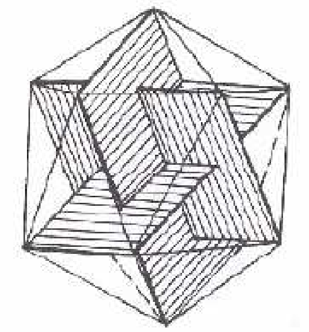
Pravidelný dvacetistěn

Pravidelný dvacetistěn je tvořen z dvaceti rovnostranných trojúhelníků. V tomto tělese není zlaté číslo patrno tak jasně jako v předchozím případě – vezmeme-li ale v úvahu pět rovnostranných trojúhelníků mající společný vrchol, jejich protilehlé strany k tomuto vrcholu leží v jedné rovině a tvoří pravidelný pětiúhelník (obr. 28).



Obr. 28

Zajímavá vlastnost pravidelného dvacetistěnu je fakt, že spojíme-li dvě protilehlé hrany, dostaneme zlatý obdélník. Z toho plyne, že dvanáct vrcholů pravidelného dvacetistěnu tvoří současně dvanáct vrcholů tří shodných zlatých obdélníků, které jsou na sebe kolmé (obr. 29). Takovýchto trojic zlatých obdélníků zde nalezneme více.



Obr. 29

Pravidelný dvanáctistěn a dvacetistěn jsou také symetrická tělesa – mají stejný počet hran (třicet), počet stěn a vrcholů mají prohozený (dvanáctistěn má dvanáct stěn a dvacet vrcholů a dvacetistěn naopak). Stejně jako u krychle a osmistěnu lze poté zobrazit jedno těleso do druhého.

7. Fibonacciova posloupnost

Leonardo Pisano (obr. 30) byl znám spíše pod svojí přezdívkou Fibonacci. Byl synem Guilielma Bonnaciho. Fibonacci se narodil roku 1170 v Itálii, ale vzdělání získal v severní Africe. Jeho otec Guilielmo zastával diplomatický úřad v Bugii (dnešní Bejaia - středomořský přístav v severovýchodním Alžírsku) a zastupoval obchodní zájmy republiky Pisa. Fibonacci studoval matematiku a se svým otcem často cestoval. V navštívených zemích se seznámil s velkými výhodami jejich matematických systémů a je mu i připisována popularizace a velký podíl na pozdějším vítězství arabské číselné řady nad římskou (i když s praktickým využitím až o několik století později, spolu s vynálezem knihtisku).

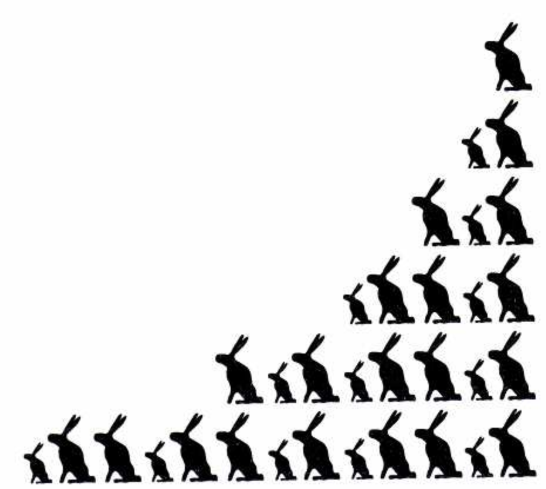
Obr. 30

Fibonacciho přínos dějinám zlatého řezu je veliký. Na jedné straně se zasloužil o pokrok řešením úloh využívající zlatý poměr, na druhé straně formuloval problémy, které na první pohled neměly se zlatým řezem nic společného.

Jedna z jeho knih, zabývající se zlatým řezem, je kniha Practica Geometrie (Geometrické cvičení) z roku 1223. V této knize jsou popsány nové výpočty úhlopříčky a obsahu pětiúhelníku, výpočty jeho stran z poloměrů opsaných i vepsaných kružnic a spousta dalších věcí úzce souvisejících se zlatým řezem. Nejproslulejší příspěvek k teorii zlatého řezu je ovšem úloha z knihy Liber abacci (Kniha o abaku):

Jeden muž umístil pár králíků do prostoru obehnaného ze všech stran zdí. Kolik párů králíků vznikne z tohoto páru, předpokládáme-li, že každý pár zplodí každý měsíc nový pár, který začne plodit potomky druhý měsíc od narození?

Řešení této úlohy je poměrně jednoduché, jak je vidět na obrázku (obr. 31). Vidíme, že po druhém měsíci máme tři páry, po třetím párů pět, po čtvrtém osm, za pět měsíců se narodí nové mladé páry z pěti dospělých párů, což spolu se třemi dospívajícími páry dává 13 párů. Myslím, že již je všem jasné, jak zjistíme počet dospělých i mladých párů v následujícím měsíci. Pokud chceme znát jen počet dospělých párů v následujícím měsíci, stačí sečíst počet dospělých párů z předchozího měsíce a počet nových párů ze stejného měsíce. Počet dospělých párů pak vyjadřuje tato posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8…. Z obrázku je vidět, že počty mladých párů vyjadřuje tatáž posloupnost, pouze posunutá o jeden měsíc a to tedy takto: 0, 1, 1, 2, 3, 5…. Celkový počet párů nám dá součet obou počtů. Posloupnost je poté vlastně stejná jako u dospělých párů:



Obr. 31

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144, 233 …,

kde každý člen počínaje třetím je součtem dvou předcházejících členů. Tato posloupnost se nazývá Fibonacciho.

Všimněme si nyní poměru dvou po sobě následujících čísel (vypočítaných na šest desetinných míst).

1/1 = 1,000 000	55/34 = 1,617 647
2/1 = 2,000 000	89/55 = 1,618 182
3/2 = 1,500 000	144/89 = 1,617 978
5/3 = 1,666 666	233/144 = 1,618 056
8/5 = 1,600 000	377/233 = 1,618 026
13/8 = 1,625 000	610/377 = 1,618 037
21/13 = 1,615 385	987/610 = 1,618 033
34/21 = 1,619 048	

Jak je dobře vidět, poměr dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti se pohybuje kolem hodnoty zlatého řezu a s dalšími členy se mu neustále blíží.

Fibonacciho čísla mají mnoho zajímavých vlastností, pro zajímavost jednu uvádím:

- součet všech Fibonacciho čísel od prvního po n-té se rovná (n+2)-tému číslu minus 1. Takže například součet prvních deseti čísel, tj.

  1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143

  a to se rovná dvanáctému číslu mínus 1, tj. 144 – 1 = 143

Důkaz:

Víme, že
$$a_3 = a_1 + a_2$$
$$a_4 = a_2 + a_3$$
$$a_5 = a_3 + a_4 .$$

Odtud:
$$a_1 = a_3 - a_2$$
$$a_2 = a_4 - a_3$$
……………..
$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$
$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

Nyní sečteme levé a pravé strany rovnosti:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$$

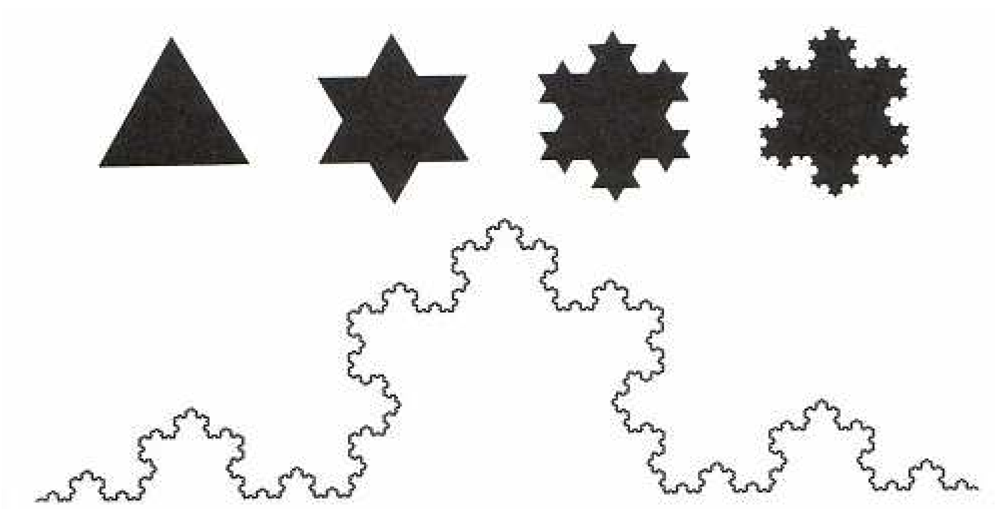
Na burzovním a peněžním trhu má Fibonacciho posloupnost velkou tradici, především u různých grafických aplikací a u klouzavých průměrů, kde se tradičně využívají především Fibonacciho posloupnost periody od 5 do 233. Princip u grafických číselných aplikací spočívá v tom, že když se cena přiblíží liniím vycházejícím z Fibonacciho posloupnosti, dá se očekávat změna trendu. Fibonacciho posloupnosti s úspěchem používá i mnoho hráčů rulety a Fibonacciho posloupnost je s úspěchem aplikována například i do kurzových sázek na sportovní utkání.

8. Zlatý řez a fraktály

Výraz fraktál (z latinského fractus – rozlomený, rozdělený) poprvé použil matematik Benoit Mandelbrot a tento fenomén se stal hlavním konceptem teorie chaosu. Zkoumáme-li ve zlaté posloupnosti jakoukoli opakovanou sekvenci, objevíme, že se zde při každém rozsahu nachází stejný vzorec. Právě objekty s touto vlastností se nazývají fraktály. Fraktální geometrie představuje úžasný pokus o popis tvarů a objektů reálného světa.

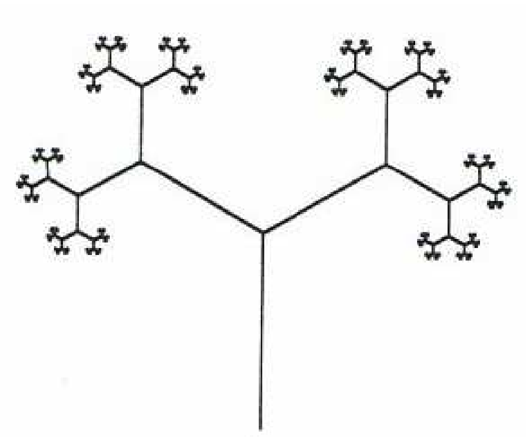
Kochova vločka

Kochovu vločku můžeme získat z rovnostranného trojúhelníka o délce strany jeden centimetr. Uprostřed každé strany sestrojíme menší trojúhelník s délkou strany jedna třetina centimetru – tento obrazec bude mít podobu Davidovy hvězdy. Za povšimnutí stojí fakt, že původní trojúhelník měl obvod tři centimetry, nynější má čtyři centimetry. Tento postup neustále opakujeme – na každý střed strany trojúhelníka umístíme nový trojúhelník se zmenšenou stranou o jednu třetinu. Obvod se bude vždy zvětšovat o čtyři třetiny.

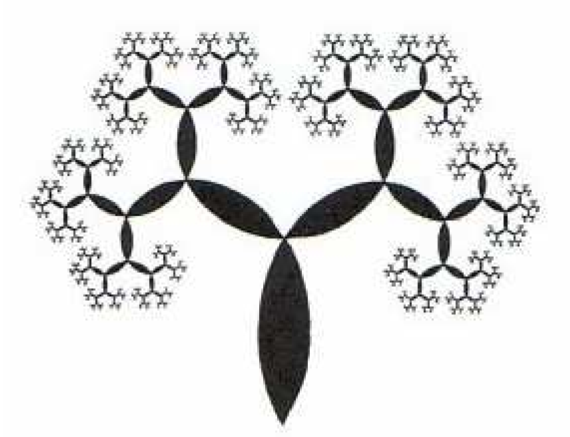


Obr. 32

Hlavní charakteristikou celé řady přírodních fraktálů, od stromů po růst krystalů, je rozvětvování. Nyní si ukážeme zjednodušený model stonku. Začneme se stonkem o jednotkové délce, který se dělí do dvou větví o poloviční délce při úhlu 120° (obr. 33). Každá větev se dělí dál a dál. Pokud bychom zvolili číslo větší než $\frac{1}{2}$, pak se vzdálenosti mezi jednotlivými větvemi zmenší a nakonec se budou větve překrývat. Otázka je, při jaké hodnotě čísla se budou překrývat neboli přesněji nás zajímá, kdy se větve setkají – a to se děje při faktoru, který se rovná $\frac{1}{\varphi} = 0{,}618.....$ Tento obraz, kdy při každém rozvětvení se délka změní o $\frac{1}{\varphi}$, až se nakonec jednotlivé větve setkají, se nazývá zlatý strom (obr. 34).

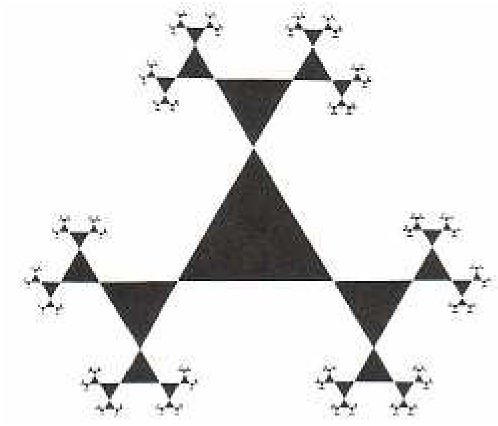


Obr. 33

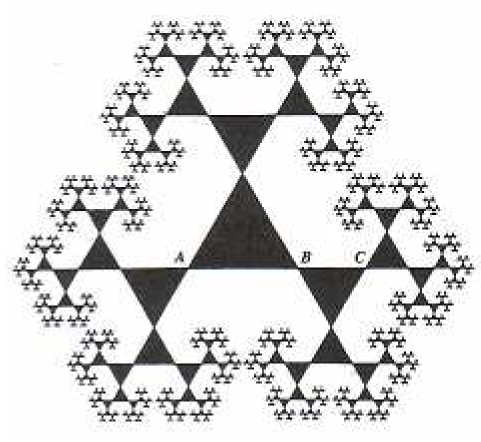


Obr. 34

Fraktály lze konstruovat nejen z úseček, ale i z jednoduchých rovinných obrazců – trojúhelníků či čtverců. Pokud například vezmeme rovnostranný trojúhelník s jednotkovou délkou, na každém vrcholu postavíme nový trojúhelník s poloviční délkou atd., dostaneme obrazec, který vidíte na obrázku 35. Opět při změně délky na již zmiňovaných 0,618… se větve začnou dotýkat (obr. 36).

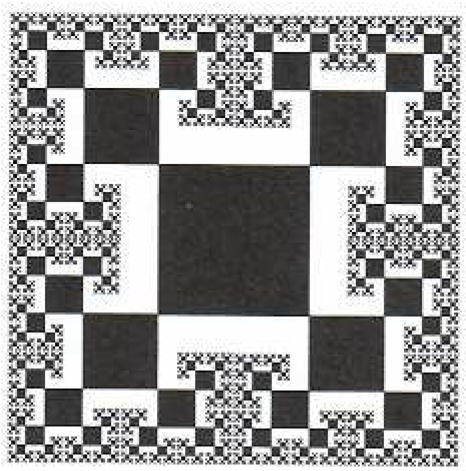


Obr. 35

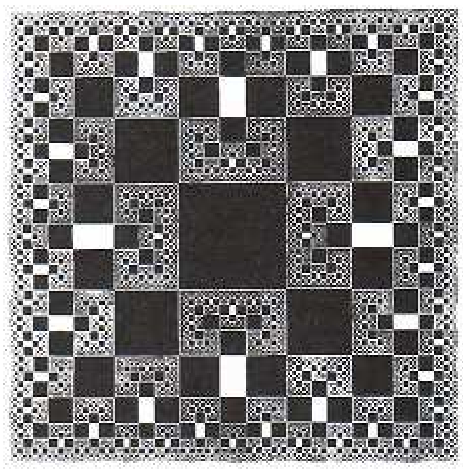


Obr. 36

Stejně tak to bude u čtverce (obr. 37). U čtverce při změně délky na $\frac{1}{\varphi}$ (obr. 38), jsou všechny bílé nevyplněné obdélníky zlaté.



Obr. 37



Obr. 38

Takto vlastně zjistíme, že svět kolem nás je plný fraktálů – lze popsat např. vrcholky lesů na obzoru nebo systém průchodu krve ledvinou.

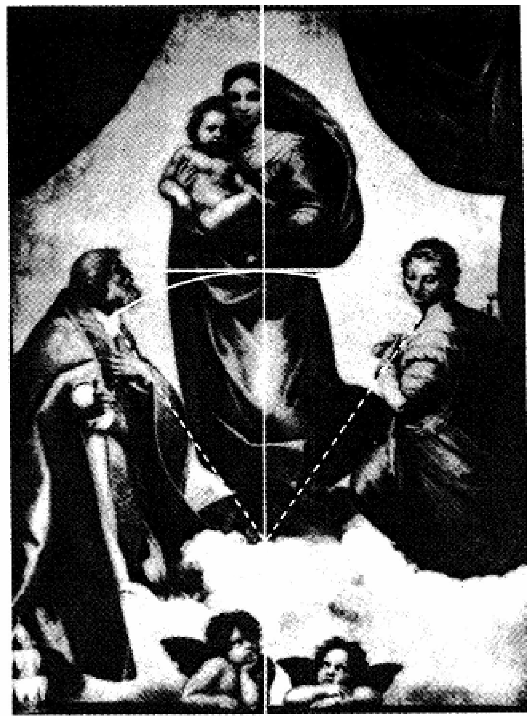
9. Zlatý řez kolem nás

Lidské oko hodnotí tvary užívající zlatého řezu jako krásné. Není příliš jasné proč, avšak i bez teoretického zdůvodnění této vlastnosti umělci velice rádi využívají. Jde především o architekturu, malířství, fotografii a sochařství.

9.1. Zlatý řez v malířství

Zlatý řez se uplatňuje v mnoha malířských kompozicích nejrůznějších období. Malíř však obraz složitě neproměřuje, nýbrž se nechává vést citem, který mu určuje poměry rozměrů v obraze, vztahy částí k celku i jejich umístění do formátu.

I Raffaelova Sixtinská madona může být vtěsnána do poměrů zlatého řezu. Výška obrazu je rozdělena v poměru zlatého řezu, dělící čára prochází mezi horní a dolní částí těla Madonny a zároveň spojuje tváře Sixta a Barbary. Dále můžeme najít zlatý řez v dolní časti již rozděleného obrazu – špička nohy Madonny dělí danou část opět v poměru zlatého řezu.



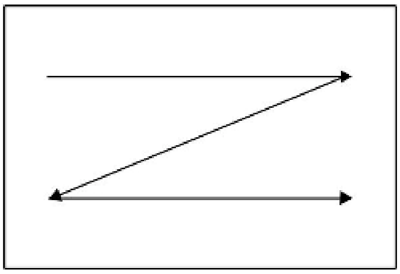
Obr. 39

Známý obraz Leonarda da Vinci Poslední večeře Páně je tak působivý právě proto, že postavy na něm jsou rozděleny bílým ubrusem podle zlatého řezu.

9.2. Zlatý řez ve fotografii

Mezi základní kameny fotografické techniky patří kompozice. Obdélníkový tvar fotografie umožňuje různé umístění fotografovaného předmětu ve scéně. Vhodnou kompozicí můžete plně využít prostor, který fotografie nabízí a vyjádřit i svůj subjektivní názor. Jedním z nástrojů, který vám pomůže při komponování scény, je zlatý řez.

Obdélníkový formát je pro lidské oko příznivý, protože jsme na něj zvyklí z knih, novin či televize. Když si tuto informaci uvědomíte, můžete ji využít už při samotném komponování objektu v hledáčku fotoaparátu. Tak, jako knihy jsme zvyklí číst zleva doprava a shora dolů, i fotografii „čteme“ stejným způsobem (obr. 40).



Obr. 40

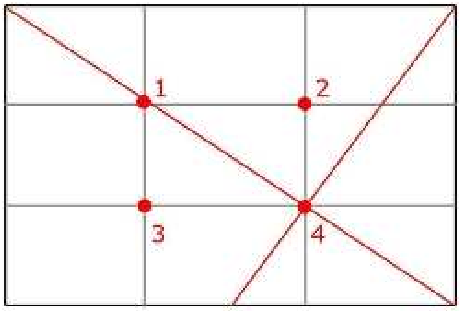
Častá je středová kompozice, kdy fotografovaný předmět je přímo v centru fotografie (obr. 41). Taková kompozice je statická, klidná, ale někdy může být i nudná. Umístěním předmětu do zlatého řezu oživíte fotografii, dodáte jí tak „něco“ dynamického (obr. 42).

Obr. 41

Obr. 42

Praktické hledání zlatého řezu

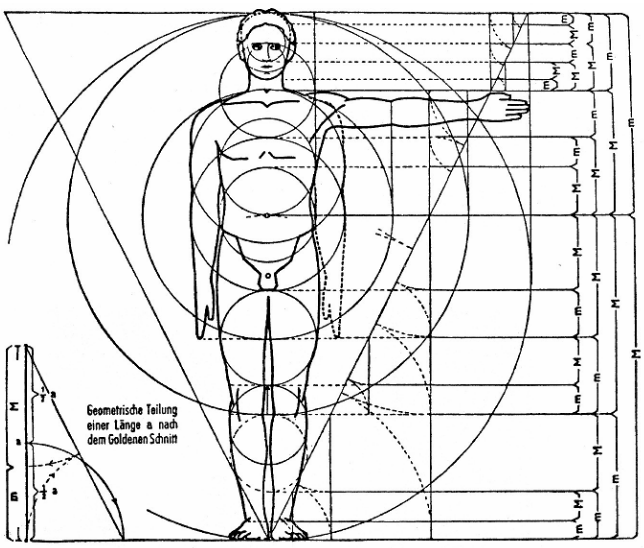
V praxi se přímý postup konstrukce nepoužívá. Nemusíme umisťovat předmět do přesně konstruovaného zlatého řezu, protože často v dalších úpravách fotografie dochází k ořezům a tím se změní i formát původní fotografie. Stačí pouze vědět, že fotografii si lze rozdělit pomyslnými úsečkami na třetiny (obr. 43). Zlatý řez leží přibližně v průsečících těchto třetin - fotografovaný předmět můžete umístit do jednoho ze čtyř různých zlatých řezů.



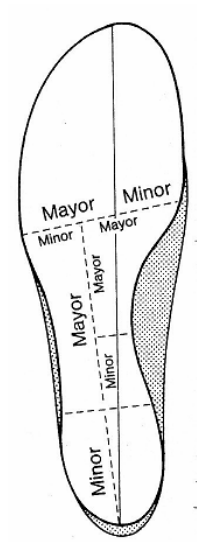
Obr. 43

9.3. Proporce lidského těla

Na lidském těle existuje zlatý řez v poměru délek nad pasem a pod pasem. A tyto dvě části těla můžeme znovu rozdělit v poměru zlatého řezu (0,618 : 1). Hranicemi jsou další dvě zúžení na lidském těle: krk a noha těsně pod kolenem. Adolf Zeising v 19. století prováděl na svém těle spousta měření, jeho výsledky jsou zaznamenány na obrázku 44. Nelze obecně říci, že všechny vzdálenosti jsou rozděleny přesně zlatým řezem, ale dané poměry se pouze k zlatému číslu blíží (některé více, některé méně).



Obr. 44

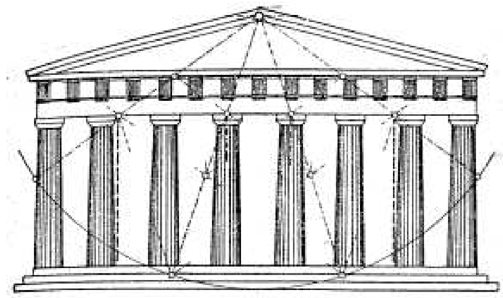


Obr. 45

9.4. Zlatý řez v architektuře

Největší památník zlatého řezu vidí někteří badatelé v Cheopsově pyramidě (obr. 46). Tvrdí, že podstava této pyramidy se má k jejímu plášti jako plášť k jejímu celému povrchu. Uvádělo se, že řecký historik Herodotos se od egyptských kněží dozvěděl, že čtverec výšky Velké pyramidy je roven obsahu jeho trojúhelníkové stěny neboli jinak řečeno vztah výšky její trojúhelníkové stěny k polovině strany její základny se rovná zlatému řezu. Výpočtem zjistíme, že daný poměr je 1,62, což je opravdu mimořádně blízko zlatému řezu. Avšak je nutno podotknout, že neexistuje žádný důkaz, že staří Egypťané věděli něco o zlatém čísle.

Obr. 46



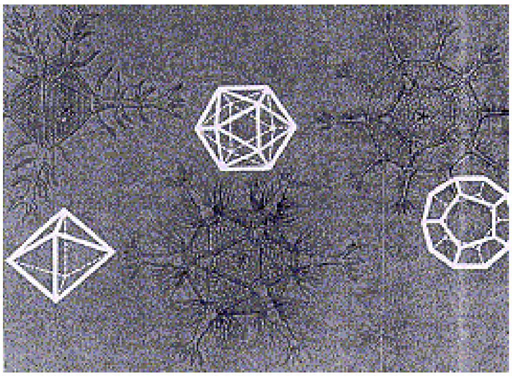
Obr. 47

Další příklad použití zlatého řezu v architektuře je Parthenón na athénské Akropoli (obr. 47), postaven architekty Iktinem a Kallikratem. Dohledem nad sochařskou výzdobou byl pověřen Feidas se svými spolupracovníky. Parthenón je typický dórský chrám s osmi sloupy zepředu i zezadu a je nepochybně nejkrásnějším chrámem postaveným tímto stylem. Průčelí stavby je přesně zlatý obdélník, také do něj můžeme nakreslit část pravidelného desetiúhelníka, který má samozřejmě souvislost se zlatým poměrem. Dále platí, že výška fasády od vrcholu tympanonu ke spodku podstavce sloupu je rozdělena ve zlatém poměru. Zase je potřeba připomenout, že přesné matematické výpočty nenasvědčují tomu, že by se jednalo o přesný zlatý řez – například pokud by se jednalo o zmiňovaný zlatý obdélník, poměr větší strany ku menší je 1,72. To je sice blízko φ, ale pořád se od něho dost liší.

V průběhu historie bylo postaveno mnoho budov, ve kterých lze nalézt užití zlatého řezu. Jsou to např. Dóm ve Florencii, gotický chrám Notre-Dame v Paříži, chrám sv. Víta v Praze atd. Zlatý řez však nelze obecně vždy prokázat a nelze hovořit o jeho jakési všeobecně platné umělecké přednosti před jinými proporcemi.

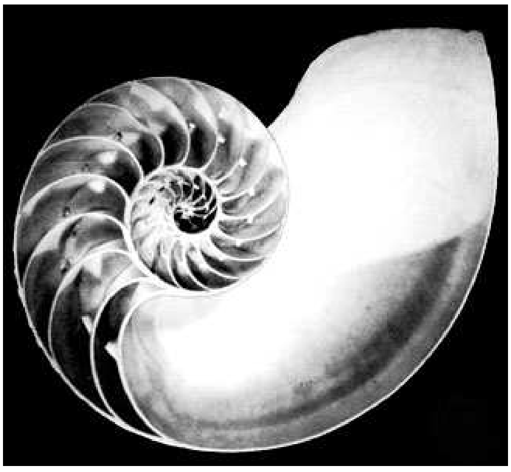
9.5. Zlatý řez v přírodě

V přírodě se poměrně často objevuje dvacetistěn. Například krystaly bóru jsou dvacetistěny. Také viry, které byly dříve pokládány za kulovité, mají tvar dvacetistěnu. Pravidelné mnohostěny nalezneme u živočichů, např. kostry některých mřížovců. Kostrami těchto drobných mořských živočichů v podobě osmistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu je pokryto dno Tichého a Indického oceánu (obr. 48).



Obr. 48

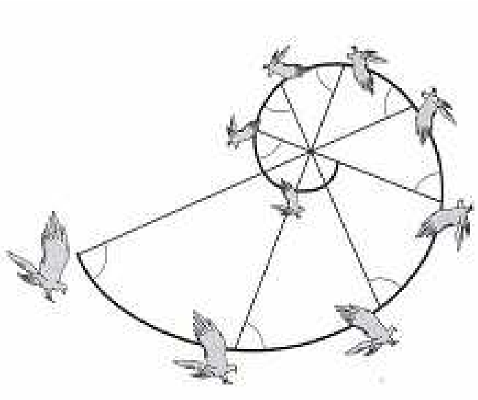
Důležitým faktorem v přírodě je logaritmická spirála, která vyjadřuje růst neživých částí živého tvora. Mohou to být zobáky, rohy, parohy, kly a zuby (slon, narval) nebo schránky měkkýšů (obr. 49), ulity plžů či hlavonožců. Turovitým kopytníkům, mezi které patří i náš hovězí dobytek a ovce, rostou do spirály rohy. Nebývá to vždy na první pohled zřetelné, neboť obyčejně jsou jen částí jednoho závitu spirály, ale některé jsou přímo ukázkou prostorové logaritmické spirály, např. africký kudu (obr. 50). Dále lze logaritmickou spirálu spatřit i ve vodních vírech až po hurikány a obří spirální galaxie



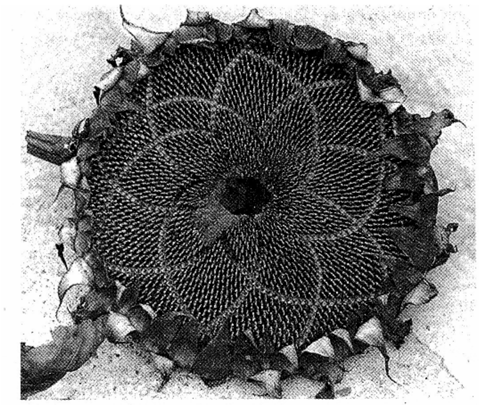
Obr. 49

Obr. 50

Vlastnost logaritmické spirály, že všechny polopřímky vycházející z pólu ji protnou pod stejným úhlem, využívá např. sokol stěhovavý, který údajně nalétává rychlostí až 300 km/hod na kořist po logaritmické spirále, přičemž kořist je v pólu spirály (obr. 51). Zmíněná vlastnost spirály sokolu umožňuje během letu nepřetržitě sledovat kořist, aniž by musel stáčet hlavu a tím případně zpomalit let. Kdyby letěl po přímce, pohybům hlavy by se díky umístění očí nevyhnul a kořist by měla větší naději na útěk.



Obr. 51



Obr. 52

I s Fibonacciho posloupností se lze setkat v přírodě, například u slunečnice (obr. 52). Podíváme-li se na její květ, můžeme si všimnout spirál, které semínka tvoří jak po směru hodinových ručiček, tak i opačným směrem. Počty těchto spirál obvykle závisí na velikosti slunečnice, ale nejobvyklejším vzorem je 34 spirál vedoucí jedním směrem a 55 spirál jdoucí směrem opačným. Našly se však i slunečnice s poměry počtů spirál 89/55, 144/89 a dokonce 233/144. Všechno jsou to samozřejmě poměry sousedních čísel Fibonacciho posloupnosti. Také u sedmikrásek nalezneme Fibonacciho čísla – většina těchto kytiček má totiž 13, 21 nebo 34 plátků, což jsou členy Fibonacciho posloupnosti. U elegantních křivek ulit měkkýšů je to naprosto ohromující – porovnáme-li průměr dvou sousedních spirál, dostaneme opět číslo 1,618.

10. Závěr

Pokud se někoho zeptáte, co je to zlatý řez, většinou nebude vědět. Pokud mu ale poté ukážete sérii obdélníků s žádostí, ať vybere ten nejhezčí, správně se rozhodne pro zlatý obdélník. Zlatý poměr se již od pradávna lidem líbí, vnímáme jej jako přirozenou věc a možná i proto se často objevuje v architektuře, malířství či designérství, možná i neúmyslně.

V průběhu této práce jsme se mohli přesvědčit, že i když zlaté číslo není obecně tak známe jako například Ludolfovo, je jeho výskyt velký. O zlatém řezu jsem ve své práci uvedla mnoho zajímavostí jak z matematického hlediska, tak i z našeho bezprostředního okolí. Je opravdu velmi zajímavé jak se poměrem zlatého řezu řídí příroda.

11. Literatura

[1] Beutelspacher, A.: Der Goldene Schnitt, Heidelberg, Berlín, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996

[2] Černíková, L.: Fibonacciho čísla, diplomová práce PF JU, 2004

[3] Jirovská, I.: Užití zlatého řezu, diplomová práce PF JU, 1995

[4] Juškevič, A.P.: Dějiny matematiky ve středověku, Praha: Academia, 1978

[5] Kowal, S.: Matematika pro volné chvíle, Praha: SNTL, 1986

[6] Livio, M.: Zlatý řez, Praha: Dokořán, 2006

[7] Mandelbrot, B.: Fraktály, Praha: Mladá fronta, 2003

[8] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Praha: Prometheus, 1991

[9] www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/chmelikovabp/Zlaty_rez.pdf

12. Přílohy

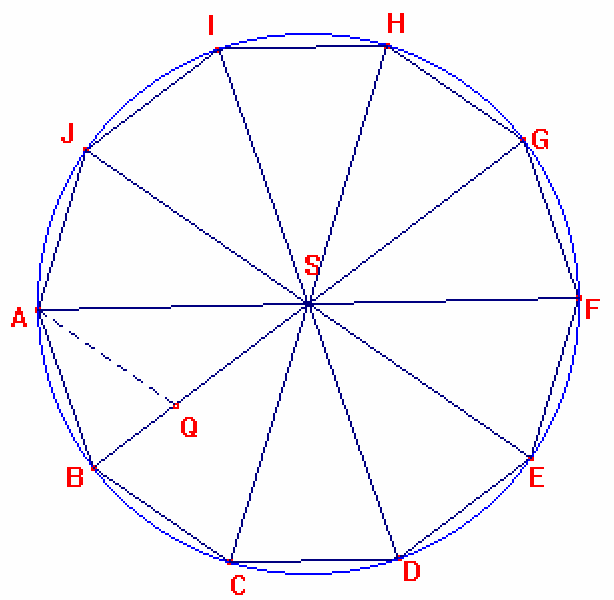
Příloha 1.

										Desetinné místo
1,61803	39887	49894	84820	45868	34365	63811	77203	09179	80576	50
28621	35448	62270	52604	62818	90244	97072	07204	18939	11374	100
84754	08807	53868	91752	12663	38622	23536	93179	31800	60766	
72635	44333	89086	59593	95829	05638	32266	13199	28290	26788	200
06752	08766	89250	17116	96207	03222	10432	16269	54862	62963	
13164	43814	97587	01220	34080	58879	54454	74924	61856	95864	300
86444	92410	44320	77134	49470	49565	84678	85098	74339	44221	
25448	77066	47809	15884	60749	98871	24007	65217	05751	79788	400
34166	25624	94075	89069	70400	02812	10427	62177	11177	78053	
15317	14101	17046	66599	14669	79873	17613	56006	70874	80710	500
13179	52368	94275	21948	43530	56783	00228	78569	97829	77834	
78458	78228	91109	76250	03026	96156	17002	50464	33824	37764	
86102	83831	26833	03724	29267	52631	16533	92473	16711	12115	
88186	38513	31620	38400	52221	65791	28667	52946	54906	81131	
71599	34323	59734	94985	09040	94762	13222	98101	72610	70596	
11645	62990	98162	90555	20852	47903	52406	02017	27997	47175	
34277	75927	78625	61943	20827	50513	12181	56285	51222	48093	
94712	34145	17022	37358	05772	78676	00868	83829	52304	59264	
78780	17889	92199	02707	76903	89532	19681	98615	14378	03149	
97411	06926	08867	42962	26757	56052	31727	77520	35361	39362	1000
10767	38937	64556	06060	59216	58496	67595	51900	4055	59089	
50229	53094	23124	82355	21221	24154	4006	47034	05657	34797	
66397	23949	49946	58457	88730	39623	09037	50339	93856	21024	
23690	25138	68041	45779	95698	12244	57471	78034	17312	64532	
20416	39723	21340	44449	48730	23154	17676	89375	21030	68737	
88034	41700	93954	40962	79558	98678	72320	95124	26893	55730	
97045	09595	68440	17555	19881	92180	20640	52905	51893	49475	
92600	73485	22821	01088	19464	45442	22318	89131	92946	89622	
00230	14437	70269	92300	78030	85261	18075	45192	8870	50210	
96842	49362	71359	25187	60777	88466	58361	50238	91349	33331	
22310	53392	32136	24319	26372	89106	70503	39928	22652	63556	
20902	97986	42472	75977	25655	08615	48754	35748	26471	81414	
51270	00602	38901	62077	73224	49934	53088	99909	50168	03281	
12194	32048	19643	87675	86331	47985	71911	39781	53978	07476	
15077	22117	50826	94856	39320	45652	09896	98555	67814	10696	
83728	84058	74610	33781	05444	39094	36835	83581	38113	11689	
93855	57697	54841	49144	53415	09129	54070	05019	47754	86163	
07542	26417	29394	68036	73198	05861	83391	83285	99130	39607	
20144	55950	44977	92120	76124	78564	59161	60837	05949	87860	
06970	18940	98864	00764	43617	09334	17270	91914	33650	13715	2000

Příloha 2.

Délka strany pravidelného desetiúhelníka

Každý pravidelný desetiúhelník vepsaný kružnici $k(S, r)$ lze rozdělit na deset shodných rovnoramenných trojúhelníků s úhlem velikosti 36° při vrcholu S a s úhly velikosti 72° při základně délky a_{10}.



Obr. 53

Uvažujme jeden z těchto trojúhelníků *ABS*.

Osa úhlu *SAB* protne stranu *BS* v bodě *Q*. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků platí: $\Delta ABQ \cong \Delta SAB$, přičemž $|AB| = |AQ| = |QS| = a_{10}$.

Odtud plyne, že $\frac{|AB|}{|BQ|} = \frac{|AS|}{|AB|}$ čili $\frac{a_{10}}{r - a_{10}} = \frac{r}{a_{10}}$

Tento poměr je poměr zlatého řezu, z čehož plyne, že a_{10} je délkou větší části úsečky délky r rozdělené zlatým řezem a proto $a_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.