Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

VLASTNOSTI ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor: Eva Machová

Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice, 2007

Anotace

Název: Vlastnosti elementárních funkcí

Autor: Eva Machová

Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

Obsahem práce jsou základní vlastnosti elementárních funkcí jedné reálné proměnné. V práci je vysvětlen pojem relace, zobrazení, funkce. Práce zahrnuje funkce prosté, monotónní, kladné, záporné, sudé, liché, periodické, spojité, konvexní a konkávní.

Title: Properties of elementary functions

Author: Eva Machová

Supervisor: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

The thesis deal with basic properties of elementary functions of one real variable. The notions like relation, mapping and function are explained in the thesis. The thesis includes injective and surjective functions, monotone, positive, negative, even, odd, periodical, continuous, convex and concave functions.

Děkuji Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D. za odborné vedení a pomoc při vypracování bakalářské práce a Josefu Piherovi za poskytnutí programu pro tvorbu grafů.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Vlastnosti elementárních funkcí“ vypracovala samostatně a použila jen pramenů, které uvádím v přiložené bibliografii.

V Českých Budějovicích 27. 4. 2007

…………….

Eva Machová

Obsah

1 Úvod do matematiky

1.1 Předmět matematiky

Matematiku obvykle řadíme k přírodním vědám, ale zaujímá mezi nimi zvláštní postavení. Zatímco předmětem studia ostatních věd jsou vlastnosti hmoty vyšetřované z různých hledisek, předmětem studia matematiky jsou prostorové formy a kvantitativní vztahy hmotného světa uvažované v čistém abstraktním tvaru.

1.2 Matematika ve vztahu k reálnému světu

Z vymezení předmětu matematiky plyne, že matematické pojmy a teorie matematiky souvisejí s hmotným světem, který nás obklopuje. Tato souvislost není však vždy na první pohled zjevná. Je dána tím, že matematické pojmy jsou odvozeny z reálné skutečnosti a logika matematiky je táž jako logika ostatních věd.

1.3 Některé pojmy logické povahy

1.3.1 Rozsah a obsah pojmu

V matematice pracujeme s pojmy, jako jsou např. bod, číslo, trojúhelník, rovnoběžník, rovnice, množina, funkce apod. U každého pojmu rozeznáváme jeho rozsah a obsah.

Rozsahem pojmu rozumíme souhrn všech jednotlivých předmětů, na něž se uvažovaný pojem vztahuje. Například rozsah pojmu trojúhelníka zahrnuje všechny možné trojúhelníky, např. kosoúhlé, pravoúhlé, různostranné, rovnostranné apod., a to jak zhotovené ze dřeva nebo celuloidu, tak narýsované nebo pouze myšlené.

Obsahem pojmu rozumíme souhrn všech znaků, které jsou pro uvažovaný pojem charakteristické. Například obsah pojmu rovnoběžníka zahrnuje dva znaky, a to čtyřúhelník a úhelník s rovnoběžnými protějšími stranami.

Rozsah a obsah pojmu spolu úzce souvisí; rozšíříme-li rozsah pojmu, zmenší se tím jeho obsah a naopak.

1.3.2 Definice

Abychom se mohli dohovořit o jednotlivých pojmech, které jsou předmětem našeho myšlení, stačí někdy, pokud jde o pojmy zcela obecné a běžné, uvést pouze název tohoto pojmu. Obvykle se však obsah matematických pojmů určuje pomocí definic. Správná definice má mít dvě vlastnosti:

1. Nesmí být ani příliš úzká, ani příliš široká, tj. musí se v ní vymezovat pouze charakteristické znaky.
2. Nesmí tvořit tzv. logický kruh, tj. nesmí se v ní definovat nový pojem pomocí pojmu, který závisí na tomto novém pojmu.

Často se zavádí definice pojmu tak, že uvedeme jeho nejbližší rod a potom jeho druhový znak, popř. druhové znaky. Definujeme například: přirozené číslo je kladné (druhový znak) celé (nejbližší rod) číslo.

Protože při definici každého nového pojmu můžeme použít jen pojmů již známých, existují určité pojmy tak obecné, že jim nepředcházejí žádné jiné předem známé pojmy. Tyto pojmy se nazývají základní matematické pojmy a nelze je definovat, aniž vznikne logický kruh. K nim v matematice patří např.: číslo, bod, přímka, rovina, množina. U takových pojmů místo definice podáváme pouze popis a výčet jejich charakteristických znaků, popřípadě je definujeme pomocí tzv. axiómů.

Vyslovíme-li novou definici, musíme zjistit, zda předměty, které jí vyhovují, skutečně existují. Jinak by to byla definice prázdná, bezobsažná.

1.3.3 Matematické věty a jejich stavba

Soud je každá myšlenka, kterou něco konstatujeme; například myšlenky, kterými konstatujeme, jak se předměty, které nás obklopují, od sebe liší nebo spolu souvisí.

V matematice nás ovšem zajímají pouze takové soudy, o nichž má smysl říci, zda jsou pravdivé či nepravdivé. Takové matematické soudy nazýváme výroky. Výrok, jehož správnost je již prokázána, budeme nazývat větou (poučkou).

Správnost věty dokazujeme pomocí vět již dokázaných nebo pomocí axiómů (řec. axioma = uznání) neboli základních vět, které považujeme za pravdivé jen na základě zkušeností a které se tedy nedají odvodit z jiných vět. Přitom věta, která vyplývá přímo z jiné věty (popř. axiómu), se nazývá její důsledek.

Matematické věty, i když mají různé slovní vyjádření, můžeme po formální stránce uvést na tento standardní tvar: platí-li výrok A, (pak) platí též výrok B.

Proto u matematické věty můžeme rozeznávat tyto dvě části:

1. podmínku, která udává předpoklady věty;
2. tvrzení, které udává závěr plynoucí z první části.

Předpoklady začínají zpravidla slovem „je-li“, popř. „nechť“ apod. Tvrzení uvádíme často slovem „pak“. V některých větách bývají uvedená slova vynechána. Tak například věta „Rovnostranný trojúhelník má stejně velké úhly“ by podle vzoru měla mít např. tvar „Je-li trojúhelník rovnostranný, (pak) má stejně velké úhly“.

1.4 Matematická analýza

Matematická analýza ve svém zkoumání vychází ze studia mezních hodnot. Jak tomu rozumět?

Zenon z Elea (495 – 435 př. n. l.) popisuje ve svých Paradoxech nekonečna smyšlený závod Achillea, nejrychlejšího z řeckých hrdinů, se želvou. Achilleus vidí před sebou lezoucí želvu a snaží se ji předhonit. Než však doběhne do místa, kde ještě před chvílí byla, želva poodleze o kousek dál. Achilleus musí tedy uběhnout ještě tento kousek, ale mezitím želva popoleze ještě dál atd. Achilleus nemůže tedy podle Zenonovy úvahy želvu nikdy dohonit.

Je to přirozeně nesmysl, ale způsob Zenonova uvažování se zdá bezchybný. Uvedený příklad patří mezi tzv. Zenonovy aporie (paradoxy).

Matematickou analýzou rozumíme několik matematických disciplín, jejichž základní pojmy spočívají na pojmech funkce, limity funkce a spojitosti funkce. Vzhledem k tomu zařazujeme do matematické analýzy zejména tyto disciplíny:

1. diferenciální a integrální počet funkcí jedné i více reálných proměnných,
2. nekonečné řady (s konstantními i proměnnými členy),
3. vektorovou analýzu,
4. teorii funkcí komplexní proměnné (zejména teorii analytických funkcí),
5. obyčejné a parciální diferenciální rovnice,
6. integrální rovnice,
7. variační počet

a další disciplíny.

1.5 Historie pojmu funkce

Pojem funkce patří mezi nejdůležitější pojmy moderní matematiky. Lidé se snažili již odedávna, aby vyjádřili vzájemné vztahy mezi veličinami, se kterými se setkávali v denním životě při sledování změn různých jevů, ať již přírodních nebo těch, které souvisely s lidskou prací, a to ve snaze tuto práci zracionalizovat. Původně se používalo tabelárního záznamu, při kterém se veličiny sobě odpovídající zapisují do dvou (nebo i více) řad umístěných vedle sebe.

Aby však bylo možno souvislosti mezi vyšetřovanými veličinami správně zachytit a vědecky studovat, bylo k tomu zapotřebí zavést souřadnicovou soustavu a vybudovat souvislost mezi geometrií a algebrou. O to se zasloužili francouzští matematikové *Pierre de Fermat* (1601 – 1665) a *René Descartes* (1596 - 1650). Tím se dospělo k pojmu proměnné veličiny. Třebaže od pojmu proměnné veličiny je pouze krůček k pojmu funkce, trvalo poměrně velmi dlouho, než se k tomuto pojmu dospělo.

První pokus o zavedení pojmu funkce učinil v roce 1718 švýcarský matematik *Johann Bernoulli* (1667 – 1748). Avšak brzy se ukázalo, že jím zavedený pojem funkce je nedostačující. Proto se v pozdějších dobách snažili mnozí vynikající matematikové, jako např. *Leonhard Euler* (1707 - 1783), *Bernard Bolzano* (1781 - 1848), *Augustin Louis Cauchy* (1789 - 1857), *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij* (1792 - 1856) a zvláště *Peter*

Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 - 1859) a *Karl Weierstrass* (1815 – 1897), zformulovat přesnou definici funkce. Plně se to podařilo až po objevu teorie množin (1879), kterou vybudoval německý matematik *Georg Cantor* (1845 - 1918).

Grafické znázornění empirických funkcí se všeobecně rozšířilo teprve tehdy, když ho začali používat fyzikové a technici. To se poprvé stalo v roce 1834 v pojednání, jehož autorem byl francouzský fyzik *Benoît Paul Émile Clapeyron* (1799 - 1864). V posledním čtvrtletí 19. století se grafické znázornění dostávalo i do školního vyučování. Až školská reforma provedená v Německu v roce 1900 z popudu *Felixe Kleina* (1849 - 1925) učinila pojem funkce a její grafické znázornění ústředním pojmem matematické výuky.

Obecné označení funkce se objevuje poměrně pozdě, pokud ovšem nepovažujeme písmeno y, kterého používal *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 - 1716) k označení proměnné veličiny, za označení funkce. Od Leibnize pochází také název funkce. V roce 1718 použil k označení funkce symbolu φx již zmíněný *Johann Bernoulli*. Naše nynější označení $f(x)$ pochází od *Leonharda Eulera* (z roku 1735). Naproti tomu v roce 1754 používá *Jean Le Rond d'Alembert* (1717 – 1783) označení $\varphi(z)$.

1.6 Funkce v denním životě

V denním životě, v přírodě, v technice a hlavně v matematice se neustále setkáváme s funkčními závislostmi jedné veličiny (např. y) na druhé (např. x). Např. cena jízdenky druhé třídy osobního vlaku závisí na počtu kilometrů.

Pomocí funkcí lze matematicky vyjádřit mnoho fyzikálních a technických jevů, které za určitých předpokladů vedou k jednoznačnému výsledku. Výsledek je v takovém případě možné vypočítat bez pomoci experimentů.

Stanovení matematické závislosti mezi výchozí a výslednou veličinou (matematického vzorce) je často obtížné, stává se výsledkem úvah i experimentů. Na druhé straně je výhodou, že jednou stanovený funkční vztah lze ve stejných situacích vždy znovu použít. Pokud např. stavební inženýr projektuje nový mrakodrap, může využít dříve odvozených vzorců pro stavbu obdobných mrakodrapů v minulosti.

Případy funkční závislosti

Délka dráhy auta jedoucího stálou rychlostí c závisí na době jízdy. Dostřel děla závisí na elevačním úhlu hlavně děla. Teplota vzduchu závisí na denní době, barometrický tlak závisí na výšce pozorovacího místa nad mořem.

Přitom místo slova „závisí" říkáme též „je funkcí".

Příklady

Elektrický proud I podle Ohmova zákona závisí při daném napětí U na odporu R vodiče podle vztahu $I = U / R$ (- reálná funkce dvou reálných proměnných: U, R).

Objem V kruhového kužele o poloměru r při dané výšce v závisí na velikosti poloměru r podle vzorce $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ (- reálná funkce dvou reálných proměnných: r, v).

Vezměme v úvahu rovnici $y = 3x^2 + 1$. Zvolíme-li libovolné konkrétní reálné číslo x_0, je touto rovnicí určeno právě jedno číslo y_0, které se rovná $3x_0^2 + 1$.

Např. číslu $x_1 = 0$ odpovídá číslo $y_1 = 1$, kdežto pro číslo $x_2 = -1$ dostaneme $y_2 = 4$, apod. Zvolíme-li tedy libovolné číslo $x \in (-\infty, \infty)$, je mu rovnicí $y = 3x^2 + 1$ přiřazeno právě jedno číslo $y \in \langle 1, \infty)$.

2 Relace, zobrazení

2.1 Relace

Dvě proměnné veličiny mohou být vzájemně provázány, může mezi nimi být vzájemný vztah neboli relace. Např. hodnoty jedné z veličin mohou být větší než hodnoty druhé z nich.

Před definicí relace nejprve zadefinujeme kartézský součin.

Definice kartézského součinu

Nechť M, N jsou neprázdné množiny. Kartézským součinem $M \times N$ množin M, N (v tomto pořadí) rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in M$, $y \in N$.

Poznámka

Uspořádanou dvojicí $[x, y]$ dvou prvků $x, y \in M$ rozumíme dvojici, u které záleží na pořadí prvků x, y, přičemž prvek x je první člen, kdežto y druhý člen dvojice $[x, y]$. Přitom pro $x \neq y$ je $[x, y] \neq [y, x]$.

Definice relace

Buďte M, N libovolné množiny, relací ρ mezi množinami M a N se nazývá každá podmnožina kartézského součinu $\rho \subseteq M \times N$.

Klademe $D(\rho) := \{x; x \in M, \exists y \in N : [x, y] \in \rho\}$

$H(\rho) := \{y; y \in M, \exists x \in N : [x, y] \in \rho\}$

$D(\rho) \subseteq M$ se nazývá definiční obor relace ρ, $H(\rho) \subseteq N$ se nazývá obor hodnot relace ρ nebo také obraz.

Příklad 1

V určitém výrobním podniku dodává dílna A své výrobky k dalšímu zpracování dílně B a ta je po provedení svého úkolu předává dílně C. Naproti tomu dílna D vyrábí určité výrobky samostatně. Napišme použitím uspořádaných dvojic relaci, která vyjadřuje výrobní ovlivnění těchto dílen.

Řešení

Hledaná relace R se dá psát ve tvaru $R = \{[A,B],[B,C],[A,C],[D,D]\}$, neboť při nedodání výrobků dílnou A dílně B je postižena také dílna C, kdežto dílna D závisí výrobně jen sama na sobě.

Definice binární relace

Buď M množina. Binární relací na M nazýváme každou množinu $\rho \subseteq M^2$.

2.2 Číselné obory

Označení číselných oborů (množin):

$N = \{1,2,3,...,n,...\}$ - množina přirozených čísel,

$N_0 = N \cup \{0\}$ - množina celých nezáporných čísel,

$Z = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ - množina celých čísel (množina N rozšířená o 0 a čísla opačná),

$Q = \{p/q;\ p \in N, q \in Z, q \neq 0; p,q$ nesoudělné$\}$ - množina racionálních čísel (množina Z rozšířená o zlomky; desetinný rozvoj musí být ukončen nebo musí být periodický),

I - množina iracionálních čísel (množina čísel, která nelze napsat ve tvaru Q; mají nekonečný neperiodický rozvoj),

R - množina reálných čísel ($R = Q \cup I$),

R^* - množina rozšířených reálných čísel ($R^* = R \cup \{-\infty,\infty\}$),

C - množina komplexních čísel.

2.3 Zobrazení

Definice zobrazení

Zobrazení f z množiny M do množiny N (ozn. $f : M \to N$) je taková binární relace na kartézském součinu $M \times N$, že každý prvek $x \in M$ se vyskytuje nejvýše v jedné uspořádané dvojici $[x, y] \in f$. Kdyby se týž prvek $x \in M$ vyskytoval aspoň ve dvou uspořádaných dvojicích $[x, y_1]$, $[x, y_2]$, kde $y_1 \neq y_2$, pak bychom příslušnou relaci nepovažovali za zobrazení.

Zobrazení:

$f : M \to N$, kde $M \subseteq R, N \subseteq R$ nazveme reálnou funkcí reálné proměnné,

$f : M \to N$, kde $M \subseteq R, N \subseteq C$ nazveme komplexní funkcí reálné proměnné,

$f : M \to N$, kde $M \subseteq C, N \subseteq R$ nazveme reálnou funkcí komplexní proměnné,

$f : M \to N$, kde $M \subseteq C, N \subseteq C$ nazveme komplexní funkcí komplexní proměnné.

3 Funkce

Funkcí rozumíme reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Definice funkce

Nechť M je neprázdná podmnožina množiny reálných čísel ($M \in R$). Zobrazení f množiny M do množiny reálných čísel nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné a značíme $f : M \to R, M \subset R \neq \emptyset$, nebo $x \,\alpha\, \quad f(x), x \in M$.

Množinu vzorů M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme ji $D(f)$, množinu obrazů $\{f(x) : x \in D(f)\}$ nazýváme oborem hodnot a značíme ji $H(f)$.

3.1 Zadání funkce

3.1.1 Analyticky

Funkce f bývá v praxi zpravidla dána nějakou rovnicí (vzorcem) pro výpočet jejích hodnot. Zapisujeme ji ve tvaru $y = f(x)$ a říkáme, že funkce f je dána předpisem (analyticky). Proměnná x se nazývá nezávisle proměnná nebo argument, proměnná y se nazývá závisle proměnná nebo hodnota funkce f v bodě x.

Naproti tomu pro pevně zvolený bod $a \in D(f)$ symbol $f(a)$ značí hodnotu funkce f
v bodě a.

Použití písmen pro označení proměnných není pevně dáno. Můžeme proto psát také např. $p = f(r)$.

Konkrétní funkce často uvádíme zápisem např. $f(x) = \cos x$, $g(s) = s^4 - 1$.

Součástí definice funkce je zadání definičního oboru $D(f)$. Není-li výslovně udán definiční obor funkce, budeme jím rozumět množinu těch reálných čísel, pro něž má vzorec, kterým je funkce určena, smysl. O tomto definičním oboru někdy hovoříme jako o přirozeném definičním oboru.

Např. pro $f(x)=\dfrac{x}{x^2-25}$ je $D(f)=\{x;\, x\in R,\, x\neq \pm 5\}$.

Příklad 2

Mějme rovnici $y=3x+1$. Zvolíme-li jakékoli reálné číslo x, je touto rovnicí určeno právě jedno odpovídající číslo y. Vidíme tedy, že daná rovnice přiřazuje každému číslu $x\in(-\infty,\infty)$ právě jedno číslo y. Vypočtěte y_1 pro $x_1=0$, y_2 pro $x_2=-1$ a y_3 pro $x_3=2$.

Řešení

Za x do rovnice $y=3x+1$ nejprve dosadíme $x_1=0$ a dostaneme $y_1=1$. Potom za x dosadíme $x_2=-1$ a máme $y_2=-2$ a pro $x_3=2$ je $y_3=7$.

Příklad 3

Určeme definiční obor funkce $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení

Funkce $f(x)=x^2+1$ má definiční obor $D(f)=(-\infty,\infty)$, kdežto funkce $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ obor $D(g)=\langle -1,1\rangle$. Průnik $D(f)\cap D(g)=D=\langle -1,1\rangle$. Musíme však z oboru D vyloučit oba body $x_{1,2}=\pm 1$, neboť pro ně je jmenovatel $g(x)=\sqrt{1-x^2}=0$. Proto definičním oborem dané funkce je interval $(-1,1)$.

Poznámka

Pokud vezmeme konkrétní funkci – například $f(x)=2x-1$, levá část před znakem „=“ označuje, že daná funkce je f a jejím argumentem je x. Symbol $f(x)$ čteme jako funkce f v bodě x. Pravá část zápisu za znakem „=“ označuje vlastní předpis, který v tomto případě zní: „vynásobme proměnnou x dvěma a poté odečtěme jedničku“.

Funkční hodnoty nemusíme označovat $f(x)$, používá se také označení $g(h)$, $h(t)$ atd. V tomto označení jsou obsaženy všechny informace týkající se označení funkce i jejího argumentu.

Jiný způsob zápisu funkce, který vyjadřuje totéž: $f : x \rightarrow 2x - 1$. Písmeno f udává název funkce, po dvojtečce následuje proměnná x. Symbol $\rightarrow$ znázorňuje přiřazení, čteme „zobrazuje do". Zápis $f : x \rightarrow 2x - 1$ tedy čteme: funkce f zobrazuje x do $2x - 1$.

3.1.2 Tabulkou

Funkce může být někdy dána tabulkou, tj. dvojicemi hodnot argumentu a funkce. Tak můžeme funkci úplně definovat pouze v tom případě, že její definiční obor je konečná množina.

V jedné řadě jsou uvedený hodnoty argumentu x a ve druhé řadě (s ní rovnoběžné) je proti každé hodnotě x napsána příslušná hodnota $f(x)$.

Např. druhá mocnina

x	1	2	3	…
$f(x)$	1	4	9	…

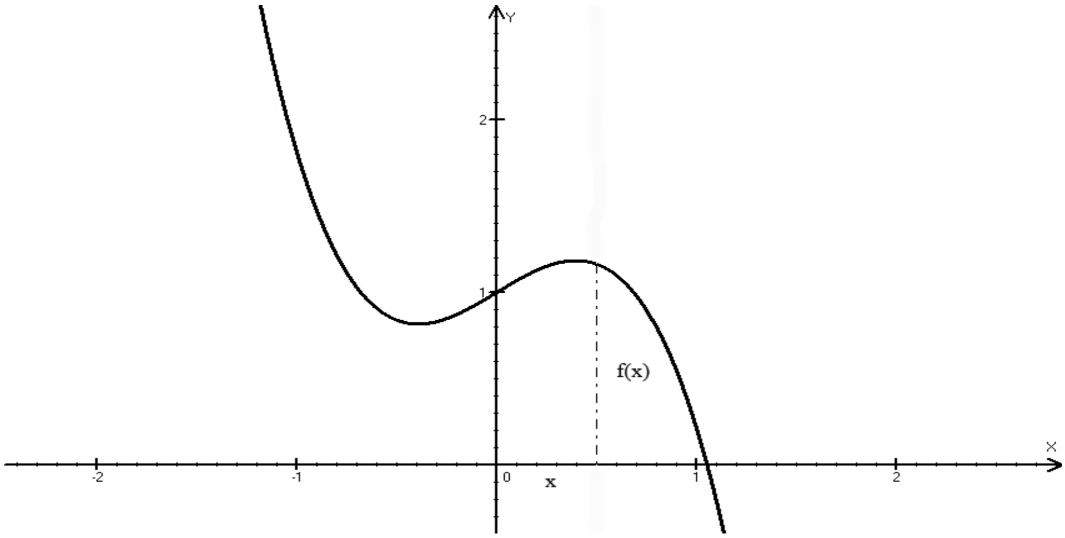
Obr. 1 – Tabulka hodnot pro druhou mocninu

Výhodou tohoto vyjádření je, že hodnoty funkce v tabelovaných hodnotách argumentu můžeme ihned vyčíst. Nevýhodou však je, že tabulka obvykle neobsahuje hodnoty funkce ve všech potřebných hodnotách argumentu.

3.1.3 Graficky

V praxi bývá funkce někdy zadána graficky – kartézským grafem nebo diagramem. Z grafu můžeme hodnoty funkce odečítat jen přibližně, dává však dobrou představu o chování funkce.

Ukázka

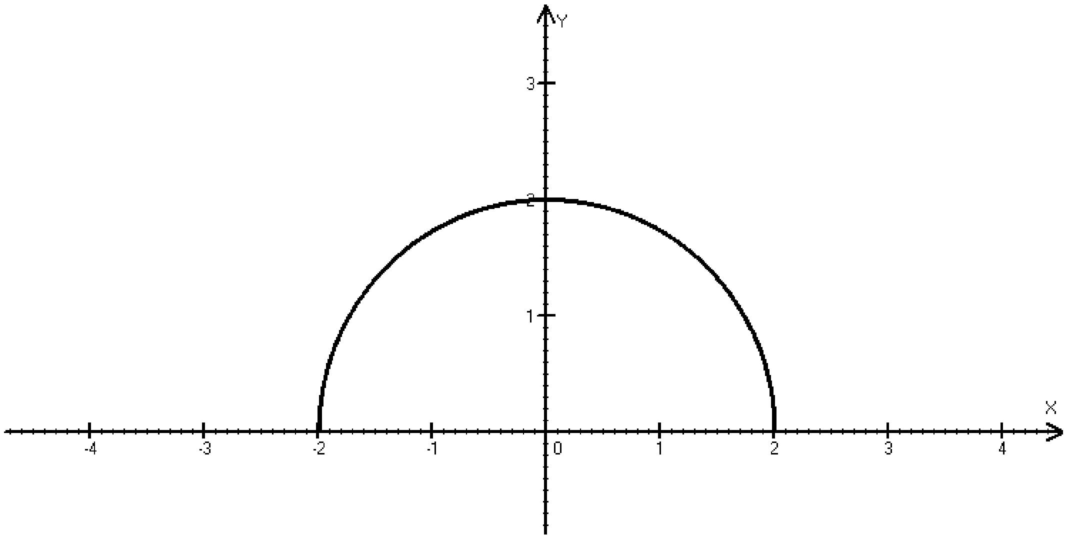


Obr. 2 – Ukázka grafu funkce

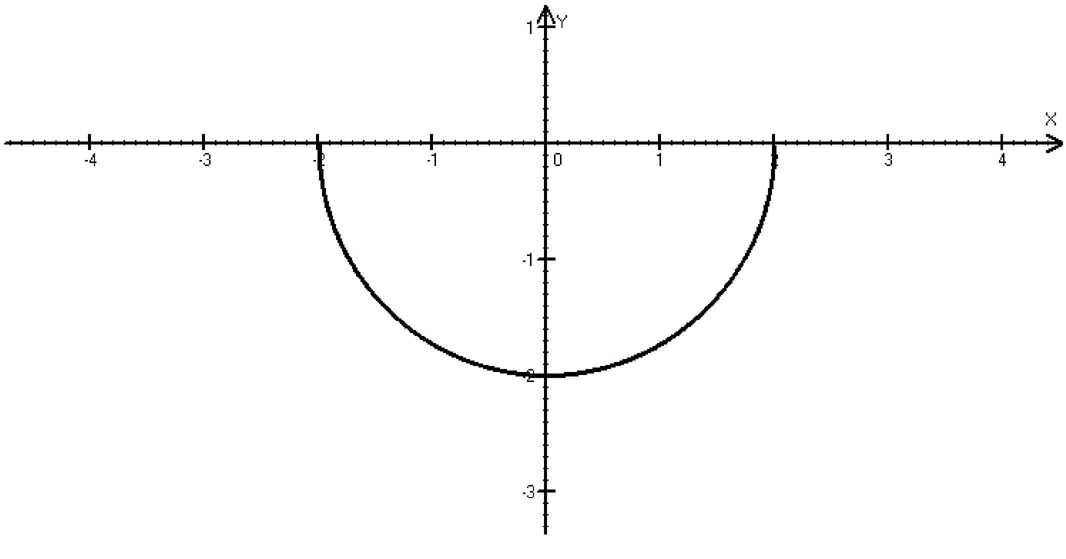
3.2 Tvar funkce

Rovnice funkcí mají většinou tvar $y = f(x)$. Tento tvar rovnice funkce se nazývá explicitní (tj. rozvinutý, neboť veličina y je z rovnice vypočtena).

Funkce y argumentu x se nazývá implicitní (tj. nerozvinutá), je-li dána rovnicí tvaru $F(x, y) = 0$, která není rozřešena vzhledem k závisle proměnné y. Například funkce y daná rovnicí $x^2 + y^2 = 4$ je implicitní. Rozřešením této rovnice vzhledem k proměnné y dostaneme $y = \sqrt{4 - x^2}$, popř. $y = -\sqrt{4 - x^2}$, tedy vlastně funkce dvě. Rovnicí $F(x, y) = 0$ nebývá vždy implicitní funkce určena jednoznačně, takže k zvolené hodnotě proměnné x může být rovnicí $F(x, y) = 0$ přiřazeno více než jedna hodnota proměnné y. Z toho důvodu vlastně nejde ani o funkce ve vlastním slova smyslu. Abychom zde o funkci mohli mluvit, je nutno tuto víceznačnost veličiny y dalšími podmínkami odstranit, například u rovnice $x^2 + y^2 = 4$ podmínkou $y \geq 0$, popř. podmínkou $y \leq 0$.



Obr. 3 – Graf funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ pro $y \geq 0$



Obr. 4 - Graf funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ pro $y \leq 0$

3.3 Rozdělení funkcí

Funkce v explicitním tvaru $y = f(x)$ můžeme rozdělit takto:

$$\textit{Funkce}\begin{cases}\textit{algebraické}\begin{cases}\textit{racionální}\begin{cases}\textit{celistvé neboli polynomy}\\ \textit{lomené}\end{cases}\\ \textit{iracionální}\end{cases}\\ \textit{transcendentní}\begin{cases}\textit{nižší}\\ \textit{vyšší}\end{cases}\end{cases}\qquad \textit{elementární funkce}$$

Obr. 5 – Schéma rozdělení funkcí

Definice jednotlivých druhů funkcí

Funkce $y = f(x)$ se nazývá:

1. algebraická, předpisuje-li se v analytickém výrazu $f(x)$ pro argument x konečný počet základních operací: sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění a odmocnění celým číslem;
2. transcendentní, není-li algebraická;
3. racionální, předpisuje-li se v analytickém výrazu $f(x)$ pro argument x konečný počet čtyř základních (racionálních) operací: sčítání, odčítání, násobení a dělení;
4. iracionální, obsahuje-li výraz $f(x)$ argument x pod odmocnítkem (neboli v mocninách s racionálním exponentem). Racionální funkce se dělí na celistvé racionální funkce neboli polynomy a na lomené racionální funkce.

3.4 Operace s funkcemi

3.4.1 Aritmetické operace

Nechť f, g jsou reálné funkce s definičními obory $D(f)$ a $D(g)$. Nechť N je množina nulových bodů funkce g, tj. $N = \{x \in D(g) : g(x) = 0\}$.

3.4.1.1 Rovnost

Rovnost $f = g$ funkcí f, g, je-li $f(x) = g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$.

3.4.1.2 Součet

Součtem funkcí f, g nazveme funkci $f + g$ definovanou předpisem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$.

Příklad 4

Určete součet funkcí $f(x), g(x)$: $f(x) = x^2$, $D(f) = R$; $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $D(f) = R - \{1\}$.

Řešení

$$(f + g)(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}, \quad D(f) = R - \{1\}.$$

3.4.1.3 Rozdíl

Rozdílem funkcí f, g nazveme funkci $f - g$ definovanou předpisem $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$.

Příklad 5

Určete rozdíl funkcí $f(x), g(x)$: $f(x) = \frac{2}{x+5}$, $D(f) = R - \{-5\}$; $g(x) = x^3$, $D(f) = R$.

Řešení

$$(f - g)(x) = \frac{2}{x+5} - x^3, \quad D(f) = R - \{-5\}.$$

3.4.1.4 Součin

Součinem funkcí f, g nazveme funkci fg definovanou předpisem $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$.

Příklad 6

Určete součin funkcí $f(x), g(x)$: $f(x) = x$, $D(f) = R$; $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$, $D(f) = R - \{-3\}$.

Řešení

$$(f \cdot g)(x) = x \cdot \frac{2}{x+3} = \frac{2x}{x+3}, \quad D(f) = R - \{-3\}.$$

3.4.1.5 Podíl

Podílem funkcí f, g nazveme funkci f/g definovanou předpisem

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } x \in (D(f) \cap D(g)) - N.$$

Příklad 7

Určete podíl funkcí $f(x), g(x)$: $f(x) = 6x$, $D(f) = R$; $g(x) = 3x - 1$, $D(f) = R$

Řešení

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{6x}{3x-1}, \quad D(f) = R - \left\{\tfrac{1}{3}\right\}.$$

3.4.2 Skládání funkcí

Definice složené funkce

Složená funkce je speciální případ složeného zobrazení. Buďte g, f funkce a nechť $H(g) \subseteq D(f)$. Jestliže každému reálnému číslu $x \in M$ přiřadíme číslo $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, tj. hodnotu funkce f v bodě $g(x)$, pak se funkce $f \circ g$ na množině $D(f \circ g) = M$ nazývá složená funkce. Funkce g se nazývá její vnitřní složkou, funkce f její vnější složkou.

Snadno ověříme, že $f \circ g$ je skutečně funkce, pro niž $D(f \circ g) = D(f)$. Nutnou a postačující podmínkou pro existenci složené funkce o vnitřní složce g a vnější složce f je tedy $H(g) \subseteq D(f)$. Není-li tato podmínka předem splněna, lze jí někdy dosáhnout vhodným zúžením definičního oboru funkce g.

Poznámka

Vytváření složených funkcí je asociativní: $(f \circ (g \circ h)(x)) = ((f \circ g) \circ h(x))$.

Příklad 8

Funkce $y = \sqrt{\left(4 - \sqrt{x}\right)}$ je složená funkce. Vnější funkce *f* je $f(u) = \sqrt{u}$, vnitřní funkce *g* je $g(x) = 4 - \sqrt{x}$. Vnitřní funkce *g* má definiční obor $x \geq 0$. Vnější funkce *f* má definiční obor $u \geq 0$. Protože $u = 4 - \sqrt{x}$, musí být $4 - \sqrt{x} \geq 0$, a tudíž $x \leq 16$. Definičním oborem složené funkce $f \circ g$ je interval $\langle 0,16 \rangle$.

Proces skládání funkcí lze několikrát opakovat a obdržíme tak funkci vícenásobně složenou. Například, máme-li tři funkce $t = h(x), u = g(t), y = f(u)$, pak postupným přiřazováním čísel dostaneme složenou funkci $F(x)$ tvaru $F(x) = f(g(h(x)))$. Jejím definičním oborem je množina těch x, pro která má tento výraz smysl.

Příklad 9

Rozložte funkci $y = \log^2 \sqrt{\cos x}$ na jednotlivé složky.

Řešení

Funkce $y = \log^2 \sqrt{\cos x}$ obsahuje tyto složky: $y = w^2$, $w = \log v$, $v = \sqrt{u}$, $u = \cos x$.

Příklad 10

Určeme složenou funkci $y = F(x)$, která má vnitřní složku $t = u(x) = 1 - x^2$ a vnější složku $y = f(t) = \sqrt{t^3}$.

Řešení

Hledaná funkce je tvaru $y = F(x) = f(u(x)) = \sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}$.

Funkce $t = u(x)$ má definiční obor $D(t) = (-\infty, \infty)$, funkce $y = f(t)$ má definiční obor $D(y) = \langle 0, \infty)$. Oborem $D(F)$ funkce F je množina právě těch čísel x, pro která je $u(x) = t \in D(y)$, neboli množina právě těch čísel x, pro která je $t = 1 - x^2 \geq 0$.

Odtud plyne $x^2 \leq 1$ neboli $x \in \langle -1,1 \rangle$.

Složená funkce má tvar $y = F(x) = f(u(x)) = \sqrt{(1-x^2)^3}$ a je definována pro $\forall x \in \langle -1,1 \rangle$.

3.4.3 Restrikce funkce

Definice restrikce funkce

Je-li definována funkce $f : M \rightarrow R$ a je-li $N \subset M$, pak funkci $h : N \rightarrow R$, pro niž platí $h(x) = f(x)$ pro všechna $x \in N$, nazýváme zúžením (restrikcí) funkce *f* na množinu N. Píšeme $f \mid N$.

3.5 Graf funkce

Grafické znázornění funkce názorně ukazuje chování funkce v celém jejím definičním oboru. Je z něj patrné, zda a jak rychle funkční hodnoty rostou nebo klesají. Z výpočtu uspořádaných dvojic vzorů a obrazů není tato vlastnost tak zřejmá.

Definice grafu funkce

Grafem funkce *f* rozumíme množinu $G = \{[x, f(x)]; x \in D(f)\}$, kde $[x, y]$ jsou pravoúhlé souřadnice bodů v rovině.

Z definice zobrazení vyplývá, že každá přímka $\parallel$ s osou y může graf dané funkce protnout nejvýše jednou.

Graf funkce je tedy jistá množina bodů v rovině. První souřadnice x bodu $[x, f(x)]$, ležícího na grafu funkce, představuje hodnotu $x \in D(f)$ nezávisle proměnné. Druhá souřadnice udává příslušnou hodnotu funkce *f* v bodě x. Průsečík osy x, y se nazývá počátek soustavy souřadnic, značí se 0.

K sestrojení grafu bývá výhodné sestavit si nejprve tabulku některých funkčních hodnot:

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Obr. 6 – Tabulka funkčních hodnot

Na osách x, y je třeba stanovit měřítka, tj. velikost jednotek.

Čísla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ volíme z definičního oboru $D(f)$ dané funkce, funkční hodnoty určíme z předpisu pro uvažovanou funkci f dosazováním $x = x_1, x = x_2, \ldots$. Znázorníme-li ve zvolené souřadnicové, např. kartézské soustavě (na obou osách stejná měřítka), všechny takto určené body $[x, f(x)]$ a spojíme-li je plynulou čarou, dostaneme přibližný graf uvažované funkce. Ten bude přesnější, čím více bodů k němu určíme a použijeme-li ještě dalších důležitých poznatků o vlastnostech funkce, kterými se budeme později zabývat. V některých případech bývá graf funkce nespojitý (diskrétní) a není hladký (tj. má hroty, v nichž neexistuje tečna).

Poznámka

Bod, v němž graf funkce protíná osu x, se nazývá nulový bod funkce. Funkční hodnota je v tomto bodě rovna nule.

4 Vlastnosti funkcí

4.1 Základní definice

4.1.1 Prostá funkce

Definice prosté funkce

Funkce f je prostá (injektivní) v $D(f)$, jestliže pro libovolné $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Příklad 11

Zjistěte, zda je funkce $f(x) = 3x - 2$ prostá.

Řešení

Zřejmě $D(f) = R, H(f) = R$. Nechť $x_1 \neq x_2$, potom je i $3x_1 \neq 3x_2$, takže funkce $f(x_1) = 3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2 = f(x_2)$ a $f(x) = 3x - 2$ je funkce prostá.

4.1.2 Surjektivní funkce

Funkce f se nazývá surjektivní, jestliže každý prvek $y \in H(f)$ má alespoň jeden vzor $x \in D(f)$.

4.1.3 Bijektivní funkce

Prostá funkce se nazývá bijektivní, jestliže je funkce injektivní a zároveň surjektivní. Bijekce „páruje“ prvky množin $D(f)$ a $H(f)$, proto musí být tyto množiny stejně velké.

4.1.4 Inverzní funkce

Definice inverzní funkce

Nechť $y = f(x)$ je prostá funkce s definičním oborem $D(f)$ a oborem funkčních hodnot $H(f)$. Funkci f^{-1} danou předpisem $x = f^{-1}(y), y \in H(f)$, kde $y = f(x)$, nazýváme inverzní funkcí k funkci f.

Jelikož jsme zvyklí označovat funkční hodnoty y a argument x, funkci inverzní k funkci $y = f(x)$ značíme $y = f^{-1}(x)$.

Věta

Nechť f je prostá funkce s definičním oborem $D(f)$ a s oborem hodnot $H(f)$. Potom k funkci f existuje jediná inverzní funkce f^{-1}. Funkce f^{-1} má tyto vlastnosti:

a) Je prostá.

b) $D(f^{-1}) = H(f), H(f^{-1}) = D(f)$,

c) $(f^{-1})^{-1} = f$,

d) $f(f^{-1}(y)) = y, f^{-1}(f(x)) = x$,

e) grafy funkce f a funkce f^{-1} jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$.

Důkaz

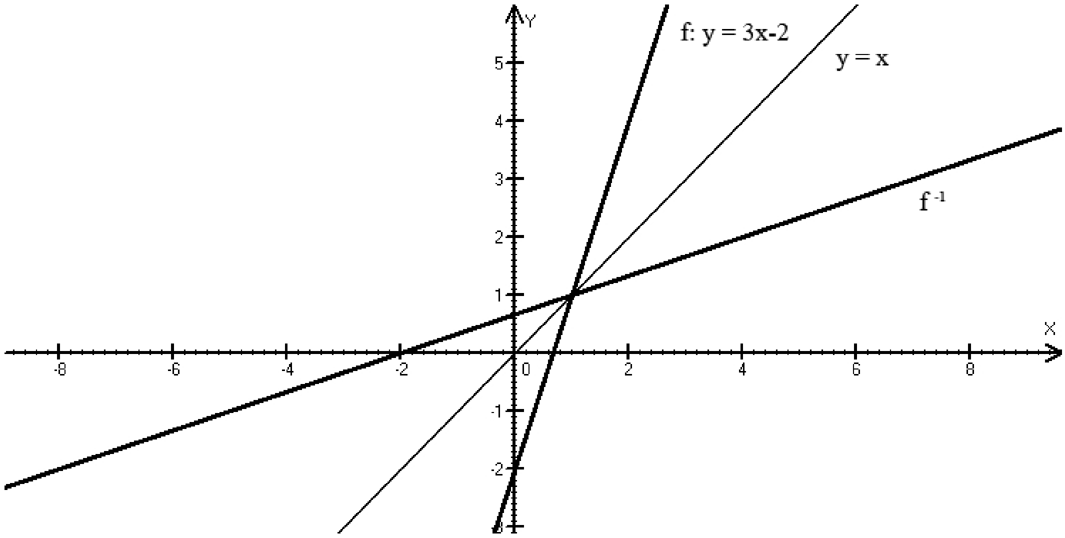
Vyplývá z definice prosté funkce a funkce inverzní.

Příklad 12

Je-li funkce f dána předpisem $y = 3x - 2, x \in (-\infty, \infty)$, potom inverzní funkce f^{-1} je dána předpisem $x = \dfrac{y+2}{3}, y \in (-\infty, \infty)$.

Funkci f^{-1} píšeme ve tvaru $x = \dfrac{y+2}{3}, y \in (-\infty, \infty)$. Zřejmě platí

$$f(f^{-1}(y)) = 3\left(\frac{y+2}{3}\right) - 2 = y, \quad f^{-1}(f(x)) = \frac{(3x-2)+2}{3} = x.$$



Obr. 7 – Graf funkce $y = 3x - 2$ a její inverzní funkce

4.2 Omezená (ohraničená) funkce

Definice omezené funkce

Funkci f nazýváme na množině $D(f)$

a) <u>shora omezenou</u> (ohraničenou), právě když existuje $k \in R$ (k je pro všechna čísla $x \in D(f)$ konstantní) tak, že pro všechna $x \in D(f)$ platí vztah $f(x) \leq k$. k se nazývá horní závora funkce f na $D(f)$.

b) <u>zdola omezenou</u> (ohraničenou), právě když existuje $l \in R$ (l je pro všechna čísla $x \in D(f)$ konstantní) tak, že pro všechna $x \in D(f)$ platí vztah $f(x) \geq l$. l se nazývá dolní závora funkce f na $D(f)$.

c) <u>omezenou</u> (ohraničenou), je-li na $D(f)$ ohraničená shora i zdola. Funkce je omezená, právě když existuje $m \in R$ tak, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $|f(x)| \leq m$. Stručně lze říci, že funkce f je na $D(f)$ ohraničená, je-li její obor hodnot $H(f)$ ohraničenou množinou.

4.2.1 Geometrický význam ohraničenosti funkce

Je-li funkce f na $D(f)$ ohraničená shora, leží její graf pro každé číslo $x \in D(f)$ stále pod přímkou $y = k$ nebo na ní, kde k značí horní závoru funkce f na $D(f)$.

Je-li funkce f na $D(f)$ ohraničená zdola, leží její graf pro každé číslo $x \in D(f)$ stále nad přímkou $y = l$ nebo na ní, kde l značí dolní závoru funkce f na $D(f)$.

Je-li funkce f na $D(f)$ ohraničená, leží její graf pro každé číslo $x \in D(f)$ stále mezi přímkami $y = k$ a $y = l$ nebo na nich.

Příklad 13

Dokažme, že funkce $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)}$ je všude (tj. pro všechna reálná čísla x) ohraničená.

Řešení

Protože pro $\forall x \in R$ platí nerovnost $(x \pm 1)^2 \geq 0$ neboli $x^2 + 1 \geq 2|x|$, dostáváme odtud $\dfrac{x^2 + 1}{|x|} \geq 2$ neboli $\dfrac{|x|}{x^2 + 1} \leq \dfrac{1}{2}$. Platí tedy pro $\forall x \in R$ nerovnost $\left|\dfrac{x}{x^2 + 1}\right| \leq \dfrac{1}{2}$. Je tedy $m = \dfrac{1}{2}$, takže daná funkce je všude ohraničená. (Podle věty $|f(x)| \leq m$).

4.3 Funkce kladná, záporná

Funkce kladná nebo záporná znamená, že je funkce větší nebo menší než 0. Funkce nemusí být kladná nebo záporná na celém svém definičním oboru, potom se jedná o intervaly, kde je funkce kladná nebo záporná.

Příklad 14

Určete, zda je funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ kladná nebo záporná.

Řešení

<u>kladná</u>: $\frac{+}{+} \quad \frac{-}{-} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 > 0$

$$(x-3)(x-1) > 0$$

$$x - 3 > 0 \quad \wedge \quad x - 1 > 0 \qquad\qquad x - 3 < 0 \quad \wedge \quad x - 1 < 0$$

$$x > 3 \qquad\quad x > 1 \qquad\qquad\qquad x < 3 \qquad\quad x < 1$$

$$\underline{x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)}$$

<u>záporná</u>: $\frac{+}{-} \quad \frac{-}{+} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 < 0$

$$(x-3)(x-1) < 0$$

$$x - 3 > 0 \quad \wedge \quad x - 1 < 0 \qquad\qquad x - 3 < 0 \quad \wedge \quad x - 1 > 0$$

$$x > 3 \qquad\quad x < 1 \qquad\qquad\qquad x < 3 \qquad\quad x > 1$$

$$\underline{x \in (1, 3)}$$

Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ je kladná na intervalu $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ a záporná na intervalu $x \in (1,3)$.

Příklad 15

Určete, zda je funkce $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ kladná nebo záporná.

Řešení

<u>kladná</u>:

$$x + 2 > 0 \quad \wedge \quad x - 3 > 0 \qquad\qquad x + 2 < 0 \quad \wedge \quad x - 3 < 0$$

$$x > -2 \qquad\quad x > 3 \qquad\qquad\qquad x < -2 \qquad\quad x < 3$$

$$\underline{x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)}$$

záporná:

$$x+2>0 \quad \wedge \quad x-3<0 \qquad\qquad x+2<0 \quad \wedge \quad x-3>0$$
$$x>-2 \qquad\quad x<3 \qquad\qquad\qquad x<-2 \qquad\quad x>3$$
$$\underline{x \in (-2,3)}$$

Funkce $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ je kladná na intervalu $x \in (-\infty,-2) \cup (3,\infty)$ a záporná na intervalu $x \in (-2,3)$.

4.4 Monotónní funkce

Definice monotónní funkce

O funkci f říkáme, že je na množině M

a) rostoucí, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,

b) nerostoucí, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,

c) klesající, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,

d) neklesající, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce neklesající a nerostoucí se nazývají monotónní, funkce rostoucí a klesající jsou ryze monotónní. Rostoucí funkce je speciálním případem neklesající funkce, klesající funkce je speciálním případem nerostoucí funkce.

Věta

Je-li $y=f(x)$ na svém $D(f)$ rostoucí, je příslušná inverzní funkce $x=f^{-1}(y)$ také rostoucí na funkčním oboru $H(f)$ funkce f. Je-li však funkce $y=f(x)$ na oboru $D(f)$ klesající, je také inverzní funkce $x=f^{-1}(y)$ klesající na oboru $H(f)$.

Důkaz

Předně je zřejmé, že každá ryze monotónní funkce má inverzní funkci, neboť je vždy prostou funkcí.

Je-li funkce $y = f(x)$ rostoucí na $D(f)$, dokážeme, že funkce $x = f^{-1}(y)$ je rostoucí na $H(f)$. Použijeme nepřímého důkazu. Budeme předpokládat, že funkce $x = f^{-1}(y)$ je nerostoucí na oboru $H(f)$, tj. že pro $y_1 < y_2$ vždy platí $f(y_1) \geq f(y_2)$. Avšak $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, takže odtud je $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$. Podle předchozího předpokladu je tedy pro $y_1 < y_2$ neboli pro $f(x_1) < f(x_2)$ vždy $x_1 \geq x_2$. To však znamená, že funkce $y = f(x)$ není na oboru $D(f)$ rostoucí. Tím jsme došli ke sporu, čímž je první tvrzení dokázáno.

Je-li funkce $y = f(x)$ na oboru $D(f)$ klesající, probíhá důkaz zcela obdobně.

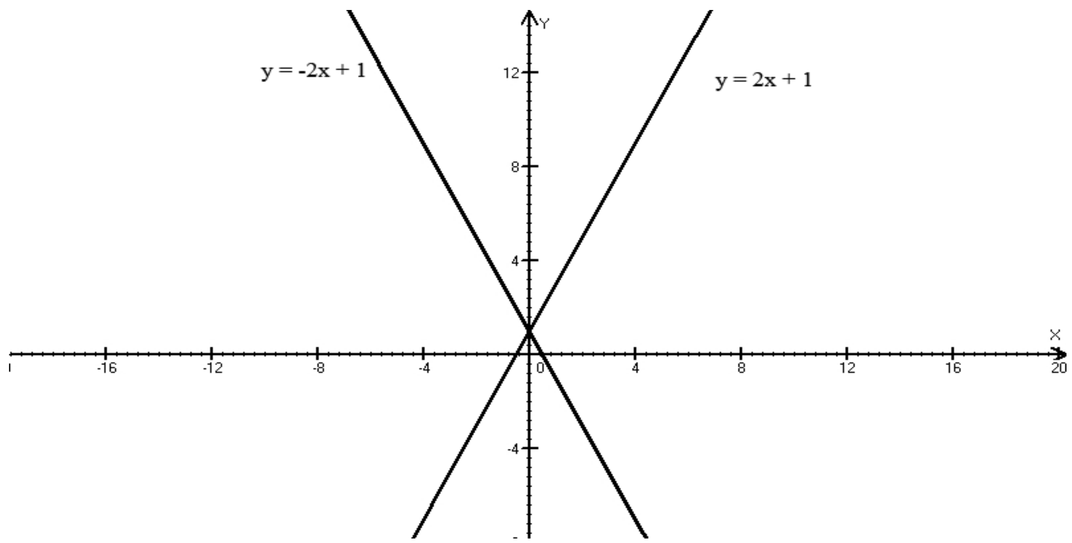
Příklad 16

Dokažme, že funkce $y = 2x + 1$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$, ale funkce $y = -2x + 1$ je na tomto intervalu klesající.

Řešení

1. Zvolme libovolná čísla x_1, x_2, přičemž je $x_1 < x_2$. Pak je $2x_1 < 2x_2$ a také $y_1 = 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 = y_2$. Je tedy funkce $y = 2x + 1$ na intervalu $(-\infty, \infty)$ rostoucí.

2. V druhém případě pro libovolná čísla x_1, x_2, přičemž je $x_1 < x_2$, dostáváme $-2x_1 > -2x_2$ neboli $y_1 = -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 = y_2$. Proto funkce $y = -2x + 1$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ klesající.



Obr. 8 – Graf funkce $y = 2x + 1$ a zároveň funkce $y = -2x + 1$

Příklad 17

Dokažme, že každá funkce $y = f(x)$, která je na oboru $M \subseteq R$ ryze monotónní, je na tomto oboru prostá.

Řešení

Nechť funkce *f* je na oboru M rostoucí. Pak, je-li $x_1 < x_2$, je nutně $f(x_1) < f(x_2)$. Je-li však $x_2 < x_1$, je $f(x_2) < f(x_1)$. Je tedy výrok $\forall\, x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ pravdivý, a proto funkce f je na oboru M prostá.

V případě, že funkce *f* je na oboru M klesající, je důkaz zcela analogický.

Příklad 18

Ukažme, že existují prosté funkce na daném oboru $M \subseteq R$, které nejsou na tomto oboru ryze monotónní.

Řešení

Zvolme funkci definovanou vztahy $y = f(x) = \begin{cases} -x & pro\ \forall x \in \langle -1,0 \rangle \\ x+1 & pro\ \forall x \in (0,1\rangle \end{cases}$

Tato funkce je na intervalu $\langle -1,1 \rangle$ prostá, třebaže tam není ryze monotónní.

4.5 Funkce sudá a lichá

Definice sudé a liché funkce

Buď $D(f)$ definiční obor funkce f, který má tu vlastnost, že s každým bodem x obsahuje i bod $-x$. O funkci f říkáme, že je na množině $D(f)$

a) sudá, právě když pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$,

b) lichá, právě když pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Příklad 19

Dokažme, že pro každé přirozené číslo n je funkce $f(x) = x^{2n}$ sudá, kdežto funkce $f(x) = x^{2n+1}$ je lichá na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení

Platí $f(-x)=(-x)^{2n}=x^{2n}=f(x)$ a

$f(-x)=(-x)^{2n+1}=(-x)^{2n}(-x)=-x^{2n+1}=-f(x)$ a to pro $\forall x \in (-\infty,\infty)$ a $\forall n \in N$.

Z toho vidíme, že funkce $f(x)=x^{2n}$ je sudá, funkce $f(x)=x^{2n+1}$ lichá.

Příklad 20

Zjistěte, zda je funkce $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ sudá nebo lichá.

Řešení

Za x dosadíme $-x$, tedy $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=-f(x)$. Z toho vidíme

$f(-x)=-f(x)$, funkce je tedy lichá.

Věta

Graf sudé funkce je na příslušném intervalu J souměrný podle osy y, graf liché funkce je na příslušném intervalu K souměrný podle počátku.

Důkaz

Je-li totiž funkce f sudá na intervalu J, pak její graf obsahuje s každým bodem $[x,y]$ také bod $[-x,y]$ souměrně sdružený s původním bodem podle osy y, neboť $f(-x)=f(x)=y$.

Je-li f lichá funkce na intervalu K, pak její graf obsahuje s každým bodem $[x,y]$ také bod $[-x,-y]$ souměrně sdružený s původním bodem podle počátku, neboť $f(-x)=-f(x)=-y$.

Věta

Součet, rozdíl, součin a podíl dvou sudých funkcí je funkce sudá.
Součet a rozdíl dvou lichých funkcí je funkce lichá.
Součin a podíl dvou lichých funkcí je funkce sudá.
Součin a podíl jedné sudé a jedné liché funkce je funkce lichá.

Důkaz

Dokážeme např., že podíl sudé a liché funkce je funkce lichá. Nechť tedy $F(x)=s(x)/l(x)$, kde $l(x)\neq 0$. Potom $F(-x)=\dfrac{s(-x)}{l(-x)}=\dfrac{s(x)}{-l(x)}=-F(x)$.

Podmínka pro definiční obor je zřejmě splněna, a proto je F lichá funkce. Důkazy ostatních tvrzení jsou obdobné.

Schematicky můžeme psát (l, l_1, l_2 označují funkce liché, s, s_1, s_2 funkce sudé na $D(f)$):

Na $D(f)$ platí:

$s_1 \pm s_2 = s$,	$l_1 \cdot l_2 = s$,	$s \cdot l_1 = l$,
$l_1 \pm l_2 = l$,	$s_1 / s_2 = s$,	$s / l_1 = l$,
$s_1 \cdot s_2 = s$,	$l_1 / l_2 = s$,	$l_1 / s = 1$.

4.6 Periodická funkce

Definice periodické funkce

Buď p číslo různé od nuly a M množina, která má tu vlastnost, že pro každé $x\in M$ je také $x+p\in M$. Funkce f se nazývá periodická na M s periodou p, právě když pro každé $x\in M$ platí $f(x+p)=f(x)$. Nejmenší kladné číslo p s uvedenou vlastností se nazývá primitivní perioda.

Existují periodické funkce, které nemají minimální periodu. *Např.* funkce $y=5$ má za periodu libovolné reálné číslo $r>0$.

Nejznámějšími periodickými funkcemi jsou goniometrické funkce (viz dále).

4.7 Spojitost funkce

Před spojitostí funkce nejprve objasníme pojem okolí bodu a limita funkce.

Definice okolí bodu

Okolí $U(a)$ bodu a je libovolný interval $U(a) = (a - r, a + r)$, kde a je střed intervalu a r je poloměr okolí $U(a)$, tedy $r > 0$.

Existuje levé okolí bodu (k bodu a jdeme zleva) a pravé okolí bodu (k bodu a jdeme zprava). Levé okolí bodu značíme $U^-(a)$ a pravé $U^+(a)$.

Příklad 21

Je dán bod $a = 2$. Zapište okolí bodu jako otevřený interval, pokud $r = 2$.

Řešení

Pokud do definice okolí bodu dosadím $a = 2$ a $r = 2$, zapíšeme okolí bodu takto: $U(a) = (0, 4)$.

Definice limity funkce

Nechť f je funkce, která je definována v nějakém okolí bodu a. Funkce f má v bodě a limitu rovnu číslu L, jestliže k libovolnému okolí $V(L)$ bodu L existuje takové okolí $U(a)$ bodu a, že pro všechna $x \in U(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in V(L)$.

Limitu zapíšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, tzn. $x \to a \Rightarrow f(x) \to L$. Tento zápis vyjadřuje, že patří-li x do dostatečně malého okolí $U(a)$ bodu a, pak $f(x)$ patří do okolí $V(L)$ bodu L. Hodnota $f(x)$ se má postupně dostávat do nejtěsnější blízkosti bodu L, proto jde o libovolně malé okolí (okolí s libovolně malým poloměrem r) bodu L.

Definice jednostranných limit

Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu zprava rovnu číslu L, jestliže existuje pravé okolí $U^+(a)$ bodu a takové, že pro všechna $x \in U(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in V(L)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu zleva rovnu číslu L, jestliže existuje levé okolí $U^-(a)$ bodu a takové, že pro všechna $x \in U(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in V(L)$.

Limitu zprava zapíšeme $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ a limitu zleva $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Věta

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Příklad 22

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3 - 2\right)$.

Řešení

Za x dosadím -1 a dostanu tedy $(-1)^3 - 2 = -3$. Předchozí věta nás opravňuje zapsat výsledek příkladu ve tvaru $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3 - 2\right) = -3$.

Příklad 23

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Řešení

Nejprve upravíme funkci $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2}$, vidíme, že lze zkrátit na $\lim\limits_{x \to 2} (x+2)$.

Dále za x dosadím 2, limita se tedy rovná 4. Můžeme tedy zapsat $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Pravidla pro počítání limit

1. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$,
3. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, n je celé nezáporné číslo.

Definice spojitosti funkce v bodě

Buď $f(x)$ funkce, a bod. Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Obdobně definujeme spojitost zprava a spojitost zleva v bodě a. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a zprava, resp. zleva, právě když $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Věta

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, právě když je v bodě a spojitá zprava i zleva.

Věta

Je-li $f(x)$ prostá funkce spojitá v bodě a, pak inverzní funkce f^{-1} je spojitá v bodě $f(a)$.

Věta

Buďte $f(x)$ a $g(x)$ funkce spojité v bodě a. Pak jsou také funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ v bodě a spojité. Je-li $g(a) \neq 0$, je také funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ v bodě a spojitá.

Definice spojitosti funkce v intervalu

Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li levý, resp. pravý krajní bod do intervalu I, je v něm funkce spojitá zprava, resp. zleva.

Např. tedy, funkce je spojitá v intervalu $I = (a, b)$, jestliže je spojitá v každém bodě intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b spojitá zleva.

Weierstrassova věta

Buď $f(x)$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak je $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ omezená a nabývá v něm své největší a nejmenší hodnoty.

4.8 Funkce konvexní, konkávní

Definice derivace funkce

Říkáme, že funkce f má derivaci v bodě x_0 (nebo že je diferencovatelná v bodě x_0), jestliže existuje $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Tuto limitu značíme $f'(x_0)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

Poznámka

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, potom je v tomto bodě spojitá. Není-li funkce v bodě x_0 spojitá, pak v tomto bodě nemá derivaci.

Derivace vyššího řádu

Pro derivaci vyššího řádu platí $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x_0)\right)'$. Značíme f', f'', f''', atd.

Pro druhou derivaci platí $f''(x_0) = \left(f'(x_0)\right)' = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$.

Pravidla pro počítání derivací

1. Jestliže existují derivace $f'(x_0), g'(x_0)$ a $h(x) = f(x) + g(x)$, pak existuje také derivace $h'(x_0)$, přičemž $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

2. Jestliže $g(x) = cf(x)$ a existuje $f'(x_0)$, pak existuje také $g'(x_0)$, přičemž platí $g'(x) = c \cdot f'(x)$.

3. Jestliže $f(x) = x^n$, n je celé kladné číslo a $x_0 \in R$, pak $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$.

4. Jestliže $f(x) = c$ je konstantní funkce, pak $f'(x_0) = 0$ pro všechna $x_0 \in R$.

5. Mají-li funkce f, g v bodě x_0 derivaci, pak má v bodě x_0 derivaci i funkce $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ a platí $h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

6. Jestliže mají funkce f, g v bodě x_0 derivaci a $g(x_0) \neq 0$, pak i funkce $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ má derivaci v bodě x_0, přičemž platí $h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x))^2}$.

Příklad 24

Vypočtěte první a druhou derivaci funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Řešení

První derivace: $f' = 3x^2 - 12x + 9$.

Druhá derivace: $f'' = 6x - 12$.

Geometrický význam derivace

Derivace funkce *f* v bodě x_0 je směrnice tečny $k = f'(x_0)$ ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Definice konvexnosti a konkávnosti na intervalu

Říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konvexní na intervalu I, jestliže pro

$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) < \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) + f(x_1)$.

Pokud by ve vzorci platila i rovnost, byla by funkce konvexní na intervalu I.

Říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konkávní na intervalu I, jestliže pro

$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) > \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) + f(x_1)$.

Pokud by ve vzorci platila i rovnost, byla by funkce konkávní na intervalu I.

Postačující podmínka konvexnosti a konkávnosti na intervalu

Nechť I je interval libovolného typu. Nechť existuje druhá derivace f'' na intervalu I.

Jestliže $f'' > 0, \forall x \in I$, potom je funkce *f* ryze konvexní na I.

Jestliže $f'' < 0, \forall x \in I$, potom je funkce *f* ryze konkávní na I.

5 Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme tyto funkce: konstantní, mocninné, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické.

Elementárními funkcemi nazýváme takové funkce, které vzniknou ze základních elementárních funkcí konečným počtem základních aritmetických operací (sčítáním, odčítáním, násobením a dělením) a skládáním těchto funkcí. Elementární funkce tvoří dostatečně početnou třídu funkcí užívaných v technické praxi.

5.1 Konstantní funkce

Definice konstantní funkce

Konstantní funkce je dána rovnicí $y = a$, kde a je reálné číslo. Je to funkce, která pro všechna čísla $x \in D(f)$, tj. pro všechny body určitého definičního oboru, nabývá stále téže hodnoty $y = a$. Je definována na R, není prostá, je sudá, spojitá a periodická s libovolnou periodou. Značíme: $f(x) = a$ pro $\forall x \in D(f)$.

Jejím grafem je přímka rovnoběžná s osou x ve vzdálenosti $|a|$ od ní v příslušné polorovině. Z definice funkce je jasné, že ke konstantním funkcím neexistují funkce inverzní.

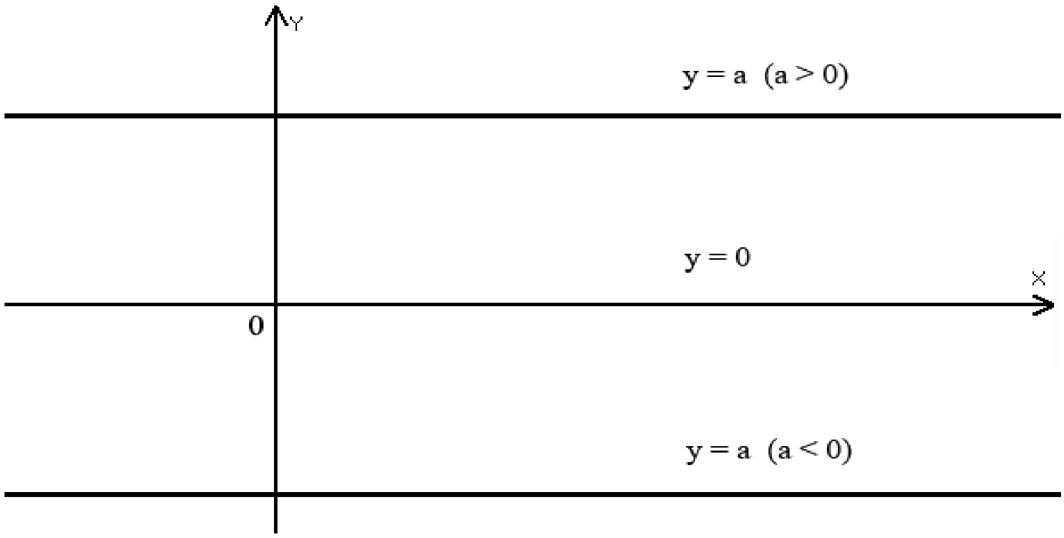
Derivace konstantní funkce $y = a$ je $y' = 0$.

Příklad 25

Znázorněme graf konstantní funkce $y = a$, kde a je určité reálné číslo.

Řešení

Ať zvolíme jakékoli reálné číslo $x \in (-\infty, \infty)$, stále je $y = a$. Proto definičním oborem této funkce je $D(f) = (-\infty, \infty)$, ale obor hodnot $H(f) = \{a\}$. Grafem dané funkce $y = a$ je tedy rovnoběžka s osou x ve vzdálenosti $|a|$ od ní, a to nad osou x, pokud $a > 0$, pod osou x, je-li $a < 0$. Pro $a = 0$ představuje její graf osa x, pro kterou platí $y = 0$.



Obr. 9 – Graf konstantní funkce

5.2 Mocninná funkce

Úvodní poznámka

Mocninnou funkcí můžeme nazvat funkci, která má mocninu, jejíž mocnitel (exponent) je přirozené číslo, nula, celé záporné číslo nebo racionální číslo.

5.2.1 Mocninná funkce s přirozeným exponentem $n \in N$

Funkce je dána vzorcem $y = x^n$.

Definiční obor této funkce je $x \in (-\infty, \infty)$

Pro n sudé funkce není prostá, je zdola omezená a kladná. Na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ je klesající, na intervalu $\langle 0, \infty)$ rostoucí. Je sudá, spojitá a obor hodnot je $\langle 0, \infty)$.

Pro n liché je to funkce prostá, na intervalu $(-\infty, 0)$ záporná, na intervalu $(0, \infty)$ kladná a rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$. Je lichá a spojitá. Obor hodnot je $(-\infty, \infty)$.

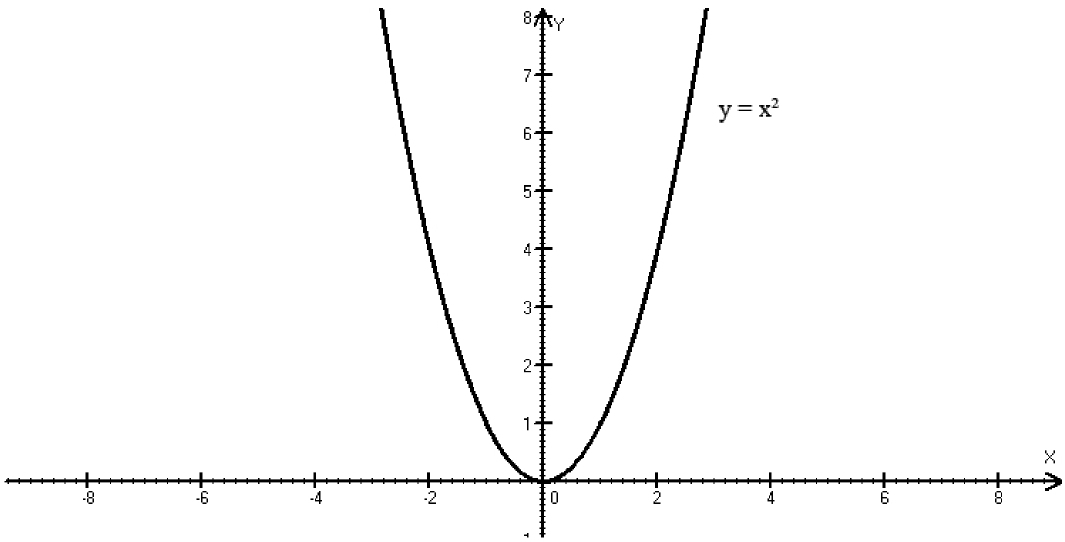
Příklad 26

Dokažme, že funkce $y = f(x) = x^2$ není na intervalu $(-\infty, \infty)$ monotónní, ale na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ je klesající a na intervalu $(0, \infty\rangle$ je rostoucí.

Řešení

1. Zvolme např. $x_1 = -2, x_2 = 1$, takže je $x_1 < x_2$. Pak je $f(x_1) = (-2)^2 = 4$, $f(x_2) = 1$, tj. $f(x_2) < f(x_1)$. Zvolíme-li však $x_1 = -2, \tilde{x}_2 = 3$, je $f(x_1) = 4 < 9 = f(\tilde{x}_2)$. Proto funkce $y = x^2$ není na intervalu $(-\infty, \infty)$ monotónní.

2. Omezíme-li se na $\forall x \in (-\infty, 0\rangle$, pak pro libovolná čísla x_1, x_2, přičemž je $x_1 < x_2 \leq 0$, je $-x_1 > -x_2 \geq 0$, a tedy $(-x_1)^2 = f(x_1) > (-x_2)^2 = f(x_2)$. Vzhledem k tomu, že $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0\rangle, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, je funkce $y = f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ klesající.



Obr. 10 – Graf funkce $y = x^2$

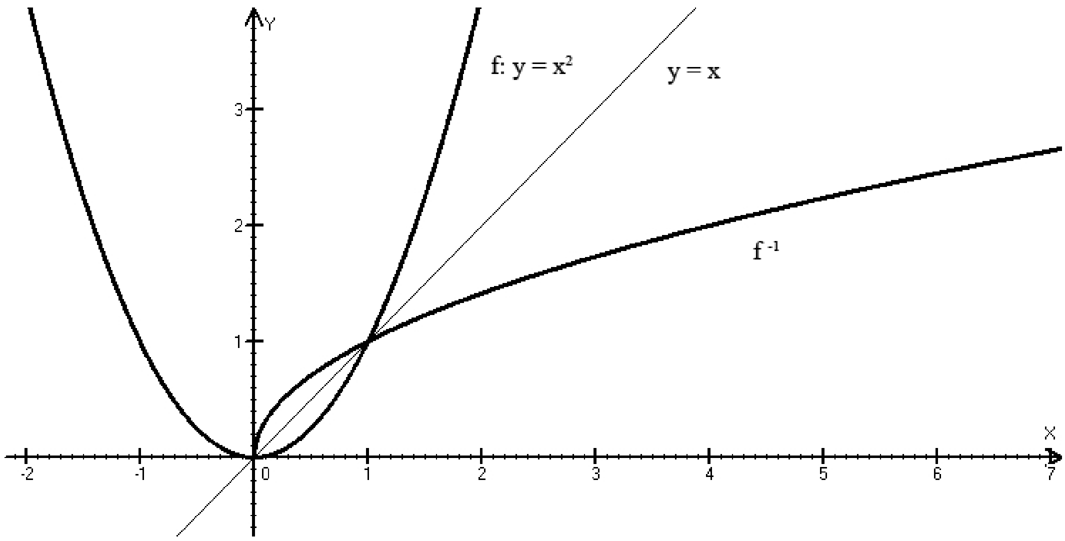
Příklad 27

Určeme inverzní funkci k funkci $y = x^2$.

Řešení

Funkce $y = x^2$ je definována pro $\forall x \in (-\infty, \infty)$, ale není na tomto intervalu prostá, neboť pro $x_1 = a, x_2 = -a$ dostaneme tutéž hodnotu $f(a) = f(-a) = a^2$. Proto na intervalu $(-\infty, \infty)$ neexistuje k funkci $y = x^2$ inverzní funkce.

Omezíme-li se však u funkce $y = x^2$ na interval $\langle 0, \infty)$, je na tomto intervalu funkce $y = x^2$ stále rostoucí a prostá. Přitom nabývá hodnot $y \in \langle 0, \infty)$. Proto existuje pro $\forall y \in \langle 0, \infty)$ inverzní funkce $x = \sqrt{y}$, která nabývá všech hodnot $x \in \langle 0, \infty)$.



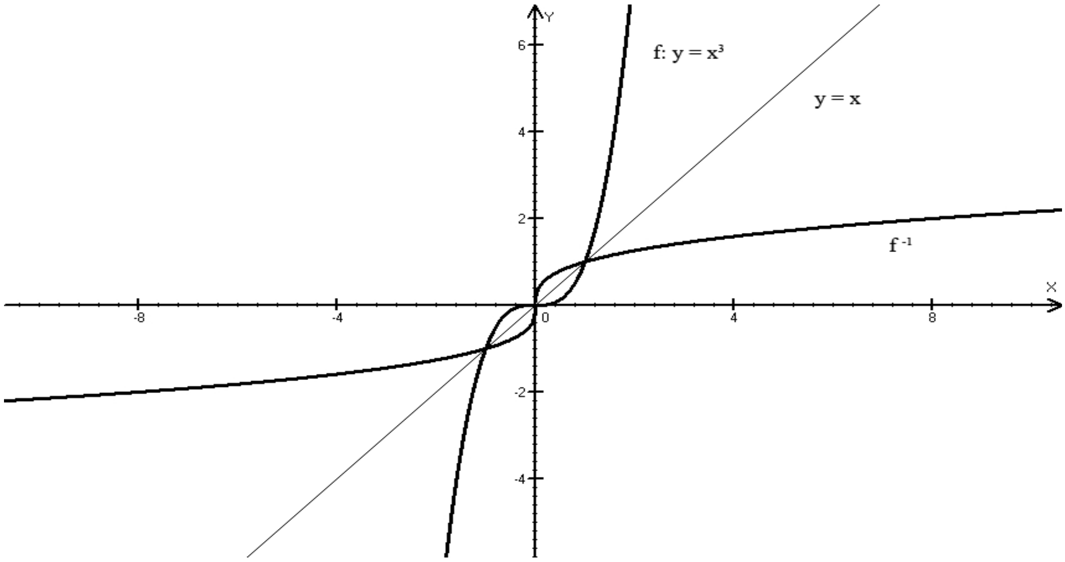
Obr. 11 – Graf funkce $y = x^2$ a její inverzní funkce

Příklad 28

Určeme inverzní funkci k funkci $y = x^3$.

Řešení

Daná funkce $y = x^3$ je rostoucí, a tedy také prostá pro $\forall x \in (-\infty, \infty)$. Přitom jejím funkčním oborem je $H(f) = (-\infty, \infty)$. Proto k ní existuje inverzní funkce tvaru $x = \sqrt[3]{y}$, která je definována pro $\forall y \in (-\infty, \infty)$.



Obr. 12 – Graf funkce $y = x^3$ a její inverzní funkce

5.2.2 Mocninná funkce se záporným celým exponentem $-n, n \in N$

Funkce je dána vzorcem $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Definiční obor této funkce je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Pro n sudé funkce není prostá, je zdola omezená a kladná, rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$, klesající na intervalu $(0, \infty)$. Je sudá, spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, obor hodnot je $(0, \infty)$.

Pro n liché je to funkce prostá, na intervalu $(-\infty, 0)$ shora omezená, na intervalu $(0, \infty)$ zdola omezená, a klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Je to lichá funkce, spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, obor hodnot je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Příklad 29

Dokažme, že funkce $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ je neohraničená na oboru $M = (0, \infty)$, ale na oboru $M_1 = \langle a^2, \infty)$, pro $a > 0$ libovolné, je ohraničená.

Řešení

1. Použijeme nepřímého důkazu: Předpokládejme, že funkce f je na oboru M ohraničená. Pak pro všechna čísla $x > 0$ je nutně ohraničená shora. To znamená, že

existuje takové číslo $k > 0$, že pro všechna čísla $x > 0$ je $0 < \frac{1}{x} \leq k$. Zvolme libovolné číslo $x \in (0,1/k)$, takže je $0 < x < 1/k$. Odtud plyne, že $1/x > k$. Tím jsme došli ke sporu. Proto daná funkce nemůže být na oboru M ohraničená.

2. Nechť je $x \in \langle a^2, \infty)$, takže je $0 < a^2 \leq x$. Odtud dostaneme $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a^2}$. Protože pro uvedená čísla x je $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$, plyne z předchozího vztahu, že $0 < \left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{a^2} = m$. Proto je daná funkce na uvedeném intervalu $\langle a^2, \infty)$ ohraničená. (Podle věty $|f(x)| \leq m$.)

5.2.3 Mocninná funkce s reálným exponentem $r \in R$

Funkce je dána vzorcem $y = x^r$. Tato funkce se nazývá obecná mocninná funkce s exponentem r. Lze ji také zapsat ve tvaru $y = x^r := e^{r \cdot \ln x}$.

Definiční obor závisí na r.

Nechť exponent r je racionální kladný: $r = p/q$.

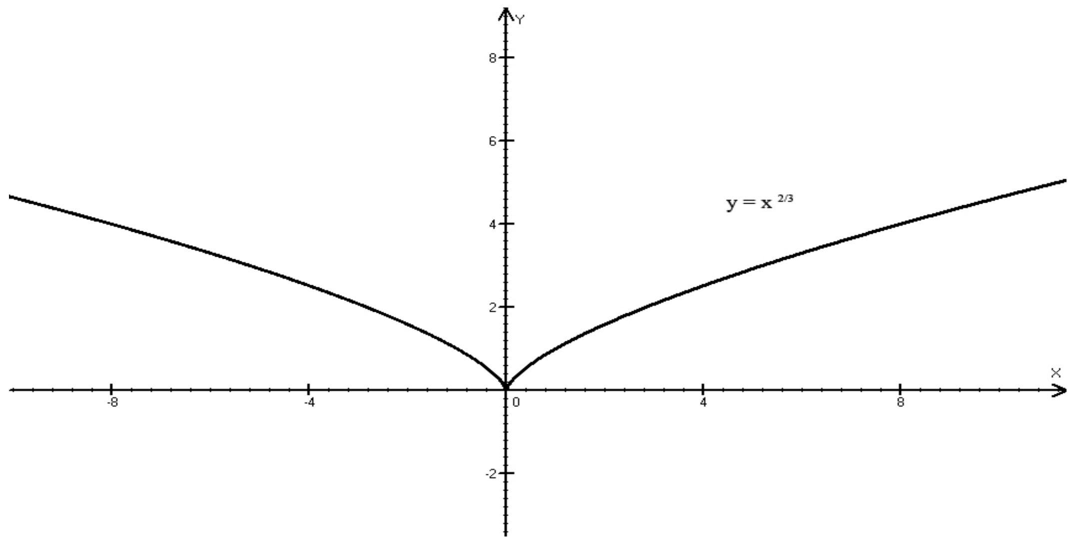
Je-li p liché a q liché, potom je $D(f) = (-\infty, \infty)$, funkce je prostá, záporná na intervalu $(-\infty, 0\rangle$, kladná na intervalu $\langle 0, \infty)$, rostoucí, lichá, spojitá, $H(f) = (-\infty, \infty)$.

Je-li p liché a q sudé, potom je $D(f) = \langle 0, \infty)$, funkce je prostá, zdola omezená, kladná, rostoucí, spojitá na $D(f)$ a $H(f) = \langle 0, \infty)$.

Je-li p sudé a q liché nebo p sudé a q sudé, potom je $D(f) = (-\infty, \infty)$. Funkce není prostá, je zdola omezená, kladná, klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0, \infty)$, sudá, spojitá a $H(f) = \langle 0, \infty)$.

Příklad 30

Na následujícím obrázku je graf funkce $y = x^{2/3}$. Je to příklad funkce, kdy je p sudé $(p = 2)$ a q liché $(q = 3)$.



Obr. 13 – Graf funkce $y = x^{2/3}$

Nechť exponent r je racionální záporný: $r = p/q$.

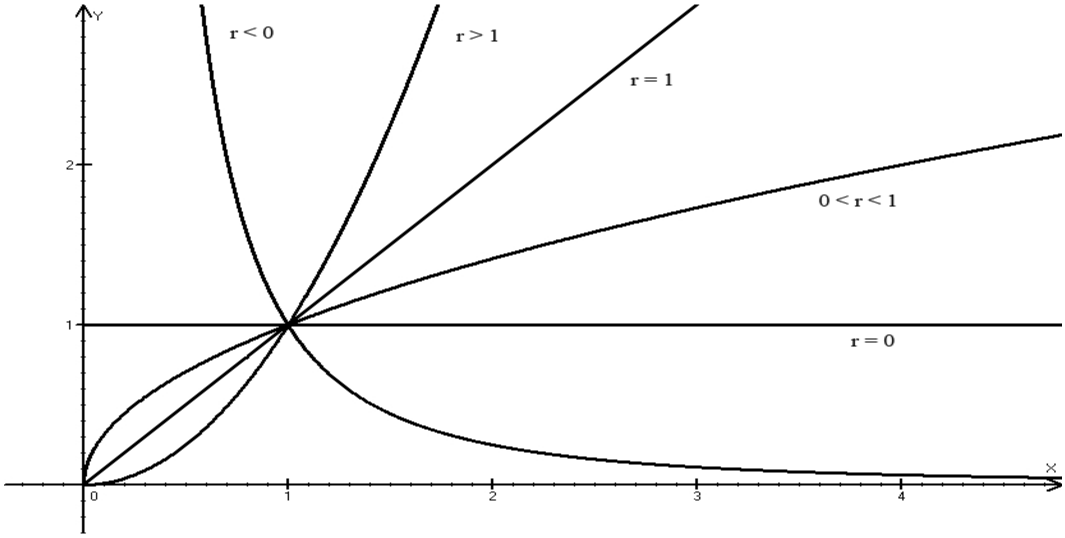
Je-li p liché a q liché, potom je $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, funkce je prostá. Na intervalu $(-\infty, 0)$ je shora omezená, záporná, klesající a spojitá. Na intervalu $(0, \infty)$ je zdola omezená, kladná, klesající a spojitá. Funkce je lichá a $H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Je-li p liché a q sudé, potom je $D(f) = (0, \infty)$, funkce je prostá, zdola omezená, kladná, klesající, spojitá na $D(f)$ a $H(f) = (0, \infty)$.

Je-li p sudé a q liché nebo p sudé a q sudé, potom je $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce není prostá, je zdola omezená, kladná, rostoucí a spojitá na $(-\infty, 0)$, klesající a spojitá na $(0, \infty)$ a sudá. $H(f) = \langle 0, \infty)$.

Nechť exponent r je iracionální kladný. Pak je definičním oborem interval $\langle 0, \infty)$, funkce je prostá, zdola omezená, kladná, rostoucí, spojitá a obor hodnot je $\langle 0, \infty)$.

Nechť exponent r je iracionální záporný. Pak je definiční obor interval $(0, \infty)$, funkce je prostá, zdola omezená, kladná, klesající, spojitá a obor hodnot je $(0, \infty)$.



Obr. 14 - Grafy funkcí $y = x^r$ pro některá r

5.2.4 Vlastnosti mocninné funkce

Je-li $r = 0$, je funkce $y = x^0 = 1$ konstantní funkce.

Je-li $r \neq 0$, je funkce $y = x^r$ na intervalu $(0, \infty)$ ryze monotónní a zobrazuje tento interval opět na interval $(0, \infty)$. Existuje k ní tedy na intervalu $(0, \infty)$ funkce inverzní, která je opět mocninnou funkcí s reálným exponentem.

Derivace mocninné funkce $y = x^n$ je $y' = n \cdot x^{n-1}$.

Věta

Pro $x > 0, r_1, r_2 \in R, m \in Q$ libovolné, platí:

a) $x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1 + r_2}$,

b) $x^{r_1} \div x^{r_2} = x^{r_1 - r_2}$,

c) $\left(x^{r_1}\right)^m = x^{m \cdot r_1}$

Věta

Pro $a,b>0, r\in R$, platí:

a) $(ab)^r = a^r b^r$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

5.2.5 Funkce n-tá odmocnina pro $n\in N, n\geq 2$

Funkce je definována vzorcem $y=\sqrt[n]{x}$.

Funkce n-tá odmocnina je speciální případ mocninné funkce pro exponent racionální kladný.

Pro n sudé je tato funkce definována na intervalu $\langle 0,\infty)$, je prostá, zdola omezená, kladná, rostoucí, spojitá a obor hodnot je $\langle 0,\infty)$. Je inverzní funkcí k funkci $y=x^n$ uvažované na intervalu $\langle 0,\infty)$.

Pro n liché je tato funkce definována na intervalu $(-\infty,\infty)$, je prostá, záporná na intervalu $(-\infty,0)$, kladná na intervalu $(0,\infty)$, rostoucí, lichá a obor hodnot je $(-\infty,\infty)$. Je inverzní funkcí k funkci $y=x^n$.

5.3 Goniometrické funkce

Goniometrickými funkcemi nazýváme funkce $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ (funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens).

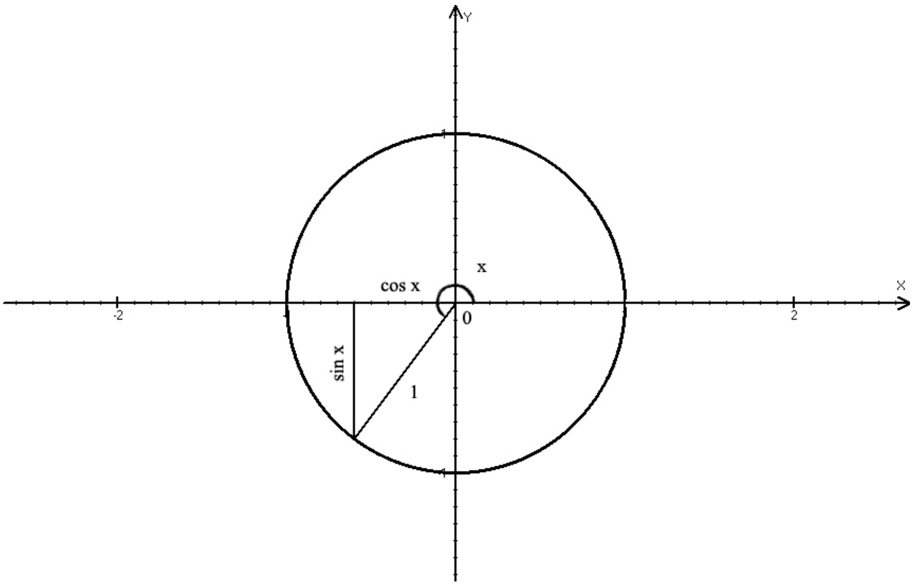
Poznámka

Goniometrické funkce (z řeckého slova gonía = úhel) se často také nazývají cyklickými funkcemi (cyklus = kruh) nebo kruhovými funkcemi, neboť je lze definovat použitím jednotkové kružnice. Definujeme-li je na základě poměrů délek stran v pravoúhlém trojúhelníku, nazýváme je trigonometrickými funkcemi (z řeckého slova trigon = trojúhelník).

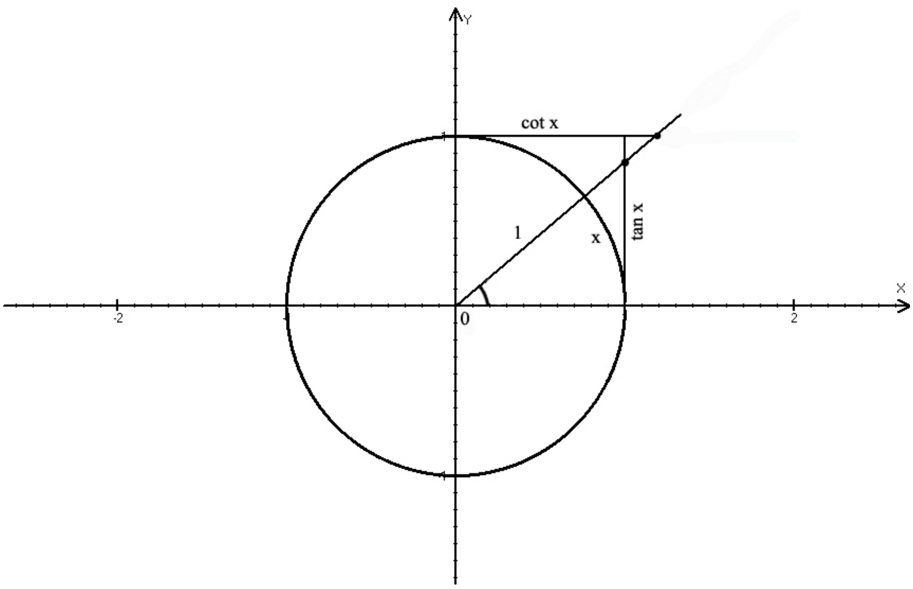
Mají velmi důležité aplikace jak v matematice, tak v přírodních a technických vědách. Vyskytují se např. tam, kde se uplatňují periodické děje, např. při akustických, mechanických a elektrických kmitech, při kruhových pohybech, při studiu pružností materiálu apod.

5.3.1 Geometrická definice goniometrických funkcí

Goniometrické funkce úhlu x definujeme pomocí souřadnic průsečíku koncového ramene uvažovaného úhlu s jednotkovou kružnicí.



Obr. 15 – Funkce sinus a kosinus na jednotkové kružnici

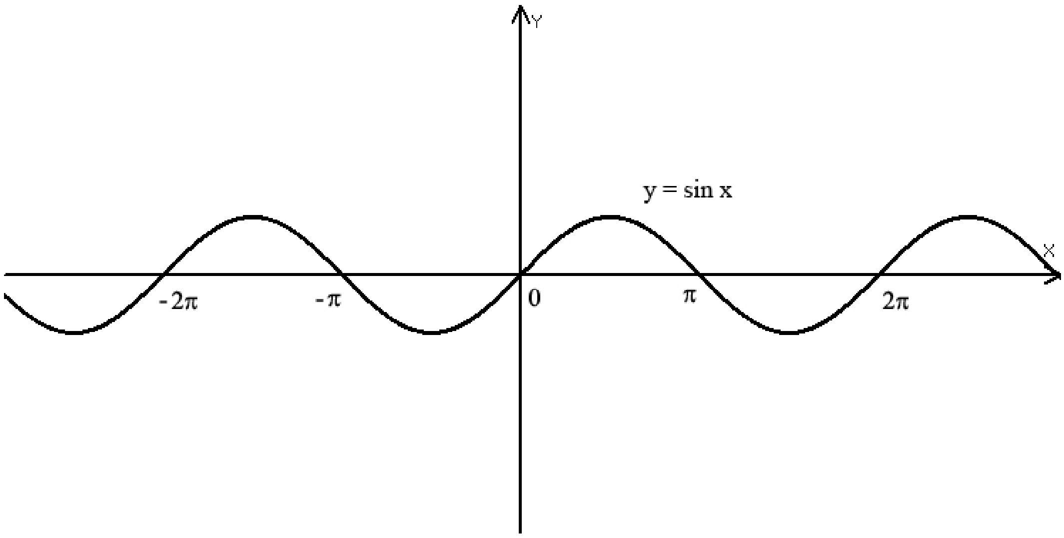


Obr. 16 – Funkce tangens a kotangens na jednotkové kružnici

5.3.2 Grafy goniometrických funkcí

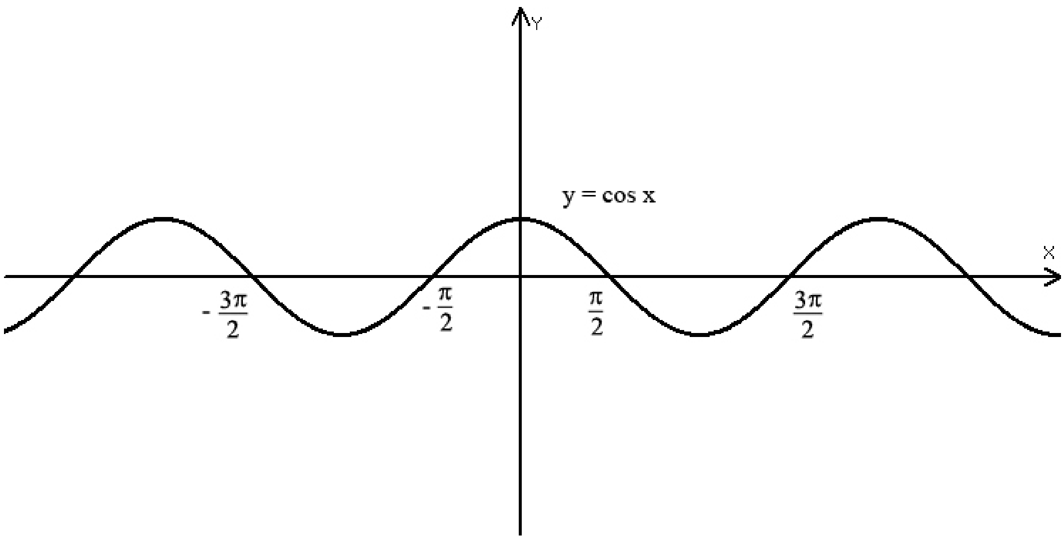
Graf funkce $y = \sin x$ se nazývá sinusoida, graf funkce $y = \cos x$ kosinusoida. O grafech $y = \tan x$ a $y = \cot x$ hovoříme jako o tangentoidě a kotangentoidě.

Funkce sinus



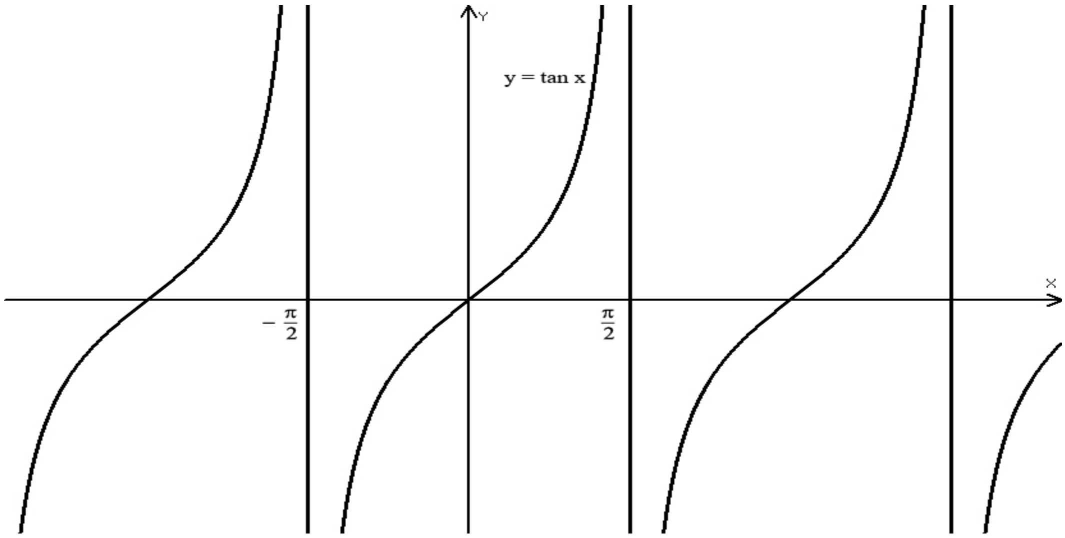
Obr. 17 – Graf funkce $y = \sin x$

Funkce kosinus



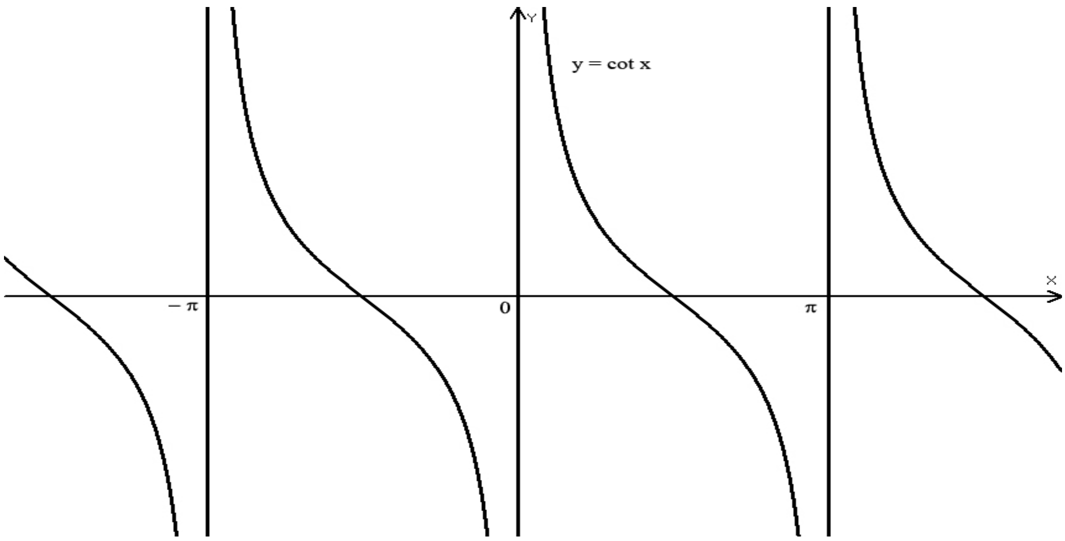
Obr. 18 – Graf funkce $y = \cos x$

Funkce tangens



Obr. 19 – Graf funkce $y = \tan x$

Funkce kotangens



Obr. 20 – Graf funkce $y = \cot x$

5.3.3 Základní vlastnosti goniometrických funkcí

a) Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou definované pro $x \in R \Rightarrow D(f) = (-\infty, \infty)$.

Funkce $y = \tan x$ je definována pro $x \in R - \{\pi/2 + k\pi : k \in Z\}$.

Funkce $y = \cot x$ je definována pro $x \in R - \{k\pi : k \in Z\}$.

b) Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou na $D(f)$ ohraničené, přičemž pro všechna čísla $x \in R$ platí vztahy: $|\sin x| \le 1, \quad |\cos x| \le 1$

$$-\infty < \tan x < \infty, \quad -\infty < \cot x < \infty.$$

c) Funkce $y = \sin x$ je rostoucí v intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, funkce $y = \cos x$ je klesající v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Funkce $y = \tan x$ je rostoucí v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ a funkce $y = \cot x$ je klesající v intervalu $(0, \pi)$.

d) Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou periodické s primitivní periodou 2π,

tj. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, kde k je celé číslo.

Funkce $y = \tan x$ a $y = \cot x$ jsou periodické s primitivní periodou π,

tj. $\tan(x + k\pi) = \tan x$, $\cot(x + k\pi) = \cot x$, kde k je celé číslo.

e) Funkce $y = \cos x$ je sudá, tj. $\cos(-x) = \cos x$,

funkce $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ jsou liché, tj.

$\sin(-x) = -\sin x$; $\tan(-x) = -\tan x$; $\cot(-x) = -\cot x$.

f) Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou spojité v $D(f)$, funkce $y = \tan x$ je spojitá v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ a $y = \cot x$ je spojitá v intervalu $(0, \pi)$.

g) Derivace funkce $y = \sin x$ je $y' = \cos x$. Derivace funkce $y = \cos x$ je $y' = -\sin x$.

Derivace funkce $y = \tan x$ je $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ a derivace funkce $y = \cot x$ je $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

5.3.4 Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi téhož argumentu

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\tan x \cot x = 1$$

5.3.5 Goniometrické funkce součtu a rozdílu argumentu, dvojnásobku a poloviny argumentu

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

5.3.6 Některé další vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

5.3.7 Hodnoty goniometrických funkcí

Hodnoty goniometrických funkcí pro $y = \sin x$ a $y = \cos x$ nalezneme přímo z definice na jednotkové kružnici, pro funkce $y = \tan x$, $y = \cot x$ ze vztahů

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$f(x)\backslash x$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0
$\cot x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

Pomlčka – značí, že v příslušných bodech není uvažovaná funkce definována.

Obr. 21 – Tabulka hodnot goniometrických funkcí ve význačných bodech

Přehled znamének goniometrických funkcí v kvadrantech a nulových bodech

Kvadrant	I II III IV	Nulové body ($k \in Z$)	Definiční obor
$\sin x$	+ + - -	$x = k\pi$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\cos x$	+ - - +	$x = (2k+1)\frac{1}{2}\pi$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\tan x$	+ - + -	$x = k\pi$	$\forall x \in R, x \neq (2k+1)\frac{1}{2}\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\cot x$	+ - + -	$x = (2k+1)\frac{1}{2}\pi$	$\forall x \in R, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Obr. 22 - Tabulka znamének goniometrických funkcí v kvadrantech a nulových bodech

5.4 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce ke goniometrickým funkcím. Protože inverzní funkce jsou definovány jen k prostým funkcím, je třeba se při jejich definování omezit na vhodné intervaly, v nichž jsou příslušné cyklické funkce ryze monotónní. Obvykle volíme ty intervaly, v nichž je počátek souřadnicové soustavy. Cyklometrické funkce jsou: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \mathrm{arccot}\, x$ (slovně: arkussinus, arkuskosinus, arkustangens, arkuskotangens).

5.4.1 Funkce arkussinus

Protože funkce $y = \sin x$ je pro $\forall x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ prostá, rostoucí, spojitá a nabývá zde všech hodnot $y \in \langle -1, 1 \rangle$, existuje k ní inverzní funkce, kterou nazýváme arkussinus (latinsky arcus = oblouk) a značíme $x = \arcsin y$.

Odtud dostáváme definici:

Funkce $y = \arcsin x$ přiřazuje každému číslu $x \in \langle -1, 1 \rangle$ takové číslo $y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, pro které platí $\sin y = x$.

Funkce $y = \arcsin x$ je funkce prostá, rostoucí, lichá a spojitá na intervalu $\langle -1,1 \rangle$ a inverzní funkcí k ní je funkce $y = \sin x$, $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

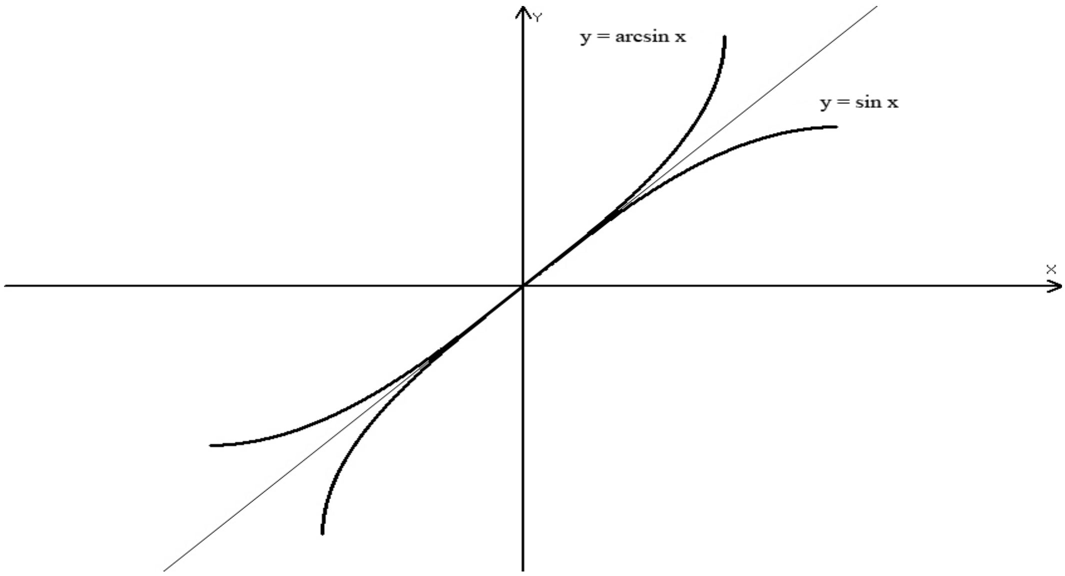
Derivace funkce $y = \arcsin x$ je $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Důležité hodnoty funkce $y = \arcsin x$

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$

Obr. 23 – Tabulka hodnot funkce $y = \arcsin x$ ve význačných bodech

Graf funkce $y = \arcsin x$ pro $\forall x \in \langle -1,1 \rangle$ a s hodnotami $y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ dostaneme například tím, že sestrojíme nejprve graf funkce $y = \sin x$ pro $\forall x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ a pak jej „překlopíme“ kolem přímky $y = x$.



Obr. 24 – Graf funkce $y = \arcsin x$ spolu s funkcí $y = \sin x$

Příklad 31

Určeme hodnotu $y = \arcsin x$ pro $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2}$ a $x = 1$.

Řešení

Podle definice je $\arcsin 0$ takové číslo y z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, pro které platí $\sin y = 0$, tj. $\arcsin 0 = 0$. Obdobně určíme $\arcsin\frac{1}{2} = \pi/6$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi/6$, $\arcsin 1 = \pi/2$, neboť $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\sin(-\pi/6) = -\frac{1}{2}$, $\sin(\pi/2) = 1$.

Příklad 32

Funkce $y = \sin x$ je pro $x \in \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle$ prostá. Určeme předpis pro funkci inverzní.

Řešení

Volme novou proměnnou $X = x - \pi$, takže pro $x \in \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle$ je $X \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Potom $y = \sin x = \sin(X + \pi) = -\sin X$, takže $\sin X = -y$.

Uvažujme funkci $z = \sin X, X \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, tj. $z = -y$. K ní existuje inverzní funkce $X = \arcsin z = \arcsin(-y)$. Jelikož $\arcsin(-y) = -\arcsin y$, platí $x - \pi = -\arcsin y$ a odtud $x = \pi - \arcsin y$.

Provedeme-li obvyklé označení pro závisle a nezávisle proměnnou, dostaneme hledanou inverzní funkce ve tvaru $y = \pi - \arcsin x$.

5.4.2 Funkce arkuskosinus

Funkce $y = \cos x$ je prostá a klesající na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ a nabývá v něm hodnot $y \in \langle -1, 1\rangle$. Inverzní funkce $x = \arccos y$ je definována na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Nazývá se arkuskosinus.

Odtud plyne definice:

Funkce $y = \arccos x$ přiřazuje každému číslu $x \in \langle -1, 1\rangle$ číslo $y \in \langle 0, \pi\rangle$, pro které platí $\cos y = x$.

Funkce $y = \arccos x$ je prostá, klesající na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, není ani sudá, ani lichá, je spojitá a funkcí k ní inverzní je funkce $y = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$.

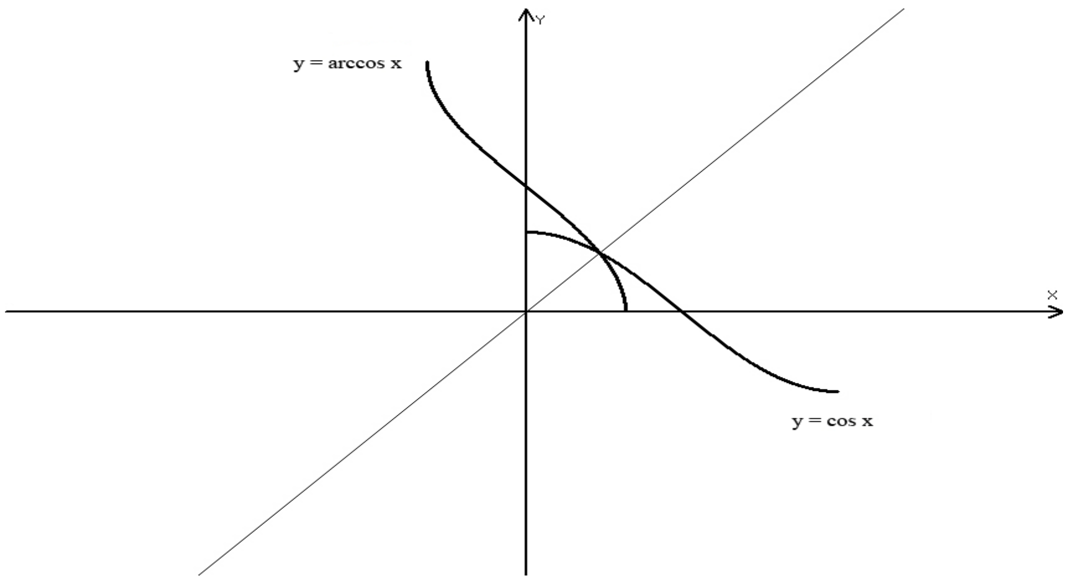
Derivace funkce $y = \arccos x$ je $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Důležité hodnoty funkce $y = \arccos x$

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

Obr. 25 – Tabulka hodnot funkce $y = \arccos x$ ve význačných bodech

Graf funkce $y = \arccos x$ dostaneme tím, že nejprve sestrojíme graf funkce $y = \cos x$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a pak jej „překlopíme“ kolem přímky $y = x$.



Obr. 26 – Graf funkce $y = \arccos x$ spolu s funkcí $y = \cos x$

Příklad 33

Určeme $\arccos x$ pro $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}\sqrt{2}, x = -1$.

Řešení

Podle definice je $\arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ takové číslo y z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, že pro ně platí $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, tj. $y = \frac{5}{6}\pi$. Analogicky určíme

$\arccos\frac{1}{2} = \pi/3, \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \pi/4, \arccos(-1) = \pi$.

Věta

Pro $|x| \leq 1$ platí $\arcsin x + \arccos = \pi / 2$.

Důkaz

K funkci $y = \arcsin x$ je inverzní funkce $y = \sin x$, kde $x \in \langle -1, 1 \rangle$

a $y \in \langle -\pi / 2, \pi / 2 \rangle$. Platí $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, přičemž $\pi / 2 - y$ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Na tomto intervalu existuje k funkci $x = \cos(\pi / 2 - y)$ inverzní funkce $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Tím je věta dokázána.

5.4.3 Funkce arkustangens

Funkce $y = \tan x$ je pro $\forall x \in (-\pi / 2, \pi / 2)$ prostá, rostoucí a nabývá všech hodnot $y \in (-\infty, \infty)$. Existuje k ní inverzní funkce arkustangens, značíme $y = \arctan x$.

Odtud plyne definice:

Funkce $y = \arctan x$ přiřazuje každému $x \in (-\infty, \infty)$ takové číslo $y \in (-\pi / 2, \pi / 2)$, pro které platí $\tan y = x$.

Funkce $y = \arctan x$ je funkce prostá, omezená, rostoucí, lichá a spojitá. Inverzní funkcí k ní je funkce $y = \tan x,\ x \in (-\pi / 2, \pi / 2)$.

Derivace funkce $y = \arctan x$ je $y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

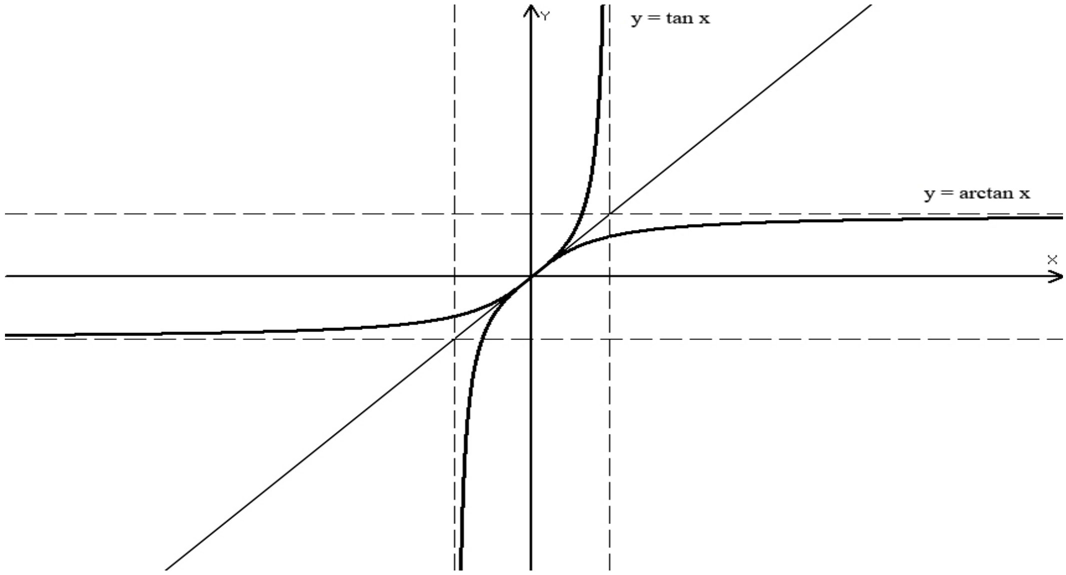
Důležité hodnoty funkce $y = \arctan x$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\arctan x$	$-\frac{1}{2}\pi$ *	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$ *

Hodnoty označené hvězdičkou jsou limitní hodnoty.

Obr. 27 – Tabulka hodnot funkce $y = \arctan x$ ve význačných bodech

Graf funkce $y = \arctan x$ dostaneme tím, že nejprve sestrojíme graf funkce $y = \tan x$ pro $x \in (-\pi / 2, \pi / 2)$ a pak jej „překlopíme“ kolem přímky $y = x$.



Obr. 28 – Graf funkce $y = \arctan x$ spolu s funkcí $y = \tan x$

Příklad 34

Určeme $\arctan x$ pro $x = -1/\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$.

Řešení

Podle definice zjistíme, že $\arctan\left(-1/\sqrt{3}\right) = -\pi/6$, $\arctan 0 = 0$, $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$.

5.4.4 Funkce arkuskotangens

Funkce $y = \cot x$ je pro $\forall x \in (0,\pi)$ prostá, rostoucí a nabývá všech hodnot $y \in (-\infty,\infty)$. Existuje k ní inverzní funkce arkuskotangens, značíme $y = \operatorname{arccot} x$. Odtud plyne definice:

Funkce $y = \operatorname{arccot} x$ přiřazuje každému $x \in (-\infty,\infty)$ takové číslo y z intervalu $(0,\pi)$ pro které platí $\cot y = x$.

Funkce $y = \operatorname{arccot} x$ je funkce prostá, omezená, klesající a spojitá. Inverzní funkcí k ní je funkce $y = \cot x$, $x \in (0,\pi)$.

Derivace funkce $y = \operatorname{arccot} x$ je $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

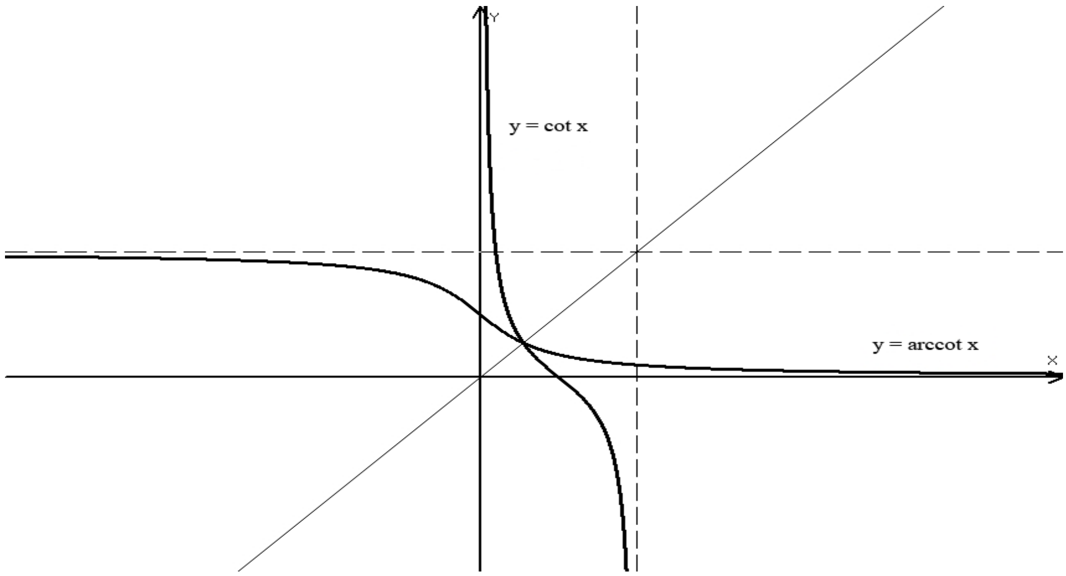
Důležité hodnoty funkce $y = \operatorname{arccot} x$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{arccot} x$	π *	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0 *

Hodnoty označené hvězdičkou jsou limitní hodnoty.

Obr. 29 – Tabulka hodnot funkce $y = \operatorname{arccot} x$ ve význačných bodech

Graf funkce $y = \operatorname{arccot} x$ dostaneme, jestliže „překlopíme“ kolem přímky $y = x$ graf funkce $y = \cot x$ pro $\forall x \in (0, \pi)$.



Obr. 30 – Graf funkce $y = \operatorname{arccot} x$ spolu s funkcí $y = \cot x$

Příklad 35

Určeme $\operatorname{arccot} x$ pro $x = -1, x = 0, x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Řešení

Podle definice zjistíme, že $\operatorname{arccot}(-1) = 3\pi / 4$, $\operatorname{arccot} 0 = \pi / 2$, $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right) = \pi / 3$.

Poznámka

Mezi cyklometrickými funkcemi existuje řada vztahů, které se dají odvodit ze známých vzorců pro goniometrické funkce.

Např.

$\arcsin(\sin x) = x$ pro $|x| \le \pi / 2$,

$\sin(\arcsin x) = x$ pro $|x| \leq 1$,

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi / 2$ pro $x \in (-\infty, \infty)$,

$\arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ pro $x > 0$,

$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$,

$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$ pro $x > 0,\ y > 0$.

5.5 Exponenciální funkce

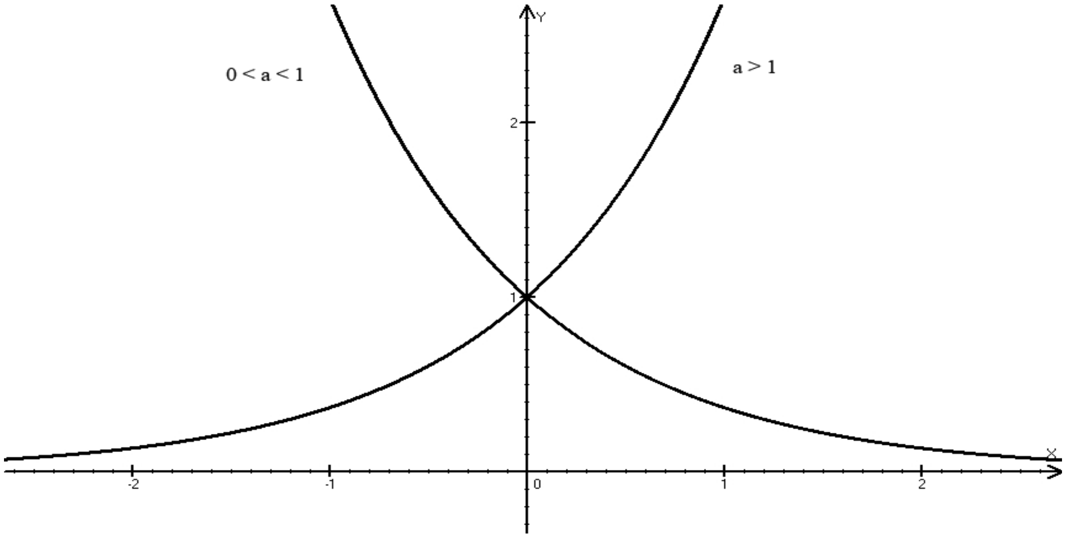
Každou funkci f definovanou na intervalu $x \in (-\infty, \infty)$ předpisem $y = a^x$, kde $a > 0,\ a \neq 1, x \in R$, nazýváme obecnou exponenciální funkcí o základu a. Obor hodnot je interval $y \in (0, \infty)$.

Např. funkce $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jsou exponenciální funkce, jejichž základy jsou: 2; e; 0,3; 0,5.

Pro $a > 1$ je exponenciální funkce prostá, zdola omezená, kladná, rostoucí, spojitá a ryze konvexní.

Pro $0 < a < 1$ je tato funkce prostá, zdola omezená, kladná, klesající, spojitá a ryze konvexní.

Derivace funkce $y = a^x$ je $y' = a^x \cdot \ln a$.



Obr. 31 – Graf funkce $y = a^x$ pro $0 < a < 1$ a $a > 1$

Z exponenciálních funkcí jsou nejdůležitější funkce $y = e^x$ a $y = e^{-x}$, kde e je tzv. Eulerovo číslo, definované limitou, se nazývá přirozená exponenciální funkce.

Derivace funkce $y = e^x$ je $y' = e^x$.

Poznámka

Pro $a = 1$ bychom dostali funkci $y = 1^x = 1$, tedy konstantu rovnou pro všechna reálná čísla x číslu 1. Je-li $x > 0$, lze předchozí definici rozšířit i na případ, kdy $a = 0$, pak klademe $a^x = 0$ pro všechna reálná čísla $x > 0$.

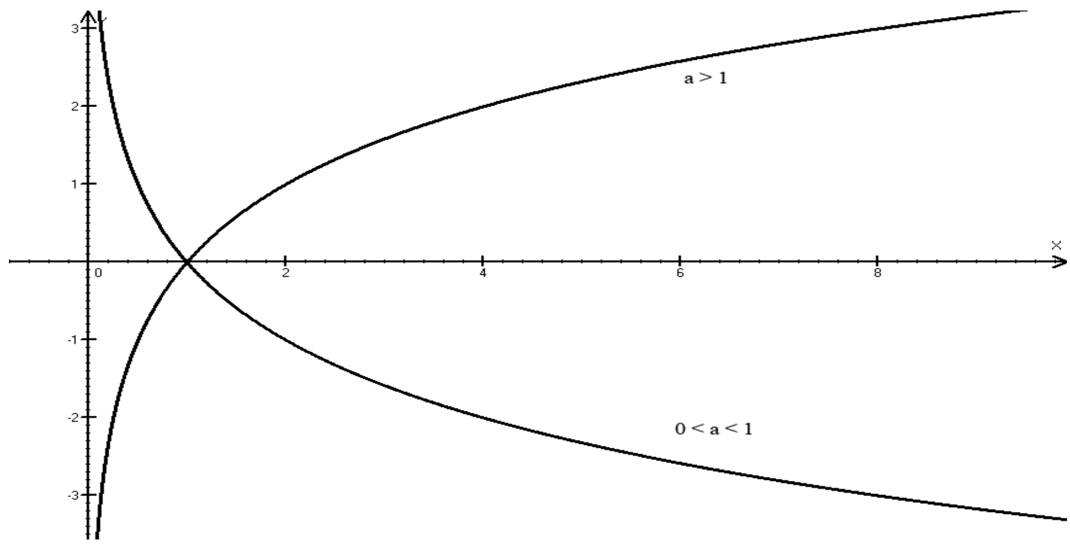
5.6 Logaritmická funkce

Jelikož exponenciální funkce $y = a^x$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ ryze monotónní a zobrazuje ho na interval $(0, \infty)$, existuje k ní na intervalu $x \in (0, \infty)$ funkce inverzní, tzv. logaritmická funkce o základu a. Logaritmickou funkci o základu a, kde $a > 0, a \neq 1, x > 0$, značíme $y = \log_a x$.

Z vlastností exponenciální funkce a z vlastností funkcí inverzních vyplývá, že definiční obor logaritmické funkce je $x \in (0, \infty)$, obor hodnot $y \in (-\infty, \infty)$. Přitom $\log_a 1 = 0$. Logaritmická funkce je na svém oboru $x \in (0, \infty)$ prostá a spojitá.

Pro $a > 1$ je logaritmická funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající.

Derivace funkce $y = \log_a x$ je $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

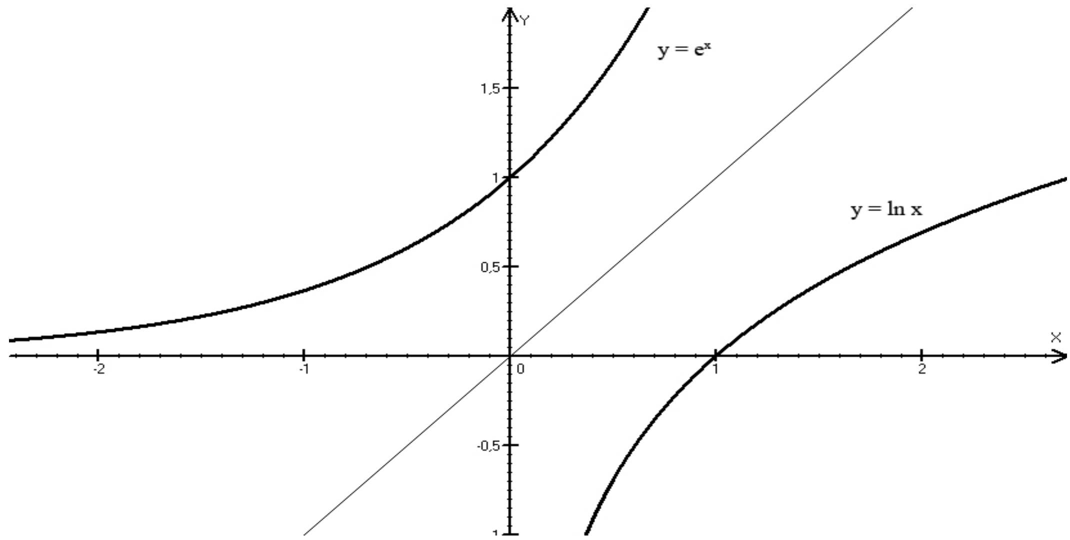


Obr. 32 – Graf funkce $y = \log_a x$ pro $a > 1$ a $0 < a < 1$

Často se užívá logaritmická funkce o základu 10 (značíme $y = \log x$) a o základu e (značíme $y = \ln x$). Hovoříme o dekadickém a přirozeném logaritmu.

Derivace funkce $y = \ln x$ je $y' = \dfrac{1}{x}$.

Grafické znázornění logaritmických funkcí $y = \log x$, $y = \ln x$ dostaneme snadno z grafů příslušných exponenciálních funkcí $y = 10^x$, $y = e^x$ na základě souměrnosti podle přímky $y = x$.



Obr. 33 – Graf funkcí $y = e^x$ a $y = \ln x$

Poznámka

Obě funkce $y = \log_a x, a^y = x$ vyjadřují týž funkční vztah; první vztah je ve tvaru logaritmickém, druhý ve tvaru exponenciálním. Přitom převedení vztahu $a^y = x$ na tvar $y = \log_a x$ se obvykle nazývá logaritmování výrazu $a^y = x$. Opačný pochod, tj. postup od vztahu $y = \log_a x$ k vztahu $a^y = x$, se často nazývá odlogaritmování.

Je samozřejmé, že základ a každého logaritmu je kladný, tj. $a > 0, a \neq 1$.

Zřejmě je $\ln x = \log_e x$.

Věta

Nechť $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. Potom platí:

1. $\forall\, y \in R : y = \log_a a^y$,
2. $\forall\, x > 0 : x = a^{\log_a x}$,
3. $\forall\, x \in R : a^x = e^{x \ln a}$,
4. $\forall\, x > 0 : \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$,
5. $\forall\, x > 0\ \forall\, \alpha \in R : x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Věta

Je-li $a > 0, a \neq 1$, pak pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2 > 0, m \neq 0$ platí tyto vzorce:

1. $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

2. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$,

3. $\log_a x^m = m \log_a x$,

4. $\log_a a = 1$,

5. $\log_a x = -\log_{1/a} x$.

Věta

Nechť $a > 0, b > 0, a \neq 0, b \neq 0, x > 0$ jsou libovolná reálná čísla. Pak platí:

1. $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$,

2. $\log_b a \cdot \log_a b = 1, \quad \lg e \cdot \ln 10 = 1$,

3. $\lg x = \ln x \cdot \lg e, \quad \ln x = \lg x \cdot \ln 10$.

Důkaz

1. Položme $y = \log_a x$. Odtud je $a^y = x$. Logaritmováním při základu b dostáváme z poslední rovnosti vztah $y \log_b a = \log_b x$. Je tedy $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$.

2. Vzorec $\log_b a \log_a b = 1$ plyne ze vzorce $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ pro $x = b$, neboť $\log_b b = 1$. Jestliže ve vzorci $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ položíme $x = 10, b = 10, a = e$, dostaneme $\lg e \cdot \ln 10 = 1$.

3. Vzorec $\lg x = \ln x \lg e$ (popř. $\ln x = \lg x \cdot \ln 10$) je důsledkem vzorce $\log_b x = \log_a x \log_b a$ (popř. $\log_b a \log_a b = 1, \lg e \ln 10 = 1$), položíme-li $b = 10, a = e$ (popř. $b = e, a = 10$).

Věta

Zřejmě platí (pro $\forall s \in R, \forall x \in R, x > 0; a > 0, a \neq 1$):

1. $x^s = e^{s \ln x}$,

2. $a^{\log_a x} = x$.

3. $e^{\ln x} = x$

Důkaz

1. Položme $y = x^s$. Odtud máme $\ln y = s \ln x$ a přechodem k inverzní funkci je $y = e^{s \ln x}$. Je tedy $x^s = e^{s \ln x}$.

2. Položme $y = \log_a x$; odtud $a^y = x$ neboli $a^{\log_a x} = x$.

3. Poslední vzorec je důsledkem předchozího pro $a = e$.

Příklad 36

Dokažme, že je $a^x = e^{x \ln a}$, kde $a > 0$.

Řešení

Položme $y = a^x$. Odtud máme $\ln y = \ln a = u$. K funkci $u = \ln y$ je inverzní funkce $y = e^u$. Proto $y = a^x = e^u = e^{x \ln a}$.

6 Závěr

Funkce jsou obsažnou kapitolou matematické analýzy a jsou vyjádřením vztahů mezi různými veličinami. O zformulování pojmu funkce se lidé snažili již od samého počátku 17.století. S funkcemi se setkáváme denně, lze jimi vyjádřit mnoho jevů.

Elementární funkce a jejich vlastnosti tvoří základní stavební kámen matematické analýzy, na němž je možné dále budovat složitější a obtížnější matematické konstrukce, především pak diferenciální a integrální počet. Zvládnutí základních vlastností funkcí je nezbytnou podmínkou pro každého, kdo má v úmyslu studovat tuto problematiku na vyšší úrovni. Předkládaná práce si klade za cíl být k tomuto účelu vhodnou a přehlednou pomůckou. Je zde uvedena a na konkrétních příkladech ilustrována většina obvykle používaných pojmů, které se týkají reálných funkcí jedné reálné proměnné.

Domnívám se, že přínos této práce by mohl spočívat i ve využití při výuce matematické analýzy.

Literatura

1) Delventhal, K. M., Kissner, A., Kulick, M.: Kompendium matematiky. Euromedia Group k. s., Praha 2004
2) Fuchsová, L.: Matematická analýza 1. MU Brno, 1992
3) Kolda, S., Krajňáková, D., Kimla, A.: Matematika pro chemiky I. SNTL, Praha 1989
4) Novák, V.: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Masarykova univerzita, Brno 2004
5) Nýdl, V.: Diskrétní matematika I. Jihočeská univerzita v ČB, České Budějovice 2006
6) Riečan, B., Bero, P., Smida, J.: Matematika pro IV. ročník gymnázií. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1987
7) Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky 1. SNTL, Praha 1983
8) Škrášek, J.: Základy vyšší matematiky. Naše vojsko, Praha 1966
9) Vyšín, J., Lukátšová, J., Odvárko, O.: Úlohy z matematiky pro IV. ročník gymnázií. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1987