Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Průběh funkce v příkladech

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracovala: Romana JÍCHOVÁ

Ročník, obor: 3. ročník, Finanční matematika

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice, duben 2007

Poděkování

Děkuji Mgr. Petru Chládkovi za hodnotné rady a odborné vedení během mé bakalářské práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Průběh funkce v příkladech zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích dne 27. 4. 2007

Anotace

Cílem bakalářské práce je ukázat, jak lze pomocí aparátu diferenciálního počtu vyšetřit jisté vlastnosti funkcí, pomocí nichž lze popsat průběh těchto funkcí včetně sestrojení jejich grafu. Vlastnosti, jimiž se budu postupně zabývat, jsou monotonie funkcí, extrémy, konvexnost a konkávnost, inflexní body a asymptoty.

Abstract

The aim of the bachelor´s thesis are the properties of real functions using differential calculus. With these properties we can describe the course of the functions including the construction of their graphs. The properties under investigation are monotony of functions, extremes, convexity and concavity, points of inflexion and asymptotes.

Obsah

Úvod

Pracujeme-li s nějakou funkcí, chceme o ní získat co nejvíce informací. V případě funkcí jedné reálné proměnné to znamená umět nakreslit její graf. To proto, že obrázek kolikrát vydá za mnoho stran matematických vzorců. Proces získávání rozsáhlých informací o dané funkci, které nám umožní nakreslení jejího grafu, se v matematice zpravidla nazývá vyšetřování průběhu funkce. Vyšetřování průběhu dané funkce znamená splnit víceméně algoritmický seznam úkolů. Tyto úkoly můžou být jednoduché, ale nemusí. Proto u složitějších úkolů používáme ke zjednodušení práce derivace, a to nejen první, ale i druhé a vyšší. V jednom z úkolů pak využíváme i znalosti o limitách.

1. Základní definice a věty

1.1 Definice funkce

Definice 1.1.1

Zobrazením množiny A do množiny B rozumíme neprázdnou podmnožinu f kartézského součinu $A \times B$ s vlastností: ke každému $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x,y) \in f$; označení $f: A \rightarrow B$, resp. $y = f(x)$; x je vzor, y je obraz při zobrazení f. Množinu A nazýváme definičním oborem zobrazení f a $f(A) \subset B$ nazýváme oborem hodnot zobrazení f.

Definice 1.1.2

Reálnou funkcí f jedné reálné proměnné x nazýváme zobrazení $f: A \rightarrow B$, kde $A,B \subset R$; zapisujeme $y = f(x)$. Definiční obor A funkce f označujeme $D(f)$, $H(f) \equiv f(D(f)) \subset B$ je obor funkčních hodnot.

Definice 1.1.3

Nechť je v rovině dána kartézská soustava souřadnic $(0;x,y)$. Grafem funkce f rozumíme množinu bodů (uspořádaných dvojic) $Gr\, f = \{[x, f(x)];\ x \in D(f)\}$.

Definice 1.1.4

Nechť f je funkce. Číslo $x_0 \in D(f)$ se nazývá nulový bod (kořen) funkce f, jestliže platí $f(x_0) = 0$. Geometricky značí kořen funkce f průsečík grafu funkce f s osou x.

Definice 1.1.5

δ-okolím bodu $x_0 \in R$ nazveme interval $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ a označíme $O(x_0)$.

Definice 1.1.6

δ-prstencovým okolím bodu $x_0 \in R$ nazveme množinu $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) - \{x_0\}$ a označíme $P(x_0)$.

Definice 1.1.7

Pravým δ-okolím bodu x_0 nazveme interval $\langle x_0, x_0 + \delta)$ a označíme $O^+(x_0)$. Pravým δ-prstencovým okolím bodu x_0 nazveme otevřený interval $(x_0, x_0 + \delta)$ a označíme $P^+(x_0)$.

Definice 1.1.8

Levým δ-okolím bodu x_0 nazveme interval $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ a označíme $O^-(x_0)$. Levým δ-prstencovým okolím bodu x_0 nazveme otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0)$ a označíme $P^-(x_0)$.

Definice 1.1.9

Funkce f se nazývá sudá, platí-li $x \in D(f) \rightarrow (-x \in D(f)) \wedge (f(-x) = f(x))$. Funkce f se nazývá lichá, platí-li $x \in D(f) \rightarrow (-x \in D(f)) \wedge (f(-x) = -f(x))$.

Poznámka 1.1.1

Graf funkce sudé je symetrický podle osy y. Graf funkce liché je symetrický podle počátku soustavy souřadnic.

Definice 1.1.10

Nechť f je funkce, $p \in R$, $p > 0$. Funkce f se nazývá periodická s periodou p, jestliže platí $x \in D(f) \rightarrow x \pm p \in D(f)$ a $f(x \pm p) = f(x)$.

Poznámka 1.1.2

Funkce periodická s periodou p je též periodická s periodou kp, $k \in N$. Pokud existuje nejmenší z těchto period, nazývá se tato perioda základní (primitivní) periodou.

1.2 Definice derivace

Definice 1.2.1

Nechť f je funkce, $x_0 \in R$. Existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Definice 1.2.2

Nechť f je funkce. Potom funkci, která každému $x \in D(f)$ přiřazuje derivaci $f'(x)$, pokud tato derivace existuje, nazýváme derivací funkce f a značíme f'. Pro definiční obor funkce f' platí: $D(f') \subset D(f)$.

Definice 1.2.3

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \in N$ definujeme *n-tou* derivaci (derivaci řádu n) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Poznámka 1.2.1

Limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ může být vlastní nebo nevlastní; podle toho mluvíme o vlastní nebo nevlastní derivaci. Je-li $f'(x_0) \in R$, nazýváme derivaci vlastní. Je-li $f'(x_0) \in \pm\infty$, nazýváme derivaci nevlastní.

Poznámka 1.2.2

Libovolná funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu derivaci.

1.3 Věty o střední hodnotě

Věta 1.3.1 (ROLLEOVA VĚTA)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť existuje $f'(x)$ pro každý bod z intervalu (a,b). Nechť $f(a) = f(b)$. Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a,b)$ takový, že platí $f'(c) = 0$.

Věta 1.3.2 (LAGRANGEOVA VĚTA - o přírůstku funkce)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť existuje $f'(x)$ pro každý bod z intervalu (a,b). Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a,b)$ takový, že platí $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Věta 1.3.3 (CAUCHYOVA VĚTA)

Nechť *f, g* jsou spojité na intervalu $\langle a,b \rangle$. Nechť existuje derivace funkce *f* na intervalu *(a,b)*. Nechť existuje vlastní derivace funkce *g* na intervalu *(a,b)*, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a,b)$ takový, že platí $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

1.4 L´Hospitalovo pravidlo

Věta 1.4.1

Nechť funkce *f(x)* a *g(x)* mají vlastní derivaci na nějakém okolí bodu $c \in R^*$. Nechť limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ existují a jsou buď obě nulové nebo obě nekonečné. Existuje-li $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tak potom existuje i $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámka 1.4.1

Předcházející věta nám dává návod, jak si poradit s neurčitými limitami typu $\dfrac{0}{0}$ a $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Při jejím použití však musíme dávat pozor, aby byly splněny všechny předpoklady. Především obě funkce musí mít v daném bodě buď současně nulovou limitu, nebo limita v čitateli a ve jmenovateli musí být nekonečná.

Poznámka 1.4.2

Často se stává, že po aplikaci L´Hospitalova pravidla dostaneme opět neurčitou limitu $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Při jejím výpočtu můžeme L´Hospitalovo pravidlo použít znovu a postup opakovat tak dlouho, dokud nedospějeme k hledanému výsledku.

Poznámka 1.4.3

Kromě výše uvedených typů neurčitých výrazů existuje celá řada dalších limit, při jejichž výpočtu lze L´Hospitalovo pravidlo po určitých úpravách rovněž použít: $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $\infty-\infty$.

2. Derivace elementárních funkcí

1) Pro funkci f: $y = c,\ c \in R$, platí $\boldsymbol{y' = 0}$.
2) Pro funkci f: $y = x^n,\ x \in R,\ n \in N$, platí $\boldsymbol{y' = nx^{n-1}}$.
3) Pro funkci f: $y = \sin x,\ x \in R$, platí $\boldsymbol{y' = \cos x}$.
4) Pro funkci f: $y = \cos x,\ x \in R$, platí $\boldsymbol{y' = -\sin x}$.
5) Pro funkci f: $y = tg\, x,\ x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi,\ k \in Z$, platí $\boldsymbol{y' = \frac{1}{\cos^2 x}}$.
6) Pro funkci f: $y = cotg\, x,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$, platí $\boldsymbol{y' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$.
7) Pro funkci f: $y = x^n,\ x \in R - \{0\},\ n \in Z^-$, platí $\boldsymbol{y' = nx^{n-1}}$.
8) Pro funkci f: $y = x^c,\ x \in R^+,\ c \in R$, platí $\boldsymbol{y' = cx^{c-1}}$.
9) Pro funkci f: $y = e^x,\ x \in R$, platí $\boldsymbol{y' = e^x}$.
10) Pro funkci f: $y = a^x,\ x \in R,\ a \in R^+ - \{1\}$, platí $\boldsymbol{y' = a^x \cdot \ln a}$.
11) Pro funkci f: $y = \ln x,\ x \in R^+$, platí $\boldsymbol{y' = \frac{1}{x}}$.
12) Pro funkci f: $y = \log_a x,\ x \in R^+,\ a \in R^+ - \{1\}$, platí $\boldsymbol{y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$.
13) Pro funkci f: $y = \arcsin x,\ x \in (-1,1)$, platí $\boldsymbol{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$.
14) Pro funkci f: $y = \arccos x,\ x \in (-1,1)$, platí $\boldsymbol{y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$.
15) Pro funkci f: $y = arctg\, x,\ x \in R$, platí $\boldsymbol{y' = \frac{1}{1 + x^2}}$.
16) Pro funkci f: $y = arccotg\, x,\ x \in R$, platí $\boldsymbol{y' = -\frac{1}{1 + x^2}}$.

3. Pravidla pro počítání s derivacemi

Věta 3.1

Nechť funkce f a g mají derivace v bodě x a nechť $k \in R$. Pak také funkce $k \cdot f$, $f+g$, $f-g$ a $f \cdot g$ mají derivace v bodě x a platí:

a) $(k \cdot f)' = k \cdot f'$,

b) $(f + g)' = f' + g'$,

c) $(f - g)' = f' - g'$,

d) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Je-li navíc funkce $g \neq 0$, má i podíl $\frac{f}{g}$ derivaci v bodě x a platí:

e) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Věta 3.2 (O derivaci složené funkce)

Nechť funkce g má derivaci v bodě x a nechť funkce f má derivaci v bodě $g(x)$. Potom složená funkce $h = f \circ g$ má derivaci v bodě x, pro kterou platí:

$$h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Věta 3.3 (O derivaci inverzní funkce)

Předpokládejme, že k funkci f existuje inverzní funkce f_{-1}. Je-li $y = f_{-1}(x)$ a má-li funkce f v bodě y nenulovou derivaci $f'(y)$, má inverzní funkce v bodě x derivaci, pro kterou platí:

$$f_{-1}'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f_{-1}(x))}.$$

Věta 3.4 (O derivaci obecné mocniny funkcí)

Je-li $h(x) = f(x)^{g(x)}$, f(x) = 0, pak derivaci h´(x) počítáme pomocí rovnosti

$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ jako derivaci složené funkce. Pak platí:

$$(f^g)' = f^g \left(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}\right).$$

4. Monotonie a extrémy

V této kapitole se budu zabývat hledáním podmínek (postačujících, eventuelně nutných a postačujících) pro monotonii funkce na intervalu. Intervaly monotonie jsou takové intervaly, náležející do definičního oboru dané funkce, na nichž je daná funkce rostoucí nebo klesající. Tyto vlastnosti se dají určit z první derivace funkce. Při vyšetřování průběhu funkce budeme hledat maximální možné intervaly, na kterých je funkce ryze monotónní. Také nás budou zajímat lokální extrémy funkce. Uvádím zde definice jednotlivých typů lokálních extrémů a také ukazuji, jak při jejich hledání použít první a vyšší derivace dané funkce.

Definice 4.1

Nechť f je funkce, $I \subseteq D(f)$ je interval. Funkce f se nazývá na intervalu I

- rostoucí, platí-li $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- klesající, platí-li $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
- neklesající, platí-li $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- nerostoucí, platí-li $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f se nazývá na intervalu I monotónní, je-li zde neklesající nebo nerostoucí. Je-li dokonce rostoucí nebo klesající, nazývá se ryze monotónní na intervalu I.

Lemma 4.1

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$ a nechť má na intervalu I vlastní derivaci, která je kladná (nezáporná). Pak je funkce f rostoucí (neklesající) na intervalu I.

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$ a nechť má na intervalu I vlastní derivaci, která je záporná (nekladná). Pak je funkce f klesající (nerostoucí) na intervalu I.

Věta 4.2

Nechť funkce f je spojitá na intervalu I a má na intervalu I vlastní derivaci. Pak je f neklesající na intervalu I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$. Funkce f je nerostoucí na intervalu I právě tehdy, když $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in I$.

Věta 4.3

Nechť funkce f je spojitá na intervalu I a má na intervalu I vlastní derivaci. Pak je f rostoucí na intervalu I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$, funkce f je klesající na intervalu I právě tehdy, když $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ v obou případech neplatí na žádném otevřeném podintervalu intervalu I.

Věta 4.4

Nechť funkce f má derivaci na intervalu I. Platí-li $f'(x) = 0$ pro každé $x \in I$, potom je funkce f konstantní na intervalu I.

Postačující podmínka pro ryzí monotonii

Nechť funkce f má derivaci na intervalu I. Platí-li $f'(x) > 0$ pro $x \in I$, je funkce f rostoucí na intervalu I. Platí-li $f'(x) < 0$ pro $x \in I$, je funkce f klesající na intervalu I.

Definice 4.2

Nechť f je funkce, $I \subseteq D(f)$ je interval. Funkce f nabude v bodě $c \in R$ vzhledem k I extrému:

- maxima ostrého, platí-li $(\forall x \in I, x \neq c), f(x) < f(c)$;
- maxima neostrého, platí-li $(\forall x \in I, x \neq c), f(x) \leq f(c)$;
- minima ostrého, platí-li $(\forall x \in I, x \neq c), f(x) > f(c)$;
- minima neostrého, platí-li $(\forall x \in I, x \neq c), f(x) \geq f(c)$.

Definice 4.3

Říkáme, že funkce f definovaná na nějakém okolí bodu $x_0 \in R$ má v bodě x_0 lokální maximum, existuje-li $\delta > 0$ tak, že $O(x_0) \subseteq D(f)$ a platí: $x \in O(x_0) \rightarrow f(x) \leq f(x_0)$. Toto lokální maximum se nazývá ostré, je-li možno δ zvolit tak, že platí: $x \in P(x_0) \rightarrow f(x) < f(x_0)$.

Říkáme, že funkce f definovaná na nějakém okolí bodu $x_0 \in R$ má v bodě x_0 lokální minimum, existuje-li $\delta > 0$ tak, že $O(x_0) \subseteq D(f)$ a platí: $x \in O(x_0) \rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. Toto lokální minimum se nazývá ostré, je-li možno δ zvolit tak, že platí: $x \in P(x_0) \rightarrow f(x) > f(x_0)$. Lokální maxima a minima nazýváme souhrnně lokální extrémy.

Věta 4.5 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Pak je $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 4.1

Body, v nichž je derivace funkce f rovna nule, se nazývají stacionární body této funkce. Libovolná funkce tedy může nabývat lokálních extrémů pouze ve stacionárních bodech nebo v bodech, v nichž neexistuje derivace.

Věta 4.6

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a nechť existuje $\delta > 0$ takové, že funkce f má derivaci na $P(x_0)$. Je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in P^-(x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in P^+(x_0)$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum. Je-li $f'(x) < 0$ pro $x \in P^-(x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in P^+(x_0)$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Věta 4.7 (Postačující podmínka existence lokálního extrému)

Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní druhou derivaci a nechť $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Pak má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém, a to maximum, je-li $f''(x_0) < 0$, resp. minimum, je-li $f''(x_0) > 0$.

Věta 4.8

Nechť f je funkce, $x_0 \in R$ a $n \in N$. Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci až do řádu n a nechť $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 < k < n$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Pak platí: je-li n liché, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém, funkce f je v bodě x_0 ryze monotónní, a to rostoucí v případě $f^{(n)}(x_0) > 0$, klesající v případě $f^{(n)}(x_0) < 0$. Je-li n sudé, má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém, a to maximum v případě $f^{(n)}(x_0) < 0$, resp. minimum v případě $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Definice 4.4

Nechť f je funkce, $M \subseteq D(f)$. Nechť existuje bod $x_0 \in M$ tak, že $f(x_0) = max\{f(x);\ x \in M\}$. Pak říkáme, že funkce f nabývá v bodě x_0 globálního maxima na množině M. Pokud

$f(x_0) = min\{f(x);\ x \in M\}$, pak funkce f nabývá v bodě x_0 globálního minima na množině M.

Poznámka 4.2

Funkce f definovaná na intervalu I může nabývat svých globálních extrémů:

a) v bodech intervalu I, ve kterých je $f'(x) = 0$,
b) v bodech intervalu I, ve kterých $f'(x)$ neexistuje,
c) v krajních bodech intervalu I, pokud krajní body patří do intervalu I.

Věta 4.9

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak funkce f nabývá na intervalu $\langle a,b\rangle$ obou globálních extrémů a to v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech tohoto intervalu.

4.1 Příklady

Př.4.1.1

Určete intervaly monotónnosti funkce $f\colon y = x^3 - 3x^2$.

Řešení:

Derivace funkce je: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Nyní zjistíme intervaly, ve kterých je tato derivace kladná a ve kterých záporná. Řešíme nerovnici pomocí metody nulových bodů.

Zjistíme kořeny rovnice $3x^2 - 6x = 0$.

Nulové body jsou $x = 0$ a $x = 2$. Získáváme tak tři intervaly: $(-\infty,0)$; $(0,2)$ a $(2, +\infty)$.

Na intervalech $(-\infty,0)$ a $(2, +\infty)$ je derivace kladná, funkce f je tedy na těchto intervalech rostoucí.

Na intervalu $(0,2)$ je derivace záporná, funkce f je tedy na tomto intervalu klesající.

Př.4.1.2

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f\colon y = x^3 - 3x^2$.

Řešení:

Nejprve určíme stacionární body: $x = 0$ a $x = 2$.

Z předchozího příkladu známe monotonii funkce *f*, můžeme ji tedy využít.

V bodě $x = 0$ se funkce mění z rostoucí na klesající, bod $x = 0$ je tudíž lokálním maximem funkce *f*.

V bodě $x = 2$ se funkce mění z klesající na rostoucí, bod $x = 2$ je tudíž lokálním minimem funkce *f*.

Př.4.1.3

Najděte globální extrémy funkce *f*: $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ na intervalu $\langle -2,9 \rangle$.

Řešení:

Nejprve určíme stacionární body.

Derivace funkce je: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

Stacionární body tedy jsou $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$.

Na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(3,+\infty)$ je derivace kladná, funkce *f* je tudíž na těchto intervalech rostoucí.

Na intervalu $(-1,3)$ je derivace záporná, funkce *f* je tudíž na tomto intervalu klesající.

V bodě $x = -1$ se nachází lokální maximum funkce *f*.

V bodě $x = 3$ se nachází lokální minimum funkce *f*.

Vypočteme funkční hodnoty v lokálních extrémech a hraničních bodech, tedy v bodech $-2, -1, 3, 9$: $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(-1) = \frac{5}{3}$, $f(3) = -9$, $f(9) = 135$.

Porovnáním těchto funkčních hodnot dostáváme, že globální maximum *135* se nachází v bodě $x = 9$; globální minimum *-9* se nachází v bodě $x = 3$.

5. Konvexnost a konkávnost, inflexní body

Zhruba řečeno, konvexní funkce je taková funkce, jejíž graf „zatáčí“ proti směru pohybu hodinových ručiček, zatímco graf funkce konkávní „zatáčí“ po směru pohybu hodinových ručiček. Chceme-li nakreslit graf dané funkce, můžou se nám podobné informace hodit. Proto zde uvádím nezbytné definice a věty, jak vyšetřit konvexnost a konkávnost funkce s použitím druhé derivace dané funkce. Dále pak budeme hledat inflexní body, v nichž se funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak. Uvádím zde definici inflexního bodu a také ukazuji, jak při jeho hledání použít druhou a vyšší derivaci dané funkce.

Definice 5.1

Říkáme, že funkce f je ryze konvexní na intervalu I, jestliže $(\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I)$:

$$(x_1 < x_2 < x_3 \rightarrow f(x_2) < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)).$$

Říkáme, že funkce f je ryze konkávní na intervalu I, jestliže $(\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I)$:

$$(x_1 < x_2 < x_3 \rightarrow f(x_2) > \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)).$$

Poznámka 5.1

U neryzí konvexnosti a konkávnosti připouštíme rovnost.

Věta 5.1

Funkce f je konvexní na intervalu $I \subseteq D(f)$ právě tehdy, když pro každé tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek:

a) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$,

b) $\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$,

c) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce *f* je ryze konvexní na intervalu *I*.

Funkce *f* je konkávní na intervalu $I \subseteq D(f)$ právě tehdy, když pro každé tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek:

a) $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

b) $$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

c) $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce *f* je ryze konkávní na intervalu *I*.

Definice 5.2 (Jiná možná definice konvexnosti, konkávnosti)

Nechť funkce *f* má derivaci na intervalu $I \subseteq D(f)$. Říkáme, že funkce *f* je konvexní na intervalu *I*, jestliže pro libovolné body $x_0, x \in I$, $x \neq x_0$ platí : $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)*(x - x_0)$. Funkce *f* je konkávní na intervalu *I*, jestliže pro libovolné body $x_0, x \in I$, $x \neq x_0$ platí: $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)*(x - x_0)$.

Věta 5.2

Nechť funkce *f* má derivaci na intervalu *I*. Tato funkce je konvexní na intervalu *I* právě tehdy, když funkce f' je rostoucí na intervalu *I*.

Věta 5.3

Nechť funkce *f* má druhou derivaci na intervalu *I*. Platí-li $f''(x) > 0$ pro $x \in I$, je funkce *f* konvexní na intervalu *I*.

Věta 5.4

Nechť funkce *f* má derivaci na intervalu *I*. Tato funkce je konkávní na intervalu *I* právě tehdy, když funkce f' je klesající na intervalu *I*.

Věta 5.5

Nechť funkce f má druhou derivaci na intervalu I. Platí-li $f''(x) < 0$ pro $x \in I$, je funkce f konkávní na intervalu I.

Definice 5.3

Říkáme, že bod $x_0 \in R$ je inflexní bod funkce f, jestliže platí:

- Existuje $f'(x_0)$,
- Existuje $\delta > 0$ tak,že pro

  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)*(x - x_0)$ a pro

  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)*(x - x_0)$

  nebo naopak pro

  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)*(x - x_0)$ a pro

  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)*(x - x_0)$.

Věta 5.6

Nechť x_0 je inflexní bod funkce f a nechť existuje vlastní druhá derivace $f''(x_0)$. Pak je $f''(x_0) = 0$.

Věta 5.7

Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že funkce f má druhou derivaci na $O(x_0)$. Je-li $f''(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ nebo naopak, $f''(x) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, je x_0 inflexní bod funkce f.

Věta 5.8

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in R$ vlastní třetí derivaci. Je-li $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, je x_0 inflexní bod této funkce.

Věta 5.9

Nechť f je funkce, $x_0 \in R$ a $n \in N$, $n > 1$. Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci až do řádu n a nechť $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $1 < k < n$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Pak platí: je-li n liché, je x_0 inflexní bod funkce f. Je-li n sudé, není x_0 inflexní bod této funkce, funkce f je ryze konvexní v bodě x_0 v případě $f^{(n)}(x_0) > 0$, ryze konkávní v bodě x_0 v případě $f^{(n)}(x_0) < 0$.

5.1 Příklady

Př.5.1.1

Určete intervaly, na nichž je funkce $f\colon y = x^3 - 3x^2$ konvexní, konkávní.

Řešení:

První derivace funkce je: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Druhá derivace funkce je: $f''(x) = 6x - 6$.

Zjistíme kořeny rovnice: $6x - 6 = 0$. Rovnice má jediný kořen: $x = 1$.

Dostáváme tak dva intervaly $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$.

Na intervalu $(-\infty, 1)$ je druhá derivace záporná, funkce f je tedy na tomto intervalu konkávní.

Na intervalu $(1, +\infty)$ je druhá derivace kladná, funkce f je tedy na tomto intervalu konvexní.

Př.5.1.2

Najděte inflexní body funkce $f\colon y = x^3 - 3x^2$.

Řešení:

První derivace funkce je: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Druhá derivace funkce je: $f''(x) = 6x - 6$.

Zjistíme kořeny rovnice: $6x - 6 = 0$. Rovnice má jediný kořen: $x = 1$.

Tento bod je „podezřelý“ na existenci inflexe.

Z předchozího příkladu víme, že na intervalu $(-\infty, 1)$ je druhá derivace záporná a na intervalu $(1, +\infty)$ je kladná. V bodě $x = 1$ tedy dochází ke znaménkové změně druhé derivace → funkce f má v bodě $x = 1$ inflexní bod.

6. Asymptoty

K přesnějšímu a úplnějšímu vyšetření funkce slouží tzv. asymptoty jejího grafu. Asymptoty vystihují chování dané funkce ve vlastních bodech, v nichž má nevlastní limity (asymptoty bez směrnice), nebo chování dané funkce v nekonečnu (asymptoty se směrnicí). Jednotlivé definice nyní uvedu.

Definice 6.1

Nechť $x_0 \in R$. Přímka $x = x_0$ se nazývá asymptotou bez směrnice funkce f, jestliže funkce f má v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

Definice 6.2

Přímku $y = ax + b$ nazveme asymptotou se směrnicí grafu funkce f, jestliže

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ nebo } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Věta 6.1

Přímka p o rovnici $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce f právě tehdy, když platí: $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$.

Poznámka 6.1

Libovolná funkce může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí, může však mít libovolný počet asymptot bez směrnice.

6.1 Příklady

Př.6.1.1

Určete asymptoty grafu funkce f: $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Řešení:

Nejprve vypočteme a, potom b.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{1}{x^2}) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to\pm\infty} (x+\frac{1}{x}-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Asymptotou se směrnicí je tedy přímka *p: y = x*.

Nyní budeme hledat asymptoty bez směrnice. Funkce *f* není definována v bodě *x = 0*. Zjistíme, zda existují jednostranné nevlastní limity v tomto bodě, nejprve zleva a potom zprava:

$$\lim_{x\leftarrow 0^-}(x+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0^-} x + \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = 0 + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0^+} x + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = 0 + (+\infty) = +\infty$$

Funkce *f* má tedy asymptotu bez směrnice *x = 0*.

7. Průběh funkce v příkladech

Vyšetřováním průběhu funkce rozumíme zjištění vlastností, které nám umožní nakreslení grafu funkce. Při vyšetřování průběhu funkce *f(x)* budeme postupovat podle následujícího schématu:

1) Pro danou funkci

- určíme maximální definiční obor *D(f)*, popř. obor hodnot *H(f)*
- určíme průsečíky s osami souřadnic (pokud existují),
- určíme nulové body funkce *f* a intervaly, kde je funkce *f* kladná a kde záporná,
- zjistíme, zda funkce *f* je či není sudá, lichá, periodická,
- je-li *D(f)* tvořen otevřenými intervaly, vypočteme jednostranné limity funkce *f* v jejich krajních bodech.

2) Spočítáme a vyšetříme $f'(x)$:

- určíme (maximální) intervaly, na nichž je funkce ryze monotónní,
- najdeme lokální extrémy funkce.

3) Spočítáme a vyšetříme $f''(x)$:

- určíme (maximální) intervaly, na nichž je funkce ryze konvexní a ryze konkávní,
- najdeme body inflexe funkce.

4) Najdeme asymptoty grafu funkce.

5) Pomocí vypočtených údajů nakreslíme graf funkce.

Poznámky

Maximální definiční obor funkce

Funkce jsou obvykle zadávány předpisem bez uvedení jejich definičního oboru. Potom se za definiční obor funkce považuje množina všech čísel, pro kterou má daný předpis smysl. Zjišťujeme tak maximální definiční obor. Při jeho vyšetřování musíme dbát zejména na to, abychom nedělili nulou nebo neodmocňovali záporné číslo. Dále bereme v úvahu omezené definiční obory některých funkcí – logaritmických, goniometrických, cyklometrických apod.

Průsečíky s osami

Průsečíky funkce f s osou x nalezneme řešením rovnice $f(x) = 0$. Průsečík funkce f s osou y je dán funkční hodnotou $f(0)$.

Př.7.1

Vyšetřete průběh funkce f: $y = x^3 + 4x^2 + 5x$.

Řešení:

1.

Definiční obor: funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla → $D(f) = R$.

Obor hodnot: $H(f) = R$.

Průsečíky s osami: funkce f prochází počátkem soustavy souřadnic $[0,0]$.

Nulovým bodem funkce f je $x = 0$; na intervalu $(-\infty,0)$ je funkce f záporná a na intervalu $(0,+\infty)$ je funkce f kladná.

Sudost, lichost, periodičnost

$f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 + 5(-x) = -x^3 + 4x^2 - 5x \neq f(x)$ . . . funkce f není sudá

$f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 + 5(-x) = -x^3 + 4x^2 - 5x \neq -f(x)$ . . . funkce f není lichá

Funkce f není ani periodická.

Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = -\infty$$

2.

První derivace funkce: $f'(x) = 3x^2 + 8x + 5$.

Položíme první derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body stacionárními: $x = -\frac{5}{3}$, $x = -1$.

Na intervalech $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$ a $(-1,+\infty)$ je první derivace kladná, funkce f je tedy na těchto intervalech rostoucí.

Na intervalu $\left(-\frac{5}{3},-1\right)$ je první derivace záporná, funkce f je tedy na tomto intervalu klesající.

V bodě $x = -\frac{5}{3}$ se nachází lokální maximum funkce f, v bodě $x = -1$ se nachází lokální minimum funkce f.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = 6x + 8$.

Položíme druhou derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body podezřelými z inflexe: $x = -\frac{4}{3}$.

Na intervalu $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ je druhá derivace záporná, funkce f je tedy na tomto intervalu konkávní.

Na intervalu $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ je druhá derivace kladná, funkce f je tedy na tomto intervalu konvexní.

V bodě $x = -\frac{4}{3}$ dochází ke znaménkové změně druhé derivace, bod $x = -\frac{4}{3}$ je tedy inflexním bodem funkce f.

4.

<u>Asymptoty</u>

Asymptota bez směrnice neexistuje, protože funkce je definovaná na celém oboru reálných čísel R.

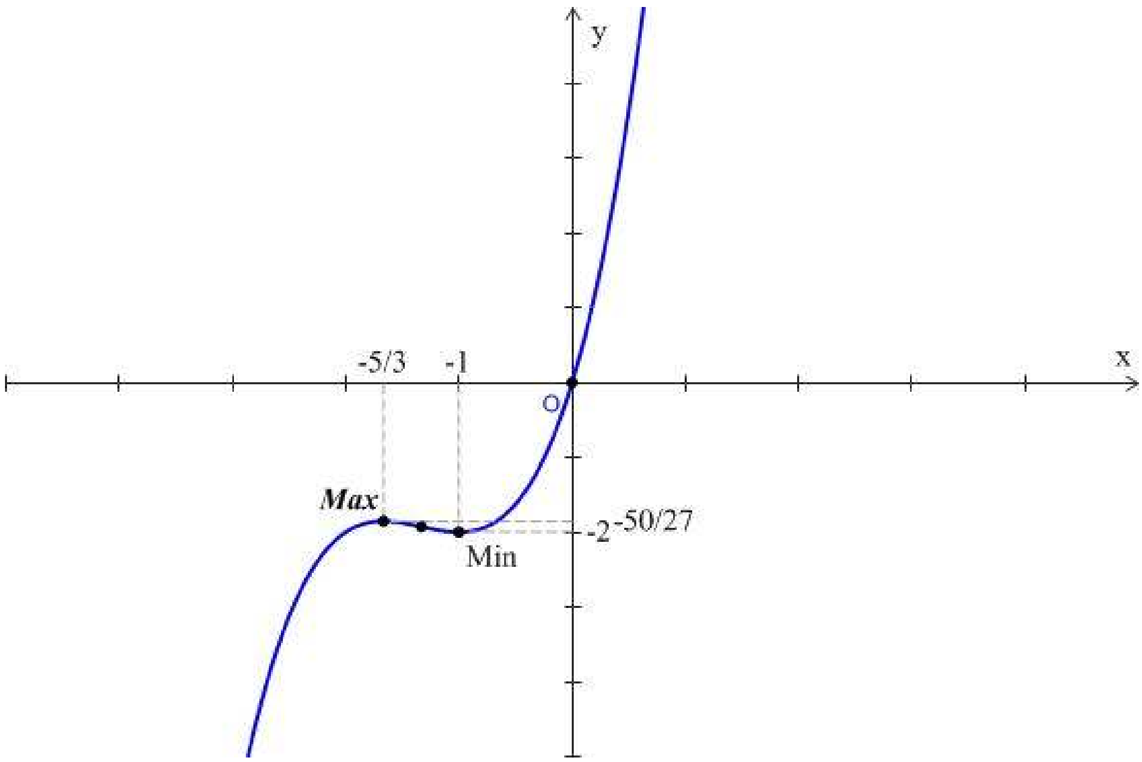
Asymptota se směrnicí:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = +\infty$$

Ani asymptota se směrnicí neexistuje.

5.

<u>Graf</u> – graf funkce *f* vypadá následovně:



Poznámka: K vytvoření grafů bylo použito programu **Graphe Easy 2.25**.

Př.7.2

Vyšetřete průběh funkce *f:* $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

Řešení:

1.

Definiční obor: jmenovatel musí být různý od nuly: (x – 1) ≠ 0 → *D(f) = R – {1}*.

Obor hodnot: *H(f) = R*.

Průsečíky s osami: funkce *f* prochází počátkem soustavy souřadnic *[0,0]*.

Nulovým bodem funkce *f* je *x = 0*; na intervalu *(-∞,0)* je funkce *f* záporná a na intervalu *(0,+∞)* je funkce *f* kladná.

Sudost, lichost, periodičnost

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{x^2+2x+1} \neq f(x)$ . . . funkce *f* není sudá

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{x^2+2x+1} \neq -f(x)$ . . . funkce *f* není lichá

Funkce *f* není ani periodická.

Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

2.

První derivace funkce: $f'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.

Položíme první derivaci rovnu *0* a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body stacionárními: *x = 0, x = 3* a *x = 1* (bod vyloučený z definičního oboru).

Na intervalech *(-∞,0),(0,1)* a *(3,+∞)* je první derivace kladná, funkce *f* je tedy na intervalech *(-∞,1)* a *(3,+∞)* rostoucí.

Na intervalu *(1,3)* je první derivace záporná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu klesající.

V bodě $x = 3$ se nachází lokální minimum funkce *f*.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = \dfrac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$.

Položíme druhou derivaci rovnu *0* a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body podezřelými z inflexe: $x = 0$ a $x = 1$ (bod vyloučený z definičního oboru).

Na intervalu *(-∞,0)* je druhá derivace záporná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu konkávní.

Na intervalu *(0,1)* a *(1,+∞)* je druhá derivace kladná, funkce *f* je tedy na intervalu *(0,+∞)* konvexní.

V bodě $x = 0$ dochází ke znaménkové změně druhé derivace, bod $x = 0$ je tedy inflexním bodem funkce *f*.

4.

<u>Asymptoty</u>

Asymptota bez směrnice: funkce *f* není definovaná v bodě *1* a platí $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$.

Asymptota bez směrnice je tedy: $x = 1$.

Asymptota se směrnicí:

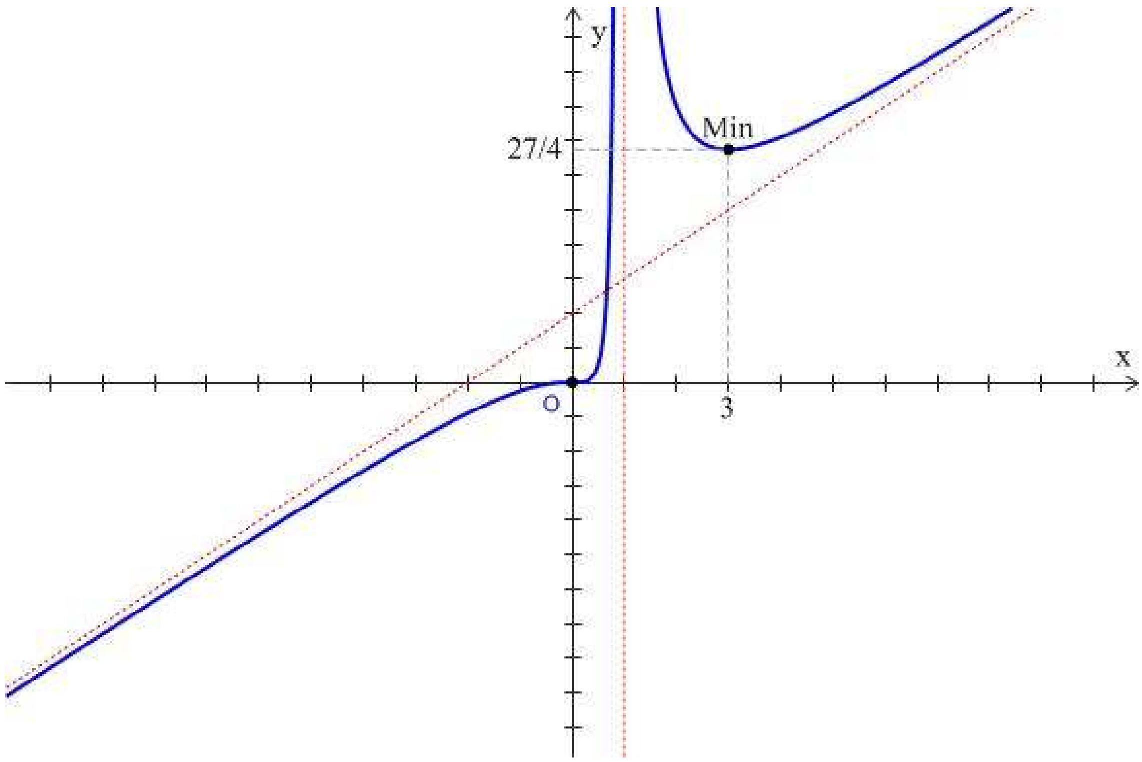
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2$$

Asymptotou se směrnicí je přímka $y = x + 2$.

5.

<u>Graf</u> – graf funkce *f* vypadá následovně:



Př.7.3

Vyšetřete průběh funkce *f:* $y = x - 4\sqrt{x}$.

Řešení:

1.

Definiční obor: odmocnina je definovaná pro všechna $x \geq 0$: $D(f) = \langle 0, \infty)$.

Obor hodnot: $H(f) = \langle -4, \infty)$.

<u>Průsečíky s osami:</u>

Dosadíme $x = 0$ do předpisu funkce $f(x)$ a dostaneme průsečík s osou y : $[0,0]$.

Řešením rovnice $y = x - 4\sqrt{x} = 0$ dostaneme průsečík s osou x : $[0,0]$, $[16,0]$.

Nulovými body funkce f je $x = 0$ a $x = 16$; na intervalu $(0,16)$ je funkce f záporná a na intervalu $(16,+\infty)$ je funkce f kladná.

<u>Sudost, lichost, periodičnost</u>

Funkce f není sudá ani lichá ani periodická.

<u>Limity v nevlastních bodech:</u>

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 4\sqrt{x}) = +\infty$$

2.

První derivace funkce: $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Položíme první derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body stacionárními: $x = 4$.

Na intervalu $(0,4)$ je první derivace záporná, funkce f je tedy na tomto intervalu klesající.

Na intervalu $(4,+\infty)$ je první derivace kladná, funkce f je tedy na tomto intervalu rostoucí.

V bodě $x = 4$ se nachází lokální minimum funkce f.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Druhá derivace funkce *f* je na intervalu $\langle 0, \infty)$ stále kladná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu konvexní.

Inflexní body neexistují.

4.

Asymptoty

Asymptota bez směrnice neexistuje, protože funkce *f* nemá žádné body nespojitosti.

Asymptota se směrnicí:

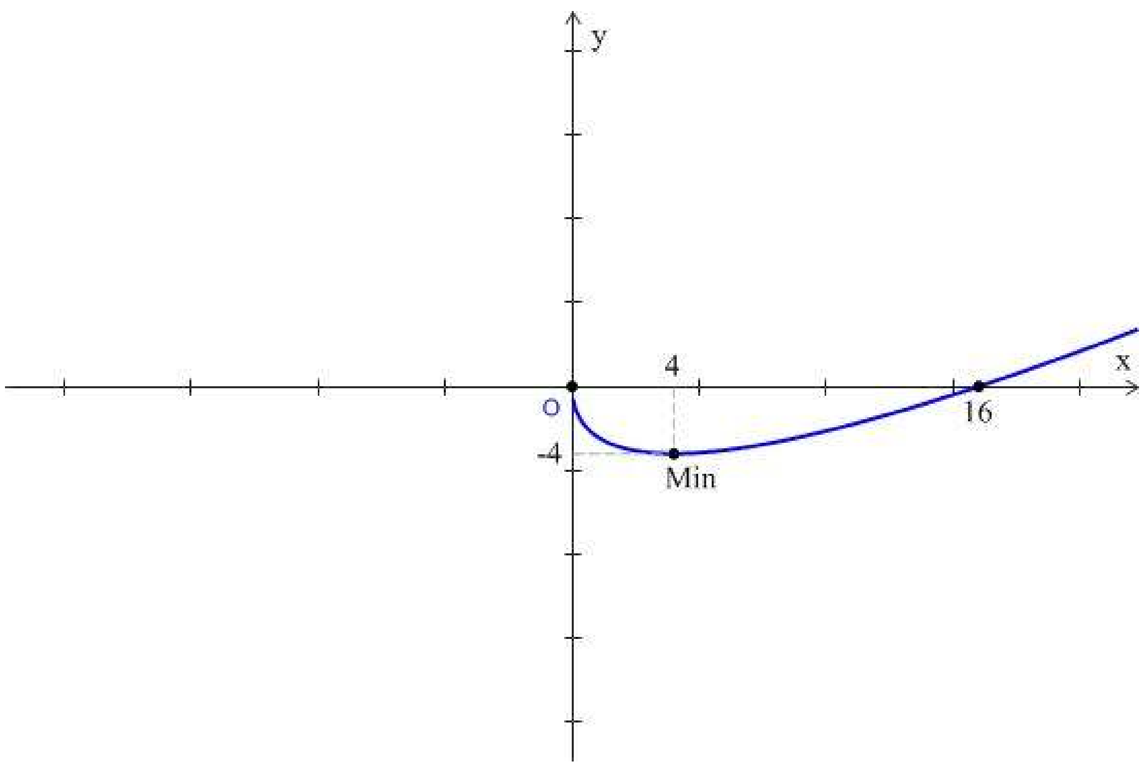
$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 4\sqrt{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} (x - 4\sqrt{x} - x) = -\infty$$

Asymptota se směrnicí také neexistuje.

5.

Graf – graf funkce *f* vypadá následovně:



Př.7.4

Vyšetřete průběh funkce f: $y = x + sin\ x$.

Řešení:

1.

Definiční obor: funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla → $D(f) = R$.

Obor hodnot: $H(f) = R$.

Průsečíky s osami:

Funkce f prochází počátkem soustavy souřadnic: $[0,0]$.

Nulovým bodem funkce f je $x = 0$; na intervalu $(-\infty,0)$ je funkce f záporná a na intervalu $(0,+\infty)$ je funkce f kladná.

Sudost, lichost, periodičnost

$f(-x) = -x + sin(-x) = -x - sin\ x \neq f(x)$. . . funkce f není sudá

$f(-x) = -x + sin(-x) = -x - sin\ x = -f(x)$ . . . funkce f je lichá

Funkce f není periodická.

Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x \to -\infty} (x + \sin x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$$

2.

První derivace funkce: $f'(x) = 1 + cos\ x$.

Položíme první derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body stacionárními: $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$.

Na intervalu $(-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi)$ je první derivace kladná, funkce f je tedy na tomto intervalu rostoucí. Funkce f je rostoucí na celém definičním oboru.

Lokální extrémy neexistují.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = -sin\ x$.

Položíme druhou derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body podezřelými z inflexe: $x = k\pi,\ k \in Z$.

Na intervalu *(-π + 2kπ, 2kπ)* je druhá derivace kladná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu konvexní.

Na intervalu *(2kπ, π + 2kπ)* je druhá derivace záporná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu konkávní.

V bodech $x = k\pi$, $k \in Z$ dochází ke znaménkové změně druhé derivace, body $x = k\pi$ jsou tedy inflexními body funkce *f*.

Třetí derivace funkce: $f'''(x) = -\cos x$.

Dle věty 4.8: třetí derivace ve stacionárních bodech je různá od nuly (je větší než nula) a *n* je liché, tudíž funkce *f* opravdu nemá lokální extrémy a je na celém definičním oboru rostoucí.

4.

Asymptoty

Asymptota bez směrnice neexistuje, protože funkce je definovaná na celém oboru reálných čísel *R*.

Asymptota se směrnicí:

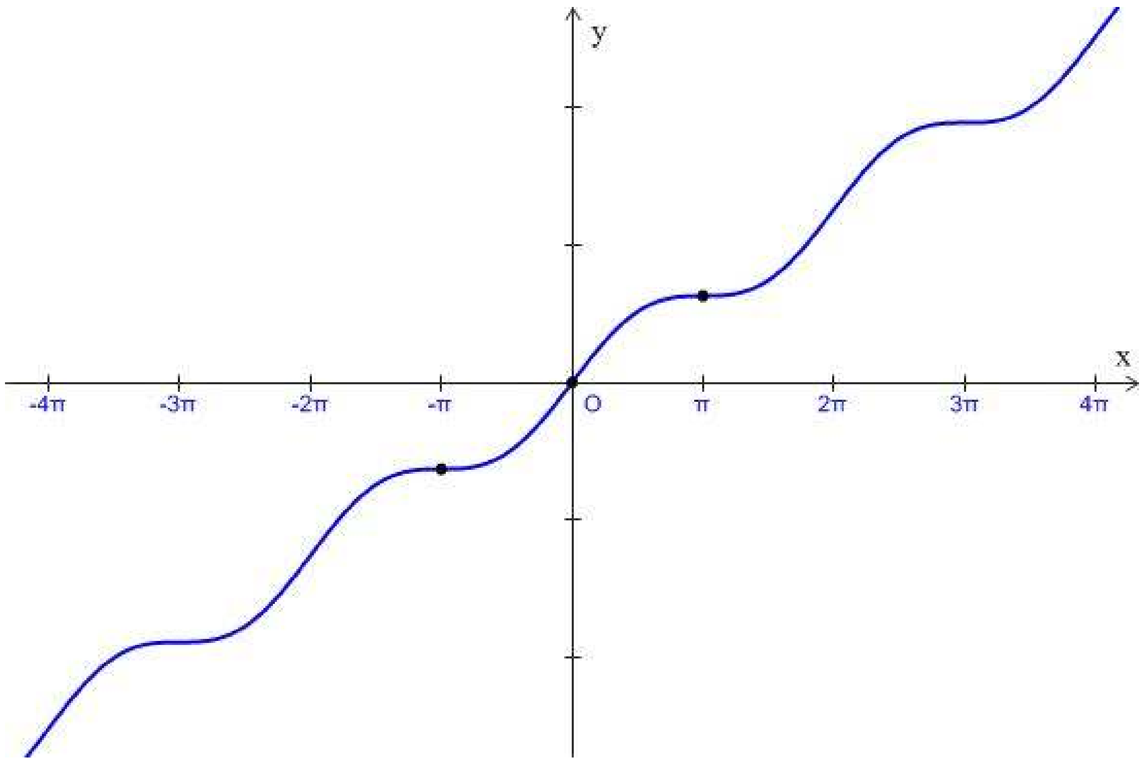
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \pm\infty} (x + \sin x - x) \text{. . . neexistuje}$$

Asymptota se směrnicí neexistuje.

5.

<u>Graf</u> – graf funkce *f* vypadá následovně:



Př.7.5

Vyšetřete průběh funkce f: $y = (x + 1)e^x$.

Řešení:

1.

Definiční obor: funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla → $D(f) = R$.

Obor hodnot: $H(f) = \langle -\frac{1}{e^2}, +\infty)$.

<u>Průsečíky s osami:</u>

Dosadíme $x = 0$ do předpisu funkce $f(x)$ a dostaneme průsečík s osou y : $[0,1]$.

Řešením rovnice $y = (x + 1)e^x = 0$ dostaneme průsečík s osou x : $[-1,0]$.

Nulovým bodem funkce f je $x = -1$; na intervalu $(-\infty,-1)$ je funkce f záporná a na intervalu $(-1,+\infty)$ je funkce f kladná.

<u>Sudost, lichost, periodičnost</u>

$f(-x) = (-x + 1)e^{-x} \neq f(x)$ . . . funkce f není sudá

$f(-x) = (-x + 1)e^{-x} \neq -f(x)$ . . . funkce f není lichá

Funkce f není ani periodická.

<u>Limity v nevlastních bodech:</u>

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)}{e^{-x}} = 0$$

2.

První derivace funkce: $f'(x) = 1\cdot e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$.

Položíme první derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body stacionárními: $x = -2$.

Na intervalu $(-\infty,-2)$ je první derivace záporná, funkce f je tedy na tomto intervalu klesající.

Na intervalu $(-2,+\infty)$ je první derivace kladná, funkce f je tedy na tomto intervalu rostoucí.

V bodě $x = -2$ se nachází lokální minimum funkce f.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = 1 \cdot e^x + (x + 2)e^x = (x + 3)e^x$.

Položíme druhou derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body podezřelými z inflexe: $x = -3$.

Na intervalu $(-\infty,-3)$ je druhá derivace záporná, funkce f je tedy na tomto intervalu konkávní.

Na intervalu $(-3,+\infty)$ je druhá derivace kladná, funkce f je tedy na tomto intervalu konvexní.

V bodě $x = -3$ dochází ke znaménkové změně druhé derivace, bod $x = -3$ je tedy inflexním bodem funkce f.

4.

Asymptoty

Asymptota bez směrnice neexistuje, protože funkce je definovaná na celém oboru reálných čísel R.

Asymptota se směrnicí:

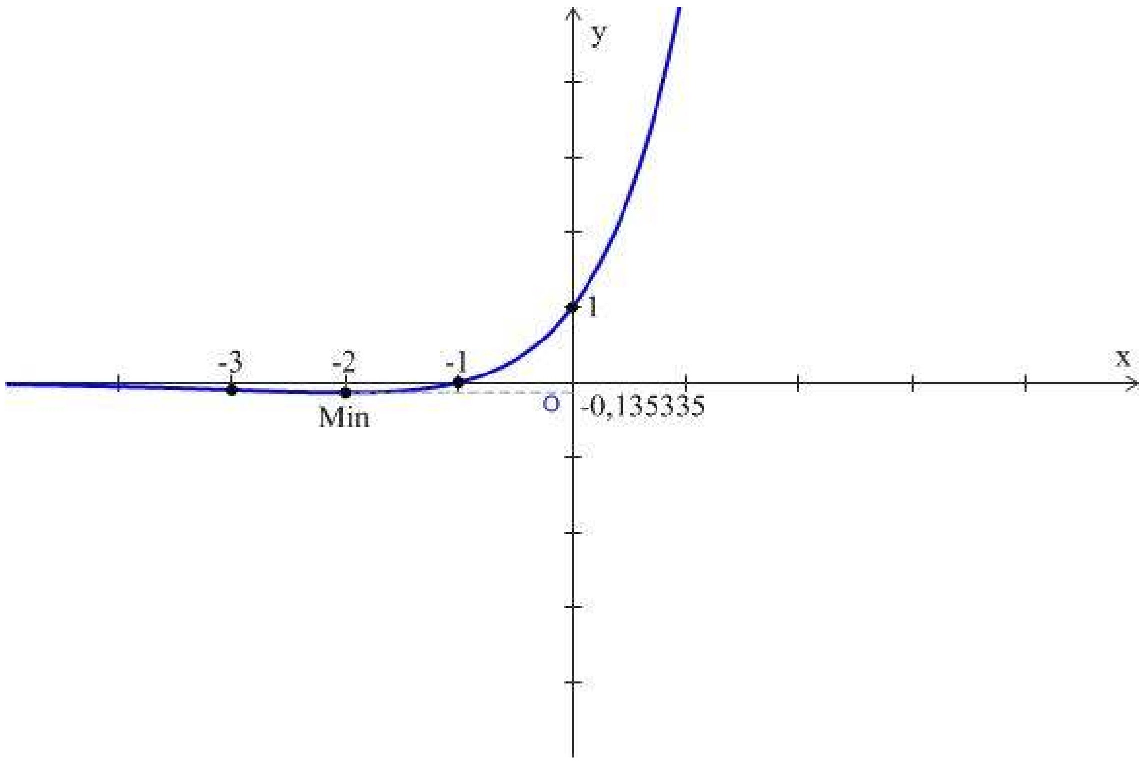
$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to -\infty} (x+1)e^x = 0$$

Asymptotou funkce f $(v\ -\infty)$ je přímka $y = 0$.

5.

<u>Graf</u> – graf funkce *f* vypadá následovně:



Př.7.6

Vyšetřete průběh funkce f: $y = 2x^2e^{-x}$.

Řešení:

1.

Definiční obor: funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla → $D(f) = R$.

Obor hodnot: funkce f nabývá pouze nezáporných hodnot → $H(f) = \langle 0,+\infty)$.

Průsečíky s osami: funkce f prochází počátkem soustavy souřadnic $[0,0]$.

Sudost, lichost, periodičnost

$f(-x) = 2(-x)^2e^{-(-x)} = 2x^2e^{x} \neq f(x)$ . . . funkce f není sudá

$f(-x) = 2(-x)^2e^{-(-x)} = 2x^2e^{x} \neq -f(x)$ . . . funkce f není lichá

Funkce f není ani periodická.

Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^2e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^2e^{-x} = +\infty$$

2.

První derivace funkce: $f'(x) = 4xe^{-x} - 2x^2e^{-x} = 2xe^{-x}(2-x)$.

Položíme první derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body stacionárními: $x = 0$, $x = 2$.

Na intervalech $(-\infty,0)$ a $(2,+\infty)$ je první derivace záporná, funkce f je tedy na těchto intervalech klesající.

Na intervalu $(0,2)$ je první derivace kladná, funkce f je tedy na tomto intervalu rostoucí.

V bodě $x = 0$ se nachází lokální minimum funkce f, v bodě $x = 2$ se nachází lokální maximum funkce f.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = [2xe^{-x}(2-x)]' = [e^{-x}(4x-2x^2)]' = -e^{-x}(4x-2x^2) + e^{-x}(4-4x) =$
$= 2e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$.

Položíme druhou derivaci rovnu 0 a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body podezřelými z inflexe: $x = 2-\sqrt{2}$, $x = 2+\sqrt{2}$.

Na intervalech *(-∞,* $2-\sqrt{2}$ *)* a *(* $2+\sqrt{2}$ *,+∞)* je druhá derivace kladná, funkce *f* je tedy na těchto intervalech konvexní.

Na intervalu *(* $2-\sqrt{2}$ *,* $2+\sqrt{2}$ *)* je druhá derivace záporná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu konkávní.

Jak v bodě $x = 2-\sqrt{2}$, tak v bodě $x = 2+\sqrt{2}$ dochází ke znaménkové změně druhé derivace, oba body jsou tudíž inflexními body funkce *f*.

4.

Asymptoty

Asymptota bez směrnice neexistuje, protože funkce *f* je definovaná na celém oboru reálných čísel *R*.

Asymptota se směrnicí:

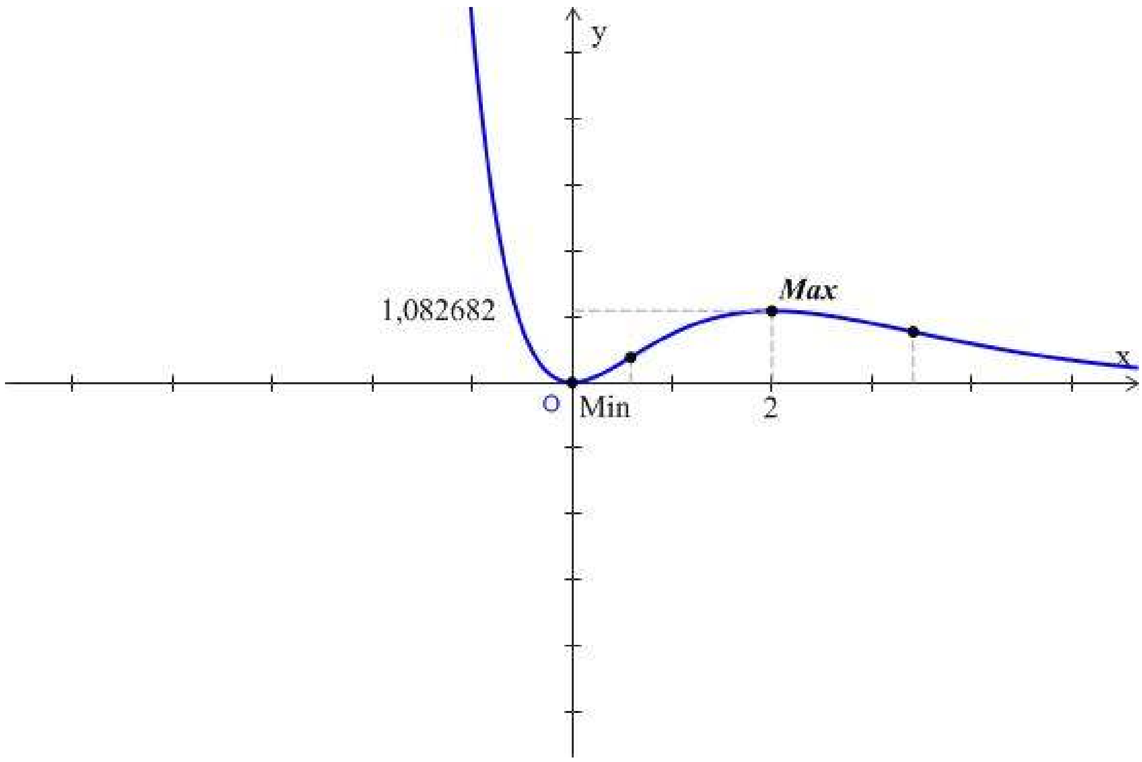
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} (2x^2e^{-x} - 0) = 0$$

Asymptotou funkce *f* (v +∞) je přímka *y = 0*.

5.

<u>Graf</u> – graf funkce *f* vypadá následovně:



Př.7.7

Vyšetřete průběh funkce *f*: $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Řešení:

1.

Definiční obor: argument logaritmu musí být kladný, tedy $x > 0$, ve jmenovateli nesmí být nula, tedy $\ln x \neq 0$, tj. $x \neq 1$: $D(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Obor hodnot: $H(f) = (-\infty,0) \cup (e,+\infty)$.

Průsečíky s osami neexistují. Na intervalu $(0,1)$ je funkce *f* záporná, na intervalu $(1,+\infty)$ je funkce *f* kladná.

<u>Sudost, lichost, periodičnost</u>

Funkce *f* není ani sudá ani lichá.

Funkce *f* není periodická.

<u>Limity v hraničních bodech definičního oboru:</u>

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$ (pozn.: výpočet limity použitím L´Hospitalova pravidla)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$ (pozn.: výpočet limity použitím L´Hospitalova pravidla)

2.

První derivace funkce: $f'(x) = \dfrac{1\cdot \ln x - x\cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

Položíme první derivaci rovnu *0* a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body stacionárními: $x = e$, $x = 1$ (bod vyloučený z definičního oboru).

Na intervalech $(0,1)$ a $(1,e)$ je první derivace záporná, funkce *f* je tedy na těchto intervalech klesající.

Na intervalu *(e,+∞)* je první derivace kladná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu rostoucí.

V bodě $x = e$ se nachází lokální minimum funkce *f*.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot \ln^2 x - (\ln x - 1)\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \dfrac{2-\ln x}{x\cdot \ln^3 x}$.

Položíme druhou derivaci rovnu *0* a zjistíme tak nulové body, které jsou zároveň body podezřelými z inflexe: $x = e^2$, $x = 0$ a $x = 1$ (body vyloučené z definičního oboru).

Na intervalech $(0,1)$ a $(e^2,+\infty)$ je druhá derivace záporná, funkce *f* je tedy na těchto intervalech konkávní.

Na intervalu $(1,e^2)$ je druhá derivace kladná, funkce *f* je tedy na tomto intervalu konvexní.

V bodě $x = e^2$ dochází ke znaménkové změně druhé derivace, bod $x = e^2$ je tudíž inflexním bodem funkce *f*.

4.

<u>Asymptoty</u>

Asymptota bez směrnice: funkce *f* není definovaná v bodě $x = 1$ a platí $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.

Asymptota bez směrnice je tedy: $x = 1$.

Asymptota se směrnicí:

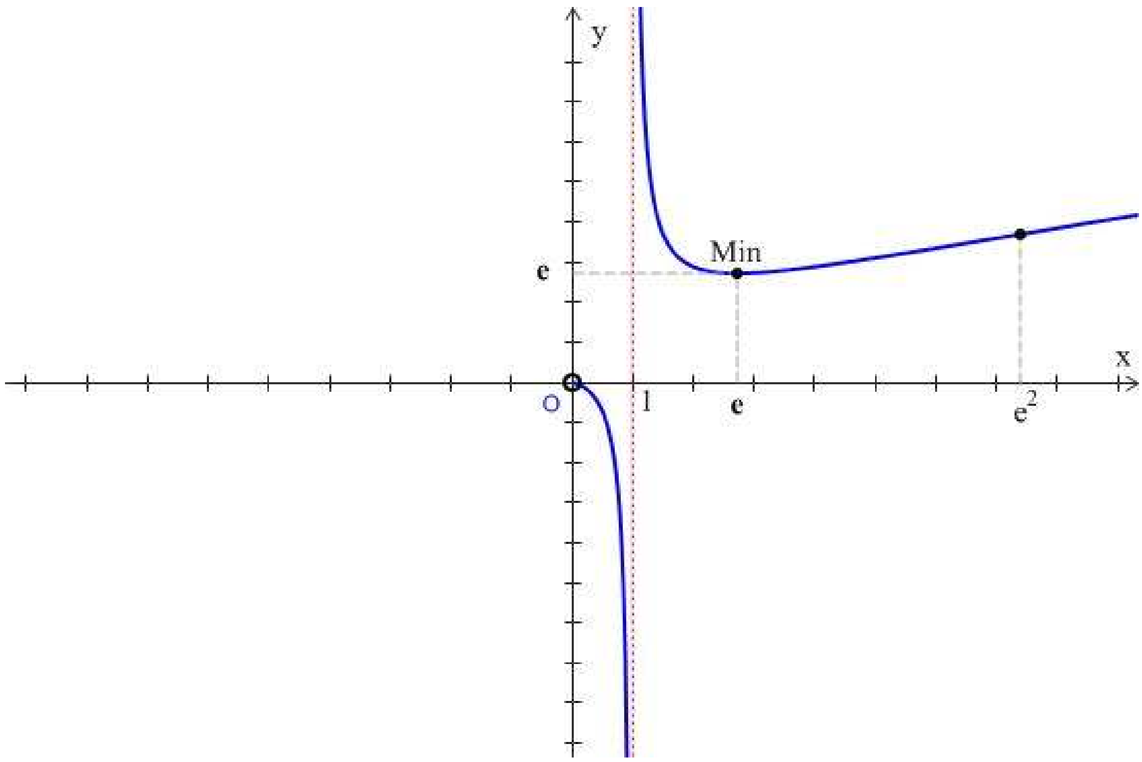
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln x} - 0 \right) = +\infty$$

Asymptota se směrnicí neexistuje.

5.

<u>Graf</u> – graf funkce *f* vypadá následovně:



Př.7.8

Vyšetřete průběh funkce *f:* $y = 2x + arctg\frac{1}{x}$.

Řešení:

1.

Definiční obor: funkce f je definovaná pro všechna reálná čísla kromě *0*:

D(f) = (-∞,0) ∪ (0,+∞).

Obor hodnot: *H(f)* = $\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

Průsečíky s osami neexistují.

Sudost, lichost, periodičnost

$f(-x) = 2(-x) + arctg\left(-\frac{1}{x}\right) = -2x - arctg\frac{1}{x} = -f(x)$ . . . funkce f je lichá, její graf bude souměrný podle počátku, a proto se omezíme při vyšetřování funkce na interval *(0,+∞)*

Funkce *f* není periodická.

Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x + arctg\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2x + arctg\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2.

První derivace funkce: $f'(x) = 2 + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{1}{x^2+1}$.

Protože je první derivace funkce *f* vždy kladná, je funkce *f* na intervalu *(0,+∞)* rostoucí.

Lokální extrémy neexistují.

3.

Druhá derivace funkce: $f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Protože je druhá derivace funkce *f* na intervalu *(0,+∞)* kladná, je funkce *f* na tomto intervalu konvexní.

Inflexní body neexistují.

4.

<u>Asymptoty</u>

Asymptota bez směrnice: funkce *f* není definovaná v bodě *0*, ale limita v bodě *0* není ani zleva ani zprava nevlastní, a proto asymptota bez směrnice neexistuje.

Asymptota se směrnicí:

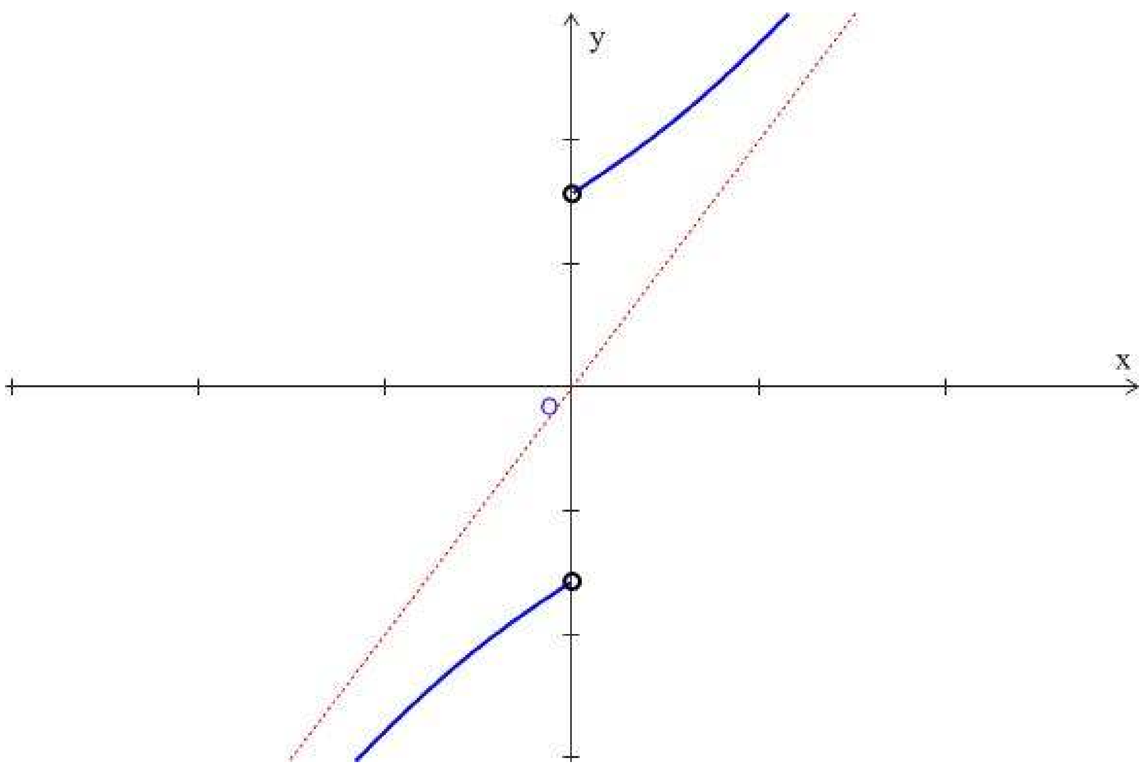
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + arctg\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{arctg\frac{1}{x}}{x} \right) = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x + arctg\frac{1}{x} - 2x \right) = 0$$

Asymptotou funkce *f* je přímka $y = 2x$.

5.

<u>Graf</u> – graf funkce *f* vypadá následovně:



8. Příklady na procvičování

Př.8.1: Určete intervaly ryzí monotonie funkce f, jestliže:

a) $f(x) = x^3 - 3x$,

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$,

c) $f(x) = x^3 e^{-x}$,

d) $f(x) = x^2 - \ln x^2$,

e) $f(x) = \mathrm{arctg}(x - 1)^2$.

Př.8.2: Najděte ostré lokální extrémy funkce f, jestliže:

a) $f(x) = x^3 - 3x$,

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$,

c) $f(x) = x - 2\ln x$,

d) $f(x) = x + \ln(\cos x)$,

e) $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

Př.8.3: Najděte globální (absolutní) extrémy funkce f na intervalu I:

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$, $I = \langle 1,4 \rangle$;

b) $f(x) = \mathrm{tg}\, x - 4x$, $I = \left\langle -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$;

c) $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $I = \left\langle \dfrac{1}{e}, e^2 \right\rangle$.

Př.8.4: Určete intervaly ryzí konvexnosti a konkávnosti funkce f, jestliže:

a) $f(x) = x^3 - 3x$,

b) $f(x) = 3x^5 - 40x^3 + x - 2$,

c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$,

d) $f(x) = x \cdot \mathrm{arctg}\, x$,

e) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x-2}$.

Př.8.5: Najděte inflexní body funkce *f*, jestliže:

a) $f(x) = x^3 - 3x$,

b) $f(x) = 3x^5 - 40x^3 + x - 2$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$,

e) $f(x) = 3x + arccotg\ 2x$.

Př.8.6: Najděte asymptoty grafu funkce *f*:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$,

b) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{x-1}$,

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x-1}$.

Př.8.7: Vyšetřete průběhy funkcí:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$,

b) $f(x) = ln(x^2 + x + 1)$,

c) $f(x) = sin^4 x + cos^4 x$,

d) $f(x) = 2x - tg\ x$,

e) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$,

f) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Závěr

Ve své bakalářské práci jsem se zabývala problematikou vyšetřování průběhu funkce. V úvodní části, dalo by se říci teoretické, jsem se zabývala základními vlastnostmi funkcí, jejich derivacemi a vlastnostmi derivací. V další části, praktické, jsem pak navázala na část úvodní a vše názorně ukázala na příkladech.

Snažila jsem se ukázat, jak lze při vyšetřování průběhu funkce využít diferenciálního počtu, derivací. Když vyšetřujeme průběh funkce, snažíme se získat o ní co nejvíce informací, které by nám pomohly funkci graficky znázornit. Při sestrojování grafu nám pomůže zejména představa o monotonii a extrémech funkce. Právě při zjišťování monotonie funkce a extrémů funkce využíváme diferenciálního počtu. Jako doplňující informace pak slouží konvexnost a konkávnost funkce a inflexní body funkce. Pro úplnou přesnost grafického znázornění hledáme ještě asymptoty grafu funkce, kdy při výpočtu používáme naše znalosti o limitách.

Seznam použité literatury

[1] Brožíková E., Kittlerová M.: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné – Řešené příklady, Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004.

[2] Budinský B., Charvát J.: Matematika I, Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1987.

[3] Fuchsová L.: Matematická analýza I - Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné, Brno: Masarykova univerzita v Brně, Fakulta přírodovědecká, 1992.

[4] Horský Z.: Matematika pro ekonomy, Praha: VŠE – Fakulta politické ekonomie, Státní pedagogické nakladatelství, 1967.

[5] Janovský Z., Průcha L.: Diferenciální počet I, Praha: ČVUT, Vydavatelství ČVUT, 1998.

[6] Neustupa J.: Matematika I, Praha: ČVUT- Fakulta strojní, Vydavatelství ČVUT, 2002.

[7] Neustupa J., Kračmar S.: Sbírka příkladů z Matematiky I, Praha: ČVUT – Fakulta strojní, Vydavatelství ČVUT, 2000.

[8] Novák, V.: Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné, Brno: Masarykova univerzita v Brně, Pedagogická fakulta, 2004.

[9] Seznam Poloučková A., Šalounová D.: Diferenciální počet I - Funkce jedné reálné proměnné, Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2001.

[10] Tkadlec J.: Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné, Praha: ČVUT – Fakulta elektrotechnická, Vydavatelství ČVUT, 2004.

Příloha

Výsledky příkladů na procvičování

Př.8.1

a) $f'(x) = 3x^2 - 3x$, na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$ je funkce f rostoucí, na intervalu $(-1,1)$ je funkce f klesající,

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, na intervalech $(-\infty,-3)$ a $(2,+\infty)$ je funkce f rostoucí, na intervalu $(-3,2)$ je funkce f klesající,

c) $f'(x) = x^2e^{-x}(3-x)$, na intervalu $(-\infty,3)$ je funkce f rostoucí, na intervalu $(3,+\infty)$ je funkce f klesající,

d) $f'(x) = \dfrac{2x^2-2}{x}$, na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$ je funkce f klesající, na intervalech $(-1,0)$ a $(1,+\infty)$ je funkce f rostoucí,

e) $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^4-4x^3+6x^2-4x+2}$, na intervalu $(-\infty,1)$ je funkce f klesající, na intervalu $(1,+\infty)$ je funkce f rostoucí.

Př.8.2

a) $f'(x) = 3x^2 - 3x$, lokální maximum se nachází v bodě $x = -1$, lokální minimum v bodě $x = 1$,

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, lokální maximum se nachází v bodě $x = -3$, lokální minimum v bodě $x = 2$,

c) $f'(x) = \dfrac{x-2}{x}$, lokální minimum se nachází v bodě $x = 2$,

d) $f'(x) = 1 - tg\, x$, lokální maximum se nachází v bodech $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in Z)$,

e) $f'(x) = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$, lokální maximum se nachází v bodě $x = \dfrac{2}{3}$.

Př.8.3

a) $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$, v bodě $x = 2$ se nachází lokální minimum funkce f, funkční hodnoty: $f(1) = 1$, $f(2) = -4$, $f(4) = 4 \rightarrow$ v bodě $x = 2$ je globální minimum a v bodě $x = 4$ globální maximum;

b) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4$, v bodě $x = \frac{\pi}{3}$ se nachází lokální minimum funkce f, funkční hodnoty: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \pi \doteq 2{,}14$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \doteq -2{,}46$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (tgx - 4x) = +\infty \rightarrow$ v bodě $x = \frac{\pi}{3}$ je globální minimum a globální maximum neexistuje;

c) $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x}$, v bodě $x = 1$ se nachází lokální minimum funkce f, funkční hodnoty: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} + 2 \doteq 2{,}14$; $f(1) = 1$, $f(e^2) = e^4 - 4 \doteq 50{,}6 \rightarrow$ v bodě $x = 1$ je globální minimum a v bodě $x = e^2$ globální maximum.

Př.8.4

a) $f''(x) = 6x$, na intervalu $(-\infty,0)$ je funkce f konkávní, na intervalu $(0,+\infty)$ je funkce f konvexní,

b) $f''(x) = 60x3 - 240x$, na intervalech $(-\infty,-2)$ a $(0,2)$ je funkce f konkávní, na intervalech $(-2,0)$ a $(2,+\infty)$ je funkce f konvexní,

c) $f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$, na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$ je funkce f konkávní, na intervalu $(-1,1)$ je funkce f konvexní,

d) $f''(x) = \frac{2}{(1 + x^2)^2}$, funkce f je konvexní na celém definičním oboru,

e) $f''(x) = -\frac{2}{(x - 2)^3}$, na intervalu $(-\infty,2)$ je funkce f konvexní, na intervalu $(2,+\infty)$ je funkce f konkávní.

Př.8.5

a) $f''(x) = 6x$, inflexe nastává v bodě $x = 0$,

b) $f''(x) = 60x^3 - 240x$, inflexe nastává v bodech $x = -2$, $x = 0$ a $x = 2$,

c) $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$, inflexe nastává v bodech $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$,

d) $f''(x) = -\dfrac{2}{9\cdot\sqrt[3]{(x+3)^5}}$, inflexe nastává v bodě $x = -3$,

e) $f''(x) = \dfrac{16x}{(4x^2+1)^2}$, inflexe nastává v bodě $x = 0$.

Př.8.6

a) asymptoty bez směrnice → $x = -2$, $x = 2$, asymptota se směrnicí → $y = -x$,

b) asymptota bez směrnice → $x = 1$, asymptota se směrnicí → $y = 4x$,

c) asymptota bez směrnice → $x = 1$, asymptota se směrnicí → $y = x + 5$.

Př.8.7

a) $D(f) = R$, $H(f) = R$, průsečík s osou y: $[0,7]$, průsečíky s osou x: $[1,0]$, $\left[-\frac{7}{2},0\right]$,

na intervalu $\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right)$ je funkce f záporná, na intervalu $\left(-\frac{7}{2},+\infty\right)$ je funkce f kladná;

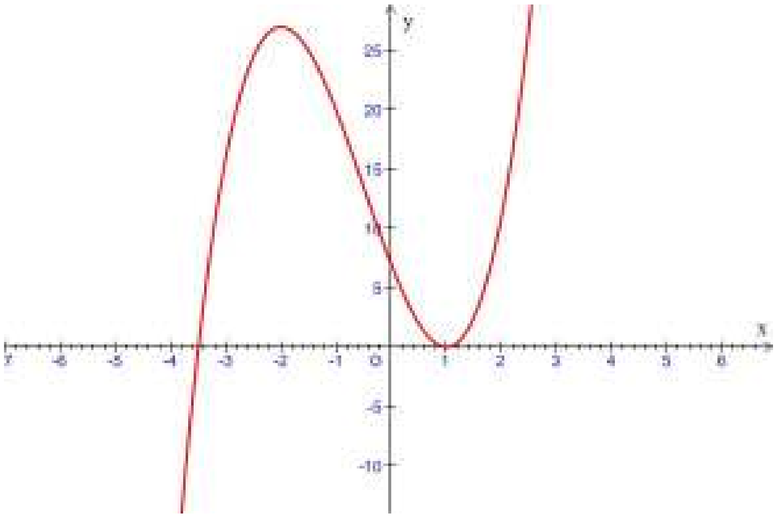
$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+3x^2-12x+7) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3+3x^2-12x+7) = +\infty$;

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, na intervalech $(-\infty,-2)$ a $(1,+\infty)$ je funkce f rostoucí, na intervalu $(-2,1)$ je funkce f klesající, v bodě $x = -2$ se nachází lokální maximum, v bodě $x = 1$ lokální minimum;

$f''(x) = 12x + 6$, na intervalu $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ je funkce f konkávní, na intervalu $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ je funkce f konvexní, inflexe nastává v bodě $x = -\frac{1}{2}$;

asymptoty neexistují;

Graf:



b) *D(f)* = *R*, *H(f)* = $\langle \ln\frac{3}{4}, +\infty)$, průsečíky s osou *x*: *[0,0]*, *[-1,0]*, na intervalech *(-∞,-1)* a *(0,+∞)* je funkce *f* kladná, na intervalu *(-1,0)* je funkce *f* záporná;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+x+1) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+x+1) = +\infty$;

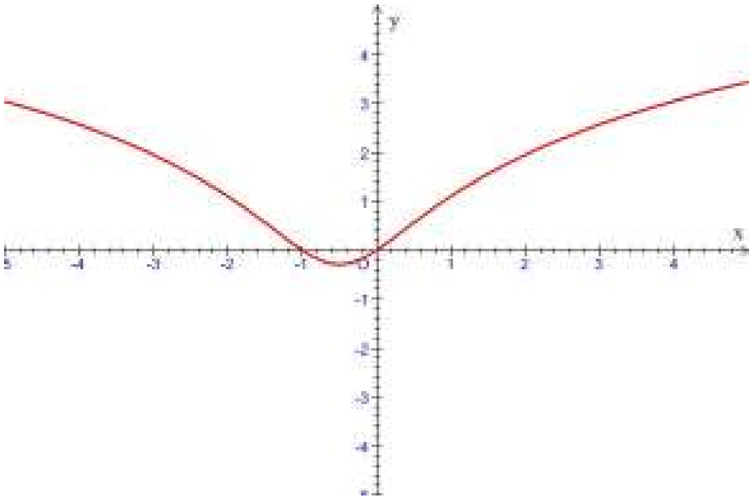
f´(x) = $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$, na intervalu $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ je funkce *f* klesající, na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ je funkce *f* rostoucí, v bodě $x = -\frac{1}{2}$ se nachází lokální minimum;

f´´(x) = $\frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, na intervalech $\left(-\infty, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ je funkce *f* konkávní, na intervalu $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ je funkce *f* konvexní,

inflexe nastává v bodech $x = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $x = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

asymptoty neexistují,

Graf:



c) $D(f) = R$, $H(f) = \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$, funkce *f* je sudá a periodická s periodou $\frac{\pi}{2}$;

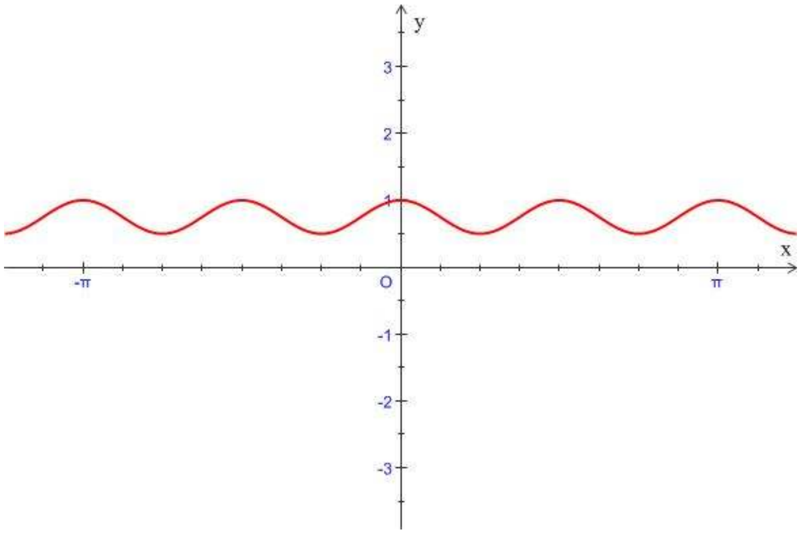
průsečík s osou *y*: *[0,1]*, funkce *f* je na celém definičním oboru kladná;

$f'(x) = 4\sin^3 x \cdot \cos x - 4\cos^3 x \cdot \sin x$, na intervalu $\left(0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$ je funkce *f* klesající, na intervalu $\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right)$ je funkce *f* rostoucí, lokální minimum funkce *f* se nachází v bodě $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, lokální maximum v bodě $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$;

$f''(x) = 24\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 4\sin^4 x - 4\cos^4 x$, na intervalu $\left(-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)$ je funkce *f* konkávní, na intervalu $\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)$ je funkce *f* konvexní, inflexe nastává v bodech $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$;

asymptoty neexistují;

Graf:



d) $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in Z$, $H(f) = R$, funkce f je lichá;

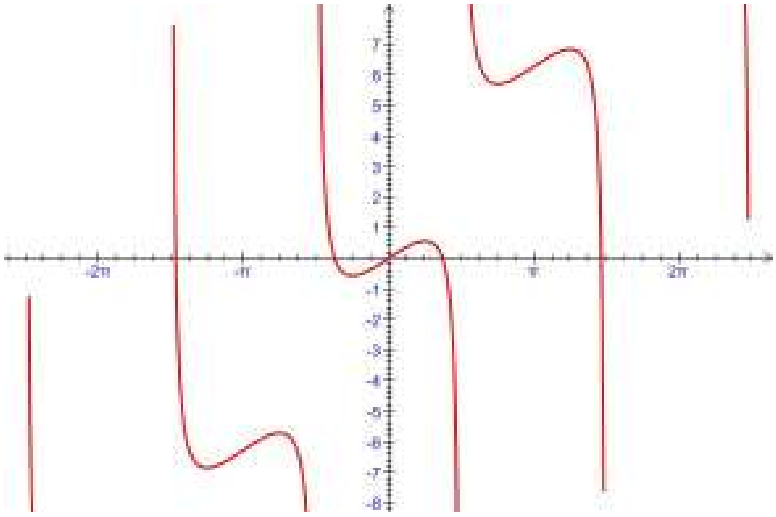
$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+}(2x - tgx) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-}(2x - tgx) = -\infty$,

$f'(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$, na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ a $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ je funkce f klesající, na intervalu $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ je funkce f rostoucí, lokální minimum funkce f se nachází v bodě $x = -\frac{\pi}{4}+k\pi$, lokální maximum v bodě $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$;

$f''(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi\right)$ je funkce f konvexní, na intervalu $\left(0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ je funkce f konkávní, inflexe nastává v bodech $x = 0 + k\pi$;

funkce f má asymptoty bez směrnice $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$;

Graf:



e) *D(f) = R – {-1}*, *H(f)* = $(-\infty,0)\cup\langle 1,+\infty)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+x}=+\infty$,

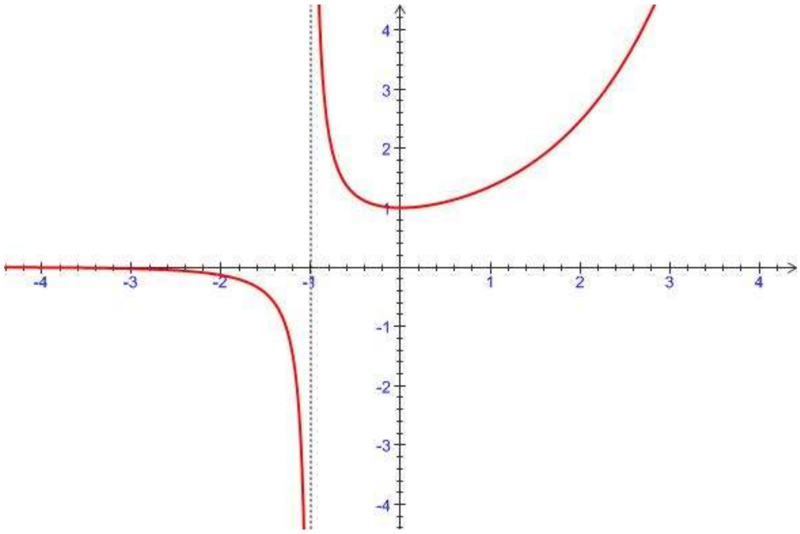
$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{e^x}{1+x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{e^x}{1+x}=+\infty$;

$f'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$, na intervalech *(-∞,-1)* a *(-1,0)* je funkce *f* klesající, na intervalu *(0,+∞)* je funkce *f* rostoucí, lokální minimum se nachází v bodě *x = 0*;

$f''(x)=\dfrac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$, na intervalu *(-∞,-1)* je funkce *f* konkávní, na intervalu *(-1,+∞)* je funkce *f* konvexní, inflexní body neexistují;

funkce *f* má asymptotu bez směrnice *x = -1* a asymptotu se směrnicí *y = 0* (pro -∞);

Graf:



f) *D(f) = R*, funkce *f* prochází počátkem soustavy souřadnic *[0,0]*;

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)=+\infty,$$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})+1$, funkce *f* je rostoucí na celém definičním oboru, lokální extrémy neexistují;

$f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{x}{x^2+1}$, na intervalu *(-∞,0)* je funkce *f* konkávní, na intervalu *(0,+∞)* je funkce *f* konvexní, inflexe nastává v bodě *x = 0*;

asymptoty neexistují.

Graf: