Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

RIEMANNŮV INTEGRÁL V PŘÍKLADECH

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Klápová

Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice, duben 2007

Poděkování

Děkuji Mgr. Petru Chládkovi za hodnotné rady a odborné vedení během mé bakalářské práce.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval/a samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

27.4. 2007

Anotace:

V práci je předložen popis konstrukce Riemannova určitého integrálu včetně některých jeho základních vlastností. Na konkrétních řešených úlohách jsou pak ukázány jeho geometrické aplikace.

In the thesis a describtion of the construction of Riemann's integral is submitted, including some of its basic features. Its geometric applications are shown in concrete solved problems.

OBSAH

1 Teorie Riemannova integrálu ………………………………………………… 6

1.1 Úvod ……………………………………………………………………. 6

1.2 G. B. F. Riemann……………………………………………………....... 7

1.3 Co je to *dx*? ……………………………………………………………... 8

1.4 Názorné vysvětlení ……………………………………………………… 9

1.5 Cauchy-Riemannova definice určitého integrálu ………………………. 10

1.6 Vlastnosti Riemannova integrálu …..…………………………………... 12

1.7 Věty o střední hodnotě Riemannova integrálu …………………………. 15

1.8 Metody integrace pro Riemannův integrál ……………………………… 16

1.9 Neurčitý integrál vybraných funkcí ………………………………...... 17

2 Praktická část ………………………………………………………………… 18

2.1 Metody výpočtu Riemannova integrálu ………………………………… 18

2.1.1 Použití Newton-Leibnitzovy formule ……………………………... 18

2.1.2 Použití metody per partes ………………………………………… 20

2.1.3 Použití substituční metody ………………………………………… 22

2.1.4 Souhrnné úlohy ………………………………………………….. 26

2.2 Geometrické aplikace …………………………………………………… 27

2.2.1 Výpočet obsahu rovinného obrazce ……………………………….. 27

2.2.2 Výpočet objemu rotačního tělesa ………………………………….. 34

2.2.3 Výpočet délky křivky ……………………………………………… 39

2.2.4 Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa …………………………… 42

2.3 Fyzikální aplikace ……………………………………………………. 45

2.3.1 Výpočet souřadnic těžiště homogenní desky …………………… 45

2.3.2 Výpočet souřadnic těžiště homogenního rotačního tělesa ………… 46

2.3.3 Výpočet souřadnic těžiště homogenní rotační plochy …………….. 47

2.3.4 Výpočet souřadnic těžiště homogenního drátu ……………………. 48

3 Závěr ………………………………………………………………………. 49

4 Seznam použité literatury ………………………………………………….. 51

5 Příloha - výsledky neřešených úloh ……………………………………….. 52

1 TEORIE URČITÉHO (RIEMANNOVA) INTEGRÁLU

1.1 ÚVOD

K pojmu určitého integrálu byli matematikové přivedeni – mimo jiné – také geometrickým problémem, totiž otázkou po plošné míře rovinných oborů. V elementární geometrii se definuje plošná velikost neboli obsah trojúhelníků (jako polovina součinu základny a výšky) a dále plošná velikost neboli obsah oborů, jež se dají rozložit na konečný počet trojúhelníků, tj. plošná velikost mnohoúhelníků. Vzniká otázka, jakým způsobem je vhodné definovat obsah oborů obecnějších, které nelze rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Existuje řada definic integrálu, které pro rozumně se chovající funkce vedou ke stejným výsledkům. Z nich nejdůležitější jsou Riemannův integrál, Newtonův a Lebesgueův integrál. Riemannův integrál navrhnul Bernard Riemann v roce 1854 a šlo o první definici integrálu odpovídající dnešním měřítkům. Lebesgueův integrál vytvořil Henri Lebesgue.

Lebesgueův integrál označuje v matematice definici určitého integrálu, založenou na teorii míry, konkrétně tzv. Lebesgueovy míry.

Lebesgueův integrál a další, ještě pokročilejší integrály, například integrál Kurzweillův, umožňují integrovat širší třídy funkcí, platí pro ně silnější verze mnoha tvrzení a skýtají i mnoho dalších výhod.

Newtonův integrál představuje definici určitého integrálu, která je založena na existenci primitivní funkce. Newtonova definice se užívá pouze pro nejjednodušší integrály. Postupně byla nahrazena pokročilejšími definicemi, jako např. Riemannovou nebo Lebesgueovou.

Newtonův i Riemannův integrál byly definovány na uzavřeném intervalu, rozdíl je ten, že Newtonův integrál je definován pro funkce mající na tomto intervalu funkci primitivní, zatímco Riemannův integrál je definován pro funkce na tomto intervalu omezené.

1.2 G. F. B. RIEMANN

Georg Fridrich Bernard Riemann se narodil 17. 9. 1826 v Breselenzu v Německu. Rodiče mu předčasně zemřeli na tuberkulózu a postupně na tuto nemoc umírali i jeho sourozenci.

Mladý nadaný Riemann tušil, že totéž čeká i na něj. Odešel na studia do Berlína a poté do Göttingenu, kde byl jeho profesorem matematiky Karl Gauss.

Osud mu dopřál jen 15 let práce. Své myšlenky vyložil v konkurzní přednášce, kterou pronesl v roce 1854 v sále göttingenské univerzity. Až dosud se neeuklidovská geometrie zabývala jen zakřivenou dvourozměrnou plochou. Riemann ukázal, že stejným způsobem lze studovat zakřivené prostory o jakémkoliv počtu rozměrů. Riemannova teorie byla nesmírně široká a komplexní. Všechny dosavadní geometrie, Euklidova i Gaussova, Lobačevského a Bolyaie, byly jen dílčími případy Riemannovy geometrie. V jeho teorii mohl být prostor nejrůznějším způsobem zkroucený, zdeformovaný, mohl mít různou křivost v různých bodech, mohl být souvislý i děrovaný, mohl mít libovolný počet rozměrů. Říká se, že když stárnoucí „král matematiků“ Gauss přednášku svého bývalého žáka vyslechl, jen mlčky vstal a beze slova vyšel ze sálu. K tomu, co Bernard Riemann dokázal, nebylo už co dodat.

V roce 1859 byl Riemann jmenován na göttingenské univerzitě profesorem. O tři roky později se oženil a dočkal se narození dítěte, mnoho času na rodinné radosti mu už ale nezbývalo. Kvůli zhoršujícímu se zdraví pobýval hlavně ve slunné Itálii a snažil se ještě stihnout poslední práce na velké fyzikální teorii, která měla poskytnout sjednocený popis elektromagnetismu, světla a gravitace.

Riemann se ještě jednou nakrátko vrátil do Göttingenu a potom se vydal zpět do Itálie. Mezitím vypukla prusko-rakouská válka a železnice nefungovala. Riemann šel pěšky, ale cesta byla vyčerpávající a na kraji Itálie 20. 7. 1868 zemřel.

1.2 CO JE TO *DX*?

Riemannův integrál je založen na aproximaci pomocí obdélníků. Pokud je funkce Riemannovsky integrovatelná, pak je pro opravdu úzké obdélníky chyba aproximace téměř nulová. Jaký je nejužší možný obdélník? Tato otázka nemá odpověď, protože tloušťku lze udělat libovolně malou, v limitním případě dostaneme obdélník nulové šířky, což už vůbec není obdélník.

Teď uvedeme diferenciál *dx*, což je nekonečně malý kousek osy *x* (ale jeho délka přesto není nulová). Samozřejmě taková věc vůbec neexistuje, krása této myšlenky je ovšem v tom, že když se používá opatrně, tak se zdá, že funguje. Co je důležitější, když se při přemýšlení o matematických myšlenkách používá *dx*, tak často vypadají mnohem přirozeněji a jednodušeji. To je také důvod, proč většina matematiků, i když dobře ví, že žádné nekonečně malé kousky osy *x* neexistují, stejně používá pojmu *dx* při přemýšlení nad problémy. Samozřejmě, když tak přijdou k nějakému závěru, tak to musí být korektně zkontrolováno a dokázáno. My teď aplikujeme přístup pomocí *dx* na určitý integrál.

Protože *dx* je nekonečně malé, každý obdélník bude širší než obdélník šířky *dx*. Obdélník šířky *dx* je tedy nejužší obdélník a, jinými slovy aproximace bude zanedbatelná. Každý kousek grafu funkce *f* o šířce *dx* je tak malý, že můžeme předpokládat,že je to kousek přímky. Oblast pod tímto kouskem je tedy lichoběžník. Jeho obsah se spočítá vynásobením základny *dx* a výškou měřenou uprostřed, což je *f*(*x*). Abychom získali celkový obsah, jednoduše sečteme obsahy všech lichoběžníků:
(*a* a *b* jsou krajní body intervalu na ose *x*)

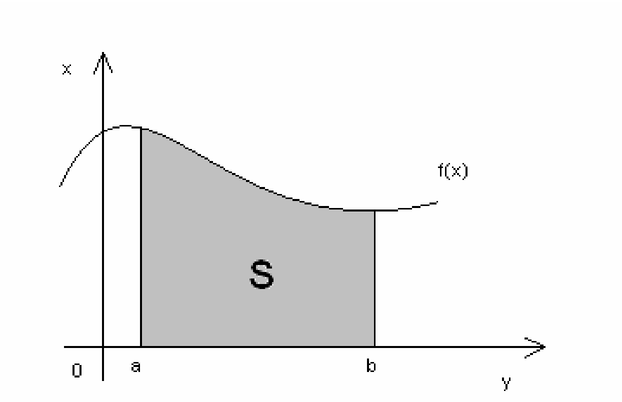
$$A = \sum_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

Tato suma samozřejmě nemá smysl. Když rozdělíme oblast pod grafem na pruhy o nekonečně malé šířce, kolik jich bude? Nekonečně mnoho. A nejen to, lichoběžníků je dokonce nespočetně mnoho a proto nevíme, jak vlastně sčítat všechny jejich obsahy, my umíme sčítat jen konečně mnoho či spočetně mnoho čísel. A tak nahradíme sumační znaménko znaménkem integrálním:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Toto odvození nebylo korektní, nicméně tento způsob přemýšlení je přirozený a dobře funguje. Pokud si zvykneme na *dx* coby nekonečně malý kousek osy *x*, spousta dalších vzorců bude vypadat přirozeněji (objem, těžiště atd.). Většinou ale *dx* slouží jen jako ryze symbolické označení bez dalšího významu.

1.3 NÁZORNÉ VYSVĚTLENÍ



$$S = \{(x,y) \in R^2, x \in \langle a,b \rangle, 0 \le y \le f(x)\}$$

Motivace k zavedení Riemannova integrálu mohou být různé, i když jejich hlavní rysy jsou vždy stejné. My jsme si vybrali tu nejběžnější a nejnázornější motivaci, totiž problém určení plošného obsahu.

Jednoduše řečeno je určitý integrál nezáporné funkce *f* mezi nějakými dvěma body *a*, *b* roven ploše obrazce omezeného přímkami $x = a$, $x = b$, osou *x*, a křivkou definovanou grafem funkce *f*. Formálněji řečeno, je takový integrál roven míře množiny *S*.

Integrál se značí stylizovaným protaženým písmenem S (z latinského summa). Toto označení vytvořil Gottfried Leibnitz. Integrál z předchozího odstavce by se dal označit jako $\int_a^b f(x)dx$, kde znaménko $\int$ značí integrování, *a* je dolní integrační mez, *b* horní integrační mez a $f(x)$ je tzv. integrand.

Interval $\langle a,b \rangle$ je uzavřený a nedegenerovaný (tj. $a < b$).

1.4 CAUCHY – RIEMANNOVA DEFINICE:

Definice 1.4.1

Je daný interval $\langle a,b \rangle$. Konečnou množinu $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ nazýváme **dělením intervalu** $\langle a,b \rangle$. Bodům x_i, pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

říkáme **dělící body intervalu** $\langle a,b \rangle$. Intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, říkáme **částečný interval** intervalu $\langle a,b \rangle$ při dělení D.

Definice 1.4.2

Nechť $D = \{x_0, x_{1,} ..., x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, je dělením intervalu $\langle a,b \rangle$.

Číslo $h(D) = \max\limits_{0 \le i \le k-1} (x_{i+1} - x_i)$ nazýváme **normou (krokem) dělení D**.

Definice 1.4.3

Nechť D a $D´$ jsou dělení intervalu $\langle a,b \rangle$, přičemž $D \subset D´$.

Pak $D´$nazýváme **zjemněním** dělení D.

Poznámka: 1) Když $D´$ je zjemněním D, pak $h(D) \ge h(D´)$.

2) Když D_1 a D_2 jsou dvě dělení intervalu $\langle a,b \rangle$, pak $D_1 \cup D_2$ je společným zjemněním D_1 i D_2.

Označme znakem Δx_i délku i-tého částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, tj. položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Dále mějme funkci f omezenou v intervalu $\langle a,b \rangle$ a označme znakem M_i supremum a znakem m_i infimum funkce f v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Danému dělení D přiřadíme nyní dvě čísla:

$S(D)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, jež budeme nazývat **horním součtem** příslušným k dělení D a funkci f,

$s(D)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, jež budeme nazývat **dolním součtem** příslušným k dělení D a funkci f.

Věta 1.4.1

Nechť funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle$; D a D' jsou dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, D' zjemňuje D. Potom:

1) $S(D')\le S(D)$ a $s(D')\ge s(D)$

2) nechť D_1 a D_2 jsou libovolná dělení $\langle a,b\rangle$, pak $s(D_1)\le S(D_2)$.

Věta 1.4.2

Je-li M supremum a m infimum funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$, je největší možná hodnota horního součtu rovna číslu $M(b-a)$, nejmenší možná hodnota dolního součtu rovna číslu $m(b-a)$. Je-li tedy D libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, platí nerovnost $m(b-a)\le s(D)\le S(D)\le M(b-a)$.

Věta 1.4.3

Je-li f omezená reálná funkce na $\langle a,b\rangle$ a $\boldsymbol{D}$ je množina všech možných dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, potom **dolní Riemannův integrál** funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ definujeme takto:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{s(D):D\in \boldsymbol{D}\}$$

a **horní Riemannův integrál** funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ definujeme takto:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{S(D):D\in \boldsymbol{D}\}$$

Definice 1.4.4

Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b \rangle$. Je-li $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$, říkáme, že f má v intervalu $\langle a, b \rangle$ **Riemannův integrál**. Společnou hodnotou dolního a horního integrálu značíme $\int_{a}^{b} f(x)dx$. O funkci f říkáme, že je **Riemannovsky integrovatelná** v $\langle a, b \rangle$.

1.5 VLASTNOSTI RIEMANNOVA INTEGRÁLU

Věta 1.5.1

Každá funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.

Věta 1.5.2

Nechť $a < b < c$. Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$

1) $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$

2) $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

3) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$ (aditivita mezí)

Věta 1.5.3 (o linearitě určitého integrálu)

1) Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a je-li α libovolné číslo, potom i funkce αf je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\int_{a}^{b} \alpha f(x)dx = \alpha \int_{a}^{b} f(x)dx$$

2) Nechť f a g jsou integrovatelné funkce na $\langle a,b\rangle$,potom je funkce f + g integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí:

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3) Nechť f a g jsou integrovatelné funkce na $\langle a,b\rangle$, potom je funkce fg integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.

Věta 1.5.4 (o nezápornosti určitého integrálu)

Nechť funkce *f* je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a nechť $f(x)\geq 0$, potom

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

Věta 1.5.5 (o monotonii určitého integrálu)

Nechť *f* a *g* jsou funkce integrovatelné na $\langle a,b\rangle$, $f(x)\leq g(x)$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Věta 1.5.6

Nechť *f* je funkce integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Potom je rovněž $|f|$ integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)dx|$$

Věta 1.5.7

Nechť *f* je funkce integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Nechť $\langle c,d\rangle$ je částečný interval intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom funkce *f* je též integrovatelná na $\langle c,d\rangle$.

Věta 1.5.8

Nechť f je funkce integrovatelná na $\langle a,b \rangle$. Funkce g nechť se liší od funkce f jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a,b \rangle$.

Potom funkce g je též integrovatelná na $\langle a,b \rangle$ a platí:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Věta 1.5.9

Nechť je funkce f omezená v intervalu $\langle a,b \rangle$, nechť má funkce f v intervalu (a,b) nejvýše konečný počet bodů nespojitosti.

Potom integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Věta 1.5.10 (Newton-Leibnitzova formule)

Nechť f je funkce integrovatelná na $\langle a,b \rangle$. Nechť $F(x)$ je funkce spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$. Nechť funkce $F(x)$ má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \, .$$

1.6 VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ INTEGRÁLU

V případě, že neumíme najít primitivní funkci F k funkci f, musíme se při výpočtu integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ obrátit k nějaké numerické metodě. Často však v aplikacích není nutné znát přesnou hodnotu integrálu a postačuje „rozumný“ odhad.

Metodu na odhadování hodnot integrálů nám dají věty o střední hodnotě.

Věta 1.6.1 (1. věta o střední hodnotě)

Nechť funkce f je integrovatelná a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť funkce g je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Pak existuje $\mu \in \left\langle \inf_{\langle a,b\rangle} g, \sup_{\langle a,b\rangle} g \right\rangle$ takové, že $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b f(x)\,dx \cdot$

Poznámka 1.6.1

1) Přidáme-li k předpokladům věty ještě spojitost funkce g, pak tvrzení lze vyslovit ve tvaru: Existuje $c \in \langle a,b\rangle$ takové, že $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(c)\int_a^b f(x)\,dx$.
2) Pro volbu funkce f = 1 věta říká: $\int_a^b g(x)\,dx = \mu(b-a)$. Číslo μ se nazývá střední hodnota funkce g. Číslo μ vystihuje, jakou výšku by měl mít obdélník nad intervalem $\langle a,b\rangle$, aby jeho plocha byla stejná, jako plocha mezi osou x a grafem funkce g.

Věta 1.6.2 (2. věta o střední hodnotě)

Nechť funkce f a g jsou integrovatelné v intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť g je monotonní v $\langle a,b\rangle$. Pak existuje $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^b f(x)\,dx + g(b)\int_a^b g(x)\,dx$.

1.7 METODY INTEGRACE

Věta 1.7.1 (metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť funkce *u* a *v* jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají na něm spojité derivace *u´* a *v´*. Pak platí:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Poznámka 1.7.1

Při výpočtu volíme funkce $u(x)$, $v'(x)$ tak, aby integrál na pravé straně byl pro výpočet jednodušší než integrál původní.

Věta 1.7.2 (substituce pro určitý integrál)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu I a nechť funkce φ má spojitou derivaci na omezeném uzavřeném intervalu J s krajními body α, β a $\varphi: J \rightarrow I$. Označme $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Poznámka 1.7.2

1) Při použití substituční metody je třeba změnit integrační meze nebo se vrátit k původní proměnné.
2) Uvedený vztah užíváme k výpočtu integrálu vlevo, známe-li integrál vpravo, nebo k výpočtu integrálu vpravo, známe-li integrál vlevo.

Poznámka 1.7.3

Dále existují přibližné numerické metody pro řešení určitého integrálu, např.: obdélníkovém pravidlo, lichoběžníkové pravidlo nebo Simpsonova metoda, které ale nejsou předmětem zkoumání této práce.

1.8 NEURČITÝ INTEGRÁL VYBRANÝCH FUNKCÍ

Pro připomenutí uvádím primitivní funkce některých základních funkcí, které se budou hodit i při výpočtu integrálu určitého:

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c; x > 0$$

$$= \ln(-x) + c; x < 0$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot gx + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

2 PRAKTICKÁ ČÁST

2.1 METODY VÝPOČTU RIEMANNOVA INTEGRÁLU

2.1.1 Použití Newton-Leibnitzovy formule

Příklad 1:

Vypočtěte $\int_1^3 6x^2 dx$.

Řešení:

Nejprve podle definice zjistíme primitivní funkci k funkci $f(x) = 6x^2$.

Tedy $F(x) = 2x^3$.

Potom vypočteme rozdíl $F(3) - F(1) = 2.3^3 - 2.1^3$.

Pro zápis řešení užíváme výhodnějšího způsobu, kdy primitivní funkci zapíšeme do hranaté závorky a meze přepíšeme. Potom dosadíme horní mez a dolní mez a odečteme (v tomto pořadí):

$$\int_1^3 6x^2 dx = \left[2x^3\right]_1^3 = 2.3^3 - 2.1^3 = 52$$

Příklad 2:

Vypočtěte $\int_1^3 x(1-x)^2\, dx$.

Řešení:

Nejprve podle definice zjistíme primitivní funkci. Závorku umocníme a roznásobíme:

$$\int_1^3 x(1-x)^2\, dx = \int_1^3 x\left(1 - 2x + x^2\right) dx = \int_1^3 \left(x - 2x^2 + x^3\right) dx =$$

Nyní integrujeme člen po členu:

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_1^3 =$$

Nakonec dosadíme meze a odečteme:

$$= \left(\frac{9}{2} - 2\,\frac{27}{3} + \frac{81}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{4} - 18 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

Příklad 3:

Vypočtěte $\int_0^4 (x + \sin x)\,dx$.

Řešení:

Opět nejprve nalezneme primitivní funkci, poté dosadíme meze a odečteme:

$$\int_0^4 (x - \sin x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x\right]_0^4 = \left(\frac{16}{2} - \cos 4\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \cos 0\right) = (8 - \cos 4) - (-1) =$$

$$= 9 - \cos 4$$

Příklad 4:

Vypočtěte $\int_1^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}\right) dx$.

Řešení:

$$\int_1^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}\right) dx = \left[2\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_1^3 = \left[4\sqrt{x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_1^3 = \left(4\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{3^4}\right) - \left(4 - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{3} - 4 + \frac{3}{4} = \frac{16\sqrt{3} - 9 - 13}{4}$$

K integrovaným funkcím určete primitivní funkce a pak vypočtěte integrály:

1. $\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx$

2. $\int_0^3 |1-3x|\,dx$

3. $\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}}dx$

4. $\int_{-1}^2 \left(x^2-x+5\right)dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\sin x)dx$

6. $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$

7. $\int_{-1}^0 \frac{4}{2x^2+4x+4}\,dx$

8. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

9. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

11. $\int_0^2 |1-x|\,dx$

12. $\int_0^3 2^x\,dx$

13. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx$

14. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

2.1.2 Použití metody per partes

Příklad 1:

Vypočtěte $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt[2]{x^3}}\,dx$.

Řešení:

Položme $u(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$, pak je $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Tedy:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt[2]{x^3}}dx = \left[-\ln x.2\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{\sqrt[2]{x^3}}dx = -2\frac{1}{\sqrt{e}}\ln e + 2\ln 1 + 2\left[-2\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^{..e} =$$

$$= -2\frac{1}{\sqrt{e}}\ln e - 4\frac{1}{\sqrt{e}} + 4 = 4 - 6\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Příklad 2:

Vypočtěte $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Řešení:

Položme $u(x) = \operatorname{arctg} x$, $v'(x) = x$, pak je $u'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

Tedy:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x]_0^1 + \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Příklad 3:

Vypočtěte $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$.

Řešení:

Položme $u(x) = x^2$, $v'(x) = \sin x$, pak je $u'(x) = 2x$, $v(x) = -\cos x$.

Tedy:

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \left[-x^2 \cos x \right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x \cos x \, dx = -\pi^2 \cos \pi + 0 + 2\int_0^\pi x \cos x \, dx =$$

$$= \pi^2 + \int_0^\pi x \cos x \, dx$$

Integrál $\int_0^\pi x \cos x \, dx$ vypočteme opět metodou per partes.

Položíme $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$, pak je $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$.

Proto

$$\int_0^\pi x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = 0 - [-\cos x]_0^\pi = -(1+1) = -2$$

Celkem tedy je:

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \pi^2 + 2\int_0^\pi x \cos x \, dx = \pi^2 + 2(-2) = \pi^2 - 4$$

Užitím metody per partes vypočtěte integrály:

1. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x \, dx$

2. $\int_{1}^{2} x \ln x \, dx$

3. $\int_{1}^{3} \ln^2 x \, dx$

4. $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \, dx$

5. $\int_{1}^{2} (3x+2) \ln x \, dx$

6. $\int_{-1}^{1} \ln(x+2) dx$

7. $\int_{0}^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$

8. $\int_{0}^{1} \arccos x \, dx$

9. $\int_{0}^{\pi} x \sin x \, dx$

10. $\int_{0}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$

11. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x.e^x.\sin x \, dx$

12. $\int_{0}^{1} x^2 e^{3x} dx$

2.1.3 Použití substituční metody

Příklad 1:

Vypočtěte $\int_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2} dx$.

Řešení:

Upravíme integrovanou funkci:

$f(x) = \sqrt{3-2x-x^2} = \sqrt{4-(1+2x+x^2)} = \sqrt{4-(x+1)^2}$

Pro $x \in \langle -1,1 \rangle$ je $\left[4-(x+1)^2\right] \geq 0$ a funkce *f(x)* je spojitá v intervalu $\langle -1,1 \rangle$.

Nyní použijeme substituci. Položme:

$x+1 = 2\sin t$, tedy $\varphi : x = \varphi(t) = -1 + 2\sin t$,

$$dx = \varphi'(t) dt = 2\cos t \, dt$$

Pro $x = -1$ je $t = 0$, pro $x = 1$ je $t = \frac{\pi}{2}$.

Funkce $\varphi'(t) = 2\cos t$ je v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ spojitá a pro každé $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je

$\varphi(t) \in \langle -1, 1 \rangle$.

Proto platí:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\,\cos t\,dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\,dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = = 2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

V praktických výpočtech ale užíváme stručnější zápis, jak bude vidět z dalších příkladů.

Příklad 2:

Vypočtěte $\int_{1}^{2} x(x^2 + 1)^5\,dx$.

Řešení:

Položíme-li $t = x^2 + 1$, je $dt = 2x\,dx$. Pro x = 1 je t = 2, pro x = 2 je t = 5. Tedy:

$$\int_{1}^{2} x(x^2 + 1)^5\,dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} t^5\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^6}{6}\right]_2^5 = \frac{1}{12}(5^6 - 2^6) = \frac{15561}{12}$$

Příklad 3:

Vypočtěte $\int_{0}^{\pi} \cos^2 x \sin x\,dx$.

Řešení:

Zvolíme substituci $t = -\cos x$. Pro x = 0 je t = -1 a pro $x = \pi$ je t = 1. Tedy:

$$\int_{0}^{\pi} \cos^2 x \sin x\,dx = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Příklad 4:

Vypočtěte $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$.

Řešení:

Zjistíme primitivní funkci:

Nyní upravíme jmenovatel zlomku na tvar $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$.

Použijeme substituci $x - 3 = t,\ dx = dt$, pro x = 2 je t = -1, pro x = 3 je t = 0.

Podle základního vzorce primitivní funkce k funkci $f(x) = \dfrac{1}{t^2+1}$ je funkce

$F(x) = \operatorname{arctg} t$.

Tedy:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} = \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2+1}\,dt = [\operatorname{arctg} t]_{-1}^0 = \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4}$$

Příklad 5:

Vypočtěte $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\sin x}$.

Řešení:

Užijeme obvyklou substituci $tg\,\dfrac{x}{2} = t$. Pak je $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Pro $x = -\dfrac{\pi}{2}$ je $t = -1$, pro $x = \dfrac{\pi}{2}$ je t = 1.

Pak platí:

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\sin x} = \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{5t^2 + 6t + 5} = \frac{2}{5}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2 + \frac{6}{5}t + 1} = \frac{2}{5}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}}$$

Pro výpočet posledního integrálu užijeme substituci $t + \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}z$.

Zde platí: $dt = \dfrac{4}{5}dz$, pro $t = -1$ je $z = -\dfrac{1}{2}$ a pro t = 1 je z = 2.

Konečně dostáváme:

$$\frac{2}{5}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}} = \frac{2}{5}\int_{-\frac{1}{2}}^{2} \frac{\frac{4}{5}\,dz}{\frac{16}{25}z^2 + \frac{16}{25}} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{2} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}[\operatorname{arctg} z]_{-\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arccotg} 2) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Užitím vhodné substituce vypočtěte integrály:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$

6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$

7. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$

9. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x\,dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\sin 2x.\sin 3x\,dx$

11. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x\cos x}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{\ln x}{x}\,dx$

2.1.4 Souhrnné úlohy

Užitím vhodné metody vypočtěte integrály:

1. $\int_0^2 x^2 \cos x \, dx$
2. $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$
3. $\int_0^4 (x + \sin x) dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$
5. $\int_{-1}^2 3x \sin(x^2 + 1) dx$
6. $\int_0^4 \left(x^2 - 4x\right) dx$
7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
8. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\log x\right| dx$
9. $\int_1^2 x \log_2 x \, dx$
10. $\int_{-2}^{1} \frac{1}{\left(11 + 5x\right)^3} \, dx$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$
12. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$
13. $\int_0^{\ln 2} x.e^{-x} dx$
14. $\int_{-1}^{1} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx$
15. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$
16. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx$
17. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x + 1} dx$
18. $\int_0^8 \sqrt{8x - x^2} dx$
19. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$
20. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$
21. $\int_1^e \ln^3 x \, dx$
22. $\int_1^2 \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} \, dx$

2.2 GEOMETRICKÉ APLIKACE RIEMANNOVA INTEGRÁLU

2.2.1 Výpočet obsahu plochy rovinného obrazce

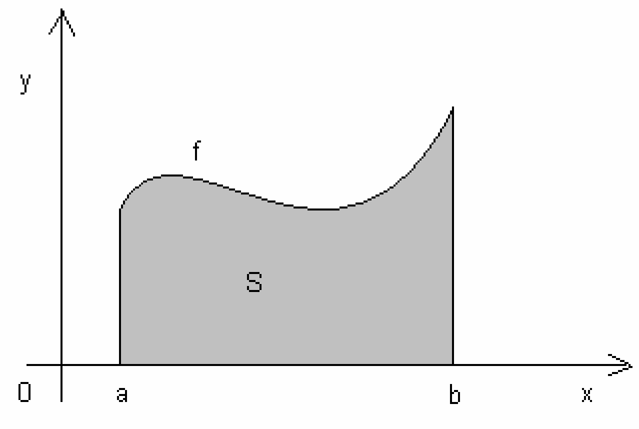
Nyní budeme určovat plošný obsah podmnožin v R^2. Označíme symbolem $S(M)$ plošný obsah podmnožiny $M \subset R^2$. Základním principem, ze kterého budeme vycházet je, že:

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2),$$

jestliže $M_1 \cap M_2 = 0$, nebo jestliže podmnožina $M_1 \cap M_2$ „má nulový plošný obsah".

Z konstrukce Riemannova integrálu vyplývá, že pro spojitou nezápornou funkci f v intervalu $\langle a, b \rangle$ se obsah S obrazce, který je ohraničen grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, vypočte podle vzorce:

$$S = \int_a^b f(x)dx \cdot$$

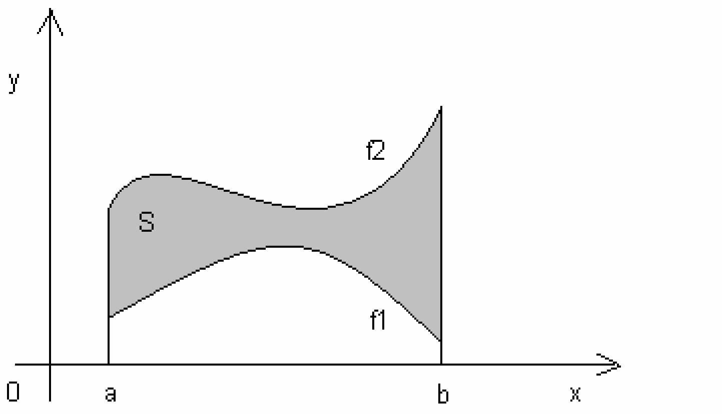


Pokud funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá pouze nekladných hodnot, pak obsah vypočteme absolutní hodnotou Riemannova integrálu.

Pokud funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá jak kladných, tak i záporných hodnot, potom tento interval rozdělíme na dílčí intervaly, ve kterých funkce nabývá pouze nekladných hodnot resp. nezáporných hodnot a vypočteme obsahy podle předcházejících úvah.

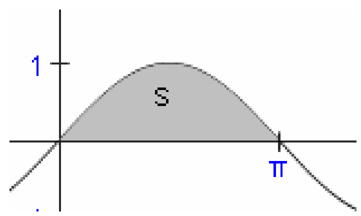
Je také vidět, že pro obsah obrazce, který je ohraničen grafy funkcí f_1, f_2, jež jsou spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro něž platí $f_1(x) \leq f_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, platí vztah:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx .$$



Příklad 1:

Vypočtěte obsah obrazce mezi grafem funkce $y = \sin x$ a osou x v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.



Řešení:

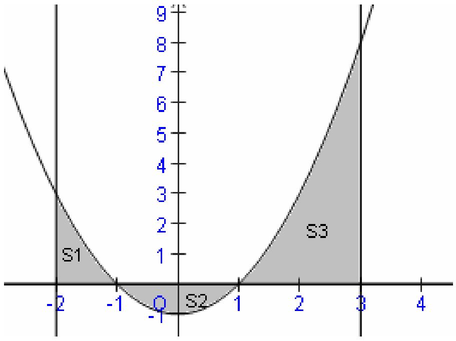
Velikost plochy mezi osou x a grafem funkce je vyjádřena určitým integrálem $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

Primitivní funkce k $\sin x$ je $-\cos x$ a výpočet provedeme podle Newton-Leibnitzova vzorce:

$$V = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Příklad 2:

Vypočtěte obsah obrazce, který je ohraničen křivkou $y = x^2 - 1$, osou x a přímkami $x = -2$, $x = 3$.



Řešení:

Zjistíme průsečíky grafu funkce $y = x^2 - 1$ s osou x:

$y = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Parabola tedy protíná osu x v bodech $x = 1$ a $x = -1$ a je v intervalech $\langle -2,-1 \rangle$ a $\langle 1,3 \rangle$ nezáporná a v intervalu $\langle 1,1 \rangle$ nekladná – viz. obrázek.

Rozdělíme proto interval $\langle -2,3 \rangle$ na tři dílčí intervaly a obsahy S_1, S_2, S_3 dílčích útvarů sečteme:

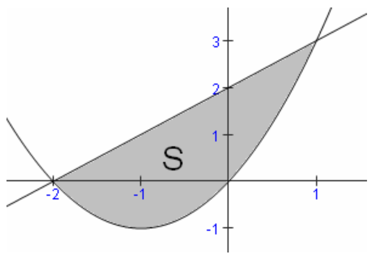
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) dx \right| + \int_{1}^{3} (x^2 - 1) =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} + \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^{1} \right| + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{1}^{3} =$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) + \left| \frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right| + \frac{22}{3} - 3 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{28}{3}$$

Příklad 3:

Určete obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 + 2x$ a přímkou $x - y + 2 = 0$.



Řešení:

Jde o útvar, který nazýváme úseč paraboly.

Určíme průsečíky přímky a paraboly vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x^2 + 2x = x + 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

Průsečíky přímky a paraboly tedy jsou: $[-2,0], [1,3]$.

Pro určení vrcholu paraboly upravíme rovnici paraboly:

$$y = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

Vidíme, že vrchol paraboly má souřadnice *x* = -1, *y* = -1 a přímka $x - y + 2 = 0$ ohraničuje úseč paraboly shora. Označme proto

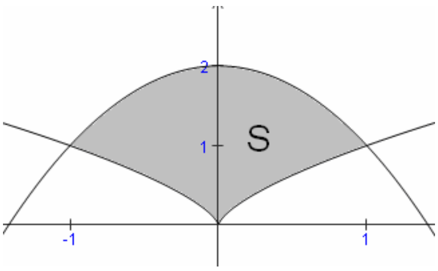
$$f_2 : y = x + 2,\ f_1 : y = x^2 + 2x$$

Pak pro obsah úseče platí:

$$S = \int_{-2}^{1} (x + 2 - x^2 - 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2}$$

Příklad 4:

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = 2 - x^2$ a $y^3 = x^2$.



Řešení:

Najdeme průsečíky těchto funkcí řešením rovnice $2 - y = y^3$. Tato rovnice má pouze jeden reálný kořen, a to *y* = 1. Odtud $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

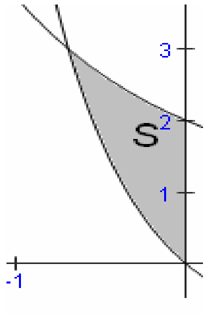
Druhou funkci vyjádříme explicitně: $y = \sqrt[3]{x^2}$

Označíme-li $f_2 : 2 - x^2,\ f_1 : \sqrt[3]{x^2}$, obsah obrazce najdeme jako určitý integrál z rozdílu těchto funkcí a využijeme toho, že integrujeme sudé funkce v mezích, které jsou souměrné podle počátku.

Pak platí pro hledaný obsah:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-\sqrt[3]{x^2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(2-x^2-\sqrt[3]{x^2}\right)dx=2\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right]_0^1=2\left(2-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right)=\frac{32}{15}$$

Příklad 5:



Určete obsah obrazce omezeného křivkami

$y=e^{-2x}-1,\ y=e^{-x}+1,\ x=0$.

Řešení:

Souřadnice průsečíku obou exponenciál získáme řešením rovnice

$e^{-2x}-1=e^{-x}+1$ a pak výpočtem příslušné hodnoty y.

Jde o exponenciální rovnici, řešíme ji substitucí $e^{-x}=u$.

Pak je:

$u^2-1=u+1$

$u^2-u-2=0$

$u_1=-1,\ u_2=2$

Rovnice $e^{-x}=-1$ nemá řešení v oboru reálných čísel.

Rovnice $e^{-x}=2$ má řešení $x=-\ln 2$. Pak y = 3. Průsečík exponenciál je bod $[-\ln 2{,}3]$.

Označíme-li $f_2: y=e^{-x}+1,\ f_1: y=e^{-2x}-1$, platí pro hledaný obsah:

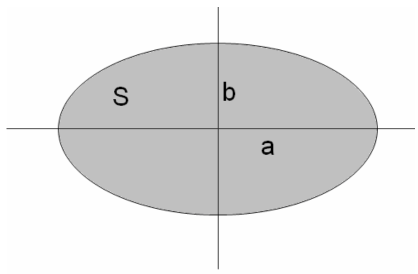
$$S=\int_{-\ln 2}^{0}\left(e^{-x}+1-e^{-2x}+1\right)dx=\left[\frac{e^{-2x}}{2}-e^{-x}+2x\right]_{-\ln 2}^{0}=\frac{1}{2}-1-\left(\frac{e^{2\ln 2}}{2}-e^{\ln 2}-2\ln 2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}-2+2+2\ln 2=\ln 4-\frac{1}{2}$$

Příklad 6:

Vypočtěte obsah vnitřku elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(a>0,\ b>0)$.



Řešení:

Rovnici elipsy vyjádříme: $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Protože elipsa je symetrická podle osy *x*, počítejme jen polovinu plochy (nad osou *x*) jako integrál ze sudé nezáporné funkce (znaménko +).Integrál ze sudé funkce v mezích od –*a* do *a* (souměrných podle počátku) nahradíme dvojnásobkem integrálu od 0 do *a*.

Potom provedeme substituci $\frac{x}{a}=\sin t,\ \frac{1}{a}dx=\cos t\ dt$.

Dolní mezi *x* = 0 odpovídá *t* = 0, horní mezi *x* = *a* odpovídá $t=\frac{\pi}{2}$.

Pro hledaný obsah tedy platí:

$$\frac{S}{2}=2\int_0^a ab\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\frac{dx}{a}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\ dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=ab\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=ab\frac{\pi}{2}$$

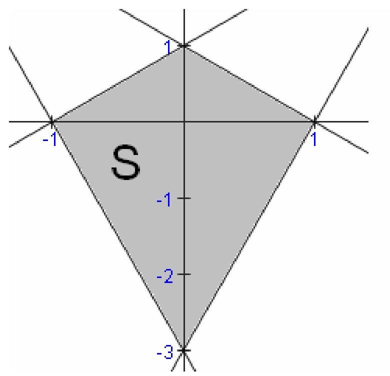
Hledaný obsah vnitřku elipsy je tedy $ab\pi$.

Ve speciálním případě, když *a* = *b* =*r*, dostáváme vzorec pro plošný obsah kruhu o poloměru r, $S=\pi r^2$.

Příklad 7:

Vypočtěte obsah deltoidu, jehož vrcholy jsou body:

$[0,1],[-1,0],[1,0],[0,-3]$.



Řešení:

Nejprve zjistíme rovnice přímek *f* a *g* (viz obrázek). Tyto přímky jsou grafem dvou funkcí. Jde o lineární funkce, proto obě rovnice budou mít tvar $y=kx+q$.

Do této rovnice dosadíme souřadnice bodů, kterými obě přímky procházejí a zjistíme tak čísla *k* a *q*:

Přímka *f* prochází body $[-1,0],[0,1]$ a řešíme soustavu rovnic:

$$0=-k+q$$
$$1=q$$

Tedy *q* = 1 a *k* = 1 a rovnice přímky *f* je *y* = *x* + 1.

Tento postup zopakujeme i pro přímku *g* a zjistíme ,že její rovnice má tvar $y=-3x-3$.

Protože deltoid je symetrický podle osy *y*, počítejme jen polovinu plochy, a to na intervalu $\langle -1,0 \rangle$ (nalevo od osy *y*).

Obsah plochy vypočítáme jako integrál z rozdílů funkcí *f* a *g*.

Platí tedy:

$$\frac{S}{2} = \int_{-1}^{0} [x + 1 - (-3x - 3)]dx = \int_{-1}^{0} (4x + 4)dx = [2x^2 + 4x]_{-1}^{0} = -2 + 4 = 2$$

Celkový obsah deltoidu je tedy 4.

Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami:

1. $y = x^2 - x - 2$ a osou *x* na intervalu $\langle 1,3 \rangle$.
2. $x = 2 - y - y^2$ a osou *x*.
3. $y = 3 - x^2,\ y = 2x$.
4. $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a přímkou $y = \frac{1}{2}$.
5. $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0$
6. $y = \mathrm{tg}\, x,\ y = \frac{2}{3}\cos x,\ x = 0$.
7. $y = e^x - 1,\ y = e^{2x} - 3,\ x = 0$.
8. $y = \ln(x + 2),\ y = 2\ln x$ a osou *x*.
9. $x^2 + y^2 - 8 = 0,\ y^2 - 2x = 0$
10. $y = \cos x,\ x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.
11. $y = x^2,\ y = \frac{x^2}{3},\ y = 8 - x^2$.
12. $y = \frac{x^2 - 2}{3},\ y = x^2 - \frac{4}{3}x - 6$
13. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x \in \langle 0,1 \rangle$.
14. $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$.
15. $y = \sin^3 x$ a $y = \cos^3 x$ a přímkami $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.
16. $x^2 - 9y + 8 = 0,\ x^2 + 3y - 4 = 0$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, osou *x* a osou *y*.

18. $x + y + y^2 = 2$ a osou *y*.

19. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;\ a > 0, b > 0$

20. $y = 2x^2,\ x = 2y^2$

21. $x = (y-2)^2,\ y = x$

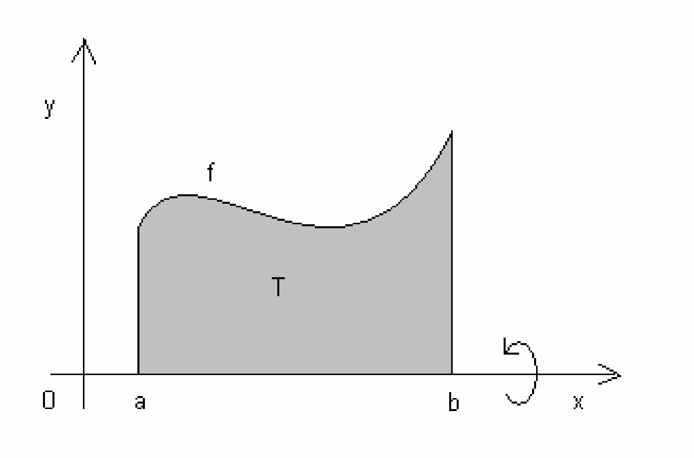
22. $y = \sin^2 x$ a osou *x* v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$

23. $y = \sin^4 x$ a osou *x* v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$

24. Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, kde $A = [-1{,}0],\ B = [2{,}0],\ C = [0{,}2]$.

2.2.2 Výpočet objemu rotačního tělesa

Uvažujme kladnou funkce *f* definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Vezměme množinu ohraničenou přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$. a grafem funkce *f* a nechme ji rotovat kolem osy *x*. Vytvoříme tak rotační těleso *T* a budeme se nyní ptát, jaký je objem tohoto rotačního tělesa.



Při definování a určování tohoto objemu můžeme postupovat prakticky úplně stejně jako v případě plošného objemu, jen s tím rozdílem, že „vše necháme rotovat kolem osy *x*“.

Objem V tělesa T vypočteme podle vztahu:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

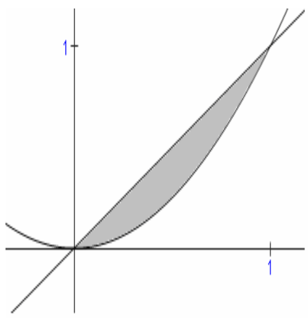
Samozřejmě pouze za předpokladu, že Riemannův integrál na pravé straně existuje.

Pokud rotační těleso vznikne rotací kolem křivky $x = f(y)$ kolem osy y (f je nezáporná spojitá funkce), v intervalu $\langle a, b \rangle$, potom jeho objem V vypočteme podle vztahu:

$$V = \pi \int_a^b f^2(y)dy$$

Příklad 1:

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2$, $y = x$ kolem osy x.



Řešení:

Najdeme průsečíky těchto funkcí řešením rovnice $x^2 = x$.

Rovnice má dvě řešení, a to $x_1 = 0,\ x_2 = 1$, potom $y_1 = 0,\ y_2 = 1$, a funkce mají dva průsečíky o souřadnicích $[0,0], [1,1]$.

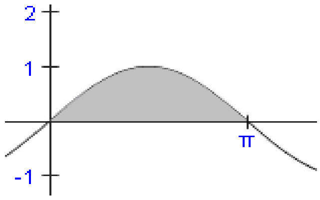
X – ové souřadnice průsečíků použijeme jako integrační meze.

Funkce odečteme a dosadíme do vzorce pro výpočet objemu :

$$V = \pi \int_0^1 \left(x - x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right] = \frac{\pi}{30}$$

Příklad 2:

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkou $y = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ kolem osy *x*.



Řešení:

Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu *V* uvedeného výše, za meze integrálu dosadíme krajní body intervalu $\langle 0, \pi \rangle$:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx$$

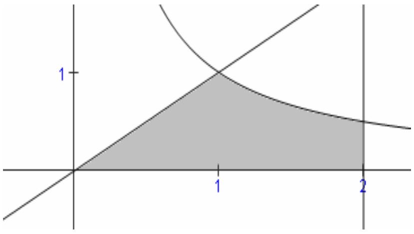
Pro výpočet posledního integrálu použijeme substituci $2x = t$, $dx = \frac{dt}{2}$, pro $x = 0$ je $t = 0$, pro $x = \pi$ je $t = 2\pi$, tedy:

$$\frac{1}{2} \pi \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \pi \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \, dt = \frac{1}{4} [t - \sin t]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \pi . 2\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Příklad 3:

Vypočtěte objem tělesa , které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami

$y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$ kolem osy *x*.



Řešení:

Podle obrázku vidíme, že musíme zjistit průsečíky křivek $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ v prvním kvadrantu.

To provedeme řešením rovnice $x = \frac{1}{x}$. V prvním kvadrantu má tato rovnice jedno řešení, a to $x = 1$. Průsečíkem křivek je tedy bod $[1,1]$.

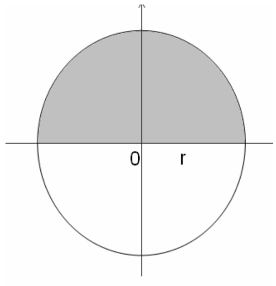
Průsečíkem křivek $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ je bod $\left[2, \frac{1}{2}\right]$.

Interval $\langle 0,2 \rangle$ rozdělíme na dvě části, a to na intervaly $\langle 0,1 \rangle$ a $\langle 1,2 \rangle$. V každém z těchto intervalů vypočítáme objemy těles V_1, V_2, které sečteme a získáme tak celkový objem *V* daného rotačního tělesa.

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 = \pi \frac{1}{3} + \pi \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6} \pi$$

Příklad 4:

Vypočtěte objem koule (s poloměrem r, r > 0).



Řešení:

Střed koule umístíme do počátku. Potom povrch koule vznikne rotací poloviny kružnice $x^2 + y^2 = r^2$. Horní polovina kružnice je vyjádřena funkcí $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

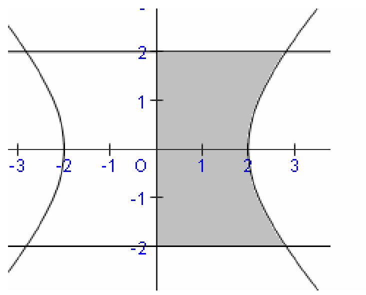
Objem *V* dostaneme podle vzorce (integrujeme sudou funkci od –*r* do *r*):

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 \right) dx = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2 \right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r =$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Příklad 5:

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $x^2 - y^2 = 4,\ y = -2,\ y = 2$ kolem osy *y*.



Řešení:

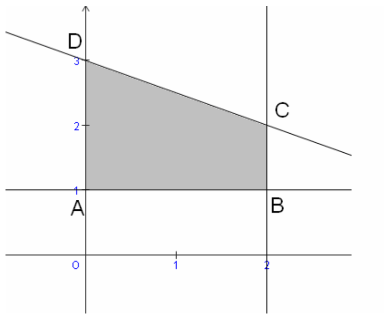
Křivkou omezující rotující útvar je rovnoosá hyperbola (*a* = *b* = 2) pro *y* z intervalu $\langle -2, 2 \rangle$.

Z rovnice hyperboly vyjádříme $x^2 : x^2 = y^2 + 4$ a dosadíme do vztahu pro výpočet objemu tělesa rotujícího kolem osy *y*:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(y^2 + 4 \right) dy = \pi \left[\frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-2}^{2} = \pi \left[\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right] = \frac{64}{3} \pi$$

Příklad 6:

Vypočtěte objem součástky tvaru rotačního tělesa, které vznikne rotací lichoběžníka *ABCD* kolem osy *x*. Lichoběžník je určen souřadnicemi vrcholů $A[0,1]$, $B[2,1]$, $C[2,2]$, $D[0,3]$.



Řešení:

Nejprve vypočítáme objem tělesa V_1, které vznikne rotací úsečky *CD* kolem osy *x*.

K tomu potřebujeme rovnici přímky *CD*. Tato rovnice bude mít tvar $y = kx + q$.

Dosazením souřadnic bodů *C* a *D* zjistíme, že $k = -\frac{1}{2}$ a $q = 3$.

Rovnice přímky *CD* tedy je $y = 3 - \frac{x}{2}$.

Pro objem V_1 platí:

$$V_1 = \pi\int_0^2 \left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(9 - 3x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \pi\left[9x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \pi\left(18 - 6 + \frac{2}{3}\right) = \frac{38}{3}\pi$$

Od tohoto objemu je třeba odečíst objem V_2 válce, který vznikne rotací úsečky *AB* kolem osy *x*. Rovnice přímky *AB* má tvar $y = 1$.

$$V_2 = \pi\int_0^2 dx = \pi[x]_0^2 = 2\pi$$

Takže pro hledaný objem V platí:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\left(\frac{38}{3} - 2\right) = \frac{32}{3}\pi$$

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami:

1. $y = 2 - x^2$ kolem osy *x*.
2. $y = \sin 2x$ v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ kolem osy *x*.
3. $y = x^2$, $x = y^2$ kolem osy *x*.
4. $y = \cos x + \sin 2x$ v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ kolem osy *x*.

5. $y=\frac{4}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4$ kolem osy *x*.

6. $y=1-x^2, y=2+x^2$ v intervalu $\langle -1,1\rangle$ kolem osy *x*.

7. $2y=x^2,\ 2x+2y-3=0$ kolem osy *x*.

8. $y=\sin x,\ y=\cos x$ v intervalu $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$ kolem osy *x*.

9. $y=\ln x,\ y=\frac{x}{e},\ y=0$ kolem osy *x*.

10. $y=e^{-2x}-1,\ y=e^{-x}+1,\ x=0$ kolem osy *x*.

11. $y=x,\ y=x+\sin^2 x$ v intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ kolem osy *x*.

12. Vypočtěte objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu o podstavných hranách $a_1,\ a_2$ a výšce *v*.

13. Vypočtěte objem anuloidu, který vznikne rotací kružnice $(x-a)^2+y^2=r^2$ kolem osy *y*.

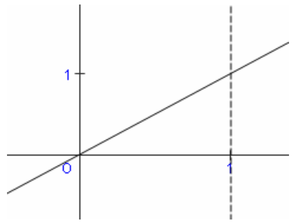
2.2.3 Výpočet délky křivky

Pro funkci $f: y=f(x)$, která je definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má v tomto intervalu spojitou derivaci, platí pro délku grafu funkce *f* vztah:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Tento vzorec je možné použít i v případě, kdy funkce *f* je spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$, derivace $f'(x)$ je spojitá v intervalu (a,b) a v krajních bodech intervalu je derivace $f'(a)$ nebo $f'(b)$ nevlastní.

Příklad 1:



Vypočtěte délku křivky $y = x$ na intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

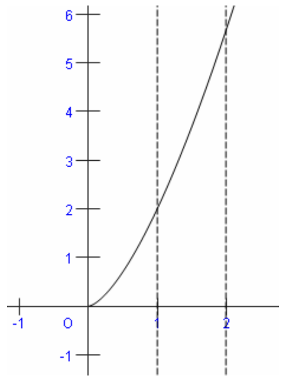
Řešení:

Derivace funkce $f : f(x) = x$ je $f'(x) = 1$.

Nyní můžeme dosadit do vzorce pro výpočet délky křivky:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+1}\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 1\, dx = \sqrt{2}[x]_0^1 = \sqrt{2}$$

Příklad 2:



Vypočtěte délku křivky $y = \sqrt{x^3}$ na intervalu $\langle 1,2 \rangle$.

Řešení:

Derivace funkce $f : f(x) = \sqrt{x^3}$ je $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

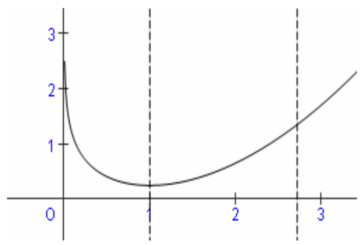
Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet délky křivky:

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{4+9x}\, dx$$

Pro výpočet posledního integrálu použijeme substituci $t = 4+9x$, $dt = 9dx$, pro $x = 1$ je $t = 13$, pro $x = 2$ je $t = 22$:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{4+9x}\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{9}\int_{13}^{22} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_{13}^{22} = \frac{1}{27}\left[t\sqrt{t}\right]_{13}^{22} = \frac{22\sqrt{22}-13\sqrt{13}}{27}$$

Příklad 3:



Vypočtěte délku křivky $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ na intervalu $\langle 1, e \rangle$.

Řešení:

Nejprve vypočítáme derivaci funkce

$$f : f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}:$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}2x - \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{2x}$$

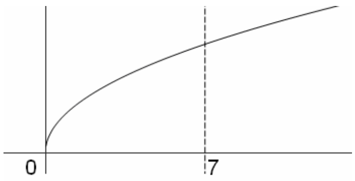
Dosadíme do vzorce pro výpočet délky křivky:

$$L=\int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^e \sqrt{1+\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}}\,dx=\int_1^e \frac{1}{2x}\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx=\int_1^e \frac{1}{2x}\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^2}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)\right]=\frac{e^2+1}{4}$$

Příklad 4:

Vypočtěte délku křivky $y=2x\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0,7\rangle$.



Řešení:

Nejprve vypočítáme derivaci funkce $f: f(x)=2x\sqrt{x}$:

$$f'(x)=2\sqrt{x}+2x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{x}+\sqrt{x}=3\sqrt{x}$$

Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet délky křivky:

$$L=\int_0^7 \sqrt{1+\left(3\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\int_0^7 \sqrt{1+9x}\,dx$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme substituci $t=1+9x,\ dt=9dx$, pro x = 0 je t = 1, pro x = 7 je t = 64:

$$\int_0^7 \sqrt{1+9x}\,dx=\int_1^{64} \sqrt{t}\,\frac{dt}{9}=\frac{1}{9}\frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_1^{64}=\frac{2}{27}\left(\sqrt{64^3}-1\right)=\frac{1022}{27}$$

Vypočtěte délku oblouku křivky:

1. $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x},\ x\in\langle 0,2\rangle$

2. $y=\frac{1}{4x}+\frac{x^3}{3},\ x\in\langle 1,2\rangle$

3. $y=x^2-\frac{\ln x}{8},\ x\in\langle 1,e\rangle$

4. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ x\in\langle -1,2\rangle$

5. $y=\ln\left(1-x^2\right),\ x\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$

6. $y^2=\left(x+1\right)^3$, vyťatého přímkou x = 4

7. $y = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1},\ x \in \langle a, b \rangle$

8. $y = \ln|\sin x|,\ x \in \left\langle \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3} \right\rangle$

9. $y = \dfrac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ mezi průsečíky s osou x

10. $y = \dfrac{2}{\pi} \ln \sin \dfrac{\pi x}{2},\ x \in \left\langle \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$

11. $5y^3 = x^2$, který je uvnitř kružnice $x^2 + y^2 = 6$

2.2.4 Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa

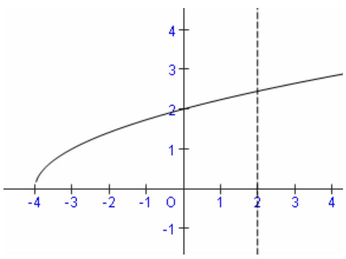
Nechť funkce $f : y = f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v tomto intervalu spojitou derivaci. Obsah pláště rotačního tělesa, které vzniklo rotací křivky, jež je grafem funkce *f*, kolem osy *x* můžeme vypočítat ze vztahu:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Přitom opět platí poznámka o případné nevlastní derivaci v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$, jak byla uvedena v předchozí kapitole.

Příklad 1:

Vypočtěte obsah plochy vytvořeného otáčením oblouku křivky $y^2 = 4 + x$ vyťatého přímkou *x* = 2 kolem osy *x*.



Řešení:

Nejprve je nutné zjistit průsečík dané křivky s osou *x*, abychom tak zjistili dolní integrační mez:

Po dosazení *y* = 0 do rovnice křivky vidíme, že křivka protíná osu *x* v bodě $x = -4$.

Nyní vypočítáme derivaci funkce $f : f(x) = \sqrt{4+x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{4+x}}$$

Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu plochy rotačního tělesa:

$$P = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{4+x}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{\frac{17+4x}{4(4+x)}}\,dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{\frac{17+4x}{4}}\,dx =$$

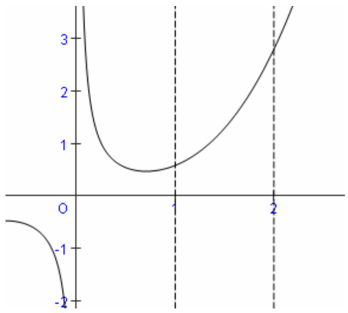
$$= 2\pi\frac{1}{2}\int_{-4}^{2}\sqrt{17+4x}\,dx = \pi\int_{-4}^{2}\sqrt{17+4x}\,dx$$

Použijeme substituci $17+4x = t$, $dx = \frac{dt}{4}$. Pro $x = -4$ je $t = 1$, pro $x = 2$ je $t = 25$:

$$\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{17+4x}\,dx = \pi\int_{1}^{25}\sqrt{t}\,\frac{dt}{4} = \frac{\pi}{4}\int_{1}^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\left[\sqrt[2]{t^3}\right]_1^{25} = \frac{\pi}{6}(125-1) = \frac{62\pi}{3}$$

Příklad 2:

Vypočtěte obsah plochy, která vznikne otáčením oblouku křivky $y = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$ v intervalu $\langle 1,2 \rangle$.



Řešení:

Nejprve zjistíme derivaci funkce $f : f(x) = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$:

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(-\frac{x^{-2}}{1}\right) + \frac{1}{3}3x^2 = -\frac{1}{4x^2} + x^2 = \frac{4x^4-1}{4x^2}$$

Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet plochy rotačního tělesa:

$$P = 2\pi\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{4x}+\frac{x^3}{3}\right)\sqrt{1+\left(\frac{4x^4-1}{4x^2}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{4x}+\frac{x^3}{3}\right)\sqrt{1+\left(\frac{16x^8-8x^4+1}{16x^4}\right)}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{4x}+\frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{4x^2}\sqrt{(4x^2+1)^2}\,dx = 2\pi\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{16x^3}+\frac{x}{12}\right)(4x^2+1)\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{16x^3}+\frac{x^3}{3}+\frac{x}{12}\right)dx = 2\pi\left[\frac{1}{4\ln x}-\frac{1}{32x^2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{24}\right]_1^2 =$$

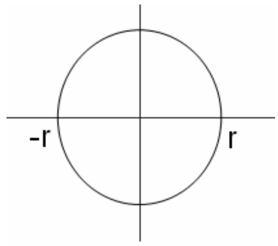
$$= 2\pi\left[\left(\frac{1}{4\ln 2}-\frac{1}{128}+\frac{16}{12}+\frac{4}{24}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{32}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)\right] = 2\pi\left(\frac{1}{4\ln 2}+\frac{191}{128}-\frac{11}{32}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{147}{64}\right)$$

Příklad 3:

Vypočtěte obsah plochy, která vznikne otáčením oblouku křivky

$y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r,r\rangle$, $r>0$, kolem osy x.



Poznamenejme, že se jedná o povrch koule o poloměru r.

Řešení:

Protože derivace funkce f: $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ je

$f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, a tedy $\left[f'(x)\right]^2=\dfrac{x^2}{x^2-r^2}$, dostáváme:

$$P=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2-r^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}r\,dx=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=$$

$$=2\pi r\left[x\right]_{-r}^{r}=4\pi r^2$$

Vypočtěte obsah plochy vytvořeného otáčením:

1. oblouku křivky $y=\sin x$, $x\in\langle 0,\pi\rangle$, okolo osy x
2. oblouku křivky $y=\dfrac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ mezi průsečíky s osou x kolem osy y
3. oblouku křivky $x^2=2y$ vyťatého přímkou $y=\dfrac{3}{2}$ kolem osy y
4. křivky $4x^2+y^2=4$ kolem osy y
5. křivky $x^2+(y-a)^2=a^2$, $a>0$ kolem osy x
6. křivky $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, $a>0$, kolem osy x
7. křivky $y=\operatorname{tg}x$, $x\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{4}\right\rangle$ kolem osy x

2.3 FYZIKÁLNÍ APLIKACE RIEMANNOVA INTEGRÁLU

2.3.1 Výpočet souřadnic těžiště homogenní desky

Nejprve zmiňme nejdůležitější vlastnost těžiště. Soustředíme-li veškerou hmotu tělesa do jeho těžiště, potom tento hmotný bod má vzhledem k libovolné přímce stejný moment jako celé těleso.

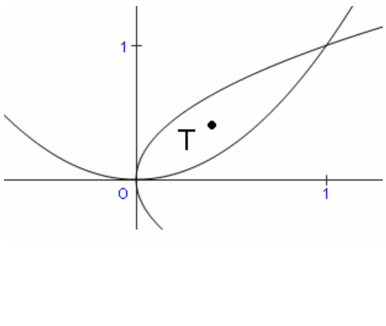
Nechť je funkce f kladná funkce definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Nechť podmnožina v R^2 ohraničená přímkami $x=a,\ x=b,\ y=0$ a grafem funkce f je pokryta homogenní deskou přesně stejného tvaru. Chceme určit souřadnice $x_T,\ y_T$ těžiště T této desky.

Tyto souřadnice lze vypočítat podle následujících vzorců:

$$x_T=\frac{\int_a^b x\,f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx},\quad y_T=\frac{\int_a^b \frac{1}{2}f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Příklad:

Vypočtěte souřadnice těžiště T homogenní desky ohraničené křivkami $y=x^2,\ y^2=x$.



Řešení:

Nejprve zjistíme průsečíky daných křivek.

X-ové souřadnice průsečíků zjistíme řešením rovnice $x^2=\sqrt{x}$ a y-ové souřadnice dopočítáme.

Křivky se tedy protínají v bodech o souřadnicích $[0,0],\ [1,1]$.

Nyní vypočteme jednotlivé integrály potřebné pro výpočet souřadnic těžiště:

$$\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\int_0^1\sqrt{x^3}\ dx-\int_0^1 x^3\ dx=\left[\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\ dx - \int_0^1 x^4\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx - \int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Nyní už můžeme vypočítat obě souřadnice těžiště T:

$$x_T = y_T = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$$

Těžiště má tedy souřadnice $\left[\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right]$.

2.3.2 Výpočet souřadnic těžiště homogenního rotačního tělesa

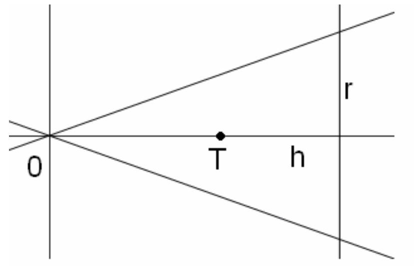
Uvažujme opět kladnou funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Při rotaci grafu funkce f kolem osy x vznikne rotační těleso. Jeho těžiště bude ležet na jeho ose, v našem případě na ose x. Zbývá pouze nalézt jeho polohu na ose x. Těžiště T má tedy souřadnice $[x_T, 0]$ a x-ovou souřadnici vypočítáme pomocí vzorce:

$$x_T = \frac{\int_a^b x\, f^2(x)\ dx}{\int_a^b f^2(x)\ dx}$$

Příklad:

Najděte těžiště rotačního kužele, jehož základna má poloměr r a jehož výška je h.

Řešení:



Kužel umístíme tak, aby jeho vrchol ležel v počátku a jeho osa splývala s osou x. Potom stačí použít funkci

$f(x) = \frac{r}{h}x$ definovanou na intervalu $\langle 0, h \rangle$.

Nyní vypočteme jednotlivé integrály ze vzorce pro výpočet *x*-ové souřadnice těžiště rotačního tělesa:

$$\int_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^3\ dx = \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h = \frac{r^2}{h^2}\frac{h^4}{4} = \frac{1}{4}r^2h^2$$

$$\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\ dx = \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}r^2h$$

Odtud:

$$x_T = \frac{\frac{1}{4}r^2h^2}{\frac{1}{3}r^2h} = \frac{3}{4}h$$

Těžiště rotačního kužele tedy leží na jeho ose ve třech čtvrtinách jeho výšky počínaje od vrcholu, nebo ekvivalentně, v jedné čtvrtině od základny.

2.3.3 Výpočet souřadnic těžiště homogenní rotační plochy

Naše úvahy budou velmi podobné úvahám v předchozí kapitole.

Uvažujme opět kladnou funkci *f* definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Při rotaci grafu funkce *f* kolem osy *x* vznikne rotační plocha. Její těžiště bude ležet na jeho ose, v našem případě na ose *x*. Zbývá pouze nalézt jeho polohu na ose *x*. Těžiště *T* má tedy souřadnice $[x_T, 0]$ a *x*-ovou souřadnici vypočítáme pomocí vzorce:

$$x_T = \frac{\int_a^b x\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx}{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx}$$

2.3.4 Výpočet souřadnic těžiště homogenního drátu

Budeme uvažovat homogenní drát ležící v rovině. Tento drát, jehož průměr pro naše úvahy považujeme za zanedbatelný, můžeme chápat jako obraz křivky.

Těžiště T drátu má souřadnice $[x_T, y_T]$, které vypočítáme pomocí následujících vzorců:

$$x_T = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx} \qquad y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

3 ZÁVĚR

K pochopení významu Riemannova integrálu a jeho konstrukce není potřeba jen počítat příklady, ale znát i teorii. Proto v první části této práce se zabývám právě teorií Riemannova integrálu, včetně jeho základních vlastností, které nám počítání integrálu velmi usnadní.

Jak už bylo řečeno, je Riemannův integrál nezáporné funkce *f* mezi nějakými dvěma body *a*, *b* roven ploše obrazce omezeného přímkami $x = a$, $x = b$, osou *x*, a křivkou definovanou grafem funkce *f*. Toto je jedna z nejpodstatnějších vět v této práci. Jde totiž o základní vysvětlení geometrického významu Riemannova integrálu.

Další důležitou částí práce jsou právě vlastnosti Riemannova integrálu, které určují některá pravidla při počítání hodnoty Riemannova integrálu. Bez nich bychom se asi neobešli. Stejně tak bez znalosti Newton-Leibnitzovy formule, základního principu zjišťování hodnoty Riemannova integrálu.

Dále ve své práci uvádím další dvě ze základních metod integrování (pro určitý integrál) **–** substituční metodu a metodu per partes.

Zásadní je ale praktická část této práce. Na několika řešených příkladech nejprve ukazuji, jak se integruje pomocí již zmíněných integračních metod.

Dále se práce věnuje využití Riemannova integrálu, a to především v geometrii. Geometrickými aplikacemi zmíněnými v práci jsou: výpočet obsahu plochy, výpočet objemu rotačního tělesa, výpočet délky křivky a výpočet plochy rotačního tělesa. Tyto aplikace ukazuji rovněž na řešených příkladech a aby si čtenář mohl ověřit, zda danému problému rozumí, za řešené příklady jsem zařadila několik neřešených úloh k procvičení.

V poslední části této práce je uvedeno několik fyzikálních aplikací. Jsou zde zařazeny zejména proto, aby si čtenář dokázal představit, jak široké je užití Riemannova integrálu. Jde o výpočet těžiště rovinných či prostorových objektů.

Závěrem ještě uveďme, že použití Riemannova integrálu je mnohonásobně širší než jsme ukázali. Jen pro ilustraci můžeme zmínit, že ve fyzice lze Riemannův integrál užít např. k výpočtu momentů setrvačnosti, k určení centra tlaku tělesa ponořeného do kapaliny, k výpočtu nejrůznějších potenciálů, k určení přitažlivosti, k výpočtu vykonané práce, k určení pohybu hmotného bodu po přímce, k určení pohybu matematického a fyzikálního kyvadla, k různým výpočtům ve statice atd. … A to se ani nezmiňuji o použití v dalších přírodovědných oborech.

Není účelem této práce uvádět všechny možné aplikace. Jejím účelem je především to, aby čtenář z výkladu pochopil, co je to Riemannův integrál, jak se konstruuje a jak a v jakých situacích je účelné Riemannův integrál použít, a nebál se ho aplikovat při řešení problémů, se kterými se setká.

4 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

Jarník V.: *Integrální počet I*, Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1963

Kopáček J.: *Integrál*, Praha: Matfyzpress, 2004

Rektorys K.: *Přehled užité matematiky I.*, Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1988

Henzler J.: *Integrály, diferenciální a diferenční rovnice*,Praha: VŠE, 2000

Vančura J.: *Primitivní funkce, Riemannův integrál a jeho aplikace*, Olomouc: Univerzita Palackého, 1990

Dula J., Hájek J.: *Cvičení z matematické analýzy: Riemannův integrál,* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1998

Mašek J.: *Řešené úlohy z matematiky – určitý a neurčitý integrál,* Plzeň: Západočeská univerzita, 2002

www.vedci.wz.cz

Internetové stránky několika vysokých škol (www.muni.cz, www.upol.cz, www.cuni.cz, www.cvut.cz)

5 PŘÍLOHA – výsledky neřešených příkladů

(2.1.1 Použití Newton-Leibnitzovy formule)

1. $\ln\frac{5}{3}$
2. $\frac{65}{6}$
3. 0
4. $\frac{32}{3}$
5. $\frac{\pi^2}{8}-1$
6. $\frac{23}{3}$
7. $\frac{\pi}{2}$
8. $\frac{9}{2}$
9. $\frac{\pi}{6}$
10. $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$
11. 1
12. $\frac{7}{\ln 2}$
13. $e^2-\frac{2}{3}$
14. $\frac{5}{2}+\ln 3$

(2.1.2 Použití metody per partes)

1. $\frac{2}{e}$
2. $2\ln 2-\frac{3}{4}$
3. $3\ln^2 3-6\ln 3+4$
4. $10\sqrt{e}-16$
5. $10\ln 2-\frac{17}{4}$
6. $3\ln 3-2$
7. 4π
8. 1
9. π
10. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
11. $\frac{\pi}{4}\sqrt{e^x}-\frac{1}{2}$
12. $\frac{5e^3-2}{27}$

(2.1.3 Použití substituční metody)

1. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{\pi}{6}$
3. $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$
4. $\frac{81\pi}{16}$
5. $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$
6. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$
7. $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
8. $\frac{3\pi}{16}$
9. $\frac{\pi}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$
10. $\frac{1}{6}$
11. $\frac{1}{3}$
12. $\frac{1}{2}\ln^2 5$

(2.1.4 Souhrnné úlohy)

1. 4π
2. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
3. $9-\cos 4$
4. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
5. $\frac{3}{2}(\cos 2-\cos 5)$
6. $-\frac{32}{3}$
7. $-\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
8. $2-\frac{2}{e}$
9. $2-\frac{3}{4\ln 2}$

10 $\frac{72}{2}$

11. $\frac{4}{3}$
12. $\ln\frac{3}{2}$
13. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$
14. $\frac{\pi}{2}$
15. $7+2\ln 2$
16. $\frac{32}{3}$
17. $2-\frac{\pi}{2}$
18. 8π
19. $\frac{e-2}{e}$
20. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$
21. $6-2e$
22. $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

(2.2.1 Výpočet obsahu plochy)

1. 3
2. $\frac{9}{2}$
3. $\frac{32}{3}$
4. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
5. $\frac{14}{3}$
6. $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $2\ln 2-\frac{1}{2}$
8. $4\ln 2-1$
9. $2\pi+\frac{4}{3}$
10. 1
11. $\frac{32}{3}\left(\sqrt{6}-2\right)$
12. 24
13. $e+\frac{1}{e}-2$
14. $\frac{1}{4}$
15. $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}$
16. $\frac{16}{27}$
17. $\frac{a^2}{6}$
18. $\frac{9}{2}$
19. πab
20. $\frac{1}{12}$
21. $\frac{9}{2}$
22. $\frac{\pi}{2}$
23. $\frac{3\pi}{8}$
24. 3

(2.2.2 Výpočet objemu rotačního tělesa)

1. $\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi$
2. $\frac{\pi^2}{4}$
3. $\frac{3\pi}{10}$
4. $\frac{\pi^3}{2}+\frac{4\pi}{2}$
5. 12π
6. $\frac{94\pi}{15}$
7. $\frac{272\pi}{15}$
8. $\frac{\pi^2}{8}$
9. $\pi\left(\frac{5e^2-12e-3}{6e}\right)$
10. $\frac{11\pi}{4}$
11. $\frac{\pi^3}{2}$
12. $\frac{v}{3}\left(a_1^2+a_1a_2+a_2^2\right)$
13. $2\pi^2r^2a$

(2.2.3 Výpočet délky křivky)

1. $\frac{1}{3}\left(6\sqrt{6}-8\right)$
2. $\frac{59}{24}$
3. $e^2-\frac{7}{8}$
4. $\frac{1}{2}\left(e^2+e-e^{-2}-e^{-1}\right)$
5. $\ln 3-\frac{1}{2}$
6. $\frac{670}{27}$
7. $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$
8. $\ln 3$
9. $2\sqrt{3}$
10. $\frac{4}{\pi}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$
11. $\frac{134}{27}$

(2.2.4 Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa)

1. $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$
2. 48π
3. $\dfrac{14\pi}{3}$
4. $2\pi+\dfrac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$
5. $4\pi a^2$
6. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$
7. $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\ln\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$