1. ÚVOD

Cílem této diplomové práce je seznámit se s možností užití Riemannova integrálu pro výpočty obsahů různých ploch a objemů různých těles. Pro dostatečnou možnost pochopení na řešených příkladech a stručnou teorii se může stát tato diplomová práce pomůckou při studiu této problematiky na VŠ nebo pro rozšíření učiva integrálů na SŠ.

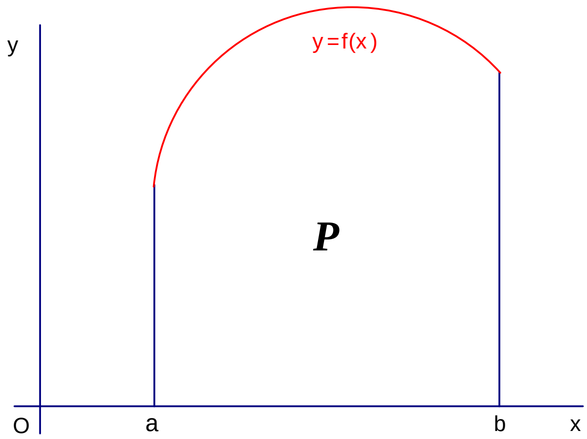
Předpokládám, že čtenář již zná pojmy, které se týkají integrálů.

Diplomová práce je rozdělena do tří hlavních kapitol. V první se setkáme převážně s teorií o Riemannově integrálu, ve druhé o jeho užití a třetí je věnována cvičení. První kapitola obsahuje obecné zavedení Riemannova integrálu, vlastnosti a způsoby výpočtů pomocí Newton-Leibnizovi formule, metody Per partes a metody substituční. Druhá kapitola popisuje užití Riemannova integrálu a je rozdělena na dvě podkapitoly, ve kterých jsou mimo teoretických částí i vzorové řešené příklady s obrazovou dokumentací, která slouží k lepší názornosti a usnadňuje pochopení celé problematiky. Čtenář má možnost vyzkoušet si i některé příklady, které jsou obsaženy ve třetí kapitole a jsou doplněny výsledky.

2. RIEMANNŮV INTEGRÁL

Nejprve se seznámíme s obecným zavedením Riemannova integrálu pomocí horních a dolních součtů. Tuto problematiku naleznete v publikaci [9].

Máme funkci $f(x)$, která je spojitá a kladná v intervalu $\langle a,b\rangle$. Sestrojíme obor *P*, ohraničený osou *x*, přímkami $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$. Jak definujeme obsah oboru *P* (Obr. 1)?



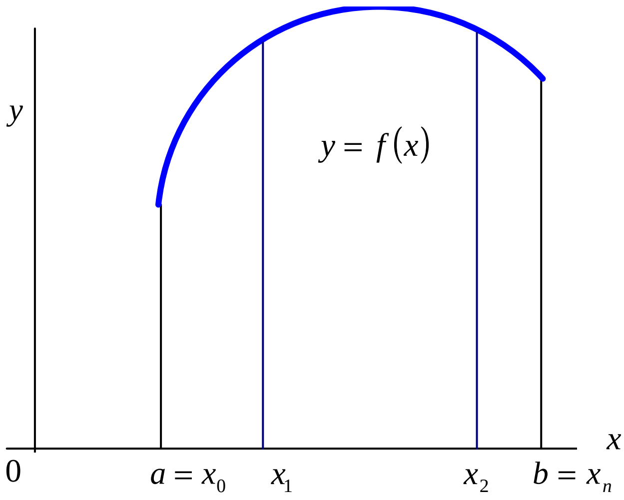
Obr. 1

Nejprve se snažíme interval $\langle a,b\rangle$ rozdělit a tak získat menší díly, které nám pomohou lépe určit obsah oboru *P*. Proto zavedeme pojem dělení a zjemnění dělení příslušného intervalu.

Definice: *Dělení intervalu* $\langle a,b\rangle$

Dělením intervalu $\langle a,b\rangle$ označíme konečnou posloupnost bodů $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, pro kterou platí, že posloupnost je rostoucí pro $i = 1, 2, \ldots, n$; $x_{i-1} < x_i$ a platí $x_0 = a$, $x_n = b$. Prvky této posloupnosti se nazývají *dělící body dělení D*, intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pro $i = 1,2,\ldots,n$ jsou *částečné intervaly*. (Obr. 2)

(Zjednodušeně: Dělení je „rozkouskování“ intervalu $\langle a,b\rangle$ na víc intervalů.)

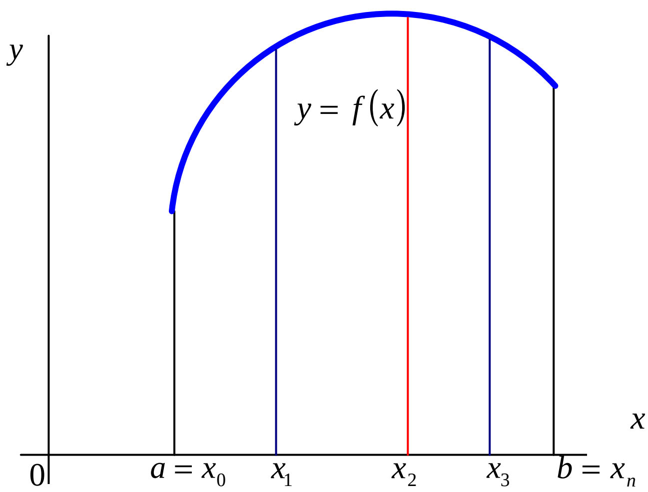


Obr. 2

Definice: *Zjemnění D* daného dělení D intervalu* $\langle a,b \rangle$

Nechť *D** a *D* jsou dvě dělení intervalu $\langle a,b \rangle$. Dělení *D** je zjemněním dělení *D*, jestliže každý dělící bod dělení *D* je také dělicím bodem *D**, $D \subseteq D^*$.

(Zjemnění daného dělení má tudíž alespoň o jeden bod navíc oproti původnímu dělení (Obr. 3). Zjednodušeně : Zjemnění daného dělení není nic jiného než ještě jemnější „rozkouskování“ původního intervalu $\langle a,b \rangle$.)



Obr. 3

Definice: *Norma dělení D*

Nechť D je libovolné dělení na intervalu $\langle a,b\rangle$, které je určené $\{x_i\}_{i=1}^n$. Potom normou dělení D nazveme $\nu(D) = \max_{i=1,\dots,n}|x_i - x_{i-1}|$. Tudíž normou dělení rozumíme největší z délek těchto podintervalů.

Vytvoříme takovou posloupnost dělení $\{D_n\}$, v níž je dělení D_{k+1} zjemněním dělení D_k pro všechna $k \in N$. Jestliže $\lim_{x\to\infty}\nu(D_n) = 0$ nazveme posloupnost $\{D_n\}$ normální posloupnost dělení.

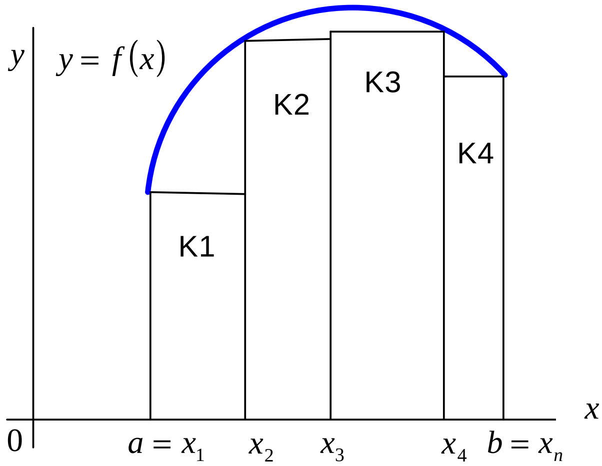
Normální posloupnost dělení můžeme utvořit např. tak, že původní interval $\langle a,b\rangle$ rozpůlíme, vzniklé intervaly znovu rozpůlíme a znovu rozpůlíme, atd. … a nakonec nám vyjde, že limita norem takovéto posloupnosti dělení je 0.

Teď když jsme rozdělili interval na určitý počet dílků, můžeme nad každým z těchto dílků vytvořit obdélník a to jak menší (dané křivce vepsaný), tak i větší obdélník (dané křivce opsaný). Součtem těchto obdélníků získáme přibližnou hodnotu obsahu oboru *P*. Součtem menších obdélníků nám vznikne tzv. dolní součet, který bude menší nebo roven než je celkový obsah oboru *P*, zatímco součtem větších obdélníků nebo-li horním součtem dostaneme číslo větší nebo rovno celkovému obsahu oboru *P*. Čím budou dílky menší $(n \to \infty)$, tím víc se budou součty blížit ke skutečnému obsahu oboru *P*.

Definice: *Dolní součet s(D,f) příslušný k funkci f a dělení D intervalu* $\langle a,b\rangle$ (Obr. 4)

Předpokládáme, že funkce f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení tohoto intervalu. Potom dolním součtem nazveme součet :

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

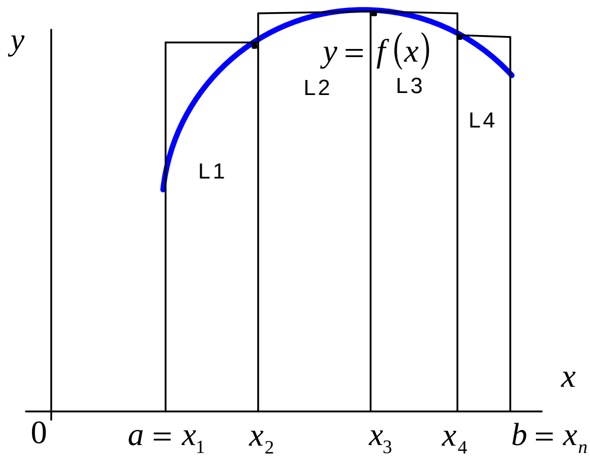


Obr. 4

Definice: *Horní součet S(D,f) příslušný k funkci f a dělení D intervalu* $\langle a,b \rangle$ (Obr. 5)

Předpokládáme, že funkce f je omezená na intervalu $\langle a,b \rangle$ a $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ je libovolné dělení tohoto intervalu. Potom horním součtem nazveme součet :

$$S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\langle x_{i-1},x_i \rangle} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \,.$$



Obr. 5

Dolní součet je menší nebo roven hornímu součtu.

Věta: Nechť existuje funkce f a je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$:

1. a nechť D je libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, pak platí:

$$s(D,f)\le S(D,f)$$

2. a nechť D je libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, D^* je zjemnění D, pak platí:

$$s(D,f)\le s(D^*,f)\le S(D^*,f)\le S(D,f)$$

3. a nechť D_1, D_2 jsou libovolná dělení $\langle a,b\rangle$, pak platí:

$$s(D_1,f)\le S(D_2,f)$$

Důsledek: D je zjemnění D_1, D_2, potom

$$0\le S(D)-s(D)\le S(D_2)-s(D_1)$$

Věta: Množina všech horních součtů $S(D,f)$ je omezená zdola.

$$S(D,f)\ge \inf_{\langle a.b\rangle} f(x)\cdot(b-a)$$

Množina všech dolních součtů $s(D,f)$ je omezená shora.

$$s(D,f)\le \sup_{\langle a.b\rangle} f(x)\cdot(b-a)$$

Jestliže teď vytvoříme pro normální posloupnost dělení $\{D_n\}$ posloupnost dolních součtů (tj. posloupnost $\{s(D_1,f),s(D_2,f),...\}$), můžeme tvrdit, že je konvergentní, protože je neklesající a shora omezená. Také o posloupnosti horních součtů $\{S(D_{1,}f),S(D_2,f),...\}$ můžeme tvrdit, že je konvergentní, protože je nerostoucí a zdola omezená.

Definice: Nechť f je funkce ohraničená na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Horní Riemannův integrál je $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\ \{\ S(D,f)\ ;\ D$ je libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle\ \}$.

Dolní Riemannův integrál je $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{ s(D, f)$; D je libovolné dělení intervalu $\langle a,b \rangle \}$.

Věta: Platí $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Důsledek: Pro libovolné dělení D platí:

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(D,f) - s(D,f)$$

Definice: *Riemannův integrál*

Řekneme, že omezená funkce f má Riemannův integrál od a do b, jestliže mají horní i dolní Riemannův integrál stejnou hodnotu:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Společnou hodnotu nazveme Riemannovým určitým integrálem funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ a značí se

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

V tomto označení jsou a,b integrační meze, číslo a je dolní mez integrálu, číslo b je horní mez integrálu, interval $\langle a,b \rangle$ integrační obor, funkce f je integrand a x je integrační proměnná.

Říkáme pak, že funkce f je riemannovsky integrovatelná (dále jen integrovatelná) neboli integrabilní na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Množinu všech funkcí integrovatelných na intervalu $\langle a,b \rangle$ značíme symbolem $R\langle a,b \rangle$. Skutečnost, že funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a,b \rangle$ budeme zapisovat $f \in R\langle a,b \rangle$.

Věta: Je-li funkce *f* integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x)dx$$

Věta: Každá funkce *f* (po částech) monotónní na intervalu $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta: Každá funkce *f* (po částech) spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná.

Tyto věty však vyjadřují pouze postačující podmínky integrovatelnosti. (Tudíž Riemannův integrál může existovat i k funkci, která nesplňuje vlastnosti uvedených podmínek.)

Poznámka:

Je-li funkce *f* po částech spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na tomto intervalu zřejmě integrovatelná. Stačí totiž interval $\langle a, b \rangle$ rozložit na konečný počet intervalů, na nichž bude funkce *f* spojitá a omezená, a tedy i integrovatelná. Jiné to bude, když připustíme, aby funkce *f* měla na intervalu $\langle a, b \rangle$ nekonečně mnoho bodů nespojitosti.

např. Dirichletova funkce na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, která racionálním číslům přiřazuje funkční hodnotu 1 a iracionálním číslům přiřazuje hodnotu 0. Tudíž pro každý podinterval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \subset \langle 0,1 \rangle$ je:

$\inf\left\{ f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \right\} = 0$

$\sup\left\{ f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \right\} = 1$

Odtud plyne, že dolní Riemannův integrál Dirichletovi funkce přes interval $\langle 0,1 \rangle$ je 0 a horní je 1. To znamená, že Dirichletova funkce není na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ integrovatelná.

2.1 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI RIEMANNOVA INTEGRÁLU

Definice: Nechť f je funkce integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Důsledek: $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b 1dx = b-a$.

Další vlastnosti určitého integrálu odvozujeme z vlastností dříve definovaných součtů. Budeme používat níže uvedené pomocné věty a jejich důsledky k lepšímu pochopení některých vlastností.

Aditivita určitého integrálu vzhledem k integrandu:

Pomocná věta: Nechť existují funkce f, g a jsou omezené na intervalu I. Potom platí

$$\sup_I (f(x)+g(x)) \le \sup_I f(x) + \sup_I g(x)$$

$$\inf_I (f(x)+g(x)) \le \inf_I f(x) + \inf_I g(x)$$

Důsledek: $S(D,(f+g)) \le S(D,f) + S(D,g)$

$s(D,(f+g)) \le s(D,f) + s(D,g)$

Věta: Nechť existují integrály $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow$ ex. integrál $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ a platí $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

(„integrál součtu je součet integrálů“)

Věta: *Aditivita určitého integrálu vzhledem k integračnímu oboru:*

Nechť $c \in \langle a, b \rangle$, existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\, dx,$ potom existují i integrály $\int_a^c f(x)\, dx, \int_c^b f(x)\, dx$ a platí $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$

Homogenita určitého integrálu:

Pomocná věta: Nechť existuje funkce *f* a je omezená na intervalu *I*, $c \in$ R. Potom platí

1. $c \geq 0 \Rightarrow \quad \sup_I (c \cdot f(x)) = c \cdot \sup_I f(x)$

$\inf_I (c \cdot f(x)) = c \cdot \inf_I f(x)$

2. $c < 0 \Rightarrow \quad \sup_I (c \cdot f(x)) = c \cdot \inf_I f(x)$

$\inf_I (c \cdot f(x)) = c \cdot \sup_I f(x)$

Důsledek: 1. $c \geq 0 \Rightarrow \quad S(D, c \cdot f) = c \cdot S(D, f)$

$s(D, c \cdot f) = c \cdot s(D, f)$

2. $c < 0 \Rightarrow \quad S(D, c \cdot f) = c \cdot s(D, f)$

$s(D, c \cdot f) = c \cdot S(D, f)$

Věta: Nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\, dx,\ c \in$ R $\Rightarrow$ ex. integrál $\int_a^b c \cdot f(x)\, dx$ a platí

$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx.$

(„integrál násobku je násobek integrálu“)

Věta: *Nerovnost mezi integrály*

Nechť existují integrály $\int_a^b f(x)\, dx,\ \int_a^b g(x)\, dx$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí:

Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, je $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$

Veta: Nechť existuje integrál $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. Potom také existuje integrál $\int_a^b |f(x)|dx$ a platí $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Věta: *O střední hodnotě*

Je-li funkce *f* spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, existuje aspoň jedno číslo $\xi \in (a,b)$, pro něž platí:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Číslo $\mu = f(\xi)$ se nazývá střední hodnota funkce *f* na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Věta: Nechť funkce *f* je sudá a integrovatelná na intervalu $\langle -a,a\rangle$, pak platí:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Věta: Nechť funkce *f* je lichá a integrovatelná na intervalu $\langle -a,a\rangle$, pak platí:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Věta: Nechť funkce *f* je na *R* periodická s periodou *p, n* je libovolné celé číslo, pak platí:

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{a-n\cdot p}^{b-n\cdot p} f(x)dx$$

2.2 METODY VÝPOČTU RIEMANNOVA INTEGRÁLU

Zde si uvedeme velmi důležité metody k výpočtu Riemannových integrálů. Jedná se o Newtonův-Leibnizův vzorec, metodu integrace per partes nebo-li metodu částečné integrace a metodu substituční.

2.2.1 Newtonův-Leibnizův vzorec

Věta: Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $F(x)$ primitivní funkce k této funkci na tomtéž intervalu. Pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Např. Vypočítejte $\int_{-2}^{1}(1+3x+x^2)dx$**.**

Řešení:

$$\int_{-2}^{1}(1+3x+x^2)dx = \left[x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = 1+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\left(-2+\frac{12}{2}-\frac{8}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

2.2.2 Integrace Per partes

Věta: Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v intervalu $\langle a,b\rangle$ spojité derivace. Potom platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

v intervalu $\langle a,b\rangle$.

Např. Vypočítejme $\int_0^2 x^2e^x dx$**.**

Řešení:

$$\int_0^2 x^2e^x dx = \left|\begin{array}{l} per - partes: \\ u(x)=x^2 \Rightarrow u'(x)=2x \\ v(x)=e^x \Rightarrow v'(x)=e^x \end{array}\right| = \left[x^2e^x\right]_0^2 - \int_0^2 2x\cdot e^x dx = 4e^2 - 2\int_0^2 x\cdot e^x dx$$

Na integrál $\int_0^2 x \cdot e^x dx$ opět použijeme metodu per partes.

$$\int_0^2 x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} per - partes: \\ u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \end{array} \right| = \left[x \cdot e^x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

Tudíž

$$\int_0^2 x^2 e^x dx = 4e^2 - 2\left(e^2 + 1\right) = 4e^2 - 2e^2 - 2 = \underline{\underline{2e^2 - 2}}$$

2.2.3 Substituční metoda

Věta: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť funkce $\varphi(t)$ má v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$. Pro každé t intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu $\langle a, b \rangle$. Položíme-li $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, potom platí v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ rovnice

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \, .$$

Tohoto vzorce můžeme použít pro výpočet integrálu vlevo, známe-li integrál vpravo nebo k výpočtu integrálu vpravo, známe-li integrál vlevo. Musíme dát pozor na to, že se také meze mění podle substituce $x = \varphi(t)$, totiž $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Např. Vypočítejme $\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$.

Řešení:

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} substituce: \\ x = \varphi(t) = e^t \\ dx = \varphi'(t) = e^t dt \end{array} \right| \left(\begin{array}{l} meze: \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 3 \Rightarrow t = \ln 3 \end{array} \right) = \int_0^{\ln 3} \frac{\ln e^t}{e^t} \cdot e^t dt = \int_0^{\ln 3} t \cdot dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\ln 3} =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} \ln^2 3}}$$

Existují tabulky určitých integrálů, a to převážně těch, které se pracně počítají. Uvedu dva příklady.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ...(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ...2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ...2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ...(2n+1)}.$$

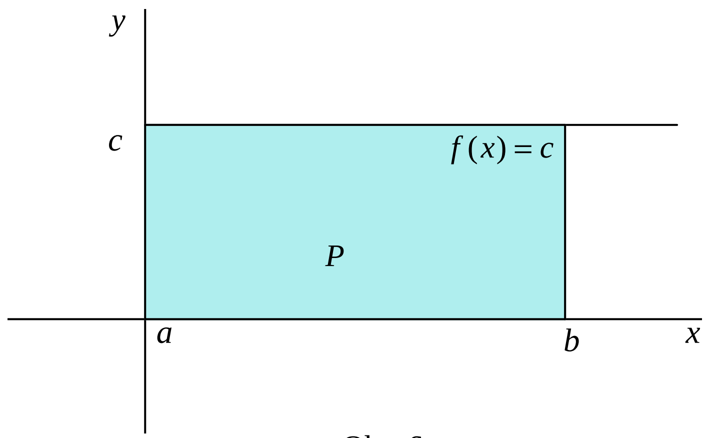
3. UŽITÍ RIEMANNOVA INTEGRÁLU

3.1 OBSAHY NĚKTERÝCH PLOCH

Mějme množinu M (a,b,f) = $\{[x,y] \in R \times R;\, x \in \langle a,b \rangle \wedge y \in \langle 0, f(x) \rangle\}$, kde f je spojitá, nezáporná funkce. M představuje rovinný útvar.

Definice: Obsahem rovinného útvaru M (a,b,f), který označujeme $P(a,b,f)$, nazveme číslo, pro které platí:

1. $P\,(a,b,f) \geq 0$
2. $(\forall\ c \in \langle a,b \rangle)$ $P\,(a,b,f) = P\,(a,c,f) + P\,(c,b,f)$
3. Je-li $\langle c,d \rangle \subseteq \langle a,b \rangle$ a $(\forall\ x \in \langle c,d \rangle)$, $g(x) \leq f(x)$, kde g je spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle c,d \rangle$, potom $P\,(c,d,g) \leq P\,(a,b,f)$
4. Je-li $c \in R^+$, pak M (a,b,c) (c je hodnota, kterou nabývá tato konstantní funkce), potom $P\,(a,b,c) = (b-a) \cdot c$ (Obr. 6).

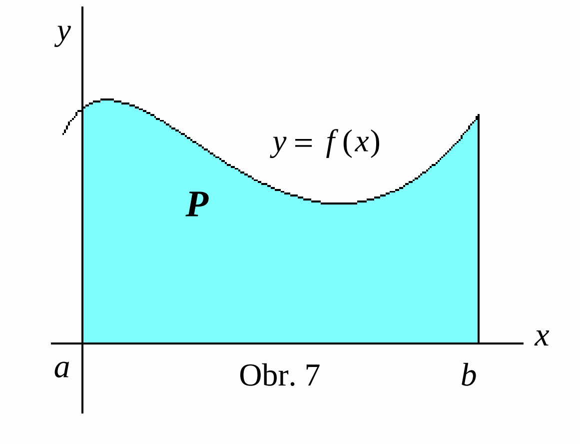


Obr. 6

Věta: Funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b \rangle$, potom

$$P\,(a,b,f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

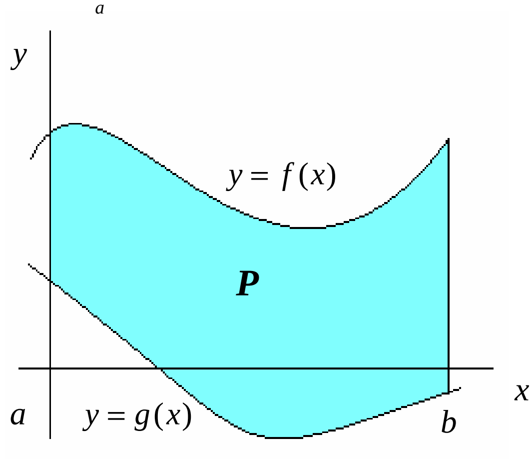
Tento vzorec nám tedy vyjadřuje obsah rovinné oblasti ohraničené přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$, osou x a křivkou $y = f(x)$, kde $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. (Obr. 7)



Obr. 7

Pokud je oblast ohraničena **dvěma křivkami** $y = f(x)$, $y = g(x)$, kde $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, je její obsah určen integrálem:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \text{. (Obr. 8)}$$



Obr. 8

Pokud je oblast ohraničena jednoduchou uzavřenou křivkou (tj. křivka, která sama sebe neprotíná), která je vyjádřena **parametrickými rovnicemi** $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a tato křivka je kladně orientovaná (tj., že při pohybu po křivce ve směru rostoucího parametru je oblast ohraničená křivkou vlevo od ní), můžeme obsah obrazce počítat podle libovolného vzorce z následujících tří:

$$P = -\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) dt \, ,$$

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cdot \dot{\psi}(t) \, dt \, ,$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t) \cdot \dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}(t) \psi(t)) dt \, .$$

Pokud je oblast ohraničena křivkou, která je vyjádřená v **polárních souřadnicích** a má tvar $\rho = f(\varphi)$, kde $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$, a polopřímkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, počítáme obsah této oblasti podle vzorce:

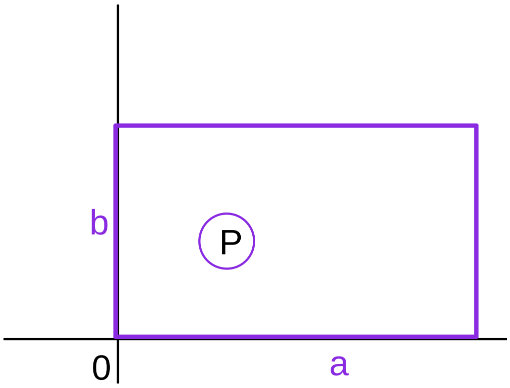
$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi))^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi \, .$$

Výpočet obsahu rovinných útvarů pomocí Riemannova integrálu:

Př.1. Vypočítejte obsah obdélníku ABCD o rozměrech a***,*** b***.***

Řešení:

Obdélník *ABCD* o rozměrech a, b je obrazec $[0, a, f(x)]$, kde $f(x) = b$. Potom je tedy jeho obsah roven:

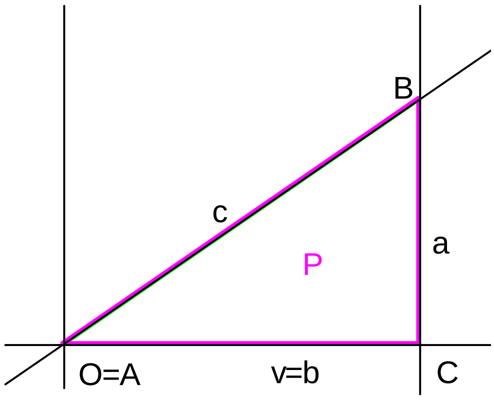


$$P = \int_0^a b dx = b[x]_0^a = \underline{\underline{ab}}$$

Př.2. Vypočítejte obsah pravoúhlého trojúhelníka.

Řešení:

Pravoúhlý trojúhelník můžeme zakreslit tak, že odvěsnu bude tvořit libovolná lineární přímka procházející počátkem. Na ose *x* bude jedna z odvěsen a vzhledem k její velikosti bude ve vzdálenosti *v* od počátku kolmo na osu *x* vztyčena druhá odvěsna, která se bude protínat s lineární přímkou ve vrcholu trojúhelníka.



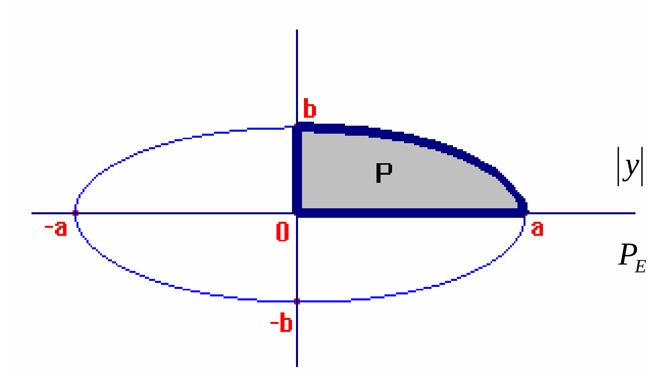
Jde tu tedy o obrazec $[0, v, f(x)]$, kde $f(x) = \frac{a}{v} x$.

$$P = \int_0^v \frac{a}{v} x dx = \left[\frac{a}{v} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^v = \underline{\underline{\frac{av}{2}}}$$

Př.3. Vypočítejte obsah elipsy.

Řešení:

Nejprve si vyjádříme rovnici elipsy: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a nakreslíme si obrázek:



$$|y| = b\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$$P_E = 4P$$

Vidíme, že elipsa se středem v počátku je souměrná jak podle osy *y*, tak i podle osy *x*. Můžeme tedy obsah elipsy počítat jako čtyřnásobek čtvrtiny elipsy pro kladná *x* a *y*.

$$P = \int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \left| \begin{array}{l} substituce: \\ \frac{x}{a} = \cos t \\ dx = -a \cdot \sin t dt \end{array} \right| = b \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot (-a \cdot \sin t) dt =$$

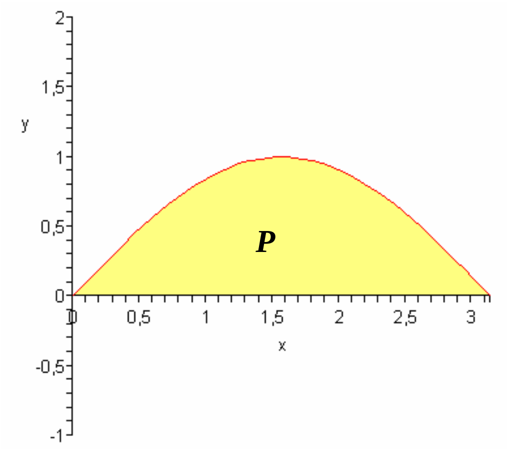
$$a \cdot b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = a \cdot b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4} - \frac{a \cdot b}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4}$$

$$\underline{\underline{P_E = \pi \cdot a \cdot b}}$$

Poznámka: Je-li $a = b = r$, potom se jedná o kružnici, tedy $P = \pi \cdot r^2$.

Př.4. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = \sin x$ ***a osou*** x***. Přičemž*** $x \in \langle 0, \pi \rangle$***.***

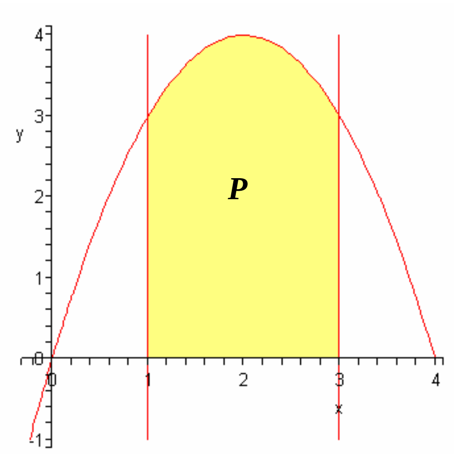
Řešení:



$$P = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = \underline{\underline{2}}$$

Př.5. Vypočítejte obsah křivočarého lichoběžníka příslušejícího funkci $y = 4x - x^2$ ***a intervalu*** $\langle 1,3 \rangle$***.***

Řešení:



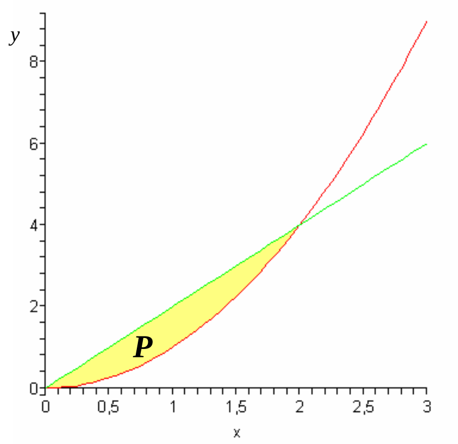
$$P = \int_1^3 4x - x^2 dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{36}{2} - \frac{27}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{22}{3}}}$$

Př.6. Vypočítejte obsah obrazce omezeného oblouky křivek, které jsou grafy funkcí $y = 2x$ ***a*** $y = x^2$***.***

Řešení:

Vypočítáme si nejprve průsečík obou funkcí.

Funkce $y = x^2$ a $y = 2x$ se protínají v bodech $[0,0]$ a $[2,4]$.

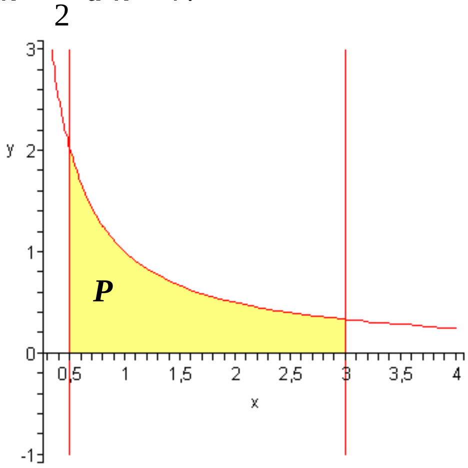


$$P = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 x^2 dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Př.7. Určete obsah obrazce omezeného osou *x*, ***obloukem hyperboly, která je grafem funkce*** $y = \frac{1}{x}$ ***a přímkami*** $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$***.***

Řešení:

V tomto příkladě nemusíme počítat žádné průsečíky, protože máme již zadané ohraničujícími přímkami $x = \frac{1}{2}$ a $x = 4$.



$$P=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_{\frac{1}{2}}^{4}=\ln 4-\ln\frac{1}{2}=\ln 2^2-\ln 2^{-1}=2\ln 2+\ln 2=\underline{\underline{3\ln 2}}$$

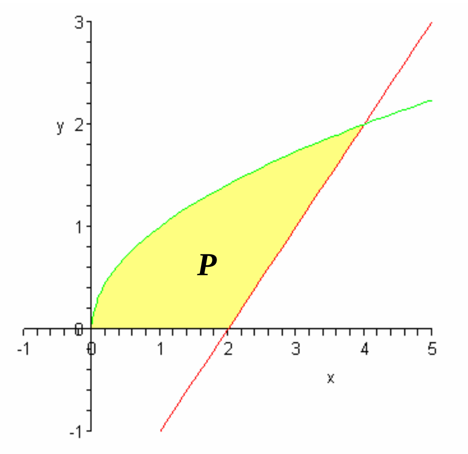
Př.8. Určete obsah obrazce omezeného obloukem části paraboly, která je grafem funkce $y=\sqrt{x}$, přímkou $y=x-2$ a osou x.

Řešení:

Nejprve si určíme průsečík přímky s osou x a průsečík přímky s parabolou.

Průsečík přímky a osy x je bod $[2,0]$. Průsečíky přímky $y=x-2$ a paraboly $y=\sqrt{x}$ vypočítáme z rovnice $\sqrt{x}=x-2$ z které dostaneme kvadratickou rovnici $x^2-5x+4=0$, ta má kořeny: $x_1=4$ a $x_2=1$. Z rovnice $y=x-2$ získáme druhé souřadnice. Protože $y\geq 0$, je možný pouze jeden průsečík a to se souřadnicemi $[4,2]$.

P_1 označíme obsah obrazce pod parabolou pro $x\in\langle 0,4\rangle$ a P_2 obsah obrazce (trojúhelníku) pod přímkou pro $x\in\langle 2,4\rangle$. Potom tedy $P=P_1-P_2$.



$$P_1=\int_0^4\sqrt{x}dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}$$

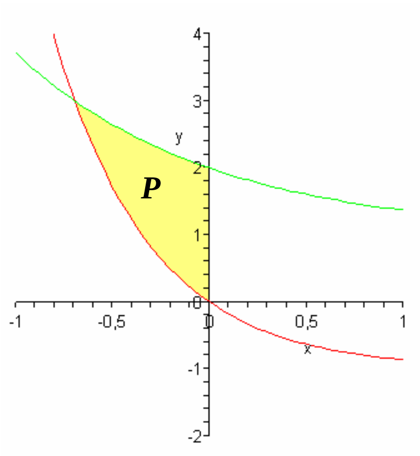
$$P_2=\int_2^4(x-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4=8-4=4$$

$$P=\frac{16}{3}-4=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Př.9. Určete obsah obrazce omezeného křivkami $y = e^{-2x} - 1$**,** $y = e^{-x} + 1$**,** $x = 0$**.**

Řešení:

Souřadnice průsečíku exponenciál získáme z rovnice $e^{-2x} - 1 = e^{-x} + 1$ a pak výpočtem příslušné hodnoty *y*. Rovnici řešíme substitucí $e^{-x} = t$. Dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 - t - 2 = 0$, ze které vypočítáme kořeny $t_1 = -1$ a $t_2 = 2$. Rovnice $e^{-x} = -1$ nemá v oboru reálných čísel řešení. Rovnice $e^{-x} = 2$ má řešení $x = -\ln 2$, pak $y = 3$. Průsečík exponenciál $y = e^{-2x} - 1$ a $y = e^{-x} + 1$ je tedy bod $[-\ln 2, 3]$.



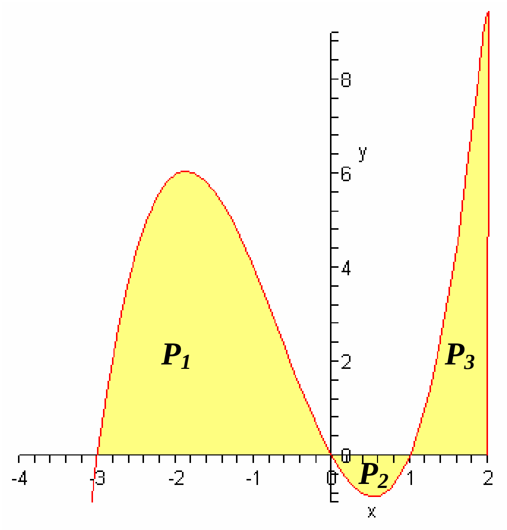
$$P = \int_{-\ln 2}^{0} (e^{-x} + 1)dx - \int_{-\ln 2}^{0} (e^{-2x} - 1)dx = \int_{-\ln 2x}^{0} (e^{-x} + 1 - e^{-2x} + 1)dx = \int_{-\ln 2x}^{0} e^{-x} - e^{-2x} + 2dx =$$

$$= \left[\frac{e^{-2x}}{2} - e^{-x} + 2x \right]_{-\ln 2}^{0} = \frac{1}{2} - 1 - 4 + 2 + 2\ln 2 = \underline{\underline{2\ln 2 - \frac{5}{2}}}$$

Př.10. Vypočítejte obsah plochy obrazce mezi grafem funkce $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ ***a osou*** x ***na intervalu*** $\langle -3, 2 \rangle$**.**

Řešení:

Na obrázku vidíme, že obrazec má 3 části. Výpočet provedeme pro každou z nich zvlášť a nakonec obsahy sečteme.



$P = P_1 + P_2 + P_3$

$$P_1 = \int_{-3}^{0} \left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = \frac{45}{4}$$

$$P_2 = -\int_{0}^{1} \left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)dx = -\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{7}{12}$$

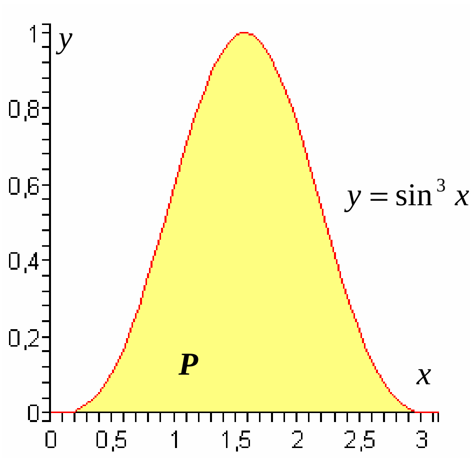
$$P_3 = \int_{1}^{2} \left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{1}^{2} = \frac{47}{12}$$

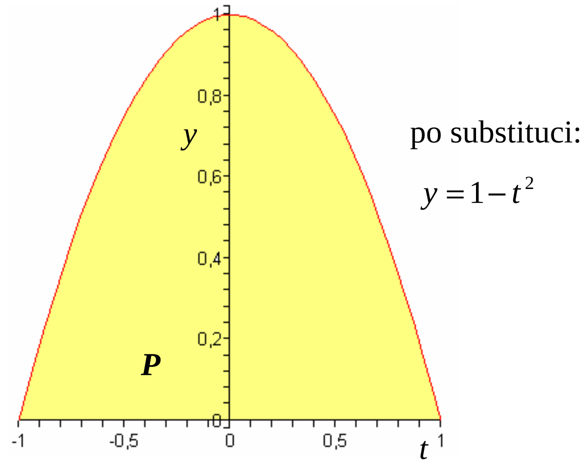
$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} + \frac{47}{12} = \underline{\underline{\frac{189}{12}}}$$

Př.11. Pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ ***určete obsah obrazce ohraničeného osou*** x ***a grafem křivky*** $y = \sin^3 x$**.**

Řešení:

Křivku $y = \sin^3 x$ můžeme vhodně zapsat jako $y = (1 - \cos^2 x)\sin x$, kde už vidíme, že budeme moci vhodně použít substituci $t = -\cos x$. Dolní mezi $x = 0$ odpovídá $t = -1$ a horní mezi $x = \pi$ odpovídá $t = 1$. Dále vidíme, že $1 - t^2$ je sudá funkce, tudíž můžeme obsah obrazce vypočítat jako dvojnásobek integrálu pro kladná $t \in \langle 0, 1 \rangle$.





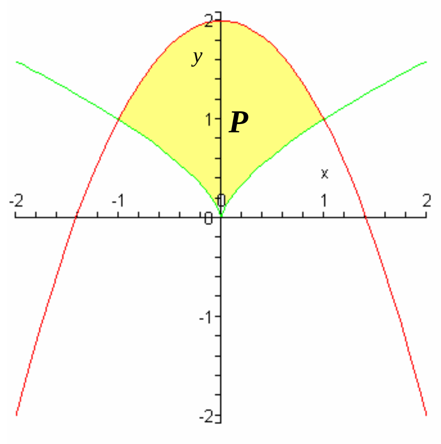
$$P = \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\sin x dx = \left| \begin{array}{l} substituce: \\ t = -\cos x \\ dt = \sin x dx \end{array} \right| \left(\begin{array}{l} meze: \\ x = 0 \Rightarrow t = -1 \\ x = \pi \Rightarrow t = 1 \end{array} \right) =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-t^2)\sin x \frac{dt}{\sin x} = \int_{-1}^{1} (1-t^2) dt = 2\int_0^1 (1-t^2) dt = 2\left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Př.12. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$.

Řešení:

Souřadnice průsečíků křivek $y = 2 - x^2$ a $y^3 = x^2$ vypočteme z rovnice $y^3 + y - 2 = 0$. Jediný reálný kořen této rovnice je $y = 1$. Tudíž $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Obsah obrazce najdeme jako rozdíl Riemannových integrálů. Obě funkce jsou sudé, a tak obsah můžeme počítat jako dvojnásobek obsahu určeného pouze pro kladná *x*.



$$P=\int_{-1}^{1}(2-x^2-\sqrt[3]{x^2})dx=2\int_{0}^{1}(2-x^2-\sqrt[3]{x^2})dx=2\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right]_0^1=2\left(2-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right)=$$

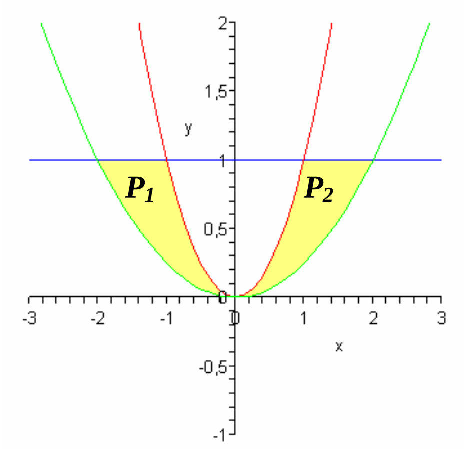
$$=\underline{\underline{\frac{32}{15}}}$$

Př.13. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného parabolami $y=x^2$, $4y=x^2$ ***a přímkou*** $y=1$.

Řešení:

Vypočítáme si průsečíky křivek:

Přímka $y=1$ protíná parabolu $y=x^2$ v bodech $[1,1]$ a $[-1,1]$ a parabolu $4y=x^2$ v bodech $[2,1]$ a $[-2,1]$. Obě paraboly se protínají v bodě $[0,0]$ a jsou to funkce sudé.



$$P=P_1+P_2$$

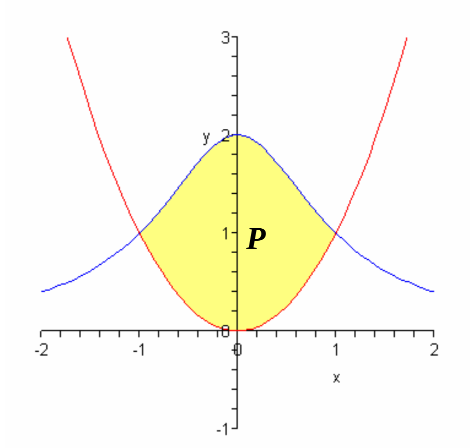
$$P=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(x^2-\frac{x^2}{4}\right)+2\int_{1}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=$$

$$=2\left[\frac{3x^3}{12}\right]_0^1+2\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_1^2=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Př.14. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y=x^2$ ***a*** $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Řešení:

Průsečíky křivek $y = x^2$ a $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ jsou body $[-1{,}1]$ a $[1{,}1]$.



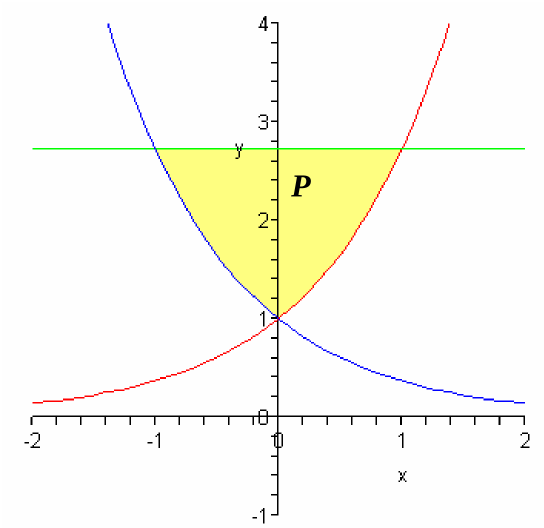
$$P = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right)dx = 2\left[2arctgx - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$2\left[\left(2arctg1 - \frac{1}{3}\right) - (2arctg0 - 0)\right]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi - \frac{2}{3}$$

Př.15. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného exponenciálními funkcemi $y = e^x$, $y = e^{-x}$ a přímkou $y = e$.

Řešení:

Průsečíky přímky $y = e$ s exponenciálami $y = e^x$ a $y = e^{-x}$ jsou $[-1{,}1]$, $[1{,}1]$.

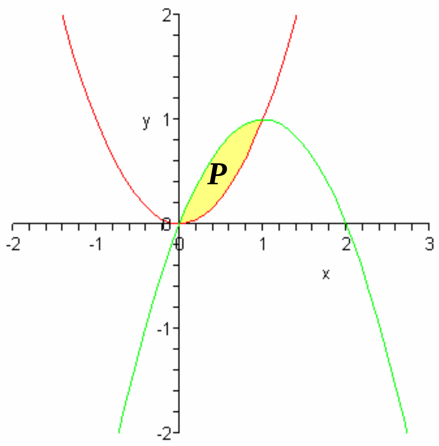


$$P=\int_{-1}^{0}\left(1-e^{-x}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(1-e^{x}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(1-e^{x}\right)dx=2\left[x-e^{x}\right]_0^1=2(1-e+1)=\underline{\underline{-2e+4}}$$

Př.16. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného parabolami $y=x^2$ a $y=2x-x^2$.

Řešení:

Průsečíky parabol $y=x^2$ a $y=2x-x^2$ jsou body $[0,0]$ a $[1,1]$.



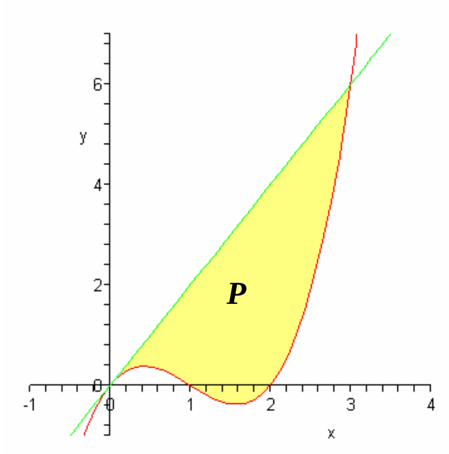
$$P=\int_{0}^{1}\left(2x-x^2-x^2\right)dx=2\int_{0}^{1}x-x^2dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Př.17. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y=x^3-3x^2+2x$ a tečnou sestrojenou k tomuto grafu v bodě $x=0$.

Řešení:

Protože $y(0)=0$, derivace $y'=3x^2-6x+2 \Rightarrow y'=2$, má rovnice tečny tvar $y=2x$.

Dále hledáme průsečíky přímky $y=2x$ s křivkou $y=x^3-3x^2+2x$. Z rovnice $x^3-3x^2+2x=2x$ dostáváme body $[0,0]$ a $[3,6]$.

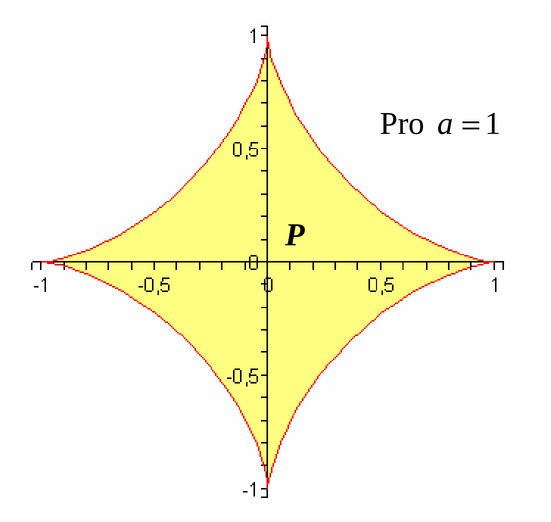


$$P = \int_0^3 \left(2x - \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)\right)dx = \int_0^3 \left(-x^3 + 3x^2\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3 = -\frac{81}{4} + 27 = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

Př.18. Vypočítejte obsah obrazce ohraničený asteroidou s parametrickým vyjádřením:

$x = a\cos^3 t$**,** $y = a\sin^3 t$**,** $a \succ 0$**.**

Řešení:



Nejprve rovnice zderivujeme: $\dot{\varphi}(t) = \dot{x} = -3a\cos^2 t \sin t$

$$\dot{\psi}(t) = \dot{y} = 3a\sin^2 t \cos t$$

Potom si určíme parametry a jimi určené body: $t_1 = 0 \Rightarrow [a,0]$,

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow [0,a],$$

$$t_3 = \pi \Rightarrow [-a,0],$$

$$t_4 = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow [0,-a],$$

$$t_5 = 2\pi \Rightarrow [a,0]$$

Asteroida je tedy kladně orientovaná křivka. Parametr $t \in \langle 0,2\pi \rangle$.

Můžeme použít vzorec: $P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi(t)\cdot\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}(t)\psi(t))dt$.

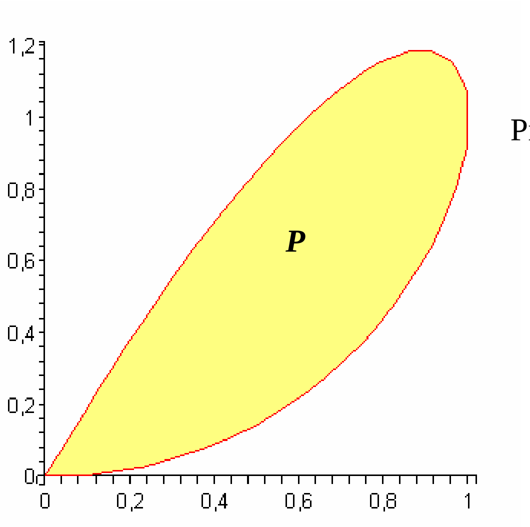
$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cdot\cos t + 3a\cos^2 t\cdot\sin t\cdot a\sin^3 t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\cdot\sin^2 t + \cos^2 t\cdot\sin^4 t)dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(2\sin t\cdot\cos t)^2 dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3}{16}a^2\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{3}{8}\pi a^2}}$$

Př.19. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkou zadanou parametrickým vyjádřením $x = 2t - t^2$**,** $y = 2t^2 - t^3$**.**

Řešení:



Pro $a = 1$

Nejprve rovnice zderivujeme: $\dot{\varphi}(t) = \dot{x} = 2 - 2t = 2(1-t)$

$\dot{\psi}(t) = \dot{y} = 4t - 3t^2 = t(4-3t)$

Potom si určíme parametry a jimi určené body: $t_1 = 0 \Rightarrow [0,0]$,

$$t_2 = 1 \Rightarrow [1,1],$$

$$t_3 = \frac{4}{3} \Rightarrow \left[\frac{8}{9}, \frac{32}{7}\right],$$

$$t_4 = 2 \Rightarrow [0,0]$$

Křivka je tedy kladně orientovaná. Parametr $t \in \langle 0,2 \rangle$.

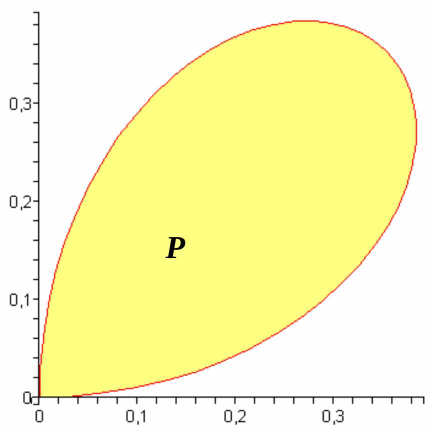
Použijeme vzorec: $P = -\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)dt$

$$P = -\int_{0}^{2} (2t^2 - 3t) \cdot 2(1-t)dt = \int_{2}^{0} (2t^2 - 3t) \cdot 2(1-t)dt = 2\int_{2}^{0} (2t^2 - t^3 - 2t^3 + t^4)dt =$$

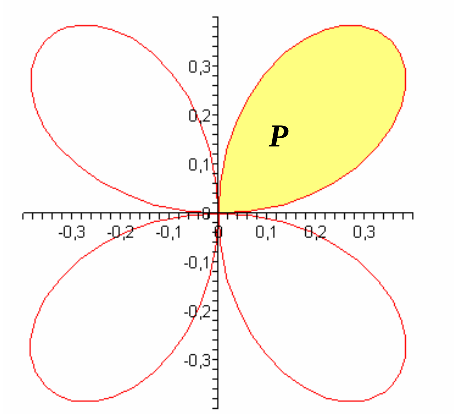
$$= 2\int_{2}^{0} (2t^2 - 3t^3 + t^4)dt = 2\left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5\right]_2^0 = -2\left(\frac{2^4}{3} - \frac{3 \cdot 2^4}{4} + \frac{2^5}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{8}{15}}}$$

Př.20. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkou zadanou parametrickým vyjádřením $x = a \sin t \cos^2 t$**,** $y = a \cos t \sin^2 t$**,** $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$**.**

Řešení:



Pro $a = 1$



Nejprve rovnice zderivujeme: $\dot{x}(t) = a \cos t\left(\cos^2 t - 2\sin^2 t\right)$

$\dot{y}(t) = a \sin t\left(2\cos^2 t - \sin^2 t\right)$

$\dot{x}(t)=0 \Leftrightarrow \cos t=0 \Rightarrow t_1=\frac{\pi}{2}$, což je krajní bod intervalu, nebo $\cot gt=\sqrt{2} \Rightarrow t_2$

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{y}(t)x(t)-y(t)\dot{x}(t))dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin t\left(2\cos^2 t-\sin^2 t\right)\cdot a\sin t\cos^2 t-a\cos t\sin^2 t\cdot a\cos t\left(\cos^2 t-2\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(2\cos^2 t-\sin^2 t\right)-a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t-2\sin^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\underline{\underline{\frac{\pi a^2}{32}}}$$

Př.21. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkou $x^3+y^3=3axy$ ***tzv. Descartův list.*** (viz [7])

Řešení:

Rovnici $x^3+y^3=3axy$ si vyjádříme v polárních souřadnicích:

$$x=\rho\cos\varphi$$

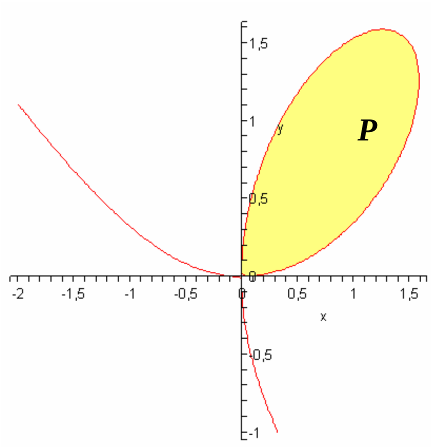
$$y=\rho\sin\varphi$$

Po dosazení do rovnice $x^3+y^3=3axy$ dostaneme:

$$\rho^3\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)=3\rho^2 a\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\rho=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$$

Protože pro $\varphi\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$ je $\rho\geq 0$, pro hledaný obsah dostáváme:



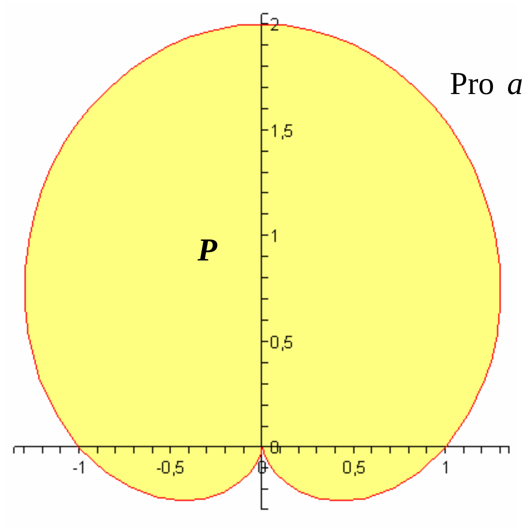
Pro a=1

$$P=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\rho^{2}d\varphi=\frac{9a^{2}}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2}\varphi\sin^{2}\varphi}{\left(\cos^{3}\varphi+\sin^{3}\varphi\right)}d\varphi=\left|\begin{array}{l}substituce:\\ tg\varphi=t\end{array}\right|=\frac{9a^{2}}{2}\left[-\frac{\cos^{3}\varphi}{3\left(\cos^{3}\varphi+\sin^{3}\varphi\right)}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{3a^{2}}{2}}}$$

Př.22. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného kardioidou zadanou polárními souřadnicemi: $\rho=a(1+\sin\varphi)$, $a\succ 0$, $\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$

Řešení:



Pro $a=1$

$$P=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}a^{2}(1+\sin\varphi)^{2}d\varphi=\frac{a^{2}}{2}\int_{0}^{2\pi}(1+2\sin\varphi+\sin^{2}\varphi)d\varphi=$$

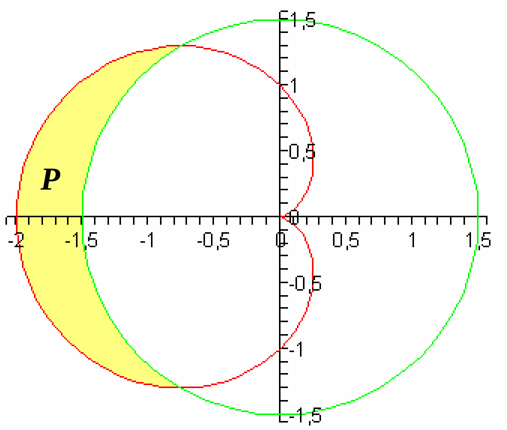
$$\frac{a^{2}}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(1+2\sin\varphi+\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{a^{2}}{2}\left[\varphi+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\sin\varphi\right]_{0}^{2\pi}=\frac{a^{2}}{2}(2\pi+\pi)=$$

$$=\underline{\underline{\frac{3}{2}\pi a^{2}}}$$

Př.23. Vypočítejte obsah obrazce vytvořeného rozdílem křivek $r_1(\varphi)-r_2(\varphi)$, kde $r_1(\varphi)=1-\cos\varphi$ a $r_2(\varphi)=\frac{3}{2}$.

Řešení:

Průsečíky křivek $\underline{r_1(\varphi)=1-\cos\varphi}$ a $\underline{r_2(\varphi)=\frac{3}{2}}$ vypočítáme z rovnice $1-\cos\varphi=\frac{3}{2} \Rightarrow \varphi=\pm\frac{2}{3}\pi$. Vzniklý obrazec je osově souměrný podle osy *x*.



$$P=\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\left(\frac{3}{2}\right)^2 d\varphi=2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left[(1-\cos\varphi)^2-\frac{9}{4}\right]d\varphi=$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left(\cos^2\varphi-2\cos\varphi-\frac{5}{4}\right)d\varphi=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}-2\cos\varphi-\frac{5}{4}\right)d\varphi=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi-2\sin\varphi-\frac{5}{4}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)-\frac{1}{4}\sin\frac{4}{3}\pi+2\sin\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}=\underline{\underline{\frac{9}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}}}$$

3.2 OBJEMY NĚKTERÝCH TĚLES

Mějme množinu K (a,b,f) = $\{[x,y] \in R \times R; x \in \langle a,b \rangle \wedge y \in \langle 0, f(x) \rangle\}$, kde f je spojitá, nezáporná funkce. K představuje rovinný útvar.

Definice: Objemem tělesa vzniklého rotací rovinného útvaru K (a,b,f) kolem osy x, který označujeme $V(a,b,f)$, nazveme číslo, pro které platí:

1. $V(a,b,f) \geq 0$
2. $(\forall\ c \in \langle a,b \rangle)$ $V(a,b,f) = V(a,c,f) + V(c,b,f)$
3. Je-li $\langle c,d \rangle \subseteq \langle a,b \rangle$ a $(\forall\ x \in \langle c,d \rangle)$, $g(x) \leq f(x)$, g je spojitá nezáporná funkce na $\langle c,d \rangle$, potom $V(c,d,g) \leq V(a,b,f)$
4. Je-li $c \in R^+$, pak K (a,b,c) (c je hodnota, kterou nabývá tato konstantní funkce), potom $V(a,b,c) = \pi^2 \cdot c(b-a)$.

Věta: *Výpočet objemu rotačního tělesa*

Funkce f má spojitou nenulovou derivaci na $\langle a,b \rangle$. Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, **kolem osy *x*** je určen vztahem:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Věta: Funkce f má spojitou nenulovou derivaci na $\langle a,b \rangle$. Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, **kolem osy *y*** je určen vztahem:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Věta: Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na $\langle a,b\rangle$ a nechť $0 \le g(x) \le f(x)$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Objem *V* rotačního tělesa, který vznikne rotací obou funkcí $f(x)$ a $g(x)$

a) kolem osy *x*, platí $V = \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$,

b) kolem osy *y*, platí $V = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right) dx$.

Věta: Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a,b\rangle$ zadaná **parametrickými rovnicemi** $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, kde funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Objem *V* rotačního tělesa vyjádříme vzorcem

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \left|\dot{\varphi}(t)\right| dt .$$

Věta: Nechť funkce $r = r(\varphi)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Pro objem *V* rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny zadané nerovnostmi $\alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le r(\varphi)$, kde *r* a φ jsou **polární souřadnice** v rovině, kolem

a) polární osy, platí $V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi$,

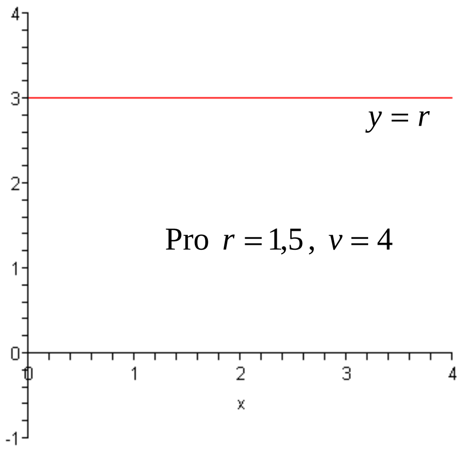
b) „přímky $\varphi = \frac{\pi}{2}$“, platí $V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi$.

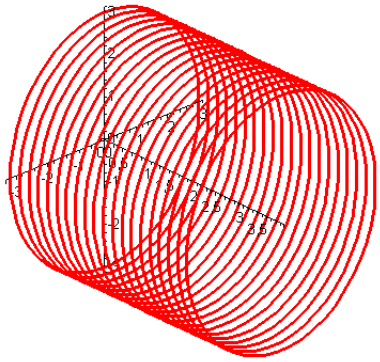
Výpočet objemů některých rotačních těles užitím Riemannova integrálu:

Př.1. Vypočítejte objem válce o výšce *v* ***a poloměru podstav*** *r****.***

Řešení:

Po nakreslení obrázku zjistíme, že válec vytvoříme rotací konstantní funkce $y = r$ pro $x \in \langle 0, v \rangle$.



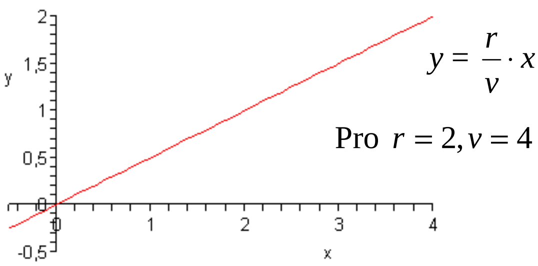


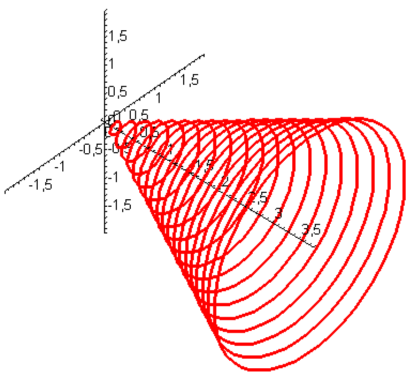
$$V = \pi \int_0^v r^2 \, dx = \pi r^2 [x]_0^v = \underline{\underline{\pi r^2 v}}$$

Př.2. Vypočítejte objem rotačního kužele.

Řešení:

Nejprve si nakreslíme obrázek a určíme funkci, která nám bude rotovat kolem osy *x* a vytvoří tak rotační kužel s poloměrem podstavy *r* a výškou *v*. Kužel vznikne rotací trojúhelníku, který ohraničuje přímka se směrnicí $\frac{r}{v}$, osa *x* a ploměrem *r*, kolem osy *x*.





Je to tedy lineární funkce $f(x) = \frac{r}{v} \cdot x$.

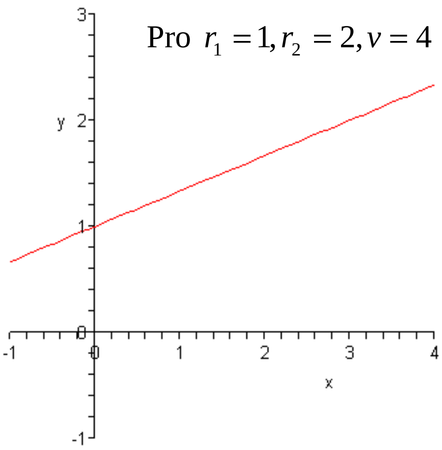
$$V = \int_0^v \pi\left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \int_0^v \pi\left(\frac{r}{v}\right)^2 x^2 dx = \pi\,\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi r^2 v}}$$

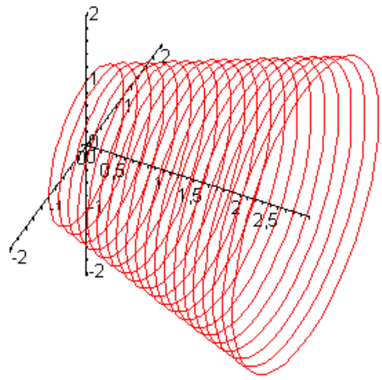
Př.3. Vypočítejte objem rotačního komolého kužele.

Řešení:

Rotační kužel zvolíme tak, že bude mít výšku v a jeho kruhové podstavy mají poloměry $r_1 \neq r_2$. Rotační kužel vznikne, otočí-li se kolem osy x pravoúhlý lichoběžník ohraničený přímkou se směrnicí $\frac{r_2 - r_1}{v}$, osou x a poloměry r_1, r_2.

$$f(x) = \frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1$$





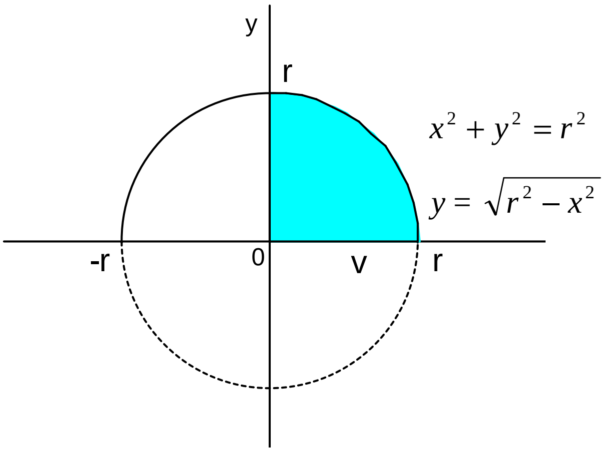
$$V = \pi\int_0^v \left(\frac{r_1 - r_2}{v}x + r_1\right)^2 dx = \pi\left(\frac{(r_1 - r_2)^2}{v^2}\cdot\int_0^v x^2 dx + 2r_1\frac{r_1 - r_2}{v}\cdot\int_0^v x\,dx + r_1^2\int_0^v dx\right) =$$

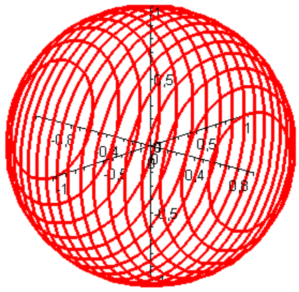
$$= \pi\left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2}\cdot\frac{v^3}{3} + 2r_1\frac{r_1 - r_2}{v}\cdot\frac{v^2}{2} + r_1^2 v\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)v}}$$

Př.4. Vypočítejte objem koule*.*

Řešení:

Nejprve si nakreslíme obrázek a určíme funkci, která nám bude rotovat kolem osy x a která nám vytvoří kouli s poloměrem r.



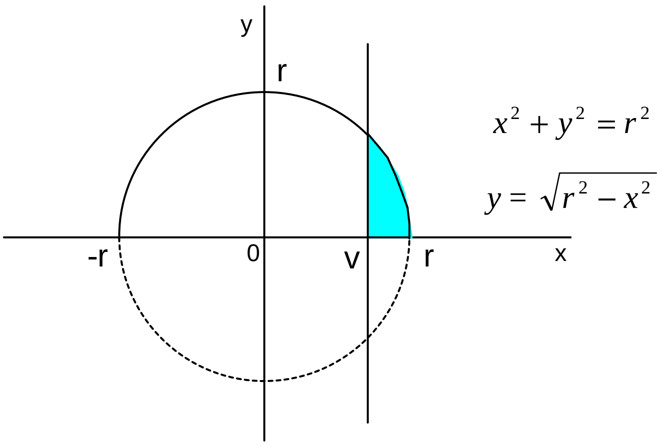


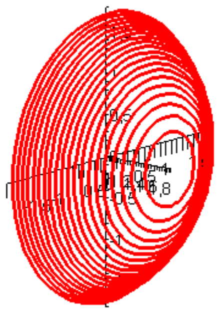
$$V = \int_{-r}^{r} \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}}$$

Př.5. Vypočítejte objem kulové úseče.

Řešení:

Výšku kulové úseče zvolíme v, $0 \prec v \prec 2r$. Potom kulová úseč vznikne rotací křivky $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $\langle r - v, r \rangle$.

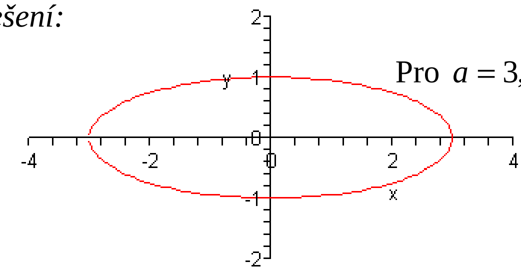




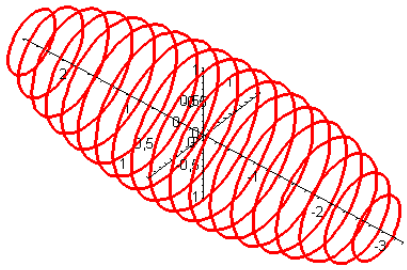
$$V = \pi \int_{r-v}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-v}^{r} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi v^2 (3r - v)}}$$

Př.6. Vypočítejte objem elipsoidu vytvořeného rotací elipsy zadané rovnicí $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\succ 0$ ***kolem osy x.***

Řešení:



Pro $a=3, b=1$



Rovnici elipsy si upravíme … $|y|=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

Vidíme, že elipsa se středem v počátku je souměrná jak podle osy *y*, tak i podle osy *x*. Budeme tedy objem elipsoidu počítat jakou dvojnásobek objemu poloviny elipsoidu vytvořeného rotací poloviny elipsy pro $b\succ 0$.

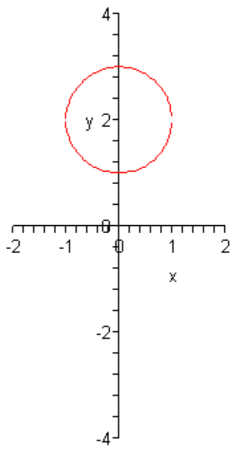
$$V=2\pi\int_0^a\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)dx=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\int_0^a 1-\frac{x^2}{a^2}\,dx=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=$$

$$=2\pi b^2\frac{2a}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}\pi ab^2}}$$

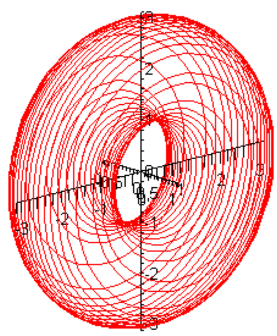
Př.7. Vypočítejte objem anuloidu.

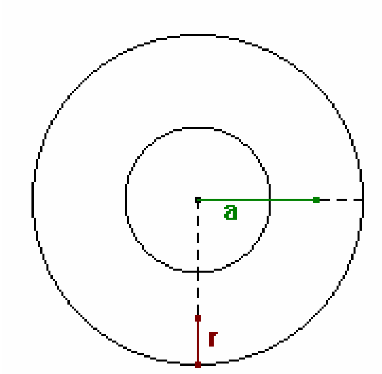
Řešení:

Anuloid vytvoříme rotací kruhu o poloměru *r* kolem osy *x*, kde střed kružnice *S* je ve vzdálenosti *a* od počátku.



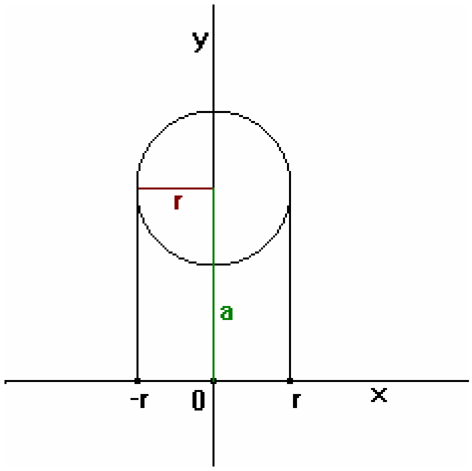
$y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}$





průřez

anuloidem



$$V = \int_{-r}^{r} \pi\left(a + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \int_{-r}^{r} \pi\left(a - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left(a + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(a - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} \left(a + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(a - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} a^2 + \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2 dx =$$

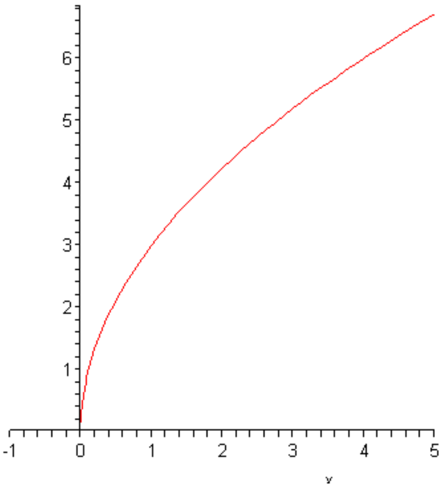
$$= 8\pi a \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 8\pi a r \int_{0}^{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} substituce: \\ \frac{x}{r} = \sin t \\ r \cdot \cos t \cdot dt = dx \end{array} \right| \left\| \left(\begin{array}{l} meze: \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right) \right. =$$

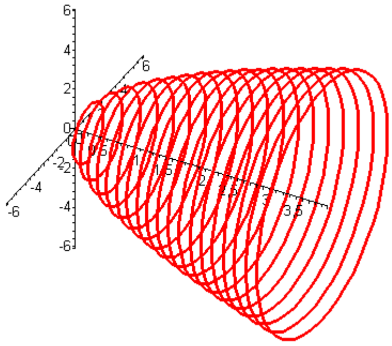
$$= 8\pi a r \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot r \cdot \cos t \cdot dt = 8\pi a r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt = 8\pi a r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= 8\pi a r^2 \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi a r^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right) = \underline{\underline{2\pi^2 a r^2}}$$

Př.8. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky příslušející funkci $y = 3\sqrt{x}$ ***a intervalu*** $\langle 0,4 \rangle$ ***kolem osy*** x.

Řešení:



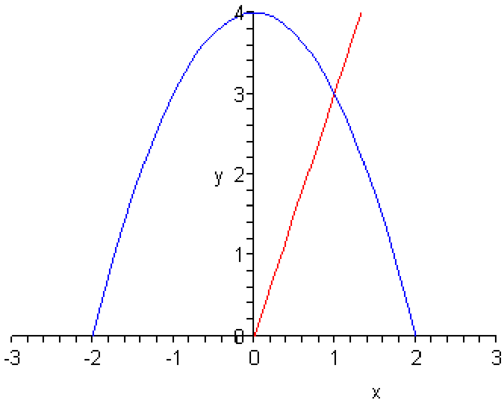


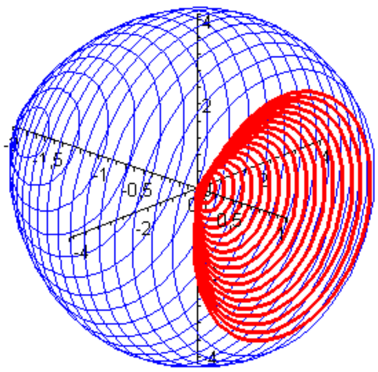
$$V = \pi\int_0^4 \left(3\sqrt{x}\right)^2 dx = 3\pi\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 2\pi\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \underline{\underline{72\pi}}$$

Př.9. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného parabolou $y = 4 - x^2$ ***a přímkou*** $y = 3x$, $x \geq 0$ ***kolem osy*** *x.*

Řešení:

Průsečíky paraboly $y = 4 - x^2$ a přímky $y = 3x$ vypočítáme z rovnice $4 - x^2 = 3x$, ze které dostaneme $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. Podmínce $x \geq 0$ vyhovuje pouze $x_1 = 1$.





$$V = \pi\int_{-2}^{1}\left(4 - x^2\right)^2 dx - \pi\int_{0}^{1}(3x)^2 dx = \pi\int_{-2}^{1}\left(16 - 8x^2 + x^4\right)dx - 9\pi\int_{0}^{1}x^2 dx =$$

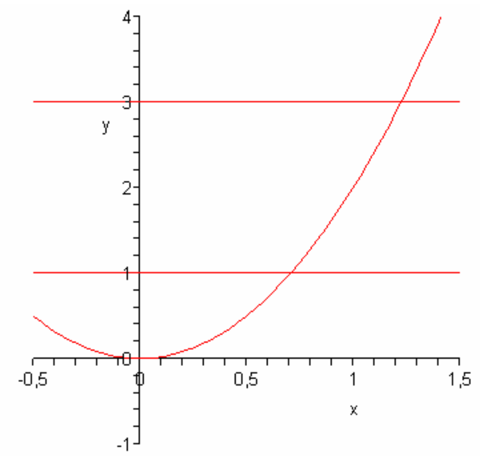
$$= \pi\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} - 9\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{153}{5}\pi - 3\pi = \underline{\underline{\frac{138}{5}\pi}}$$

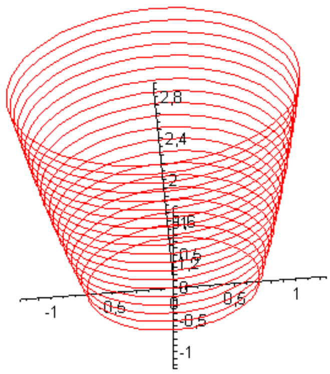
Př.10. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného obloukem paraboly $y = 2x^2$, přímkami $y_1 = 1$ a $y_2 = 3$, kolem osy y.

Řešení:

Buď použijeme přímo vzorec pro objem tělesa vzniklého rotací kolem osy *y* nebo jednoduše „prohodíme" osy, čímž získáme inverzní funkci a můžeme nechat křivku rotovat kolem osy *y*. K příkladům, kde je vhodnější využít vzorce se ještě dostaneme, určíme si tedy inverzní funkci:

Z rovnice $y = 2x^2$ vyjádříme $x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{2}}$, nebo-li $f(y) = \sqrt{\frac{y}{2}}$.





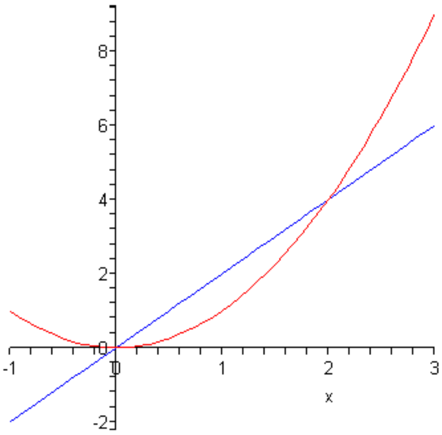
$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2}(f(y))^2 dy$$

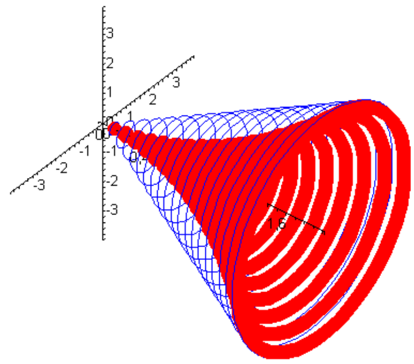
$$V = \pi\int_1^3 \frac{y}{2}dy = \frac{\pi}{2}\int_1^3 y dy = \frac{\pi}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{9-1}{2} = \underline{\underline{2\pi}}$$

Př.11. Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 2x$ kolem osy x.

Řešení:

Průsečíky paraboly $y = x^2$ a přímky $y = 2x$ vypočítáme z rovnice $x^2 = x$ a odtud dostaneme body $[0,0], [2,4]$.





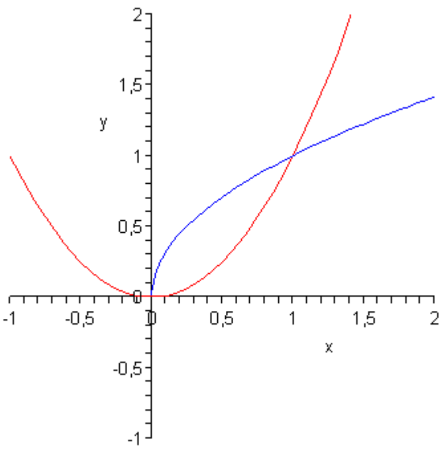
$$V = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 4x^2 - 4x^3 + x^4 dx = \pi\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 =$$

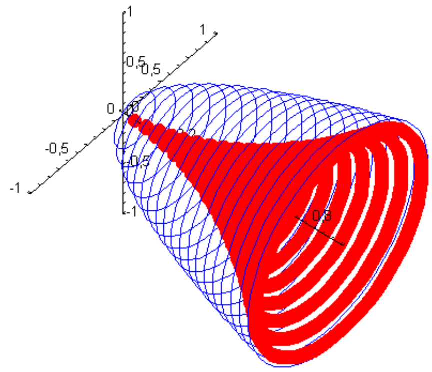
$$\pi\left(\frac{32}{3} - \frac{64}{4} + \frac{32}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{16}{15}\pi}}$$

Př.12. Vypočítejte objem tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2$, $x = y^2$, kolem osy x.

Řešení:

Vypočítáme si průsečík křivek $y = x^2$ a $x = y^2$: $x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$. Tedy hledáme, kdy nastane rovnost $x^2 = \sqrt{x}$ a to platí pro jediné $x = 1$. Průsečík je tedy $[1,1]$.





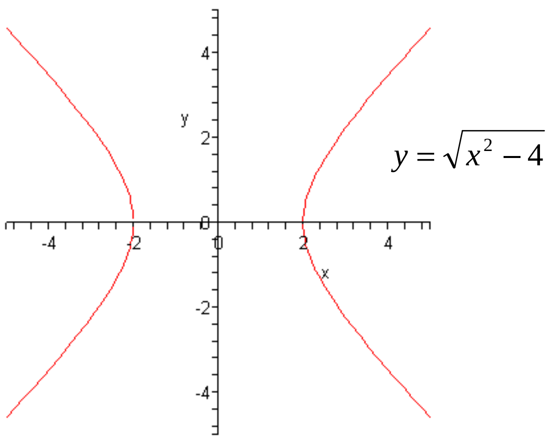
$$V=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2\,dx-\pi\int_0^1(x^2)^2dx=\pi\int_0^1 x\,dx-\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\underline{\underline{\frac{3}{10}\pi}}$$

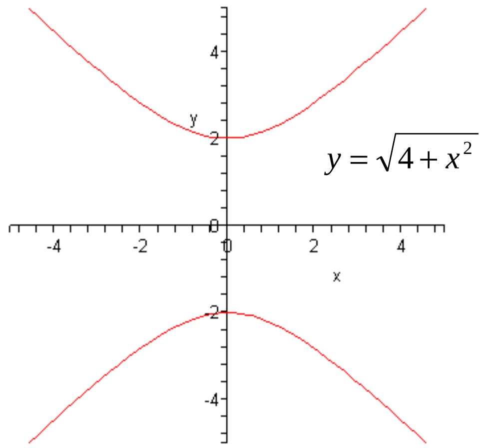
Př.13. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami popsanými rovnicemi $x^2-y^2=4$, $y=2$, $y=-2$, ***kolem osy*** y.

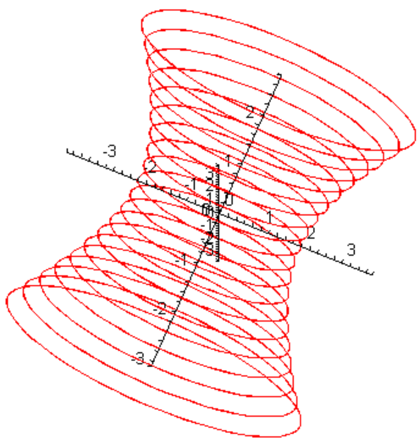
Řešení:

I u tohoto příkladu provedeme výpočet přes inverzní funkci.

Z rovnice $x^2-y^2=4$ vyjádříme x $\Rightarrow$ $x=\sqrt{4+y^2}$ a hledaná inverzní funkce je tedy $y=\sqrt{4+x^2}$.







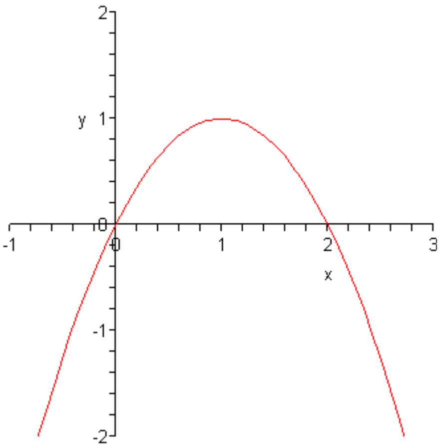
$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_{0}^{2}\left(4+x^2\right)dx = 2\pi\left[4x+\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\left(4\cdot 2+\frac{2^3}{3}\right) = 16\pi\frac{4}{3} =$$

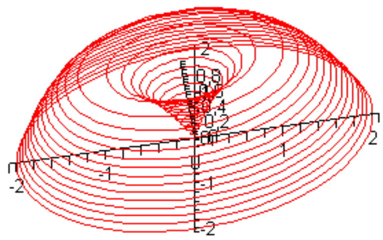
$$= \underline{\underline{\frac{64}{3}\pi}}$$

Př.14. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = 2x - x^2$, $x = 0$, ***kolem osy** y.*

Řešení:

V tomto případě už by se nám z rovnice $y = 2x - x^2$ vyjadřovalo x o něco hůře. Je tedy pravý okamžik použít vzorce pro objem tělesa vzniklého rotací kolem osy *y*.





$$V = 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx = 2\pi\int_0^2 x\left(2x-x^2\right)dx = 2\pi\int_0^2 2x^2 - x^3 dx = 2\pi\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$

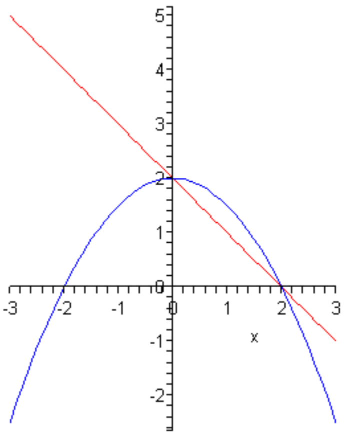
$$2\pi\left(\frac{2^4}{3}-\frac{2^4}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi}}$$

Př.15. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného parabolou $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ ***a přímkou*** $y = 2 - x$ ***kolem přímky*** $y = 2 - x$**.**

Řešení:

Průsečíky paraboly $\underline{y = 2 - \frac{1}{2}x^2}$ a přímky $\underline{y = 2 - x}$ jsou $[0,2]$, $[2,0]$.

Posuneme počátek $[0,0]$ do bodu $[0,2]$ a otočíme souřadné osy o úhel $-\frac{\pi}{4}$. Dostaneme tak souřadnou soustavu $([0,2],u,v)$, kde $u=(x-y+2)\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $v=(x+y-2)\frac{\sqrt{2}}{2}$. V této souřadné soustavě bude parabola $y=2-\frac{1}{2}x^2$ zadaná parametrickými rovnicemi $u(x)=(x-y(x)+2)\frac{\sqrt{2}}{2}$, $v(x)=(x+y(x)-2)\frac{\sqrt{2}}{2}$, kde $y(x)=2-\frac{1}{2}x^2$, $x\in\langle 0,2\rangle$.

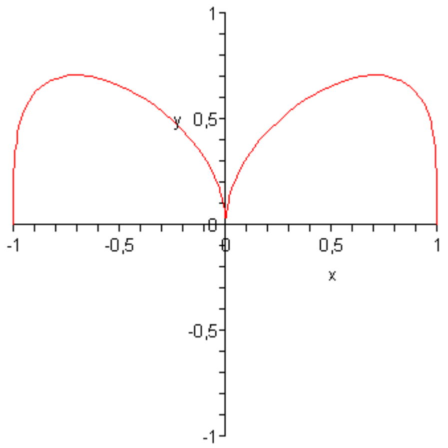


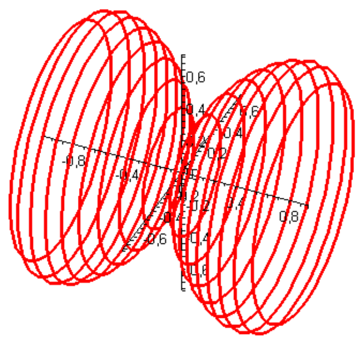
$$V=\pi\int_0^2 v^2(x)|\dot{u}(x)|\,dx=\pi\int_0^2\frac{1}{8}\left(2x-x^2\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)dx=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi\int_0^2\left(4x^2-3x^4+x^5\right)dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right]_0^2=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{15}\pi}}$$

Př.16. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkou $x^4+y^4=a^2x^2$, $a\succ 0$, kolem osy x.

Řešení:

Nejprve si představíme křivku, která bude rotovat. Můžeme tvrdit, že je souměrná jak podle osy *x*, tak podle osy *y*. Prochází počátkem soustavy souřadnic. Osu *x* ještě protíná v bodech $[-a,0],[a,0]$.





V 1. kvadrantu můžeme rovnici křivky psát ve tvaru $y=\left(a^2x^2-x^4\right)^{\frac{1}{4}}, x\in\langle 0,a\rangle$.

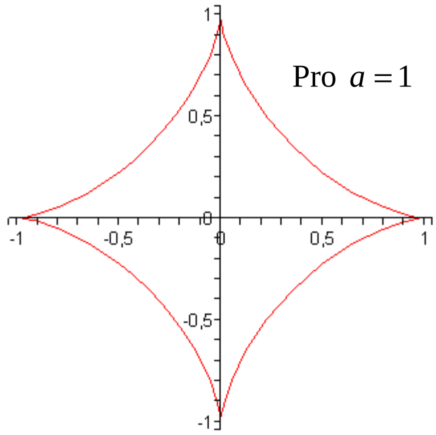
$$V=2\pi\int_0^a f^2(x)dx=2\pi\int_0^a\sqrt{a^2x^2-x^4}\,dx=2\pi\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

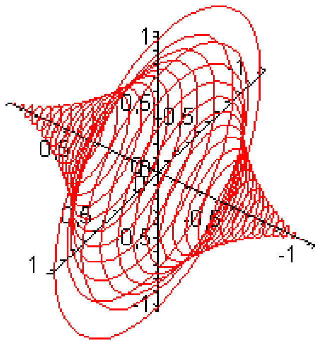
$$=\left|\begin{array}{l} substituce: \\ \sqrt{a^2-x^2}=t, a^2-x^2=t^2 \\ -2x\cdot dx=2t\cdot dt \\ dx=-\dfrac{t}{x}dt \end{array}\right|\left(\begin{array}{l} meze: \\ x=0\Rightarrow t=a \\ x=a\Rightarrow t=0 \end{array}\right)=2\pi\int_a^0 x\cdot t\cdot\left(-\frac{t}{x}\right)dt=$$

$$=-2\pi\int_a^0 t\cdot t\cdot dt=2\pi\int_0^a t^2dt=2\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a=\underline{\underline{\frac{\pi a^3}{3}}}$$

Př.17. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného asteroidou zadanou rovnicí $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $a\succ 0$, kolem osy x.

Řešení:





Nejprve si vyjádříme *y* z rovnice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. Asteroida je souměrná podle počátku a její průsečíky s osami jsou $[-a,0]$, $[a,0]$, $[0,-a]$ a $[0,a]$.

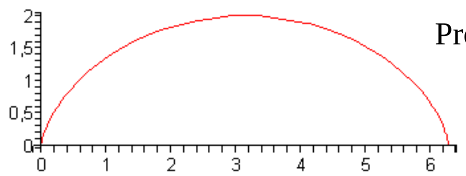
$$V = 2\pi\int_0^a ((a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}})^2 dx = 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = 2\pi\int_0^a (a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2)dx =$$

$$= 2\pi\left[a^2x - \frac{3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi\left(a^3 - \frac{9}{5}a^3 + \frac{9}{7}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = 2\pi\frac{16}{105}a^3 =$$

$$\underline{\underline{\frac{32}{105}\pi a^3}}$$

Př.18. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného funkcí určenou parabolickými rovnicemi $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $t \in R$ ***a intervalem*** $\langle 0, 2\pi r\rangle$***, kolem osy*** *x*.

Řešení:



$$V = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)|\dot{\varphi}(t)|\,dt = \pi\int_0^{2\pi} r^2(1-\cos t)^2 r(1-\cos t)\,dt = \pi r^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt = \pi r^3 \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \underline{\underline{5\pi^2 r^3}}$$

Př.18. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného lemniskátou zadanou rovnicí $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$, $a \succ 0$ ***kolem osy*** x. (viz [10])

Řešení:

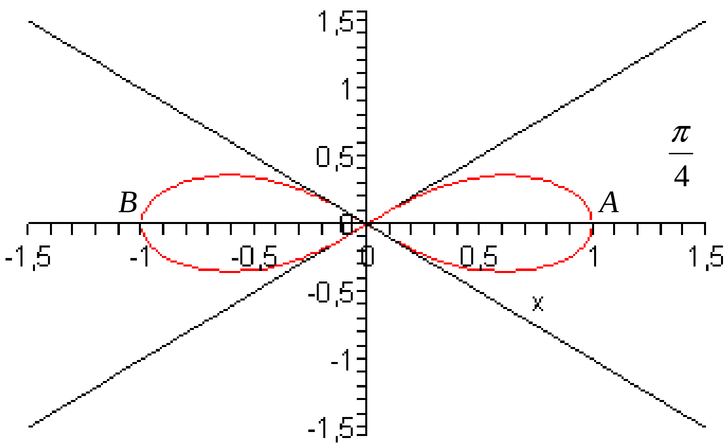
Lemniskáta $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ protíná osu x v bodech $O[0,0]$, $B[-a,0]$, $A = [a,0]$.

Z rovnice lemniskáty vyjádříme y^2:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0,$$

$$y^4 + y^2\left(2x^2 + a^2\right) + x^4 - a^2x^2 = 0,$$

$$y^2 = \frac{-\left(2x^2 + a^2\right) + a\sqrt{\left(8x^2 + a^2\right)}}{2}.$$



$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = 2\pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \left(a\sqrt{\left(8x^2 + a^2\right)} - 2x^2 - a^2\right) dx.$$

K výpočtu integrálu $\int \sqrt{\left(8x^2 + a^2\right)}\, dx$ použijeme Ostrogradského vzorce*.

(* K výpočtu integrálu typu $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$, kde P_n je mnohočlen n-tého stupně a $ax^2+bx+c \succ 0$, se používá tzv. Ostrogradský vzorec:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{(ax^2+bx+c)} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (*)$$

kde Q_{n-1} je mnohočlen $(n-1)$-ního stupně a k je konstanta. Mnohočlen Q_{n-1} určíme ze vztahu

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + k \qquad (**)$$

metodou neurčitých činitelů. Vztah (**) dostaneme ze vztahu (*) derivováním a násobením výrazem $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$.)

A tak platí:

$$\int \sqrt{(8x^2+a^2)}dx = \int \frac{8x^2+a^2}{\sqrt{(8x^2+a^2)}}dx = (Ax+B)\sqrt{(8x^2+a^2)} + k\int \frac{dx}{\sqrt{(8x^2+a^2)}}.$$

Derivujeme-li poslední rovnici a odstraníme-li zlomky, dostaneme

$$8x^2+a^2 = 8Ax^2 + Aa^2 + 8Ax^2 + 8Bx + k,$$

Odkud porovnáním koeficientů vypočteme

$$A = \frac{1}{2},\; B = 0,\; k = \frac{a^2}{2}.$$

Dostaneme tedy

$$\int \frac{8x^2+a^2}{\sqrt{(8x^2+a^2)}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{(8x^2+a^2)} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(8x^2+a^2)}}.$$

Integrál

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(8x^2+a^2)}} = \left| \begin{array}{l} substituce: \\ \sqrt{8}x = az \\ \sqrt{8}dx = adz \end{array} \right| = \frac{a}{\sqrt{8}}\int \frac{dz}{\sqrt{(a^2y^2+a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left[z+\sqrt{(1+z^2)}\right],$$

a tedy

$$\int_0^a \sqrt{\left(8x^2 + a^2\right)}dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{\left(8x^2 + a^2\right)} + \frac{a^2}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x\sqrt{8}}{a} + \sqrt{\frac{\left(8x^2 + a^2\right)}{a^2}}\right)\right]_0^a =$$

$$= \frac{a^3}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(3 + \sqrt{8}\right) + 6\right].$$

Po dosazení a úpravě dostaneme, že hledaný objem

$$V = \frac{\pi a^3}{4}\left[\frac{}{\sqrt{2}}\ln\left(3 + \sqrt{8}\right) + 6\right] - 2\pi\int_0^a x^2 dx - \pi a^2 \int_0^a dx = \underline{\underline{\frac{\pi a^3}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(3 + \sqrt{8}\right) - \frac{2}{3}\right]}}$$

4. CVIČENÍ

4.1 OBSAHY PLOCH

1.) Vypočítejte obsah plochy omezené křivkami:

a) $y = 6x - x^2 - 7$, $y = x - 3$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

b) $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2 - \frac{3}{2}x$ $\left[\frac{125}{12}\right]$

c) $y = x - x^2$, $y = x\sqrt{1-x}$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

d) $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ $\left[\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right]$

e) $y = 2^{x-3} + 1$, $y = 2^{3-x} + 1$, $y = \frac{3}{2}$ $\left[\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right]$

f) $y = \frac{6}{x+5}$, $y = |x|$, pro $x \geq -2$ $\left[6\ln 2 - \frac{5}{2}\right]$

g) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 4 - \frac{3}{2}x$, $y = 4$ $[15]$

h) $y = -x^2 + 4x$, $y = -x^2 + 8x - 12$, $y = 0$, $x = 5$ $\left[\frac{49}{3}\right]$

i) $y = \frac{1}{2}\sin x$, $y = 2\sin x$, pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ $[3]$

j) $y = e^{2x}$, $y = -\frac{x}{2} + 1$, $x = -1$ a osou x $\left[\frac{1}{2}\left(3 - e^{-2}\right)\right]$

k) $y = \sqrt{x+1}$, pro $x \in \langle 0,3 \rangle$ $\left[\frac{15}{2}\pi\right]$

l) $y^2 = 16 - 8x$, $y^2 = 24x + 48$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

m) $y = x^2$, $y = \frac{x^3}{3}$ $\left[\frac{32}{3}\sqrt{6}\right]$

2.) Vnitřek kružnice $x^2 + y^2 = 8$ je rozdělen parabolou $y = \frac{x^2}{3}$ na dvě části. Vypočítejte obsah menší plochy. $\left[2\pi - \frac{4}{3}\right]$

3.) Vypočítejte obsah plochy, která je omezená elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tečnou k této elipse v bodě $\left[\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right]$ a přímkou $y = 0$. $\left[ab\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right]$

4.) Vypočítejte obsah plochy omezené parabolou $y = x^2 - 2x + 3$, tečnou k ní v bodě $[3,6]$ a osami souřadnic. $\left[\frac{9}{2}\right]$

5.) Vypočítejte obsah plochy omezené hyperbolou $x^2 - y^2 = a^2$ a přímkami $y = 0$ a $y = \frac{y_0}{x_0}x$, kde bod $[x_0, y_0]$ leží na dané hyperbole $(x_0 \succ 0, y_0 \succ 0)$. $\left[\frac{a^2}{2}\ln\frac{x_0 + y_0}{a}\right]$

6.) Vypočítejte obsah plochy omezené křivkami $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $x = a$, $y \le 0$. $\left[a^2\left(\pi + \frac{4}{3}\pi^3\right)\right]$

7.) Vypočítejte obsah plochy omezené křivkou $x = \frac{a}{4}(3\cos t + \cos 3t)$, $y = \frac{a}{4}(3\sin t - \sin 3t)$. $\left[\frac{3\pi a^2}{8}\right]$

8.) Vypočítejte obsah plochy omezené křivkou $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$, kde $c^2 = a^2 - b^2$. $\left[\frac{3\pi c^4}{8ab}\right]$

9.) Vypočítejte obsah plochy omezené křivkou $r = 3 + 2\cos\varphi$. $[11\pi]$

4.2 OBJEMY TĚLES

1.) Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného danými křivkami, kolem osy *x*:

a) $y = \sin 2x$ a osou *x*, pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$, pro $x \geq 0$ $[20\pi]$

c) $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 3$ $[8\pi]$

d) $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, $a \succ r \succ 0$ $[2\pi^2 r^2 a]$

e) $y = 2x - x^2$ a osou *x* $\left[\frac{16}{15}\pi\right]$

f) $y = \sqrt{(x+4)^3}$ a osou *y* $[64\pi]$

g) $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$ $\left[\frac{32}{3}\pi\right]$

h) $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = 0$ a $x = 2$ $\left[\frac{5}{6}\pi\right]$

i) $y = 2 - x^2$, $y \succ 0$ $\left[\frac{64}{15}\pi\sqrt{2}\right]$

2.) Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného danými křivkami, kolem osy *y*:

a) $y = e^{x^2}$, $y = 0$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ $[\pi(e-1)]$

b) $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ $\left[\frac{\pi}{4}\left(\pi^2 - 8\right)\right]$

3.) Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = (x-a)(x-b)$, $y = 0$, $0 \leq a \leq b$.

a) kolem osy x $\left[\frac{\pi}{30}(b-a)^5\right]$

b) kolem osy y $\left[\frac{\pi}{6}(b+a)(b-a)^3\right]$

4.) Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$.

a) kolem osy *x* $[4\pi(2+9\ln 3)]$

b) kolem osy *y* $[3\pi(2\ln 3-1)\ln 3]$

5.) Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = \sqrt[3]{x}$ a $y = x^2$ kolem přímky $y = 1$. $\left[\frac{13}{30}\pi\right]$

6.) Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného konchoidou zadanou rovnicí $(x-a)^2(x^2+y^2) = 4a^2x^2$ kolem přímky $x = a$.

$\left[\frac{2\pi a^3}{3}\left(9\sqrt{3}-4\pi\right)\right]$

7.) Dvojvypuklá čočka je omezená souosými rotačními paraboloidy. Průměr čočky je *D* (průměr kružnice, ve které se paraboloidy protínají) a tloušťka čočky na ose je *h*.

Vypočítejte objem čočky. $\left[\frac{\pi h D^2}{8}\right]$

5. ZÁVĚR

Diplomová práce byla pojata jako „studijní pomůcka“ při studiu Riemannova integrálu a orientována na výpočty obsahů některých ploch a objemů některých těles pomocí Riemannova integrálu.

Jedním z cílů práce bylo přiblížit čtenáři pojem Riemannův integrál a motivovat k jeho užití. K tomuto účelu bylo použito četných příkladů s názornou obrazovou dokumentací, která je v matematice důležitá pro lepší pochopení. Čtenář se v prvních kapitolách seznámil s úvodní teorií k Riemannovu integrálu, jeho vlastnostmi a možnostmi výpočtu. U kapitol Obsahy některých ploch a Objemy některých těles, měl čtenář možnost vypočítat si řešené příklady a na závěr procvičit a ověřit získané znalosti a dovednosti na dalších příkladech s uvedenými výsledky.

Chtěla jsem touto diplomovou prací ukázat, že pomocí Riemannova integrálu můžeme spočítat různé druhy rovinných ploch a objemů těles a že jeho používání na řešení takovýchto podobných problémů je vhodné.

Obrázky, které doplňují příklady jsem vytvořila v programu Maple 9.5, obrázky z teorie jsem vytvářela v programu Cabri Geometri II Plus a doplnila v Malování.

6. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] **Aksamit, P. a Mráz, F.**: *Příklady z matematické analýzy pro učitelské studium*, České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2000.

[2] **Dlouhý, Z., Hruša K., Kůst J., Rohlíček, J., Taišl, J. a Zieris, J.**: *Úvod do matematické analýzy*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

[3] **Dula, J. a Hájek, J.**: *Cvičení z matematické analýzy – Riemannův integrál*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

[4] **Dvořáková, Š. a Nátková, E.**: *227 řešených příkladů k matematice II.*, Praha: Vydala Česká zemědělská univerzita v Praze a NAROMA, 2003.

[5] **Gera, M. a Ďurikovič, V.**: *Matematická analýza*, Bratislava: Alfa, 1989.

[6] **Gillman, L. a McDowell, R. H.**: *Matematická analýza*, Praha: SNTL, 1980.

[7] **Ivan, J.**: *Matematika I.*, Praha: Alfa, 1986.

[8] **Janovský, Z. a Průcha, L.**: *Integrální počet I.*, Praha: ČVUT, 1996.

[9] **Jarník, V.**: *Integrální počet I.*, Praha: Academia, 1974.

[10] **Jirásek, F. a Kriegelstein, E.**: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I.*, Praha: SNTL, 1990.

[11] **Kojecká, J. a Závodný, M.**: *Příklady z matematické analýzy II.*, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2003.

[12] **Kovalt, V.**: *Základy matematiky pro biologické obory*, Praha: UK, 2005.

[13] **Mašek, J.**: *Řešené úlohy z matematiky*, Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2002.

[14] **Nagy, J. a Taufer, J.**: *Matematická analýza*, Praha: ČVUT, 1997.

[15] **Nýdl, V. a Klufová, R.**: *Matematika část 2 – Matematická analýza*, České Budějovice: Jihočeská univerzita – Zemědělská fakulta, 1998.

[16] **Pavelka, P. a Pinka, P.**: *Integrální počet funkcí jedné proměnné*, Ostrava: VŠB-TUO, 1999.

7. PŘÍLOHA

Přikládám proceduru, kterou jsem vytvořila v programu Maple 9.5. Pomocí této procedury jsem tvořila prostorové obrázky.

Proceduru jsem nazvala *rotate* s parametry: funkce *f*, hraniční body intervalu *min* a *max* pro osu *x*, *barvou* a *šíří* = tloušťkou čáry která znázorňuje kružnici opisující jednotlivé body funkce *f* po určitém kroku = *step*. V proceduře jsem používala lokální proměnné *i*, *r*, *A*, *step* a *index*, které jsem také nadefinovala a později jsem jim přiřadila hodnotu.

i … určuje *x*-ovou souřadnici kružnice

r … je poloměr kružnice, který získáme z rovnice dané funkce dosazením *x*-ové souřadnice

Step … určuje vzdálenost mezi jednotlivými kružnicemi a vypočítá se podle délky intervalu a daného počtu 20 kružnic

Dále jsem vytvořila pole pomocí příkazu *array A* a nastavila jeho velikost na 20.

Index … má funkci ukazatele na určitou část pole, při každém průběhu cyklu se jeho hodnota zvýší o 1 a uloží se do určité části pole $A[index]$ konkrétní kružnice

Jednotlivé kružnice kreslím pomocí příkazu *spacecurve*, který je uložen v těle cyklu. Kružnici jsem zadala pomocí parametrických rovnic. Společně zobrazím všechny kružnice pomocí příkazu *display*.

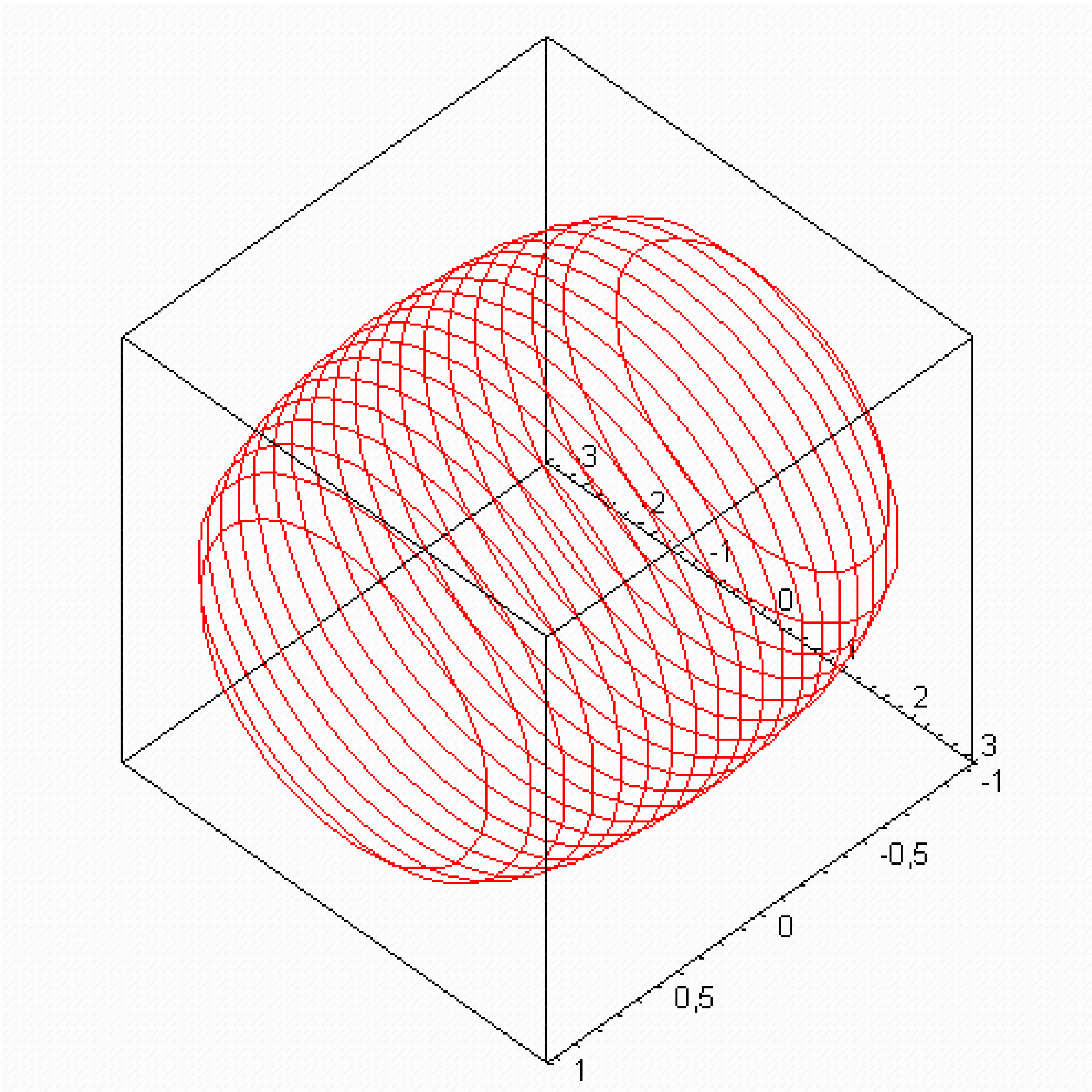
```
> rotate := proc( f, min, max, barva, sire)
local i, r, A, step, index;
step:=(max-min)/20;
A:=array(1..21):
index:=1;
    for i from min by step while i <= max do
          r:=eval(f, x=i):
          A[index]:=spacecurve([i,r*cos(t),r*sin(t)], t=-
Pi..Pi, color=barva, thickness=sire,
axes=boxed):
index:=index+1;
    end do;
```

```
display( A[1], A[2],
A[3],A[4],A[5],A[6],A[7],A[8],A[9],A[10],
A[11], A[12],
A[13],A[14],A[15],A[16],A[17],A[18],A[19],A[20]);
end proc;
```

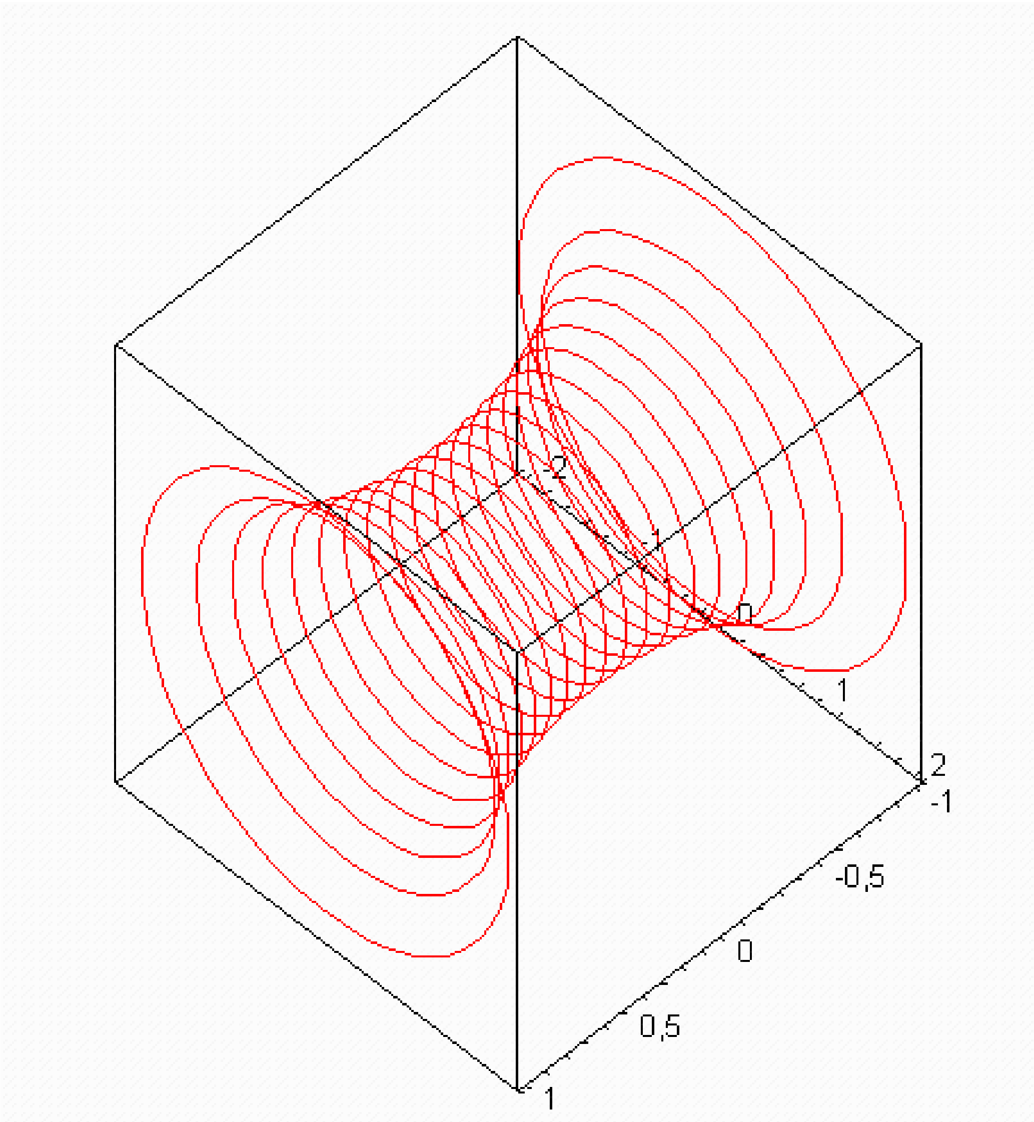
Např. Obrázek Anuloidu

```
> D1:=rotate((2-sqrt(1-x^2)), -1, 1.1, red, 1):
> D2:=rotate((2+sqrt(1-x^2)), -1, 1.1, red, 1):
```

```
> display(D2);
```



```
> display(D1);
```



```
> display(D1, D2);
```