Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

SPOJITOST A LIMITA FUNKCE V SOUVISLOSTECH

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jitka Cibulková

České Budějovice, duben 2007

Anotace

Název: Spojitost a limita funkce v souvislostech

Autor: Jitka Cibulková

Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

Klíčová slova: Limita funkce, spojitost funkce

V práci jsou popsány pojmy spojitosti a limity funkce jedné reálné proměnné, odvozeny některé související vlastnosti, a především vzájemný vztah mezi limitou a spojitostí funkce. V práci jsou dále obsaženy řešené ilustrativní příklady související s tématem.

Title: Continuity and limit of function and their interrelation

Autor: Jitka Cibulková

Supervisor: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

The aim of this thesis is to describe the notion of continuity of real-valued functions. Some related properties are derived, foremost the mutual relation between limits and continuity. There are also included the usually related examples with solutions in the thesis.

Děkuji Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D. za odborné vedení a pomoc při vypracování bakalářské práce a Josefu Piherovi za poskytnutí programu na tvorbu grafů.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích 24.4.2007

……..……………..

Jitka Cibulková

Obsah

1. Funkce

Zamyslíme-li se nad pojmem funkce z hlediska vývoje, lze dospět k názoru, že vývoj tohoto pojmu byl značně složitý. Započal studiem proměnných veličin a jejich závislosti zejména s rozvojem přírodních věd v 17. století. Pojem funkce začal soustavně používat na počátku 18. století Jacob Bernoulli (1667-1748), švýcarský matematik, fyzik a astronom. Pro matematiku 18. století byla funkce analytický výraz složený určitým způsobem z proměnných a konstant. Tedy například výraz $\sqrt{(x^2+1)}$. Teprve v 19. století nabyl pojem funkce přesnějšího tvaru : Proměnná y je funkcí proměnné x, jestliže každé dané hodnotě x odpovídá přesně určená hodnota y bez ohledu na to, jakou formu má vztah, který spojuje x s y. Pojem funkce byl tak učiněn nezávislým na tvaru analytického výrazu.

V současnosti se s funkcemi setkáváme ve všech přírodních vědách. Každá situace, kdy jsou nějaký jev či veličina jednoznačně určeny jinými jevy či veličinami, se dá popsat pomocí funkce. Někdy je jednoduché takovou funkci sestavit. Snadno například můžeme zjistit délku trajektorie automobilu jedoucího známou rychlostí v závislosti na tom, po jakou dobu jede. Nebo dokážeme určit přírůstek našich úspor ve spořitelně v závislosti na době spoření, pokud známe úrokovou míru a její změny. Často je naopak prakticky nemožné definovat správný tvar funkce, neboť nemáme dostatek informací o parametrech, které do jejího zápisu vstupují. Příkladem je třeba závislost teploty ovzduší v daném okamžiku na zeměpisné poloze a nadmořské výšce.

Závisí-li zkoumaný jev na jediné veličině, jejíž hodnoty jsou reálné a buď se mění známým způsobem, nebo si je můžeme dokonce volit, hovoříme o funkci jedné reálné proměnné. A lze-li zkoumaný jev nebo veličinu kvantifikovat rovněž pomocí reálných hodnot, jedná se o reálnou funkci, resp. každou reálnou funkci, jejíž definiční obor i obor hodnot jsou podmnožina množiny $\Re$, nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné.

1.1 Definice funkce

Nechť D a H jsou dvě (neprázdné) množiny reálných (popř. komplexních) čísel a nechť $x \in D$, kdežto $y \in H$.

a) Pak každé zobrazení f množiny D na množinu G se nazývá funkce zobrazující množinu D na množinu G neboli funkce proměnné x definovaná na množině D. Potom píšeme $y = f(x)$.

b) Proměnná x se obvykle nazývá nezávisle proměnná nebo argument, kdežto y se nazývá závisle proměnná.

c) Množina D se nazývá definiční obor funkce f, kdežto množina H se nazývá funkční obor funkce f neboli obor hodnot funkce f. Množina H se také nazývá obraz množiny D v zobrazení f a značí se $f(D) = H$.

Poznámky

1. Kromě uvedeného onačení funkce f se používá těchto označení:

$$f : D \to H ,$$

$$f = \{[x, y] \in D \times H | y = f(x)\},$$

$$[x, y] \in f ,$$

$$f \sim y = f(x) ,$$

$$f : x \mapsto y ,$$

$$f : y = f(x) .$$

2. Pojem zobrazení f množiny D do množiny H je definován tak, že ke každému prvku $x \in D$ je přiřazen právě jeden prvek $y \in H$ přičemž je $y = f(x)$. To znamená, že platí: $y_1 = f(x_1) \wedge y_2 = f(x_1) \Rightarrow y_1 = y_2$.

3. Pro libovolné číslo $x \in D$ značí symbol $f(x)$ právě to číslo $y \in H$, které je funkcí f přiřazeno číslu x a které nazýváme funkční hodnotou funkce f v čísle (bodě) x nebo hodnotou funkce f v čísle (bodě) x.

Například $f(5)$ značí číslo přiřazené funkcí f číslu $x = 5$. Podobně $f(a)$ značí číslo přiřazené číslu $x = a$.

4. Místo písmene x pro argument a písmene y pro závisle proměnou používáme k označení proměnných i jiných písmen, např. u, v, w, t, z. Podobně místo znaku pro označení funkce používáme i jiných písmen, např. $F, \psi, \varphi, g, h, \phi$ apod.

5.Libovolnou funkci lze obecně zapsat jako $f(x)$, což obecně značí jakoukoli funkci proměnné x.

1.2 Definiční obor funkce

Definiční obor funkce značíme zpravidla $D(f)$, obor funkčních hodnot $H(f)$. Tedy $D(f) = \{x \in \Re; \exists y \in \Re : y = f(x)\}$, $H(f) = \{y \in \Re; \exists x \in \Re : (x, y) \in f\}$.

Definičním oborem bývá často interval nebo sjednocení intervalů. Není-li definiční obor udán, rozumíme jím množinu všech reálných čísel, pro něž je příslušný předpis definován. Tuto množinu nazýváme *přirozeným* (též *maximálním*) *oborem funkce*. To je *existenční* obor výrazu, jímž je funkce definována.

Například funkci $f : \Re \to \Re, f(x) = x^2$, můžeme vyjádřit bez udání definičního oboru $\Re$ vztahem $f : y = x^2$, neboť předpis $y = x^2$ má smysl pro každé reálné číslo x. Avšak u funkce $g : \langle 0,1 \rangle \to \Re, g(x) = x^2$, je nutné v zápisu funkce definiční obor $\langle 0,1 \rangle$ uvést, píšeme tedy $g : y = x^2, x \in \langle 0,1 \rangle$.

1.3 Graf funkce

Umožňuje názorné vysvětlení mnoha vztahů a pojmů. Znázorňujeme-li příslušnou funkci $y = f(x)$ v kartézské soustavě, získáme kartézský graf této funkce.Graf funkce může v jednodušších případech posloužit jako prostředek k získání názorné představy o funkci.

1.3.1 Definice grafu funkce

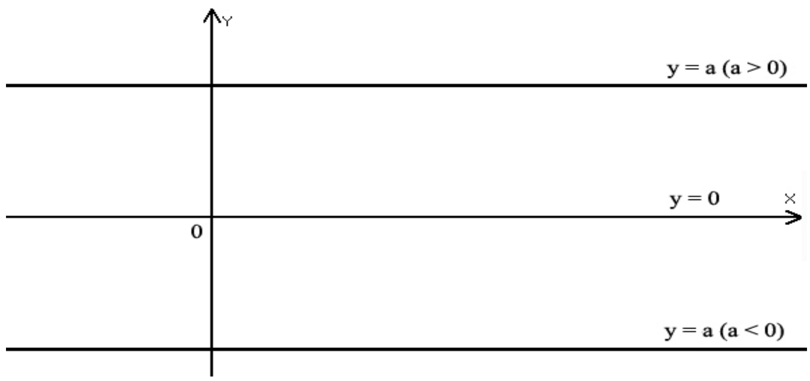
Kartézským grafem (stručně grafem) funkce $y = f(x)$ definované pro $x \in D$, nazýváme množinu všech bodů $[x, f(x)]$ v rovině pro $x \in D$. Odtud plyne, že první souřadnice x bodu $[x, f(x)]$, ležícího na grafu funkce, představuje hodnotu $x \in D$ nezávisle proměnné, kdežto druhá souřadnice udává příslušnou hodnotu funkce f.

Příklad I

Znázorněme graf funkce $y = a$, kde a je určité reálné číslo.

Řešení

Ať zvolíme jakékoli reálné číslo $x \in (-\infty, +\infty)$, stále je $y = a$.
Proto definičním oborem této funkce je $D = (-\infty, +\infty)$, kdežto závislý obor $H = \{a\}$ Je tedy grafem dané funkce $y = a$ rovnoběžka s osou X ve vzdálenosti $|a|$ od ní a to nad osou X, pokud $a > 0$, kdežto pod osou X, je-li $a < 0$. Pro $a = 0$ představuje její graf osa X, pro kterou platí $y = 0$.



Obr.1.1

1.3.2 Tabulka funkčních hodnot funkce

K sestrojení grafu bývá výhodné sestavit si nejprve tabulku některých funkčních hodnot:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\dots$	$f(x_n)$

Čísla $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ volíme z definičního oboru D dané funkce, kdežto funkční hodnoty určíme z přepisu pro uvažovanou funkci f dosazováním $x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n$. Znázorníme-li ve zvolené soustavě všechny takto určené body $[x, f(x)]$ a spojíme-li je plynulou čarou, dostaneme přibližný graf uvažované funkce. Ten bude zpravidla tím přesnější, čím více bodů k němu určíme a použijeme-li ještě dalších důležitých poznatků o vlastnostech funkce.

1.4 Způsoby určování funkcí

Funkci f považujeme za definovanou je-li známo pravidlo, kterým je každému číslu $x \in D$ přiřazena příslušná jediná hodnota $f(x) \in H$, tj. je-li dán předpis, kterým je toto přiřazení jednoznačně určeno. Tento předpis může být vyjádřen tabelárně, graficky, analyticky nebo slovně.

1.4.1 Tabelární určení funkce

V tomto případě je funkční závislost zadána tabulkou, která je obvykle upravena tak, že v jedné řadě (např. vodorovné) jsou uvedeny hodnoty argumentu x a v druhé řadě (s ní rovnoběžné) je proti každé hodnotě x napsána příslušná hodnota $f(x)$.

Tabelární způsob definování funkce se velmi často vyskytuje v přírodních vědách, zvláště hledáme-li experimentálně funkční závislost mezi dvěma uvažovanými veličinami. Výhodou tohoto vyjádření je to, že z něho můžeme ihned vyčíst hodnoty funkce v tabelovaných hodnotách argumentu. Jeho velkou nevýhodou je, že obvykle neobsahuje hodnoty funkce ve všech potřebných hodnotách argumentu.

Příklad

Hodnoty odporu R daného vodiče:

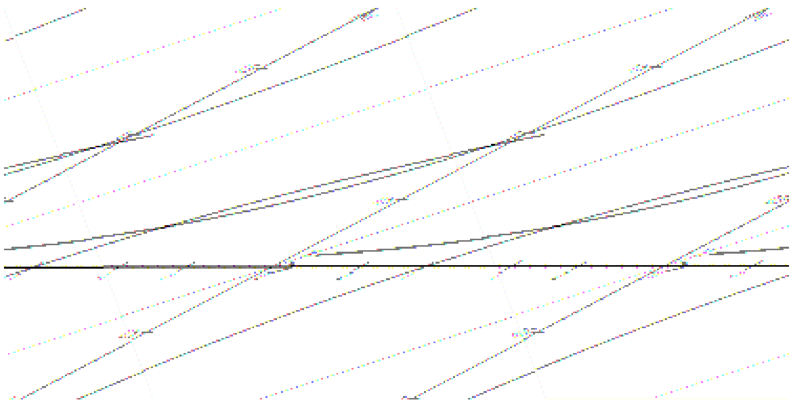
Teplota °C	0	25	50	75	100
Odpor R	112	118,4	124,6	130,3	135,2

Kdybychom chtěli znát hodnotu odporu R při 30°C, bylo by zásadně nutné provést příslušné měření. Takto můžeme pouze očekávat, že příslušná hodnota se bude vyskytovat někde mezi čísly 118,4 a 124,6.

Dalším nedostatkem tohoto vyjádření je i to,že si při něm nemůžeme učinit bližší představu o povaze funkční závislosti mezi argumentem a závisle proměnnou. Proto se obvykle snažíme vyjádřit tuto závislost graficky nebo analytickým vzorcem.

1.4.2 Grafický způsob zadání funkce

V tomto případě bývá funkce zadána svým kartézským grafem neboli diagramem. Výhodou tohoto vyjádření funkce je názornost, neboť podle kartézského grafu funkce si obvykle lze učinit dosti jasnou představu o povaze funkční závislosti. Jeho nevýhodou je,že vyjadřuje funkční hodnoty nikoli přesně,ale jen přibližně a že sám o sobě nedovoluje vyšetřovat vlastnosti funkcí metodami matematické analýzy.



Obr.1.2

1.4.3 Analytický způsob definování funkce

Tento způsob je z hlediska teoretického i praktického nejvýznamnější.Je to vyjádření funkčních závislostí na základě analytických výrazů a vzorců. Přitom analytickým výrazem rozumíme symbolicky zapsaný souhrn známých matematických oborech s danými reálnými čísly (konstantami) a s proměnnými veličinami. Vzorcem pak rozumíme rovnost dvou analytických výrazů.

Příklad analyticky zadaných funkcí:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$ pro $\forall x \in \Re = (-\infty, +\infty)$,

b) Dirichletova funkce $\chi(x)$, definovaná předpisem:

$\chi(x) = 0$ pro všechna iracionální čísla $x \in \Re$

$\chi(x) = 1$ pro všechna racionální čísla $x \in \Re$

Předností analytického vyjádření je, že můžeme použitím metod matematické analýzy zkoumat vlastnosti uvažované funkce, což jiným způsobem nebývá vždy možné.Také můžeme např. určit použitím analytického vzorce hodnoty funkce v každém čísle x, které patří do definičního oboru funkce. Určitým nedostatkem analytického vyjádření je, že postrádá názornost grafického vyjádření.Proto společně s analytickou definicí často používáme k názornějšímu a snadnějšímu výkladu vlastností uvažované funkce i jejího grafického, popř. tabelárního vyjádření.

1.4.4 Slovní způsob zadání funkce

Některé funkce bývají místo analytického výrazu vyjádřeny slovním zněním příslušného pravidla přiřazení. Například Eulerova funkce φ, která udává počet všech přirozených čísel menších než přirozené číslo m a s číslem m nesoudělných, tedy funkce $y = \varphi(m)$, nabývá např. hodnot $\varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2$ atd. A to vzhledem k tomu, že u pojmu dělitelnosti v množině N všech přirozených čísel se dělitel 1 nebere v úvahu.

1.5 Rozdělení funkcí

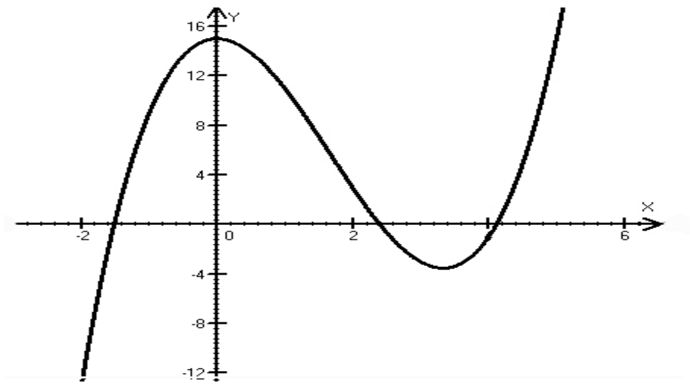
Podle toho jaké operace jsou analytickým výrazem $f(x)$ předepsány pro argument x, dělíme funkce na dvě hlavní skupiny: algebraické a transcendentní.

1.5.1 Algebraické funkce

Funkce $y = f(x)$ se nazývá *algebraická,* jestliže analytickým vyjádřením předpisuje pro argument x konečný počet základních početních operací: sčítání, odčítání, násobení, umocňování při racionálním exponentu.

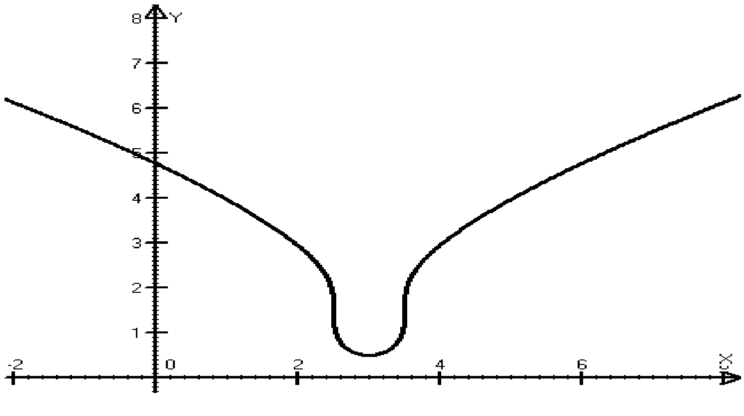
1.5.1.1 Příklady algebraických funkcí

$y = x^3 - 5x^2 + 15$



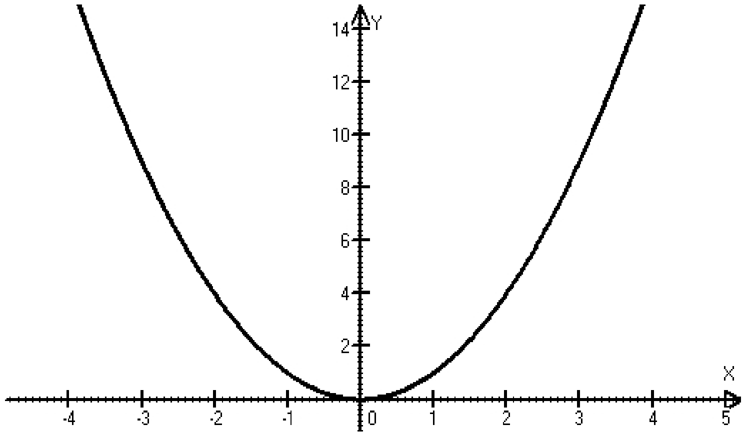
Obr.1.3

$y = \sqrt[3]{4(x-3)^2 - 1} + \frac{1}{2}$



Obr.1.4

$y = x^2$



Obr.1.5

1.5.1.2 Rozdělení algebraických funkcí

Algebraické funkce se dělí na funkce racionální a iracionální.

a) Racionální funkce

U racionálních funkcí se analytickým výrazem předpisuje pro argument x konečný počet těchto čtyř základních racionálních operací: sčítání, odčítání, násobení, dělení.

Racionální funkce se také dělí na dvě skupiny, a to na *celistvé racionální funkce* neboli *polynomy* a na *lomené racionální funkce*.

b) Iracionální funkce

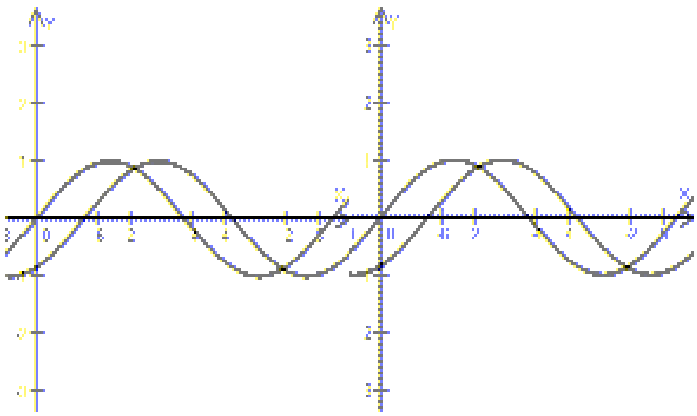
U iracionálních funkcí se kromě uvedených čtyř základních operací vyskytuje v analytickém výrazu $f(x)$ mocnina argumentu x s lomeným racionálním exponentem $\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N, q \neq 1$.

1.5.2 Transcendentní funkce

Funkce $y = f(x)$ se nazývá *transcendentní,* není-li algebraická.

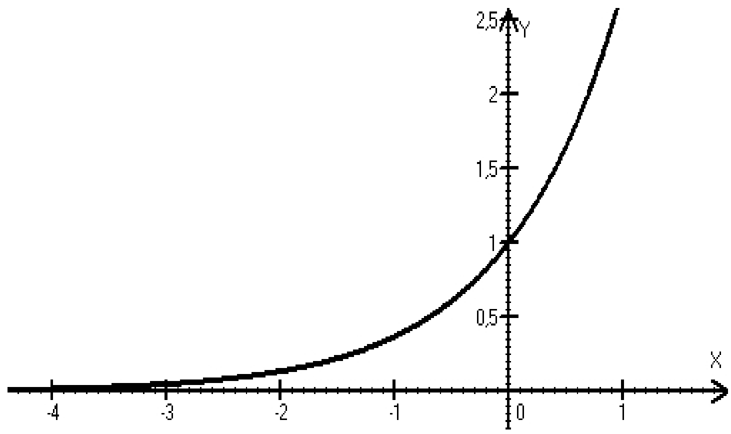
1.5.2.1 Příklady transcendentních funkcí

$y = \sin x$



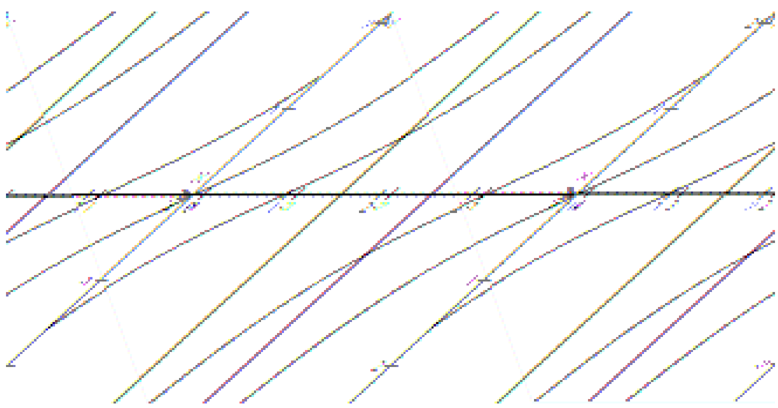
Obr.1.6

$y = e^x$



Obr.1.7

$y = tg\, x$



Obr.1.8

Rozdělení funkcí v explicitním tvaru $y = f(x)$ lze shrnout v tento přehled:

$$Funkce \begin{cases} alebraické \begin{cases} racionální \left\langle \begin{array}{l} celistvé\ neboli\ polynomy \\ lomené \end{array} \right. \\ iracionální \end{cases} \\ transcendentní \left\langle \begin{array}{l} nižší \\ vyšší \end{array} \right. \end{cases}$$

1.6 Početní operace s funkcemi

Mějme dvě funkce: $y = f(x)$ s definičním oborem $D_1 \subseteq \Re$,

$y = g(x)$ s definičním oborem $D_2 \subseteq \Re$.

Nechť $D = D_1 \cap D_2$. Pak na oboru D jsou definovány zvláště funkce s, r, p, q:

1. rovnost $f = g$ funkcí f, g, je-li $f(x) = g(x)$ pro $\forall x \in D$
2. součet $s = f + g$ funkcí f, g, je-li $s(x) = f(x) + g(x)$ pro $\forall x \in D$
3. rozdíl $r = f - g$ funkcí f, g, je-li $r(x) = f(x) - g(x)$ pro $\forall x \in D$
4. součin $p = fg$ funkcí f, g, je-li $p(x) = f(x)g(x)$ pro $\forall x \in D$
5. podíl $q = f / g$ funkcí f, g, je-li $q(x) = f(x) / g(x)$ pro $\forall x \in D$ pro která je $g(x) \neq 0$.

Příklad II

Určeme definiční obor funkce $y = \dfrac{1 + x^2}{\sqrt{(4 - x^2)}}$.

Řešení

Funkce $f(x) = x^2 + 1$ má definiční obor $D_1 = (-\infty, +\infty)$, kdežto funkce $g(x) = \sqrt{(4 - x^2)}$ má definiční obor $D_2 = \langle -2, 2 \rangle$, průnik $D_1 \cap D_2 = \langle -2, 2 \rangle$.

Z tohoto intervalu musíme vyloučit oba body, neboť pro ně je funkce ve jmenovateli rovna nule, tj. $g(x) = \sqrt{(4 - x^2)} = 0$. Proto definičním oborem dané funkce je otevřený interval $(-2,2)$.

2. Limita

Slovo limita pochází z latinského slova limes = hranice, mez.

Na pojmu limita spočívá celá matematická analýza. Již ve starověkém Řecku matematici Euklides z Alexandrie (300 př.n.l.) a zvláště Archimédes ze Syrakus (287-212 př.n.l.) používali při řešení některých úloh početních obratů, které ve své podstatě zahrnují pojem limity. Vlastní pojem limity zavedl až v 17. století anglický matematik John Walls (1616- 1703). Vynálezce diferenciálního počtu Newtona a Leibnize nenapadlo vybudovat základy infinitezimálního počtu na pojmu limity. To učinili až v 19. století matematici Augustin Louis Cauchy (1789- 1857), Bernard Bolzano (1781-1848) a Karl Weierstrass (1815- 1897).

2.1 Limita funkce

Limita funkce je základní pojem matematické analýzy. Dalo by se říci, že limita funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo, k němuž se blíží hodnoty $f(x)$ při $x \to x_0$.

2.1.1 Definice limity

1. Heinova definice (podle německého matematika H. E. Heina):

Nechť je funkce $f(x)$ definována v okolí $U(x_0)$, takže přímo v bodě x_0 definována být nemusí.

a) Zvolme libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ bodů ležících v okolí $U(x_0)$, která konverguje k bodu x_0, takže $\lim x_n = x_0$ pro $n \to \infty$. Když pro každou takovou posloupnost $\{x_n\}$, konvergující k bodu x_0, konverguje vždy příslušná posloupnost $\{f(x_n)\}$ k číslu A, řekneme, že číslo A je *limitou funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0, a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

b) Volíme-li uvažované posloupnosti $\{x_n\}$ jen z pravé části okolí $U(x_0)$ a zůstanou-li ostatní předpoklady beze změny, pak nazýváme číslo A *limitou zprava v bodě* x_0 a píšeme pak $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

c) Obdobně se definuje *limita zleva funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0, kterou značíme $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$. V tom případě uvažované posloupnosti $\{x_n\}$ volíme v levé části okolí $U(x_0)$.

Poznámky

1. Limita funkce v bodě x_0 se někdy pro určitost na rozdíl od limity zprava, resp. zleva nazývá oboustrannou limitou funkce v bodě x_0.

2. Funkce $f(x)$, mající v bodě x_0 oboustrannou limitu A, má v tomto bodě též limitu zprava i limitu zleva, které jsou rovny A. Naopak, má-li funkce v bodě limitu zprava rovnou A_1 a limitu zleva rovnou $A_2 = A_1$, má v bodě x_0 též oboustrannou limitu rovnou $A = A_1 = A_2$.

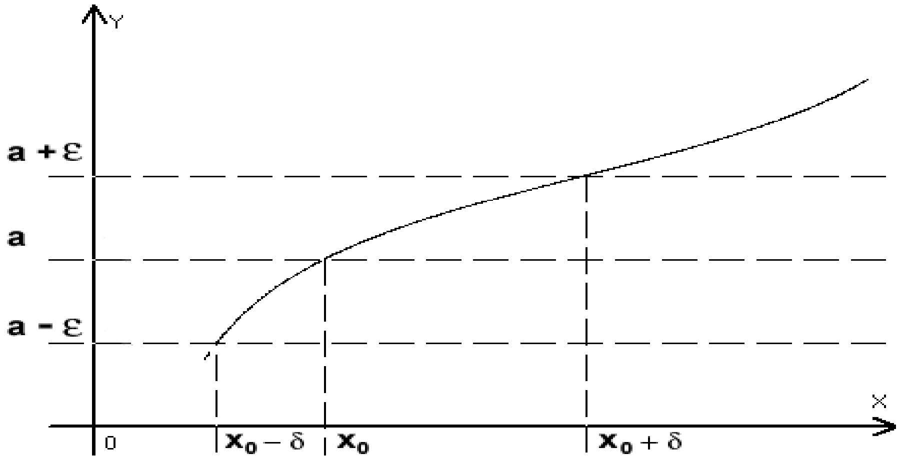
2. Alternativní definice

Nechť f je funkce, $x_0 \in \Re^*$, $a \in \Re^*$. Pravíme, že funkce f má v bodě x_0 limitu a a píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, právě když ke každému okolí $\sigma(a)$ bodu a existuje ryzí okolí $\sigma(x_0)$ bodu x_0 tak, že $\sigma(x_0) \subseteq Dom\ f$ a pro všechna $x \in \sigma(x_0)$ platí $f(x) \in \sigma(a)$.

Tato definice v sobě zahrnuje 9 speciálních případů podle toho, zda je $x_0 \in \Re, x_0 = \infty, x_0 = -\infty$ a také $a \in \Re, a = \infty, a = -\infty$. Je-li $a \in \Re$, je okolím bodu a interval $\sigma(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ a podmínku $f(x) \in \sigma(a)$ lze zapsat ve tvaru $|f(x) - a| < \varepsilon$, je-li $a = \infty$, je $\sigma(a) = (h, \infty)$ a $f(x) \in \sigma(a)$ značí $f(x) > h$.

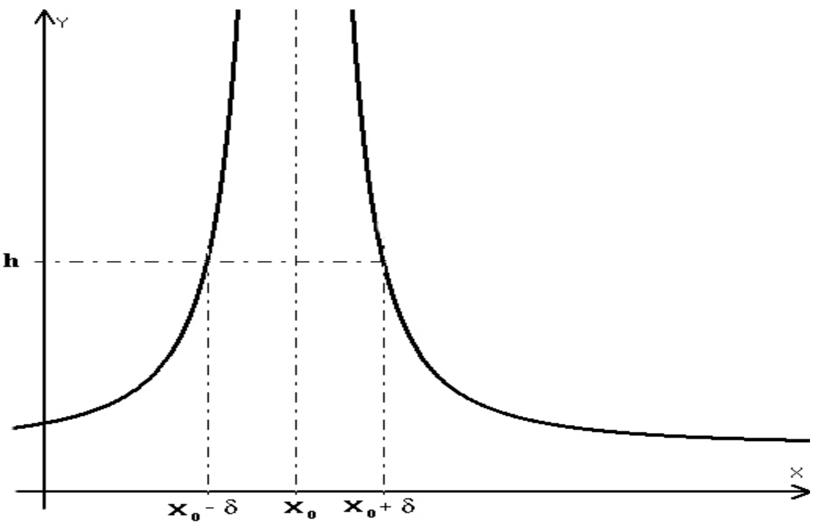
Analogicky pro $x_0 \in \Re$ je $\sigma(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ a $x \in \sigma(x_0)$ značí $0 < |x - x_0| < \delta$, v případě $x_0 = \infty$ je $\sigma(x_0) = (k, \infty)$, takže $x \in \sigma(x_0)$ značí $x > k$.

1. $x_0 \in \Re, a \in \Re$, tj. případ vlastní limity ve vlastním bodě, který je daleko nejdůležitější: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí implikace $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.



obr. 2.1

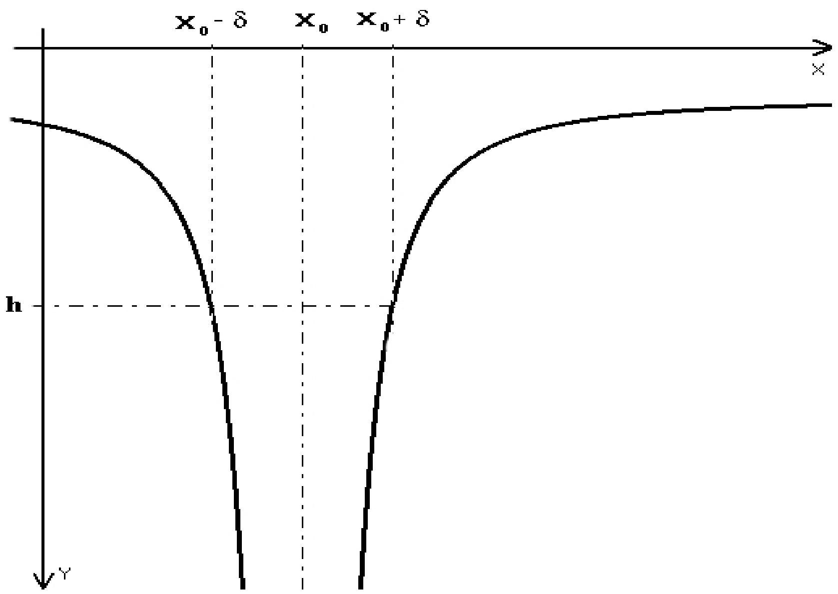
2. $x_0 \in \Re, a = \infty$, tj. nevlastní limita ∞ ve vlastním bodě: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > h$.



obr. 2.2

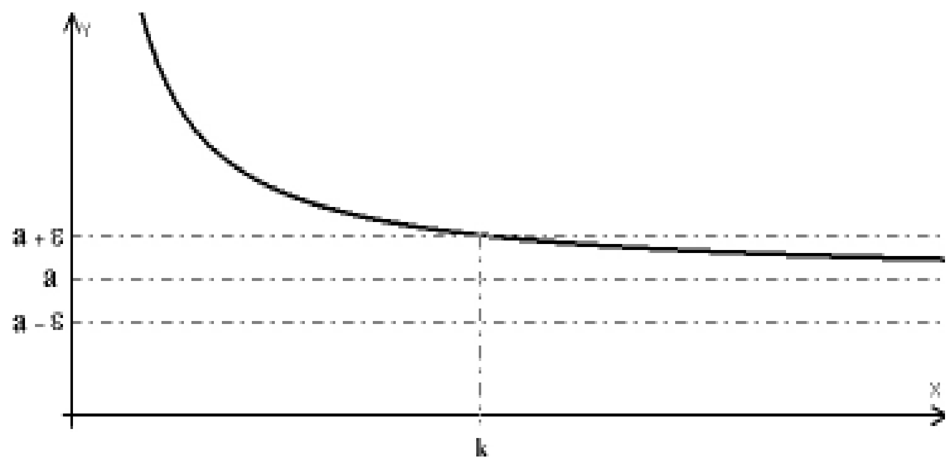
3. $x_0 \in \Re, a = -\infty$, tj. nevlastní limita ∞ ve vlastním bodě: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < h$.



obr. 2.3

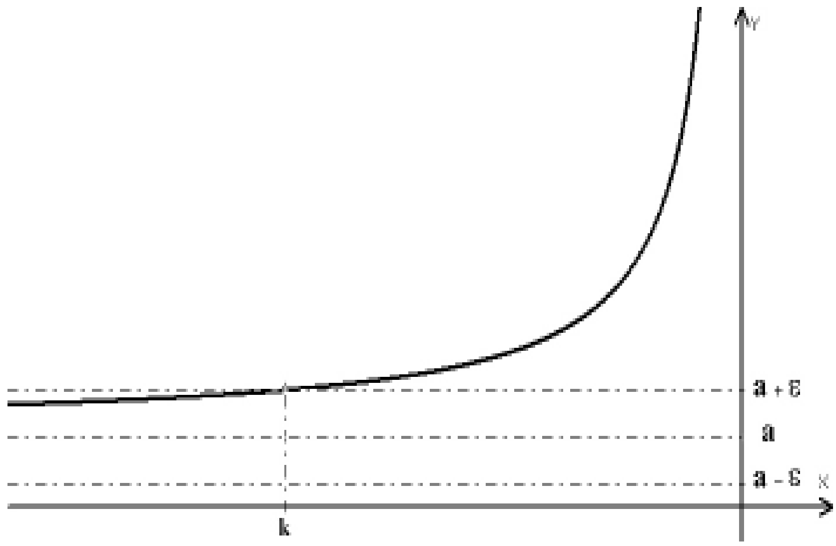
4. $x_0 = \infty, a \in \Re$, tj. vlastní limita v nevlastním bodě ∞: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \Re$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí $x > k \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.



obr. 2.4

5. $x_0 = -\infty, a \in \Re$, tj. vlastní limita v nevlastním bodě ∞: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \Re$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí

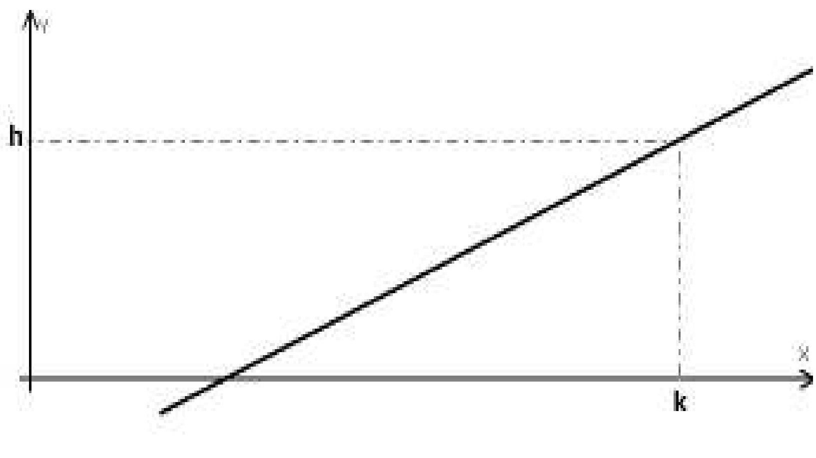
$x < k \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.



obr. 2.5

6. $x_0 = \infty, a = \infty$, tj. nevlastní limita ∞ v nevlastním bodě ∞: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $k \in \Re$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí

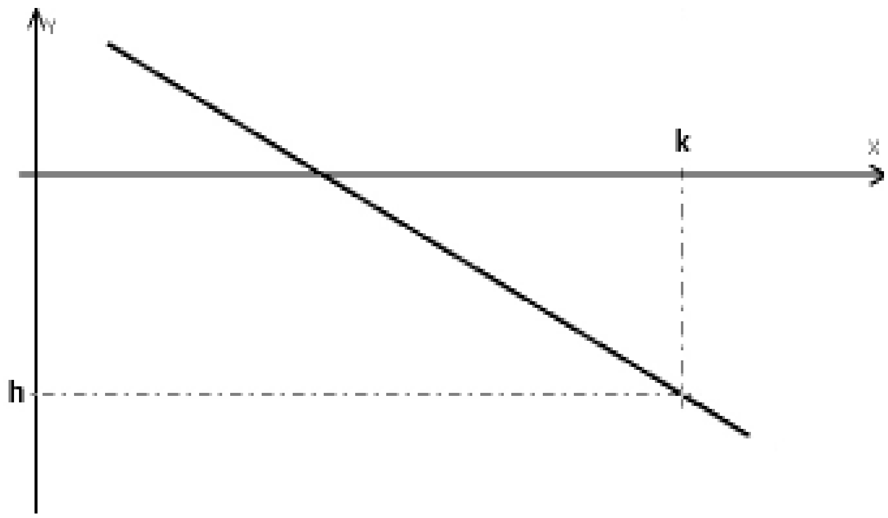
$x > k \Rightarrow f(x) > h$.



obr. 2.6

7. $x_0 = \infty, a = -\infty$, tj. nevlastní limita $-\infty$ v nevlastním bodě ∞: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$,

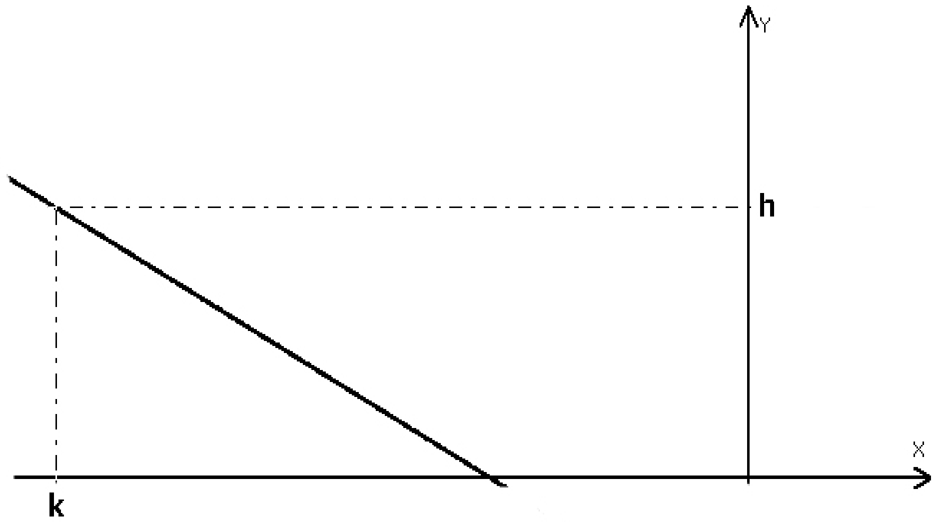
právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $k \in \Re$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí $x > k \Rightarrow f(x) < h$.



obr. 2.7

8. $x_0 = -\infty, a = \infty$, tj. nevlastní limita ∞ v nevlastním bodě $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$,

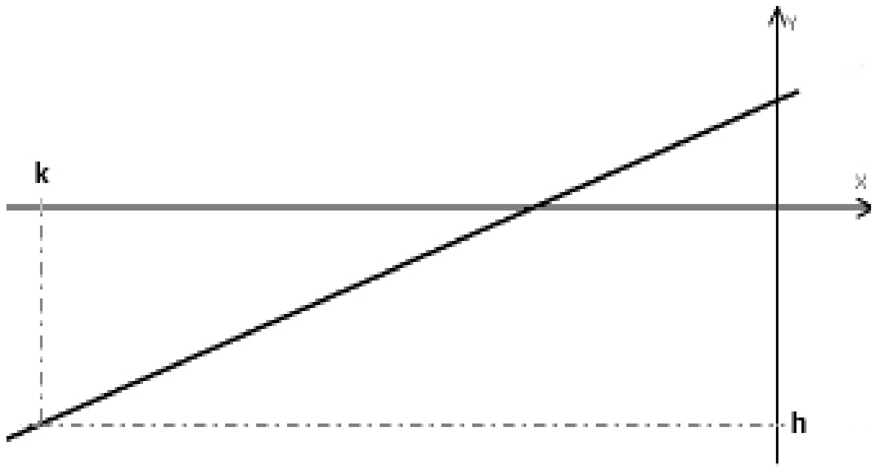
právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $k \in \Re$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí $x < k \Rightarrow f(x) > h$.



obr. 2.8

9. $x_0 = -\infty, a = -\infty$, tj. nevlastní limita ∞ v nevlastním bodě $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,

právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $k \in \Re$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí $x < k \Rightarrow f(x) < h$.



obr. 2.9

2.2 Věty o limitě funkce

2.2.1 Věta

a) Funkce $f(x)$ nemůže mít v daném bodě x_0 více než jednu limitu.

b) Funkce $f(x)$, která má v bodě x_0 limitu, je v určitém okolí tohoto bodu ohraničená.

2.2.2 Věta: o počítání s limitami

Nechť pro $x \to x_0$ je jednak $\lim f(x) = A$, jednak $\lim h(x) = B$. Pak platí pro $x \to x_0$ tyto vzorce:

1. $\lim(f(x) \pm h(x)) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot h(x)) = AB$
3. $\lim[cf(x)] = c \lim f(x) = cA$, kde $c \in \Re$ je libovolná konstanta

4. $\lim(\frac{f(x)}{h(x)}) = \frac{A}{B}$ pro $B \neq 0$ a pro $h(x) \neq 0$ v nějakém okolí bodu x_0

5. $\lim[f(x)]^k = [\lim f(x)]^k = A^k$, kde k je přirozené číslo

6. $\lim|f(x)| = |A|$

2.2.3 Věta: Věta o třech funkcích

Nechť existuje ryzí okolí bodu $x_0 \in \Re$ na němž platí:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A$.

Pak také funkce $g(x)$ má v bodě x_0 limitu, pro niž platí $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$.

Důkaz

Podle předpokladu existuje ryzí $\sigma_1(x_0)$ tak, že $x \in \sigma_1(x_0) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Buď dále $\sigma(A)$ libovolné okolí bodu A. Existuje ryzí $\sigma_2(x_0)$ tak, že $x \in \sigma_2(x_0) \Rightarrow f(x) \in \sigma(A)$ a existuje ryzí $\sigma_3(x_0)$ tak, že $x \in \sigma_3(x_0) \Rightarrow h(x) \in \sigma(A)$. Položme $\sigma(x_0) = \sigma_1(x_0) \cap \sigma_2(x_0) \cap \sigma_3(x_0)$, pak $\sigma(x_0)$ je ryzí okolí bodu x_0 a platí $x \in \sigma(x_0) \Rightarrow f(x) \in \sigma(A), h(x) \in \sigma(A), f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Avšak okolí libovolného bodu je interval, tedy množina která se dvěma body obsahuje i všechny body ležící mezi nimi. Je tedy i $g \in \sigma(A)$ pro $x \in \sigma(x_0)$, tj. $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$.

2.2.4 Věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0, pak má v tomto bodě limitu, rovnou číslu $f(x_0)$.

2.2.5 Věta

Nechť $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$. Pak $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

<u>Důkaz</u>

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{1}{\varepsilon}$ existuje ryzí $\sigma(x_0)$ tak, že

$x \in \sigma(x_0) \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$. Odtud $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2.2.6 Věta

Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž jest $f(x) \neq 0$.

Pak $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$.

<u>Důkaz</u>

Podle předpokladu existuje ryzí $\sigma_1(x_0)$, v němž je $f(x) \neq 0$, takže

$\frac{1}{|f(x)|}$ je definováno.

Buď $h \in \Re$ libovolné, $h > 0$. K číslu $\frac{1}{h} > 0$ existuje ryzí $\sigma_2(x_0)$ tak, že

$x \in \sigma_2(x_0) \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{h}$. Položme $\sigma(x_0) = \sigma_1(x_0) \cap \sigma_2(x_0)$. Pro $x \in \sigma(x_0)$ je

$\frac{1}{|f(x)|}$ definováno a platí $|f(x)| < \frac{1}{h}$. Tj. $\frac{1}{|f(x)|} > h$. Tedy $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$.

2.2.7 Věta

Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je funkce $g(x)$ zdola ohraničená. Pak $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$.

Důkaz

Podle předpokladu existuje ryzí $\sigma_1(x_0)$ a číslo $k \in \Re$ tak, že $x \in \sigma_1(x_0) \Rightarrow g(x) \geq k$.

Buď nyní $h \in \Re$ libovolné. K číslu $h - k \in \Re$ existuje ryzí $\sigma_2(x_0)$ tak, že $x \in \sigma_2(x_0) \Rightarrow f(x) > h - k$. Pak pro $x \in \sigma(x_0) = \sigma_1(x_0) \cap \sigma_2(x_0)$ platí $f(x) + g(x) > (h - k) + k = h$. Tedy $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$.

2.2.8 Věta

Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž jest $g(x) \geq k > 0$. Pak $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \infty$.

Důkaz

Označme $\sigma_1(x_0)$ ono ryzí okolí bodu x_0, v němž platí $g(x) \geq k$. Buď $h \in \Re$, $h > 0$ libovolné. K číslu $\frac{h}{k}$ existuje ryzí $\sigma_2(x_0)$ tak, že $x \in \sigma_2(x_0) \Rightarrow f(x) > \frac{h}{k}$. Položme $\sigma(x_0) = \sigma_1(x_0) \cap \sigma_2(x_0)$. Pro $x \in \sigma(x_0)$ platí $f(x) g(x) > \frac{h}{k} . k = h$. Tedy $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \infty$.

2.2.9 Věta: O limitě složené funkce

Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \alpha$ a $\lim\limits_{y \to \alpha} f(y) = A$. Nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž platí $\varphi(x) \neq \alpha$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A$.

Důkaz

Označme $\sigma_1(x_0)$ ono ryzí okolí bodu x_0, v němž $\varphi(x) \neq \alpha$ a buď $\sigma(A)$ libovolné okolí bodu A. Pak existuje ryzí $\sigma(\alpha)$ tak, že $y \in \sigma(\alpha) \Rightarrow f(y) \in \sigma(A)$. Označme $\sigma(\alpha) \cup \{\alpha\} = \sigma'(\alpha)$, pak $\sigma'(\alpha)$ je okolí bodu α ,k němuž tedy existuje ryzí $\sigma_2(x_0)$ tak, že $x \in \sigma_2(x_0) \Rightarrow \varphi(x) \in \sigma'(\alpha)$. Položme $\sigma(x_0) = \sigma_1(x_0) \cap \sigma_2(x_0)$, pro $x \in \sigma(x_0)$ jest $\varphi(x) \in \sigma'(\alpha)$ a $\varphi(x) \neq \alpha$, tedy $\varphi(x) \in \sigma(\alpha)$, takže $f[\varphi(x)] \in \sigma(A)$. Je tedy $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A$

2.2.10 Definice

a) Nechť f je funkce, $x_0 \in \Re, a \in \Re^*$. Pravíme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zprava rovnou a a píšeme $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = a$, právě když ke každému okolí $\sigma(a)$ bodu a existuje pravé ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 tak, že $P(x_0) \subseteq Dom\ f$ a pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in \sigma(a)$.

b) Nechť f je funkce, $x_0 \in \Re, a \in \Re^*$. Pravíme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zleva rovnou a a píšeme $\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = a$, právě když ke každému okolí $\sigma(a)$ bodu a existuje levé ryzí okolí $L(x_0)$ bodu x_0 tak, že $L(x_0) \subseteq Dom\ f$ a pro všechna $x \in L(x_0)$ platí $f(x) \in \sigma(a)$.

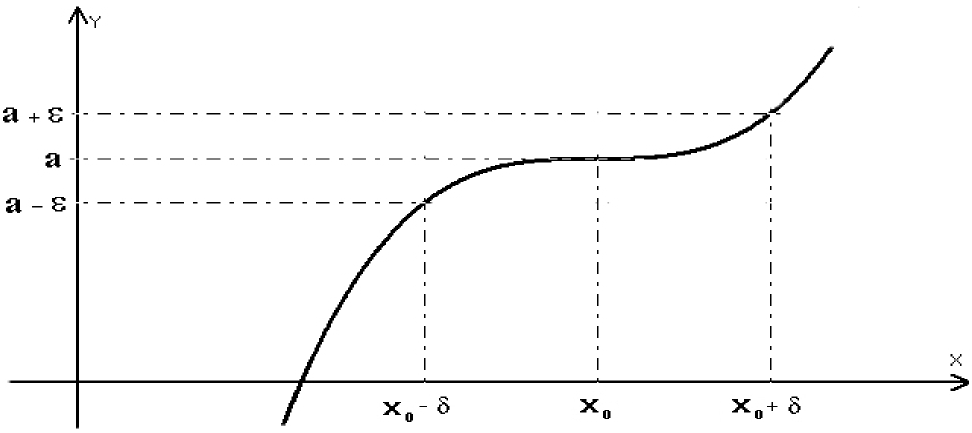
Definici lze opět rozepsat do tří speciálních tvarů podle toho zda $a \in \Re,\ a = \infty,\ a = -\infty$:

1. $a \in \Re$: $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = a$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro

všechna $x \in \Re$ platí $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = a$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro

všechna $x \in \Re$ platí $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.



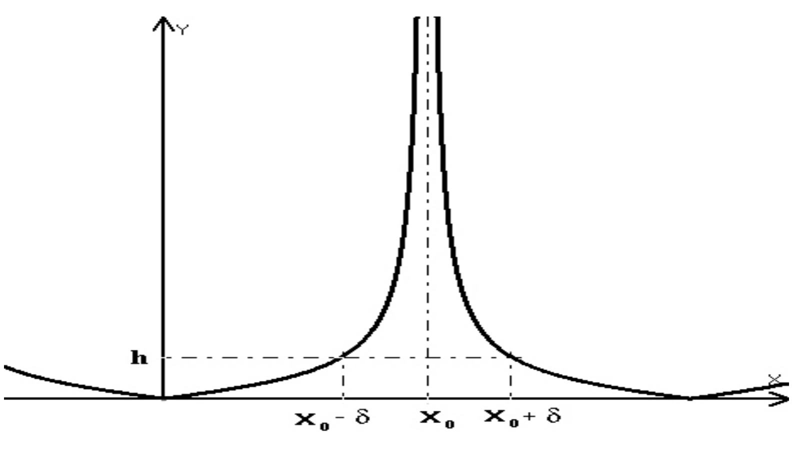
obr. 2.10

2. $a = \infty$: $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = \infty$, právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro

všechna $x \in \Re$ platí $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > h$.

$\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = \infty$, právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro

všechna $x \in \Re$ platí $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > h$.



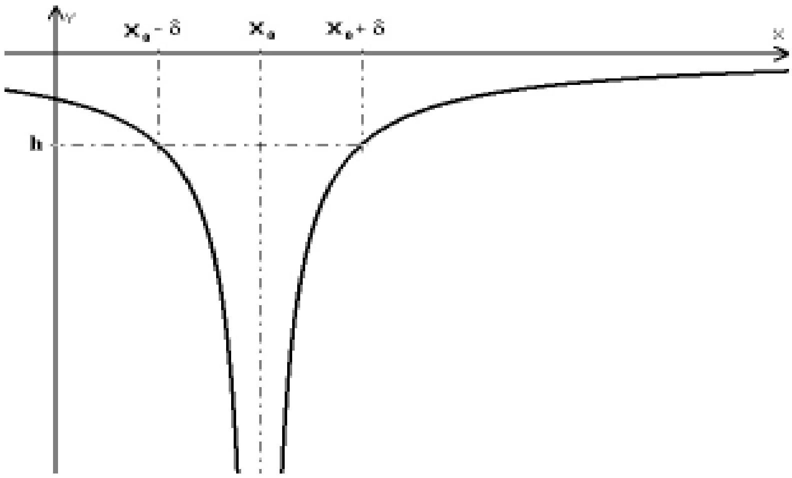
obr. 2.11

3. $a = -\infty$: $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = -\infty$, právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro

všechna $x \in \Re$ platí $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < h$.

$\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = -\infty$, právě když ke každému $h \in \Re$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro

všechna $x \in \Re$ platí $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < h$.



obr. 2.12

2.2.11 Věta

Nechť f je funkce, $x_0 \in \Re$, $a \in \Re$. Platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ právě tehdy, když platí $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = a$.

2.2.12 Věta

a) Nechť funkce f je monotónní v nějakém levém ryzím okolí bodu $x_0 \in \Re^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x)$.

b) Nechť funkce f je monotónní v nějakém pravém ryzím okolí bodu $x_0 \in \Re^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x)$.

Důkaz

Poznamenejme nejdříve, že libovolné okolí bodu ∞ lze považovat za levé ryzí okolí tohoto bodu a podobně pro bod $-\infty$. Platí tady naše věta i pro x_0 nevlastní. Předpokládejme pro určitost, že existuje levé ryzí okolí $L(x_0)$ bodu x_0, v němž je f neklesající. Označme $M = \{f(x); x \in L(x_0)\}$, pak je $M \subseteq \Re, M \neq 0$. Je-li M shora ohraničená, pak existuje $\sup M = a \in \Re$, dokážeme, že v tomto případě $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = a$. Buď tedy $\varepsilon > 0$ libovolné, existuje $x_1 \in L(x_0)$ tak, že $f(x_1) > a - \varepsilon$. Označíme-li $L_1(x_0) = (x_1, x_0)$, je $L_1(x_0)$ levé ryzí okolí bodu x_0 a pro $x \in L_1(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_1)$, tedy $a - \varepsilon < f(x) \leq a$, tj. $|f(x) - a| < \varepsilon$. Je tedy $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = a$. Nechť nyní M není shora ohraničená, dokážeme, že pak $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \infty$. Buď $h \in \Re$ libovolné, existuje $x_1 \in L(x_0)$ tak, že $f(x_1) > h$. Je-li opět $L_1(x_0) = (x_1, x_0)$, pak pro $x \in L_1(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_1)$, tedy $f(x) > h$. Odtud $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \infty$.

2.2.13 Věta

Funkce f má v bodě $x_0 \in \Re^*$ vlastní limitu tehdy a jen tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \to x_0$ a $x_n \neq x_0$ pro všechna $n \in N$ existuje $\lim f(x_n)$.

2.2.14 Věta: Cauchy-Bolzanovo kriterium

Funkce f má v bodě $x_0 \in \Re$ vlastní limitu tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \Re, \varepsilon > 0$ existuje ryzí okolí $\sigma(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé dva body $x_1 \in \sigma(x_0), x_2 \in \sigma(x_0)$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Důkaz

1. Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \Re$ a buď $\varepsilon \in \Re, \varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje ryzí $\sigma(x_0)$ takové, že $x \in \sigma(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro libovolné $x_1 \in \sigma(x_0), x_2 \in \sigma(x_0)$ platí

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - a - [f(x_2) - a]| \le |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

2. Nechť platí podmínka věty a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje ryzí $\sigma(x_0)$ tak, že $x_1 \in \sigma(x_0), x_2 \in \sigma(x_0) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Buď $\{x_n\}$ libovolná posloupnost taková, že $x_n \to x_0$ a $x_n \ne x_0$ pro všechna $n \in N$. Pak existuje $n_0 \in N$ tak, že $x_n \in \sigma(x_0)$ pro $n \ge n_0$. Tedy pro $m \ge n_0, n \ge n_0$ je $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, takže $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská. Podle věty 2.2.14 existuje $\lim_{x \to x_0} f(x)$ a tato limita je vlastní, neboť je současně rovna limitě posloupnosti $\{f(x_n)\}$.

2.2.15 Věta

Nechť $\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \Re$ a nechť $a_n = f(n)$ pro $n \in N$. Pak $\lim a_n = a$.

Důkaz

Buď $\sigma(a)$ libovolné okolí bodu a. Pak existuje $k \in \Re$ tak, že pro $x > k$ je $f(x) \in \sigma(a)$. Je-li n_0 nejmenší přirozené číslo takové, že $n_0 > k$, pak $n \ge n_0$ platí $a_n = f(n) \in \sigma(a)$. Tedy $\lim a_n = a$

2.2.16 Definice

Nechť $x_0 \in \Re$ a f je funkce, která je definována a shora ohraničená v nějakém ryzím δ_{0^-} okolí bodu x_0. Pro libovolné $\delta \in \Re, 0 < \delta \leq \delta_0$ položme $M(\delta) = M_f(\delta) = \sup\{f(x); x \in \Re, 0 < |x - x_0| < \delta\}$. Pak $\lim\limits_{\delta \to 0^+} M(\delta)$ nazýváme limes superior funkce f v bodě x_0: $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} M_f(\delta)$. Není-li f shora ohraničená v žádném ryzím okolím bodu x_0, klademe $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Poznámka

V případě shora ohraničená funkce $\lim\limits_{\delta \to 0^+} M(\delta)$ skutečně existuje, neboť zřejmě $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq \delta_0 \Rightarrow M(\delta_1) \leq M(\delta_2)$, tj. funkce $M(\delta)$ je neklesající na intervalu $(0, \delta_0)$ a tvrzení plyne z věty 2.2.12.

2.2.17 Definice

Nechť $x_0 \in \Re$ a f je funkce, která je definována a zdola ohraničená v nějakém ryzím δ_{0^-} okolí bodu x_0. Pro libovolné $\delta \in \Re, 0 < \delta \leq \delta_0$ položme $m(\delta) = m_f(\delta) = \inf\{f(x); x \in \Re, 0 < |x - x_0| < \delta\}$. Pak $\lim\limits_{\delta \to 0^+} m(\delta)$ nazýváme limes inferior funkce f v bodě x_0: $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} m_f(\delta)$. Není-li f zdola ohraničená v žádném ryzím okolím bodu x_0, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Poznámka

Buď f funkce definována v nějakém ryzím okolí bodu $x_0 \in \Re$. Pak $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$.

2.3 Příklady

Příklad III

Dokažme, že $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Řešení

Zvolme libovolné velké číslo $E > 0$. Protože $x^2 \to 0$, je v určitém okolí počátku stále $0 < x^2 < \frac{1}{E}$. Odtud máme $\frac{1}{x^2} > E$, což značí, že $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Příklad IV

Dokažme, že $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1}$ neexistuje.

Řešení

Vypočítáme limitu zprava pro $x \to 1^+$, kdy se x blíží k jedné v číslech $x > 1$, i limitu zleva pro $x \to 1^-$, kdy se x blíží k jedné v číslech $x < 1$. Budou-li obě limity různé, pak pro $x \to 1$ limita dané funkce neexistuje.

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$, neboť limita čitatele $\lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2 > 0$. V okolí bodu $x = 1$, tj. v intervalu $(1, 1+\delta)$, kde $\delta > 0$, je výraz $x - 1 > 0$. Limita jmenovatele $\lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0$. Jelikož limita čitatele je $2 > 0$ a limita jmenovatele je 0, je limita funkce pro $x \to 1^+$ rovna $+\infty$.

$\lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$ a $\lim_{x \to 1^-} (x-1) = 0$, protože pro všechna x z okolí bodu $x = 1$, tj. z intervalu $(1-\delta, 1)$, $\delta > 0$, je výraz $x - 1 < 0$. Čitatel je kladný, jmenovatel záporný, proto $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1}$ neexistuje.

Příklad V

Vypočtěme $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$

Řešení

Výsledek bychom mohli napsat rovnou $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}=0$,

protože $x\to\infty$ a stupeň čitatele x^3 je nižší než stupeň jmenovatele x^4.

Nebo můžeme postupovat následně:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+7x+12)(x+5)}{x^4+x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+12x^2+47x+60}{x^4+x-11}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{47}{x^3}+\frac{60}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}-\frac{11}{x^4}}=\frac{0+0+0+0}{1+0-0}=\frac{0}{1}=0$$

Příklad VI

Vypočtěme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{2x^3-2x}}.$$

Řešení

Použijeme tvrzení $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ právě když $\lim\limits_{y\to 0^+} f(\frac{1}{y})=A$ věty 2.2.4

Označíme-li

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{2x^3-2x}},$$

pak

$$f(\frac{1}{y}) = \frac{\sqrt{(\frac{1}{y^2} + \frac{3}{y})}}{\sqrt[3]{(\frac{2}{y^3} - \frac{2}{y})}} = \sqrt[6]{\frac{(\frac{1+3y}{y^2})^3}{(\frac{2-2y^2}{y^3})^2}} = \sqrt[6]{\frac{1+9y+27y^2+27y^3}{2^2(1-2y^2+y^4}} \,.$$

Podle uvedeného tvrzení je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \,.$$

Příklad VII

Vypočtěme $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{3+2x^2})$

Řešení

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{3+2x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-2x}{x^2} - \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{3+2x^2} = 0-(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

V první limitě je stupeň čitatele nižší než jmenovatele, $x \to \infty$ a proto je limita rovna 0, v druhé limitě je čitatel i jmenovatel stejného stupně, proto limita je rovna podílu koeficientů u nejvyšších mocnin.

Příklad VIII

Vypočtěme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

Řešení

V příkladech tohoto typu se snažíme odstranit odmocniny buď z čitatele nebo jmenovatele rozšiřováním, případně krácením zlomku.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2(1-x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x^2-x^3}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Příklad IX

Určeme

$$\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{(1+x^2)}-x).$$

Řešení

Při výpočtu této limity nelze použít věty 2.2.2, neboť

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{(1+x^2)}=+\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} x=+\infty$$

Proto se opět pokusíme výraz $x(\sqrt{(1+x^2)}-x)$ vhodně upravit:

$$x(\sqrt{(1+x^2)}-x)=x(\sqrt{(1+x^2)}-x)\frac{\sqrt{(1+x^2)}+x}{\sqrt{(1+x^2)}+x}=\frac{x(1+x^2-x^2)}{\sqrt{(1+x^2)}+x}=\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+1}$$

Nyní již snadno vypočteme

$$\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{(1+x^2)}-x)=\frac{1}{2}.$$

Příklad X

Určeme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{(1-\cos x)}}{\sin^2 x}.$$

Řešení

Platí

$$\frac{2-(1+\cos x)}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{(1+\cos x)})}=\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)(\sqrt{2}+\sqrt{(1+\cos x)})}$$

$$=\frac{1}{(1+\cos x)(\sqrt{2}+\sqrt{(1+\cos x)})}$$

Podle věty 2.2.4 se hledaná limita rovná $\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

Příklad XI

Vypočteme

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{2x+\ln(1+x)} .$$

Řešení

Protože limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

je podle vzorce $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ rovna číslu 1, platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{2x+\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\ln(1+x)}{x}}{2-\frac{\ln(1+x)}{x}}=2 .$$

Příklad XII

Podle definice limity dokažme, že funkce $f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ má tyto limity:

a) $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Řešení

a) Máme-li dokázat, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, musíme podle definice limity k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ najít takové číslo $\delta > 0$, aby nerovnost $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} - 1\right| = \left|\dfrac{x}{2x+1}\right| < \varepsilon$ platila pro $|x| < \delta$.

Je-li $x > 0$, pak $\left|\dfrac{x}{2x+1}\right| = \dfrac{x}{2x+1}$, a je tedy třeba najít takové číslo $\delta > 0$, aby pro $0 < x < \delta$ platily nerovnosti

$$0 < \frac{x}{2x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x < 2\varepsilon x + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}$$

Je-li $-\dfrac{1}{2} < x < 0$, pak $\left|\dfrac{x}{2x+1}\right| = -\dfrac{x}{2x+1}$, a je tedy třeba najít takové číslo $\delta > 0$, aby pro $-\delta < x < 0$ platily nerovnosti

$$-\varepsilon < \frac{x}{2x+1} < 0 \Leftrightarrow -2\varepsilon x - \varepsilon < x < 0 \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} < x < 0$$

Položíme-li $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}, \dfrac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \dfrac{1}{2}\right\}$, pak nerovnost $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} - 1\right| < \varepsilon$ je splněna pro všechny body x, pro něž platí $|x| < \delta$.

Tím je důkaz proveden.

b) Máme-li dokázat, že $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$ musíme podle definice nevlastní limity zprava najít k libovolnému číslu $K > 0$ takové číslo $\delta > 0$, aby nerovnost

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} > K$$

platila pro $0 < x + \frac{1}{2} < \delta$.

Pro tyto body x platí $x + 1 > \frac{1}{2}$ a $0 < 2x + 1 < 2\delta$, a tedy

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{x+1}{2x+1} > \frac{1}{4\delta}.$$

Položíme-li $\delta = \frac{1}{4K}$, je požadavku definice 2.1.1 vyhověno.

c) Postup důkazu je obdobný jako v příkladu b). Máme-li dokázat, že $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$, musíme podle definice nevlastní limity zleva k libovolnému číslu $K < 0$ najít takové číslo $\delta > 0$, aby nerovnost

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} < K$$

platila pro $-\delta < x + \frac{1}{2} < 0$.

Pro tyto body x platí $\frac{1}{2} - \delta < x + 1$ a $0 > 2x + 1 > -2\delta$, a tedy

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{4\delta}.$$

Položíme-li $\delta = -\frac{1}{4K - 2}$, je požadavek definice 2.1.1 splněn.

d) Máme-li dokázat, že $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, musíme podle definice vlastní limity v nevlastním bodě k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ najít takové číslo x_0, že pro $x > x_0$ platí nerovnost $\left| \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2|2x+1|} < \varepsilon$.

Je-li $x > -\frac{1}{2}$, pak $\frac{1}{2|2x+1|} = \frac{1}{2(2x+1)}$ a nerovnost

$$\frac{1}{2(2x+1)} < \varepsilon$$

znamená totéž jako nerovnost

$$x > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} = x_0$$

Zvolíme-li tedy za x_0 číslo $\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, pak pro $x > x_0$ platí

$$\left| \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon .$$

Tím je důkaz proveden.

Příklad XIII

Pomocí definice nevlastní limity funkce dokažme, že

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty .$$

Jak velké číslo δ je nutno zvolit, je-li $K = 10, 100, 1000$?

<u>Řešení</u>

Podle definice musíme k libovolnému zvolenému číslu $K > 0$ najít takové číslo $\delta > 0$, aby nerovnost

$$\frac{1}{(x-1)^2} > K$$

platila pro $0 < |x-1| < \delta$. Zvolíme-li $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{K}}$, pak $\frac{1}{(x-1)^2} > K$, a tedy stačí položit $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Z toho tedy plyne, že pro $K = 10$ je $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, pro $K = 100$ je $\delta = \frac{1}{10}$ a pro $K = 1000$ je $\delta = \frac{1}{\sqrt{1000}}$.

2.4 L´Hospitalovo pravidlo

2.4.1 Úvodní poznámka o tzv. neurčitých výrazech

V této kapitole rozšíříme uvedená pravidla o případy, kdy limity není možno vypočíst dosud známými metodami. Tak např. vezměme v úvahu výraz $\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2}=u(x)$, který není definován pro $x=0$. Přitom je $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}=+\infty$. Vzhledem k tomu se říká (a poznamenejme, že ne zcela správně, ale spíše z historických důvodů), že jde o tzv. neurčitý výraz typu $\infty-\infty$ (vhodněji limitní typ $\infty-\infty$). Kdybychom výraz $u(x)$ psali ve tvaru $u(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$,dostali bychom pro $x\to 0$ „ neurčitý výraz“ typu $0/0$. Přitom zřejmě o žádnou „neurčitost“ výrazu nejde, ale o výpočet limity výrazu $u(x)$, a tato limita buď existuje, nebo neexistuje. Celkem rozeznáváme neurčité výrazy typů $0/0, \infty/\infty, 0.\infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty, \infty-\infty$.

Uvedené neurčité výrazy lze převést na tvar $0/0$, popř. ∞/∞. O limitě těchto dvou výrazů platí velmi praktické pravidlo, zvané l´Hospitalovo, které však v některých případech k výpočtu uvedených limit nestačí. Proto se používá i jiných metod, zejména pak Taylorova vzorce.

2.4.2 Definice

Říkáme, že podíl $u(x)/v(x)$ je pro $x\to a$ neurčitým výrazem typu 0/0, popř. typu ∞/∞, jestliže je $\lim_{x\to a}u(x)=\lim_{x\to a}v(x)=0$, popř. $\lim_{x\to a}u(x)=\pm\infty, \lim_{x\to a}v(x)=\pm\infty$.

Poznámky

1.V této definici místo limitního přechodu $x\to a$ můžeme vzít v úvahu kterýkoli z limitních přechodů $x\to a+, x\to a-, x\to+\infty, x\to-\infty$.

2. Obdobně se definují další neurčité výrazy typů $\infty-\infty, 0.\infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$. Tak např. neurčitým výrazem typu $\infty-\infty$ rozumíme limitu $\lim_{x\to a}[u(x)-v(x)]$, jestliže

$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = \pm\infty.$ Přitom je velmi důležité znaménko minus u $v(x)$, neboť např. symbol $+\infty + \infty = +\infty$ nepředstavuje žádný „ neurčitý výraz“; podobně je $-\infty - \infty = -\infty.$ Podobně neurčitým výrazem typu ∞^0 rozumíme limitu $\lim u(x)^{v(x)}$, jestliže $\lim_{x\to a} u(x) = +\infty$, kdežto $\lim_{x\to a} v(x) = 0.$ Obdobně je tomu u ostatních „ neurčitých výrazů“.

2.4.3 L´Hospitalovo pravidlo

Nechť pro $x \to a$ představuje podíl $\frac{u(x)}{v(x)}$ neurčitý výraz typu $0/0$, popř. ∞/∞.

Existuje-li $\lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = A$

(a to vlastní, popř. nevlastní limita), pak existuje též limita $\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}$

a platí $\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = A$.

2.4.4 Neurčité výrazy typu $\infty - \infty$

Jde o limitu $\lim_{x\to a} [u(x) - v(x)]$, kde $\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = \pm\infty.$

Abychom zde mohli použít l´Hospitalova pravidla, předpokládáme tento výraz na symbol typu $0/0$, popř. ∞/∞ např. na základě identity $u - v = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$.

Příklad XIV

Vypočtěme $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

Řešení

Protože jde o symbol $\infty - \infty$, upravíme jej na symbol $0/0$ tím, že položíme $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$.

Zlomek na pravé straně je symbol typu $0/0$. Proto můžeme použít l´Hospitalova pravidla. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = \frac{0}{2-0} = 0.$$

2.4.5 Neurčitý výraz typu $0.\infty$

Jde o limitu $\lim_{x\to a}[u(x)v(x)]$, přičemž $\lim_{x\to a} u(x) = 0, \lim_{x\to a} v(x) = \pm\infty$. Zde před použitím l´Hospitalova pravidla upravujeme výraz na symbol $0/0$, popř. ∞/∞ např. použitím identit $uv = \frac{u}{1/v} = \frac{v}{1/u}$.

Příklad XV

Vypočtěme $\lim_{x\to 0^+}(x \ln x)$.

Řešení

Jde o symbol $0.(\infty)$. Abychom mohli použít l´Hospitalova pravidla, upravíme jej na symbol ∞/∞. Je totiž

$$\lim_{x\to 0^+}(x 1nx) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1nx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

2.4.6 Neurčité výrazy typů $\infty^0, 0^0, 1^\infty$

Je – li $u(x) \geq 0$, pak výraz $[u(x)]^{v(x)}$ může být pro $x \to a$ jedním z uvedených symbolů, pokud $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$ (popř.0, popř.1), kdežto $\lim_{x \to a} v(x) = 0$, popř. $\pm\infty$.

Ve všech uvedených případech vyjádříme mocninu u^v ve tvaru exponenciální funkce na základě vztahu $u^v = e^{v \ln u}$. Přitom výraz $v \ln u$ přejde v symbol $0.\infty$.

Příklad XVI

Vypočtěme $\lim x^x$ pro $x \to 0^+$.

Řešení

Jde o symbol 0^0. Položme $x^x = e^{x \ln x}$. Protože $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, jak jsme určili v příkladu XV, je hledaná limita $\lim_{x \to 0+} x^x = e^{\lim(x \ln x)} = e^0 = 1$.

Příklad XVII

Vypočteme $\lim(1+kx)^{1/x}$ pro $x \to 0^+$.

Řešení

Jde o symbol 1^∞. Položme $(1+kx)^{1/x} = e^{(1/x)\ln(1+kx)}$. Přitom je

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+kx)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{k}{1+kx} = k$$

Proto je $\lim_{x \to 0^+} (1+kx)^{1/x} = e^{\lim[(1/x)\ln(1+kx)]} = e^k$

Příklad XVIII

Vypočtěme $\lim\limits_{x \to 0+} (\ln \frac{1}{x})^x$.

Řešení

Jde o symbol ∞^0. Položme $1/x = t$, takže pro $x \to 0+$ je $t \to +\infty$.

Dále je ($(\ln \frac{1}{x})^x = e^{x \ln(1/x)} = e^{(1/t) \ln t}$.

Protože $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$,

je $\lim\limits_{x \to 0+} (\ln \frac{1}{x})^x = e^0 = 1$

3. Spojitost

V matematice i v jejích aplikacích jsou nejdůležitější funkce $f(x)$, které mají v daném bodě x_0 limitu rovnou funkční hodnotě $f(x_0)$. Příkladem takových funkcí jsou polynomy $P(x)$. Takové funkce se nazývají spojité v bodě x_0.

3.1 Spojitost v bodě

3.1.1 Cauchyho definice

Nechť D a H jsou podmnožiny $\Re$. Říkáme, že funkce $f: \; D \to H, x \mapsto f(x)$ je spojitá v bodě $a \in D$, jestliže pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro každé $x \in D$ vyhovující nerovnosti $|x-a| < \delta$ platí nerovnice $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Poznámka

Výraz $|x-a| < \delta$ znamená, že leží v intervalu $(a-\delta, a+\delta)$, tomuto intervalu se říká δ okolí bodu a. Podobně výraz $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ znamená, že funkční hodnota $f(x)$ patří do intervalu $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, tzn. ε okolí bodu $f(a)$.

3.1.2 Definice

Pravíme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \Re$, jestliže platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.Pravíme, že tato funkce je zprava spojitá v bodě $x_0 \in \Re$, právě když $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = f(x_0)$. Pravíme, že tato funkce je zleva spojitá v bodě $x_0 \in \Re$, právě když $\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = f(x_0)$.

Poznámky

1. Jelikož $x_0 \in \Re$, $f(x_0) \in \Re$, lze definice spojitosti dát tento tvar: f je spojitá v bodě x_0, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \Re$ platí $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Je-li f spojitá v bodě $x_0 \in \Re$, je definovaná v tomto bodě a v nějakém jeho okolí.

3. Je-li f spojitá v bodě $x_0 \in \Re$, pak je v nějakém okolí tohoto bodu ohraničená.

4. Spojitost funkce je definována pouze v bodech $x_0 \in \Re$. Nelze definovat spojitost funkce v nevlastních bodech.

3.1.3 Věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \Re$ právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

3.1.4 Věta o spojitosti složené funkce

Nechť funkce $\varphi(x)$ je spojitá v bodě x_0. Nechť $\varphi(x_0) = y_0$ a nechť $f(y)$ je spojitá v bodě y_0. Pak složená funkce $f[\varphi(x)]$ je spojitá v bodě x_0.

<u>Důkaz</u>

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, existuje $\eta > 0$ tak, že pro všechna $y \in \Re$, pro něž $|y - y_0| < \eta$, platí $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. K číslu $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \Re$, pro něž $|x - x_0| < \delta$, platí $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \eta$. Tedy pro všechna

$x \in \Re$, pro něž $|x - x_0| < \delta$, platí $|f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)]| = |f[\varphi(x)] - f(y_0)| < \varepsilon$, tj. $f[\varphi(x)]$ je spojitá v bodě x_0.

3.1.5 Definice

Body, ve kterých funkce $f(x) = y$ není spojitá, se nazývají body nespojitosti funkce f. Tyto body se obvykle dělí na dva druhy:

1. Bodem nespojitosti prvního druhu funkce f nazýváme bod a, v němž sice existují obě jednostranné vlastní limity (tj. zprava i zleva) funkce f, ale buď aspoň jedna z nich je různá od hodnoty $f(a)$, nebo funkce f není v bodě a definovaná.

2. Bodem nespojitosti druhého druhu funkce f nazýváme bod a, v němž buď neexistuje některá z jednostranných vlastních limit (buď zprava nebo zleva) funkce f, nebo žádná z těchto limit neexistuje, nebo aspoň jedna z jednostranných limit je nevlastní.

3.2 Spojitost na otevřeném a uzavřeném intervalu

3.2.1 Definice

Funkce $y = f(x)$ se nazývá spojitá na otevřeném intervalu (a,b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

3.2.2 Definice

Funkce $y = f(x)$ se nazývá spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$, je-li spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu, kdežto v jeho krajních bodech je spojitá jen zprava (jde-li o bod $x = a$), popř. jen zleva (jde-li o bod $x = b$).

3.2.3 Definice

Funkce $y = f(x)$ se nazývá po částech spojitá na intervalu J, má-li v intervalu J konečný počet bodů nespojitosti pouze prvního druhu.

3.2.4 Věta

Je-li funkce $y = f(x)$ spojitá v bodě $x = a$ a je-li přitom $f(a) > 0$, popř. $f(a) < 0$, pak existuje okolí $U(a)$, na kterém je stále $f(x) > 0$, popř. $f(x) < 0$.

3.2.5 Věta

Jsou-li funkce $f(x)$ a $h(x)$ spojité na intervalu J, jsou v tomto intervalu spojité také tyto funkce:

1. $f(x) \pm h(x)$
2. $c \cdot f(x)$, kde c je konstanta
3. $f(x) \cdot h(x)$
4. $\dfrac{f(x)}{h(x)}$, je-li $h(x) \neq 0$ v okolí $U(x_0)$
5. $[f(x)]^n$, kde n je přirozené číslo.

3.2.6 Věta

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ a nechť $f(a).f(b) < 0$. Pak existuje takové číslo $c \in (a,b)$, že platí $f(c) = 0$.

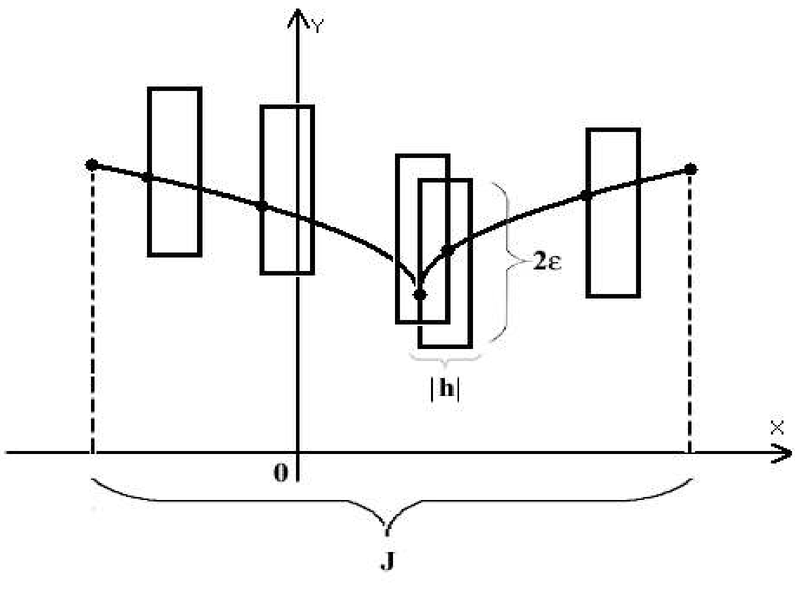
3.2.7 Definice

Funkce $y = f(x)$ se nazývá stejnoměrně spojitá na intervalu J, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$ (které závisí pouze na čísle ε), že pro každá dvě čísla $x, x+h \in J$, jejichž vzdálenost je $|h| < \delta$, platí

$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$.

Poznámka

Geometricky lze stejnoměrnou spojitost funkce $y = f(x)$ na interval J interpretovat takto: Existuje takový obdélník se stranami rovnoběžnými s osami Ox a Oy, přičemž jeho šířka $|h| < \delta$ a jeho výška $v = 2\varepsilon$, že když jej umístíme kdekoli v intervalu J tak, aby graf funkce f procházel středem některé svislé strany tohoto obdélníku, pak uvedený graf neprotne žádnou z jeho vodorovných stran.



obr. 3.1

3.2.8 Věta: První Weierstrassova věta

Funkce $y = f(x)$, která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je na tomto intervalu ohraničená.

3.2.9 Věta: Druhá Weierstrassova věta

Funkce $y = f(x)$, spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$, nabývá v tomto intervalu (aspoň v jednom čísle x_1) svého maxima M a (aspoň v jednom čísle x_2) svého minima m.

3.2.10 Věta: Darbouxova věta

Nechť D a H jsou podmnožiny $\Re$ a funkce $f : D \to H, x \to f(x)$ spojitá v celém definičním oboru. Pak pro každý uzavřený interval $\langle x_1, x_2 \rangle$, obsažený v množině D platí: pro každé číslo y z intervalu $\langle f(x_1), f(x_2) \rangle$ existuje alespoň jedno x z intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ takové, že $f(x) = y$.

Poznámka

Darbouxova věta se používá při kreslení grafu spojité funkce $f : \Re \to \Re$. Nejprve vytvoříme tabulku konečně mnoha argumentů x a příslušných funkčních hodnot $f(x)$. Body $[x, f(x)]$ vyznačíme v soustavě souřadnic a spojíme je souvislou čarou. Právě z Darbouxovy věty vyplývá, že tato čára není nikde přerušena.

3.3 Příklady

Příklad XIX

Dokažte pomocí definice spojitosti funkce, že funkce $y = x^2$ je spojitá v každém bodě reálné osy.

Řešení

Nechť c je libovolný bod reálné osy. Máme dokázat, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že nerovnost $\left|x^2 - c^2\right| < \varepsilon$ platí pro všechny body x z intervalu $(c-\delta, c+\delta)$. Je – li δ libovolné kladné číslo, pak pro všechny body x z intervalu $(c-\delta, c+\delta)$ platí $|x-c| < \delta$,

$$|x+c| = |(x-c)+2c| \leq 2|c| + |x-c| < 2|c| + \delta .$$

Výraz $\left|x^2 - c^2\right|$ rozložíme na součin činitelů:

$$\left|x^2 - c^2\right| = |x-c|.|x+c| < \delta(2|c| + \delta) .$$

Naší snahou je nyní najít takové číslo $\delta > 0$, aby platila nerovnost

$$\delta(2|c| + \delta) \leq \varepsilon .$$

Pak totiž skutečně bude $\left|x^2 - c^2\right| < \varepsilon$ pro všechny body x z intervalu $(c-\delta, c+\delta)$. Omezme se na hodnoty $\delta \leq 1$, takže bude $2|c| + \delta \leq 2|c| + 1$. Bude – li mimoto ještě $\delta(2|c|+1) \leq \varepsilon$, bude jistě nerovnost $\delta(2|c|+\delta) \leq \varepsilon$ splněna. Stačí tedy zvolit

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|c|+1}\right\}.$$

Příklad XX

Dokažme, že jestliže $a > 0$ je funkce $y = a^x$ spojitá v každém bodě reálné osy.

Řešení

a) Pro $a = 0$ je to samozřejmé, neboť $1^x = 1$ je konstanta.

b) Nechť c je libovolný bod reálné osy a $\varepsilon > 0$. Hledejme příslušné číslo δ .

Pro $a>1$ je funkce a^x rostoucí na intervalu $(+\infty,-\infty)$. Zvolme takový bod v_2 že $a^{v_2}=a^c+\varepsilon$, tj. $v_2=\log_a(a^c+\varepsilon)$. (1)

Zřejmě $v_2>c$ (jinak by bylo $a^c\geq a^{v_2}$). Dále zvolme bod v_1 takto:
Je – li $\varepsilon<a^c$, pak zvolme v_1 tak, že $a^{v_1}=a^c-\varepsilon$, tj. $v_1=\log_a(a^c-\varepsilon)$. (2)
Zřejmě $v_1<c$ (jinak by bylo $a^{v_1}\geq a^c$). Je – li $\varepsilon\geq a^c$, pak bod v_1 nemůžeme zvolit uvedeným způsobem, neboť je vždy $a^{v_1}>0$, kdežto $a^c-\varepsilon\leq 0$. V tomto případě zvolme např. $v_1=c-1$, takže je $a^{v_1}>0\geq a^c-\varepsilon,\ v_1<c$. (3)

V obou případech podle (1), (2) a (3) je $a^c-\varepsilon\leq a^{v_1}<a^c<a^{v_2}=a^c+\varepsilon$. (4)

Lze tedy zvolit takové kladné číslo δ, že interval $(c-\delta,c+\delta)$ je částí intervalu (v_1,v_2). Pro každý bod x z intervalu $(c-\delta,c+\delta)$ je $v_1<x<v_2$,a tedy z nerovností (4) plyne $a^c-\varepsilon\leq a^{v_1}<a^x<a^{v_2}=a^c+\varepsilon$ neboli $\left|a^x-a^c\right|<\varepsilon$, čímž je spojitost dané funkce pro $a>1$ dokázána.

c) Pro $0<a<1$ je funkce a^x klesající na intervalu $(+\infty,-\infty)$.
Položme $b=\dfrac{1}{a}>1$, takže $a^x=\dfrac{1}{b^x}$. Spojitost funkce $y=a^x(0<a<1)$ v každém bodě reálné osy plyne z případu b) a z věty 3.2.5 o spojitosti podílu.

Tím je spojitost dané funkce v každém bodě osy dokázána.

Příklad XXI

Dokažme, že funkce $\sqrt{(3-x^2)}$ je spojitá zleva v bodě $\sqrt{3}$.

Řešení

Hodnota dané funkce je pro $x=\sqrt{3}$ rovna nule. Máme dokázat, že každému číslu $\varepsilon>0$ existuje takové číslo $\delta>0$, že nerovnost

$\left|\sqrt{\left(3-x^2\right)}-0\right|<\varepsilon$ čili $\sqrt{\left(3-x^2\right)}<\varepsilon$ platí pro všechny body x z intervalu $\left(\sqrt{3}-\delta,\sqrt{3}\right)$. Pro $|x|<\sqrt{3}$ znamená nerovnost $\sqrt{\left(3-x^2\right)}<\varepsilon$ totéž jako $3-x^2<\varepsilon^2$, tj. $x^2>3-\varepsilon^2$.

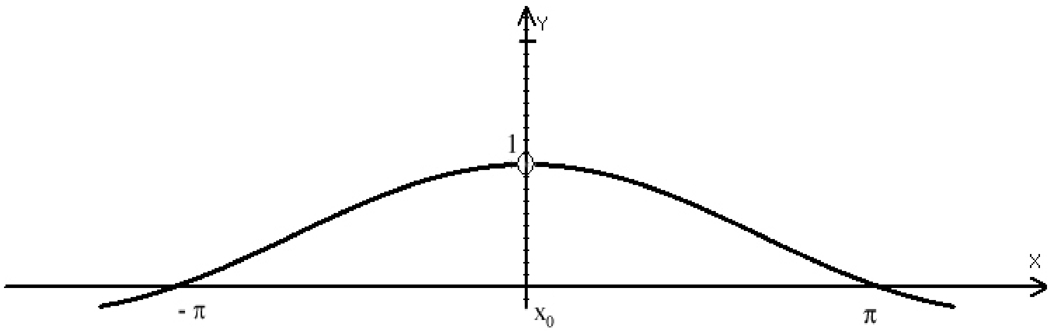
Je-li za prvé $\varepsilon\geq\sqrt{3}$, je $3-\varepsilon^2\leq 0$, a tedy nerovnost $x^2>3-\varepsilon^2$ je splněna pro každý bod $x>0$. V tomto případě tedy za interval $\left(\sqrt{3}-\varepsilon,\sqrt{3}\right)$ lze např. vzít interval $(0,\sqrt{3})$, tj.položit $\delta=\sqrt{3}$. Nechť za druhé $0<\varepsilon<\sqrt{3}$; pak je $3-\varepsilon^2>0$ a pro $x>0$ znamená nerovnost $x^2>3-\varepsilon^2$ totéž jako nerovnost $x>\sqrt{(3-\varepsilon^2)}$, takže za interval $(\sqrt{3}-\delta,\sqrt{3})$ můžeme vzít interval $(\sqrt{(3-\varepsilon^2)},\sqrt{3})$, tj. lze položit $\sqrt{3}-\delta=\sqrt{(3-\ \varepsilon)^2}$, takže $\delta=\sqrt{3}-\sqrt{(3-\varepsilon^2)}$.
Ke každému číslu $\varepsilon>0$ tedy existuje požadované číslo $\delta>0$, čímž je důkaz proveden. Zároveň vidíme, jak lze číslo δ volit. Je-li $\varepsilon\geq\sqrt{3}$, lze položit $\delta=\sqrt{3}$; je-li $0<\varepsilon<\sqrt{3}$, lze položit $\delta=\sqrt{3}-\sqrt{(3-\varepsilon^2)}$.

Obdobně bychom dokázali spojitost dané funkce zprava v bodě $-\sqrt{3}$.

4. Limita a spojitost funkce v souvislostech

Základní rozdíl mezi spojitostí a limitou spočívá především v tom, že chceme-li mluvit o spojitosti funkce v bodě x_0, je třeba, aby funkce $f(x)$ byla v bodě x_0 definovaná. Lze například ukázat, že funkce

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \tag{5}$$



obr. 4.1

má v bodě $x_0 = 0$ limitu rovné jedné viz obr.4.1

$$\text{tj. } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

ale spojitá v tomto bodě není, neboť v něm není definovaná. (Geometricky: graf není souvislá křivka). Kdybychom funkci $f(x)$ dodefinovali tak, že pro $x = 0$ bychom položili $f(0) = 1$, byla by takto dodefinovaná funkce v bodě $x = 0$ spojitá, neboť pak by bylo

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Kdybychom ji v bodě $x = 0$ dodefinovali hodnotu 2, tj. položili bychom $f(0) = 2$ byla by takto dodefinovaná funkce v bodě $x = 0$ definovaná, nebyla by však spojitá, neboť pak bychom měli

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0).$$

4.1 Věta o limitě a spojitosti

Jestliže funkce f není spojitá v bodě $x_0 \in \Re$ a je přitom definovaná v nějakém okolí tohoto bodu, pak mohou nastat dvě možnosti:

a) Neexistuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Tato možnost může nastat ve třech případech:

1. Existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = f(x_0)$¨

a obě jsou vlastní, ale různé. Pak pravíme, že x_0 je bod nespojitosti prvního druhu pro funkci f (viz kapitola 2).

Např. funkce celá část čísla x (značíme $[x]$) má každém bodě $x_0 = n \in Z$ nespojitost prvního druhu.

2. Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje. Pak pravíme, že x_0 je bod nespojitosti druhého druhu pro funkci f. Například Dirichletova funkce $\chi(x)$ má nespojitost druhého druhu v každém bodě $x_0 \in \Re$.

3. Obě jednostranné limity existují a jsou různé, avšak aspoň jedna z nich je nevlastní.

Příkladem může být funkce $tg\ x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) Existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, avšak $a \neq f(x_0)$

Také tato možnost může nastat v několika případech:

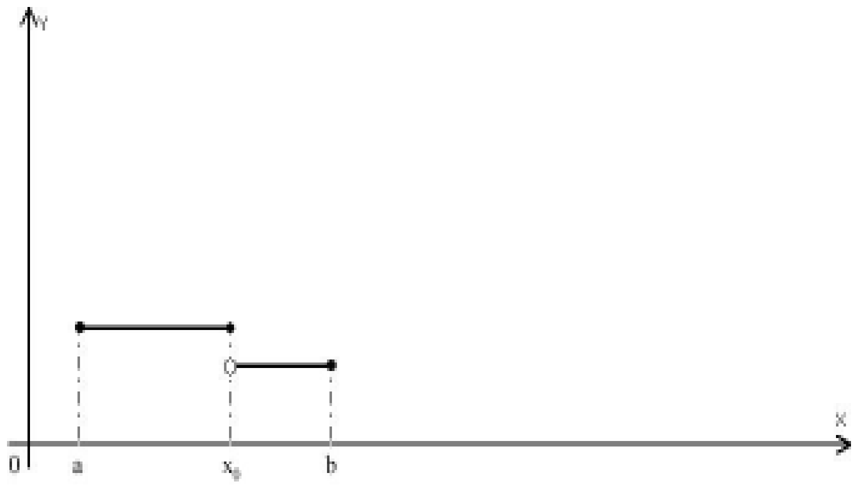
1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ je nevlastní.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \Re$, avšak $a \neq f(x_0)$.

3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \Re$, avšak $f(x_0)$ není definováno. Pak se bod x_0 nazývá bodem odstranitelné nespojitosti funkce f. Definujeme-li totiž funkci g takto: $g(x) = f(x)$ pro $x \in Dom\ f$, $g(x_0) = a$, je funkce g spojitá v bodě x_0, nazývá se spojitým pokračováním nebo též spojitým rozšířením funkce f.

Například funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \dfrac{(x-a)(x-2)}{x-1}$ má odstranitelnou nespojitost v bodě $x_0 = 1$, jejím spojitým pokračováním je funkce $g(x) = x - 2$.

Má-li však funkce $f(x)$ v bodě x_0 limitu, nemusí být spojitá, jak je vidět na funkci (5). Historicky vznikl pojem spojitosti dříve než pojem limity. Matematikové ovšem brzy poznali, že s pojmem spojitosti nevystačí a že se v aplikacích setkávají s funkcemi, jejichž grafy netvoří souvislá křivka. Například funkce, jejíž graf je nakreslen na obr. 4.2 a která znázorňuje například po částech konstantní zatížení nosníku, není v bodě x_0 spojitá. (Nemá tam podle našich definic ani limitu, jen limitu zleva a zprava).



obr. 4.2

4.2 Příklady

Příklad XXII

Vypočtěme

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}.$$

<u>Řešení</u>

Definiční obor funkce

$$f(x)=\frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$$

je $\Re-\{0\}$, funkce není v bodě $x=0$ definovaná, tudíž není v tomto bodě spojitá, takže nelze použít věty 2.2.4. Protože $\lim_{x\to 0}(x^2+x^5)=0$, nelze použít ani věty 2.2.2. V podobných případech lze někdy limitu vypočíst vhodnou úpravou funkčního vztahu. Výraz

$$\frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$$

lze upravit takto:

$$\frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-1-5x}{x^2+x^5}=$$

$$=\frac{x^2(10+10x+5x^2+x^3)}{x^2(1+x^3)}$$

Z definice 2.1.1 limity víme, že pro výpočet limity jsou v tomto případě rozhodující hodnoty $f(x)$ pro $0<|x|<\delta$, tj. pro $x\neq 0$. Můžeme proto v posledním zlomku krátit výrazem x^2. Pak (pro $x\neq 0$) platí

$$f(x)=\frac{10+10x+5x^2+x^3}{1+x^3}.$$

Podle věty 2.2.2 již snadno dostaneme $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=10$.

Příklad XXIII

Najděme

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{(x+2)}-2}.$$

<u>Řešení</u>

Definiční obor funkce

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{(x+2)}-2}$$

je $\langle -2,2)\cup(2,\infty)$. Funkce není v bodě $x=2$ definovaná, tudíž není v tomto bodě spojitá. Rozšíříme-li však daný zlomek výrazem $\sqrt{(x+2)}+2$ dostaneme

$$\frac{x-2}{\sqrt{(x+2)}-2}=\frac{(x-2)(\sqrt{(x+2)}+2)}{(\sqrt{(x+2)}-2)(\sqrt{(x+2)}+2)}=\frac{(x-2)(\sqrt{(x+2)}+2)}{(x-2)}.$$

Protože funkci $f(x)$ vyšetřujeme pro $x\neq 2$, můžeme krátit dvojčlenem $x-2$ a pak použít věty 2.2.4, takže je $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{(x+2)}-2}=\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{(x+2)}+2)=4$.

Příklad XXIV

Vypočtěme

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}.$$

<u>Řešení</u>

Při výpočtu postupujeme obdobně jako v příkladech XXII a XXIII. Daný výraz rozšíříme dvojčlenem $\sqrt{x}+1$ a dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x(\sqrt{x}+1)=2.$$

Příklad XXV

Určeme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}.$$

<u>Řešení</u>

Definiční obor funkce

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$$

je $\langle -1,0)\cup(0,\infty)$, funkce není v bodě $x=0$ definovaná, tudíž není v tomto bodě spojitá, takže nelze použít větu 2.2.4 Snadno zjistíme, že postup obdobný postupům v příkladech XXIII a XXIV nestačí, neboť bychom opět dostali nespojitou funkci:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})\,(\sqrt{1+x}+1)}{x}.$$

Proto funkční výraz rozšíříme výrazem

$$(\sqrt{1+x}+1)\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})\,(\sqrt{1+x}+1)\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=\frac{x(1-x)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}$$

Protože funkci f vyšetřujeme pro $x\neq 0$, můžeme získaný zlomek krátit číslem x a dostaneme

$$f(x)=\frac{(1-x)\,(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}.$$

Nyní již můžeme použít věty 2.2.4 a tudíž platí:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

Příklad XXVI

Vypočtěme $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 5x - 2}{(x-2)(x+1)}$

<u>Řešení</u>

Protože limita jmenovatele pro $x \to 1$ je nula, snažíme se najít funkci, která pro všechna $x \neq 1$ se rovná dané funkci a v bodě $x = 1$ je spojitá. Zkusíme proto rozložit mnohočlen v čitateli dělením číslem $x - 1$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x-1) = x^2 - 3x + 2 \\
\underline{-x^3 \mp x^2} \\
\quad -3x^2 + 5x \\
\quad \underline{\mp 3x^2 \pm 3x} \\
\qquad\quad 2x - 2 \\
\qquad \underline{\mp 2x \mp 2} \\
\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}
$$

Protože podílem je kvadratický trojčlen ve jmenovateli původní funkce, krátíme jím a dostaneme

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 4x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1 - 1 = 0$$

5. Závěr

Limita a spojitost funkce jsou dozajista jednou z významných kapitol matematiky. Při snaze pochopit význam limit je naprosto nutné rozumět výkladu o spojitosti funkce. Tato práce si vzala za cíl názorným způsobem předvést jaké jsou vztahy mezi limitami a spojitostí funkce jedné reálné proměnné.

Vzhledem ke složitosti látky je zapotřebí správně nadefinovat pojmy funkce, limity, spojitosti a odvodit některé související vlastnosti. Tento výklad nelze samozřejmě provádět bez názorných grafických znázornění usnadňujících pochopení a vhodně ukazujících význam uvedených definic a pojmů.

Teoretický výklad látky je často zapotřebí doplnit o názorné ilustrativní příklady včetně jejich řešení, které byly vybrány tak, aby dokreslily vzájemné vztahy mezi limitami a spojitostí funkce jedné reálné proměnné.

Rozsah práce byl zvolen tak, aby danou problematiku náležitě postihl. Čtenář, který se bude pokoušet o studium vztahu mezi limitou a spojitostí jedné reálné proměnné, tak získává možnost srozumitelného přehledu popisované látky.

Literatura

1. Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: Matematická analýza 1, Praha: Nakladatelství technické literatury, 1989
2. Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985
3. Delventhal, K.M., Kissner, A., Kulick M.: Kompendium matematiky, Praha: Euromedia Group, 2004
4. Hlaváček, A.: Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 1. vydání
5. Hlaváček, A.: Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971, 2. změněné vydání
6. Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky, Praha: Nakladatelství technické literatury, 1981
7. Novák, V.: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, Brno: Masarykova univerzita, 2004
8. Rektorys, K.: Co a k čemu je vyšší matematika, Praha: ACADEMICA, 2001
9. Škrášek, J.: Základy vyšší matematiky, Praha: Naše vojsko, 1966
10. Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky 1, Praha: Nakladatelství technické literatury, 1983.