Jihočeská univerzita
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Gamma a beta funkce

Vypracoval: Bc. Matěj Tenkl

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a veškerá použitá literatura a jiné prameny jsou uvedeny v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě – v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 26. 4. 2007

…………………………….

Bc. Matěj Tenkl

Úvodem bych rád poděkoval za odborné rady a vedení RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D. při vypracování celé této práce.

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá problematikou Eulerových gamma a beta funkcí, často využívaných v matematické statistice, matematické analýze, ekonomii a fyzikálních aplikacích.

Je koncipována tak, aby podala ucelený pohled na definice, vlastnosti a užitečné vztahy gamma a beta funkcí. Součástí práce je též nastínění praktického použití těchto funkcí ve statistice (při definování některých rozdělení) a při integrálním počtu v matematické analýze.

Annotation

This thesis put mind to questions of Euler's gamma and beta functions. The main application of these functions is in statistics, mathematical analysis, economy and physics.

The topic is draw up to show compactly the definitions, properties and useful relations of gamma and beta functions. The part of this thesis is the practical application in statistics (to define some main distributions) and integral calculus in analysis.

Obsah

Úvod

Úkolem této diplomové práce je zaměřit se na problematiku Eulerových gamma a beta funkcí. Tyto funkce se často používají v matematické statistice, matematické analýze, ekonomii, ale také ve fyzikálních aplikacích.

Vzhledem k tomu, že informace o dané problematice v dostupné literatuře nejsou ucelené, bylo cílem tyto poznatky sjednotit, utřídit a zpracovat do jednotné formy. Snahou bylo též poukázat na některá praktická využití těchto funkcí.

Diplomová práce je zahájena krátkou zmínkou o historii vzniku gamma a beta funkce a dále pokračuje základními definicemi a vlastnostmi obou funkcí. Jsou zde také uvedeny některé důležité vzorce pro jejich využití, některé též s odvozením. Kapitola je uzavřena pojednáním o propojení mezi gamma a beta funkcí.

Následující část je zaměřena na aplikaci gamma a beta funkcí ve statistice. Přesněji na definování některých základních rozdělení využívající těchto funkcí, jako jsou Chí-kvadrát, Fisher-Snedecorovo, Studentovo, Beta a Gamma rozdělení a nastínění metody Value at Risc (VaR) využívající Studentovo rozdělení.

Následně je proveden výpočet Laplaceova integrálu $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, který lze s výhodou provést převedením na hodnotu gamma funkce. Tento integrál má velký význam především ve statistice a pravděpodobnosti.

Poslední část zahrnuje aplikaci gamma a beta funkce v integrálním počtu a jejich srovnání s konvenčními metodami integrace (substituce, metoda per partes, Eulerova substituce) na konkrétních příkladech.

Definice gamma a beta funkce

Historie vzniku gamma a beta funkce

U zrodu gamma a beta funkce stál významný švýcarský matematik Leonhard Euler (1707-1783). Gamma a beta funkce (tyto jména jim dali matematikové Binet a Gauss) jsou též nazývány Eulerovými integrály (druhého a prvního druhu):

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \text{gamma funkce (} \Gamma \text{ funkce)}$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt \quad \text{beta funkce (} B \text{ funkce)}$$

V roce 1729 použil Euler při nalezení funkce gamma Wallisovu formuli. Tento vztah neméně významného anglického matematika Johna Wallise (1616-1703) říká, že číslo π lze spočítat jako součin řady:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots = \frac{\pi}{2}$$

Euler zapsal gamma funkci jako nekonečný součin a porovnal ho s nekonečným součinem Wallisovy formule, aby nalezl hodnotu $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$.

Tyto poznatky publikoval v knize Institutiones calculi integralis(1768-1770), v které se též zabývá integrály, které lze zapsat pomocí elementárních funkcí.

Gamma a beta funkcí se také ve svých pracích zabýval francouzský matematik Adrien-Marie Legendre, který publikoval jejich základní vlastnosti a tabulky hodnot.

Definice gamma funkce a její základní vlastnosti

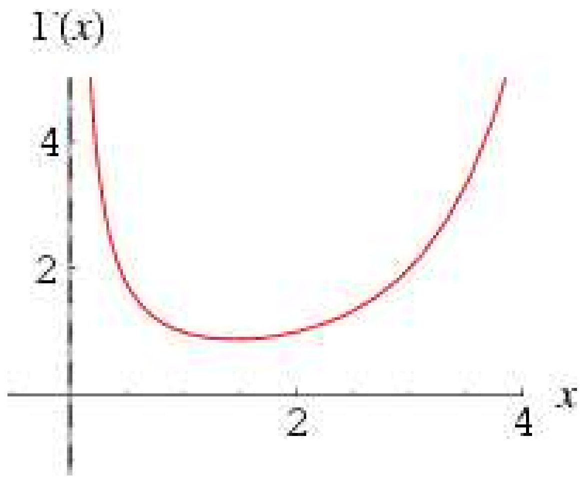
Definice gamma funkce

Gama funkce (někdy také označovaná jako Eulerův integrál druhého druhu) je zobecněním faktoriálu pro obor komplexních čísel. Používá se v mnoha oblastech matematiky, především pro popis některých rozdělení ve statistice.

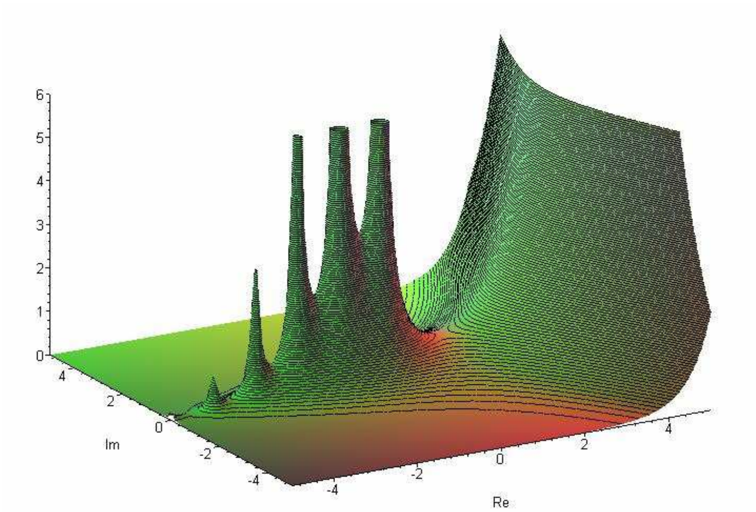
Funkce gamma, kterou budeme značit Γ, je definována podle Adrien-Marie Legendre takto:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt ,$$

přičemž x je komplexní číslo s kladnou reálnou částí.



Obr. 1 Graf gamma funkce.



Obr. 2 Graf absolutní hodnoty gamma funkce (zobrazena reálná a imaginární část).

Ačkoliv integrál samotný konverguje jen je-li reálná část kladná, gamma funkce je definována pro libovolné komplexní (a tedy i reálné) číslo, kromě nuly a celých záporných čísel (−1, −2, …).

Poznámka:

a) Obecně není primitivní funkce k funkci f tvaru $f(x,t) = t^{x-1}e^{t}$ elementární, ale hodnoty funkce Γ jsou vypočteny numerickými metodami a jsou tabelovány, např. ve statistických tabulkách.

b) Funkce Γ je velmi užitečná při výpočtech nevlastních integrálů. Jestliže lze nevlastní integrál funkce jedné proměnné substitucí převést na hodnotu funkce Γ v jistém bodě x_0, nalezneme v tabulkách hodnotu $\Gamma(x_0)$ a daný integrál je určen.

Některé důležité hodnoty

Nyní vypočteme některé základní hodnoty Gamma funkce:

a) Určíme hodnotu $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-t}dt = \lim_{c\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^c = \lim_{c\to\infty}\left(-e^{-c} - \left(-e^{0}\right)\right) =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(-e^{-c} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

b) Určíme hodnotu $\Gamma(2)$:

$$\Gamma(2)=\int_0^{\infty} t^{2-1}e^{-t}dt=\int_0^{\infty} t^{1}e^{-t}dt=\lim_{c\to\infty}\int_0^{c} te^{-t}dt=\left|\begin{matrix} f'=e^{-t}, & f=-e^{-t} \\ g=t, & g'=1 \end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{c\to\infty}\left(\left[-te^{-t}\right]_0^c+\int_0^c e^{-t}dt\right)=\lim_{c\to\infty}\left[-te^{-t}-e^{-t}\right]_0^c=0+1=1$$

Poznámka:

a) Tabulka hodnot funkce Γ se zpravidla uvádí pro interval $\langle 1,2\rangle$ (viz níže uvedená tabulka). Hodnoty funkce Γ ve zbývajících intervalech se určují pomocí rovnosti 2. uvedené v užitečných vztazích. Určujeme-li např. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ užitím tabulky, protože $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, dostáváme $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=2\cdot 0{,}88623=1{,}77246$.

b) Jak si lze povšimnout v předchozích příkladech a) a b) $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, proto má funkce Γ v intervalu $(1,2)$ minimum vzhledem k celému svému definičnímu oboru. Jak je zmíněno ve vlastnostech funkce Γ, minimum nastává v bodě $x_0\approx 1{,}4616$.

x	Γ(x)	x	Γ(x)	x	Γ(x)	x	Γ(x)	x	Γ(x)
1,00	1,00000	1,2	0,91817	1,40	0,88726	1,60	0,89352	1,80	0,93138
1,01	0,99433	1,21	0,91558	1,41	0,88676	1,61	0,89468	1,81	0,93408
1,02	0,98884	1,22	0,91311	1,42	0,88636	1,62	0,89592	1,82	0,93685
1,03	0,98355	1,23	0,91075	1,43	0,88604	1,63	0,89724	1,83	0,93969
1,04	0,97844	1,24	0,90852	1,44	0,88581	1,64	0,89864	1,84	0,94261
1,05	0,97350	1,25	0,90640	1,45	0,88566	1,65	0,90012	1,85	0,94561
1,06	0,96874	1,26	0,90440	1,46	0,88560	1,66	0,90167	1,86	0,94869
1,07	0,96415	1,27	0,90250	1,47	0,88563	1,67	0,90330	1,87	0,95184
1,08	0,95973	1,28	0,90072	1,48	0,88575	1,68	0,90500	1,88	0,95507
1,09	0,95546	1,29	0,89904	1,49	0,88595	1,69	0,90678	1,89	0,95838
1,1	0,95135	1,3	0,89747	1,5	0,88623	1,7	0,90864	1,9	0,96177
1,11	0,94740	1,31	0,89600	1,51	0,88659	1,71	0,91057	1,91	0,96523
1,12	0,94359	1,32	0,89464	1,52	0,88704	1,72	0,91258	1,92	0,96877
1,13	0,93993	1,33	0,89338	1,53	0,88757	1,73	0,91467	1,93	0,97240
1,14	0,93642	1,34	0,89222	1,54	0,88818	1,74	0,91683	1,94	0,97610
1,15	0,93304	1,35	0,89115	1,55	0,88887	1,75	0,91906	1,95	0,97988
1,16	0,92980	1,36	0,89018	1,56	0,88964	1,76	0,92137	1,96	0,98374
1,17	0,92670	1,37	0,88931	1,57	0,89049	1,77	0,92376	1,97	0,98768
1,18	0,92373	1,38	0,88854	1,58	0,89142	1,78	0,92623	1,98	0,99171
1,19	0,92089	1,39	0,88785	1,59	0,89243	1,79	0,92877	1,99	0,99581
1,20	0,91817	1,4	0,88726	1,60	0,89352	1,80	0,93138	2,0	1,00000

Tabulka některých hodnot gamma funkce.

Vlastnosti gamma funkce

1. $D(\Gamma) = (0,\infty)$.
2. Funkce Γ je spojitá pro $x > 0$, má v tomto intervalu derivaci všech řádů.
3. Funkce Γ diverguje pro $x \leq 0$.
4. Pro n-tou derivaci platí vztah $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^t \ln^n t dt$.
5. V oblasti kladných reálných čísel má funkce Γ minimum v bodě $x_0 \approx 1{,}4616$, přičemž $\Gamma(x_0) \approx 0{,}885602$, z čehož vyplývá, že funkce Γ je v celém svém definičním oboru zdola omezená.
6. Platí, že $\Gamma' < 0$ v $(0, x_0)$ a $\Gamma' > 0$ v (x_0, ∞), tudíž funkce Γ je klesající v intervalu $(0, x_0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle x_0, \infty)$ (viz. Obr. 1).

7. Zcela jistě $\Gamma'' > 0$ v intervalu $(0,\infty)$, proto je funkce Γ konvexní v celém svém definičním oboru.

Užitečné vztahy

1. $\forall n \in N$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

2. $\forall x \in (0,\infty), \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. $\forall x \in (0,1), \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$

4. $\forall x \in (0,\infty), \Gamma(x)\Gamma(x+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

K nalezení hodnot gamma funkce v dalších bodech je zajímavá identita 2., kterou si následně odvodíme pomocí integrace per partes:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \left| \begin{matrix} u=t^x, & u'=xt^{x-1} \\ v'=e^{-t}, & v=-e^{-t} \end{matrix} \right| = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -xt^{x-1}e^{-t}\,dt =$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^x}{e^t}\right) + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = 0 + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$$

Limita v tomto odvození se počítá několikanásobným použitím l'Hospitalova pravidla.

Vidíme tedy, že pro kladné x dostáváme:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Pokud tuto rovnost aplikujeme na přirozené číslo n, dostáváme rovnost viz. 1.:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = ... = (n-1)(n-2).....2\cdot 1\cdot \Gamma(1) =$$

$$= (n-1)!$$

Vidíme tedy, že gamma funkce je zobecněním faktoriálu.

Oproti definici gamma funkce (podle Legendre), která byla výše popsána, existují i jiné alternativní definice. Příkladem může být Eulerova definice:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)...(x+n)},$$

nebo také definice významného německého matematika Weierstrasse:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}},$$

kde γ je Euler-Mascheroniova konstanta.

Poznámka:

Euler-Mascheroniova konstanta je používána zejména v teorii čísel. Je definována jako limita rozdílu mezi harmonickou řadou a přirozeným logaritmem:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log(n)\right)$$

Lze přímo ukázat, že Eulerova definice Gamma funkce vyhovuje vztahu $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+1+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(x\frac{n!n^{x}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\frac{n}{(x+1+n)}\right) =$$

$$= x\Gamma(x)\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(x+1+n)} = x\Gamma(x)$$

Definice beta funkce a její základní vlastnosti

Definice beta funkce

Beta funkce (také označovaná jako Eulerův integrál prvního druhu), má velký význam v technických aplikacích a ve statistice, ale také v souvislosti s funkcí gamma.

Funkce beta, kterou budeme značit B, je definována takto:

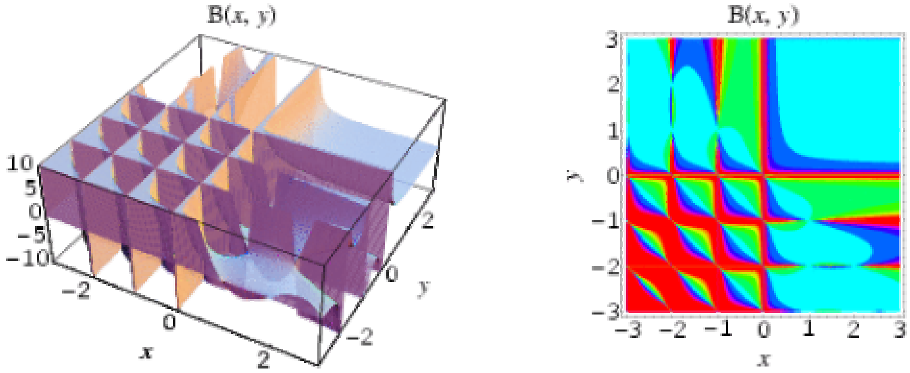
$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,,$$

přičemž x, y jsou komplexní čísla s kladnou reálnou částí.

Oproti této klasické definici (nejvíce užívané), existují i alternativní definice:

1. $B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta\,,\ x > 0\,,\ y > 0$

2. $B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt\,,\ x > 0\,,\ y > 0$



Obr. 3 Graf beta funkce.

Poznámka:

Funkce B úzce souvisí s funkcí Γ a používá se hlavně při výpočtu některých nevlastních integrálů, u nichž nelze elementárně určit primitivní funkci.

Následně budou uvedeny některé vlastnosti funkce B a ukázána souvislost s funkcí Γ.

Vlastnosti beta funkce

1. $D(B)=(0,\infty)\times(0,\infty)$, funkce B je spojitá v celém svém definičním oboru a má v této množině parciální derivace všech řádů.

2. $\forall x\in(0,\infty),\forall y\in(0,\infty)\ \ (B(x,y)>0)$

3. $\forall x\in(0,\infty),\forall y\in(0,\infty)\ \ (B(x,y)=B(y,x))$

4. $\forall x\in(0,\infty),\forall y\in(0,\infty)\ \ \left(B(x,y)=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt\right)$

5. $\forall x \in (0,\infty), \forall y \in (0,\infty) \left(B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x)+(y)} \right)$

6. $\forall x \in (0,\infty), \forall y \in (0,\infty) \left(B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y) \right)$

7. $\forall x \in (0,\infty), \forall y \in (0,\infty) \left(B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} B(x,y) \right)$

Poznámka:

a) Někdy je vhodné použít vztah:

$$\forall x \in (0,1) \left(B(x,1-x) = B(1-x,x) = \Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi\cdot x)} \right)$$

b) Je dobré si uvědomit, že

$$\forall x \in (0,1) \left(B(x,1) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{x\cdot\Gamma(x)} = \frac{1}{x} \right)$$

Pomocí substituce $u = 1-t$ lehce nahlédneme, že platí bod 2., tj. $B(x,y) = B(y,x)$:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_1^0 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = B(y,x)$$

Poznámka:

Tak, jako gamma funkce pro celá čísla popisuje faktoriál, lze pomocí beta funkce definovat kombinační číslo:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1, k+1)}$$

Vztah mezi gamma a beta funkcí

Můžeme si povšimnout, v bodě 5. vlastností beta funkce, že beta funkci lze definovat pomocí funkce gamma. Abychom našli jejich vzájemný vztah, je třeba provést poměrně komplikovaný výpočet zahrnující transformaci proměnných (z kartézských na polární) ve dvojném integrálu. Nyní si ukážeme odvození tohoto vztahu:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du \int_0^\infty v^{y-1}e^{-v}dv = \int_0^\infty\int_0^\infty u^{x-1}v^{y-1}e^{-u-v}\,du\,dv$$

Nyní zavedeme substituci $u = r\cos^2\varphi$, $v = r\sin^2\varphi$. Přičemž jakobián:

$$J = \det\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & -2r\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & 2r\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = 2r\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r}r^{x+y-1}\cos^{2x-1}(\varphi)\sin^{2y-1}(\varphi)dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-r}r^{x+y-1}\,dr \int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}(\varphi)\sin^{2y-1}(\varphi)d\varphi =$$

$$= \Gamma(x+1) 2 \int_0^{\pi/2} cos^{2x-1}(\varphi) sin^{2y-1}(\varphi) d\varphi$$

Substitucí $t = cos^2 \varphi$, $dt = 2 sin \varphi cos \varphi d\varphi$ převedeme poslední integrál na beta funkci,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+1) 2 \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \Gamma(x+1) B(x,y),$$

z čehož vyplývá vztah:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x) + (y)}$$

Stirlingův vzorec

Gamma i beta funkce lze vyjádřit mnoha způsoby, např. jako součet nekonečné řady, součin nekonečné posloupnosti, limity posloupností atd. Všechna tato přesná vyjádření jsou nekonečné procesy, které se až na výjimky nedají přesně v jednotlivých bodech spočítat.

Proto je někdy výhodnější nahradit uvedené charakterizace jednodušším vzorcem, který aproximuje danou funkci. Následující postup lze dobře sledovat (až na poslední krok):

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \int_0^\infty e^{xl\, log\, t - t} dt = ,$$

nyní použijeme substituci $u = t - x$

$$= \left(\frac{x}{e} \right)^x \int_{-x}^{\infty} e^{x \log(1+u/x) - u/x} du =$$

nyní použijeme substituci $v = u / \sqrt{x}$

$$= \sqrt{x} \left(\frac{x}{e} \right)^x \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{x \log\left(1+v/\sqrt{x}\right) - v/\sqrt{x}} dv \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x,$$

kde v posledním kroku byla použita rovnost:

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{x \log\left(1+v/\sqrt{x}\right) - v/\sqrt{x}} dv = \sqrt{2\pi}.$$

Vztah $f(x) \approx g(x)$ tedy znamená, že $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Tím se dostává aproximační Stirlingův vzorec:

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x.$$

A jeho verze pro faktoriál:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Definice základních rozdělení

Jak již bylo řečeno, jedním ze základních použití námi sledovaných gamma a beta funkcí je definování některých statistických rozdělení. Některé důležité typy rozdělení budou uvedeny v této kapitole.

Chí-kvadrát rozdělení

Důležitým spojitým rozdělením, které má široké uplatnění, je chí-kvadrát rozdělení. Toto rozdělení je odvozeno ze součtu nezávislých náhodných veličin s normovaným normálním rozdělením.

Pokud $X_1, X_2, ..., X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, z nichž každá má rozdělení $N(0,1)$, pak náhodná veličina

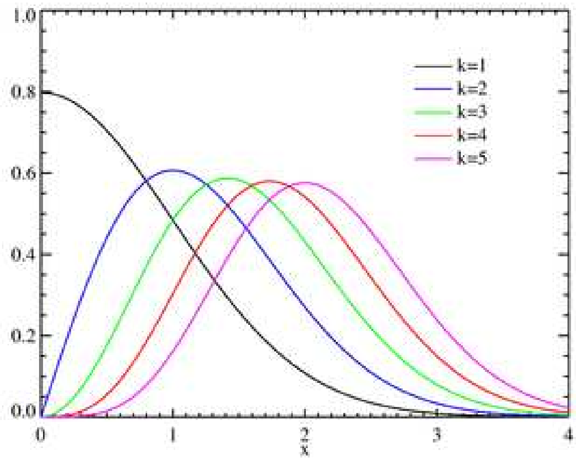
$$Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

má rozdělení χ^2 (chí-kvadrát) o k stupních volnosti s hustotou tvaru

$$f_k(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \; x > 0 \text{ a}$$

$$f_k(x) = 0, \; x \leq 0$$

Jediným parametrem tohoto rozdělení je počet stupňů volnosti k a je zřejmé, že toto rozdělení je definováno pouze pro $x > 0$.



Obr. 4 Graf hustoty Chí-kvadrát rozdělení (parametr k).

Charakteristiky rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny s χ^2 rozdělením s k stupni volnosti je

$$E(Y) = k$$

Rozptyl náhodné veličiny s k stupni volnosti je

$$VarX = k$$

Pro zvyšující se počet stupňů volnosti se hustota tohoto rozdělení stále více blíží tvaru hustoty normálního rozdělení.

Pro nezávislé náhodné veličiny s χ^2 rozdělením se dá dokázat, že jejich součet má opět χ^2 rozdělení a počet stupňů volnosti je roven součtu stupňů volnosti jednotlivých veličin v součtu.

Využití

Jak již bylo uvedeno, χ^2 rozdělení má široké uplatnění především při statistických aplikacích. Uvedeme alespoň některé vlastnosti a možnosti použití.

1. Pokud náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$ mají normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a jsou navzájem nezávislé, pak výběrový rozptyl

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

vynásobený $(n-1)$ a vydělený σ^2 má rozdělení $\chi^2(n-1)$.

Tuto skutečnost můžeme stručně zapsat takto

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

2. χ^2 rozdělení se používá pro ověření nezávislosti náhodných veličin.

3. Dále se používá k ověření (na základě dat), zda dva či více výběrů jsou homogenní vzhledem k jisté veličině. Např. se posuzuje, zda politické názory obyvatel jsou různé v různých regionech apod.

4. Pokud testujeme, zda náhodné veličiny pocházejí z určitého rozdělení, můžeme s úspěchem použít chí-kvadrát rozdělení. Tento test je znám pod názvem "test dobré shody".

Fisher-Snedecorovo rozdělení

Fisher-Snedecorovo rozdělení (F rozdělení) je odvozeno z podílu dvou nezávislých náhodných veličin (s chí-kvadrát rozdělením) dělených stupni volnosti.

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X \sim \chi^2(m)$ a $Y \sim \chi^2(n)$. Potom náhodná veličina

$$Z = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$$

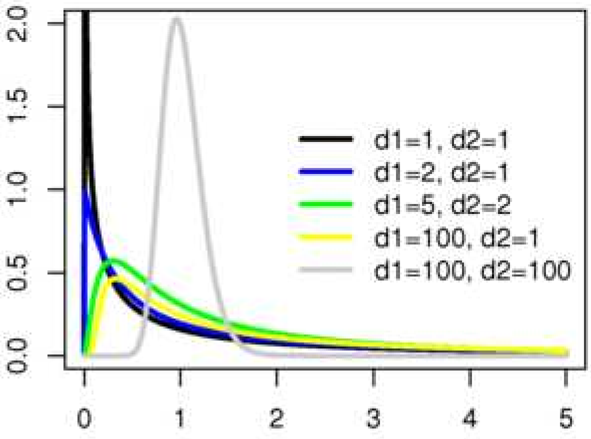
má Fisher-Snedecorovo rozdělení $F(m,n)$ o m a n stupních volnosti.

Tento fakt budeme zapisovat $Z \sim F(m,n)$. Z definice náhodné veličiny Z je zřejmé, že hustota je nenulová pouze pro $x > 0$.

Hustota rozdělení $F(m,n)$ má tvar:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \ x > 0$$

$$f(x) = 0, \ x \le 0$$



Obr. 5 Graf hustoty Fisher-Snedecorova rozdělení (parametry $d1$, $d2$).

Charakteristiky rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny s $F(m,n)$ rozdělením s s m a n stupni volnosti je

$$E(Z) = \frac{n}{n-2} \text{ pro } n > 2$$

Rozptyl náhodné veličiny s $F(m,n)$ s m a n stupni volnosti je

$$Var\,Z = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \text{ pro } n > 4$$

Využití

Toto rozdělení má opět široké uplatnění, především při hodnocení výsledků statistických analýz. Používá se především:

1. K testu o shodnosti rozptylů dvou náhodných výběrů.
2. K testům o shodě středních hodnot pro více náhodných výběrů.
3. K testům v regresní analýze.

Studentovo rozdělení (*t*-rozdělení)

Důležité spojité rozdělení, se kterým se můžeme ve statistice setkat, se nazývá studentovo rozdělení, častěji však označované jako *t*-rozdělení. Toto rozdělení vzniklo z potřeby anglického chemika Williama Sealyho Gosseta, který začátkem minulého století pracoval v pivovaře Guiness.

Při své práci potřeboval často vyvozovat na základě velmi malých vzorků použitelné závěry, což zapříčinilo vznik výše uvedeného rozdělení. Teorie *t*-rozdělení vešla ve známost díky práci R. A. Fishera, který ho nazval Studentovým (podle Gossetova literárního pseudonymu).

Odvození Studentova rozdělení

Lze ukázat, že Studentovo rozdělení lze odvodit jako podíl dvou nezávislých náhodných veličin, z nichž jedna má normované normální rozdělení a druhá chí-kvadrát rozdělení.

Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny X a Z. Náhodná veličina X má rozdělení $N(0,1)$ a náhodná veličina Z má rozdělení χ^2 s k stupni volnosti, pak veličina

$$T_k = \frac{X}{\sqrt{Z}} \cdot \sqrt{k}$$

má Studentovo rozdělení s hustotou tvaru

$$f_k(x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{k}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad x \in R$$

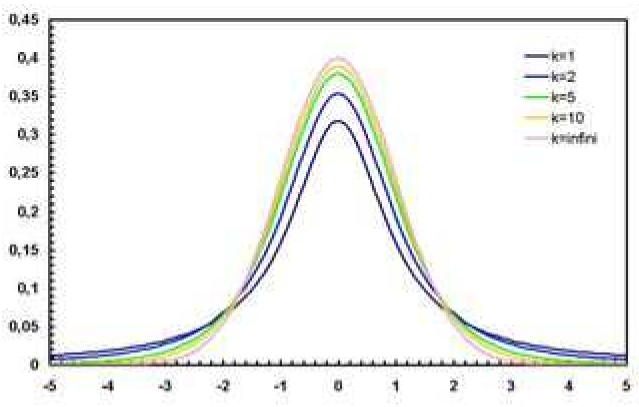
nebo také vyjádřeno pomocí gamma funkce:

$$f_k(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi k}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad x \in R$$

s k stupni volnosti.

Poznámka:

Důležité je, že toto rozdělení je jednovrcholové a symetrické a tvar hustoty je velmi podobný hustotě normálního rozdělení a je definováno pro $t \in (-\infty, +\infty)$. Liší se od něj v podstatě jen tím, že Studentovo rozdělení na rozdíl od normálního má „těžší“ konce (přibližují se výrazněji k ose x).



Obr. 6 Graf hustoty Studentova rozdělení (parametr k).

Charakteristiky rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny s *t*-rozdělením s k stupni volnosti je

$$E(T_k) = 0 \text{ pro } k > 0\,.$$

Rozptyl náhodné veličiny s *t*-rozdělením s k stupni volnosti je

$$Var\, T_k = \frac{k}{k-2} \text{ pro } k > 2\,.$$

Využití

Studentovo rozdělení má široké uplatnění. Uvedeme alespoň některé možnosti použití:

1. Užívá se k testování hypotéz o střední hodnotě náhodného výběru, pokud je rozptyl neznámý. Mělo by platit, že tento náhodný výběr pochází z normálního rozdělení.
2. Užívá se k testování hypotéz o shodě středních hodnot dvou náhodných výběrů se stejnými předpoklady jako v 1. - navíc musí být tyto výběry nezávislé. Jako příklad můžeme uvést test pro porovnání výnosnosti dvou různých druhů pšenice, porovnání účinnosti dvou diet apod.
3. *t*-rozdělení je vhodným prostředkem pro analýzu výsledků regresní analýzy.

Beta rozdělení

Beta rozdělení souvisí s výše definovanou beta funkcí $B(x,y)$.

Hustota beta rozdělení s parametry $m > 0$, $n > 0$ je určena vzorcem

$$f(x;m,n) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \frac{1}{B(m,n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1}.$$

Beta rozdělení je definováno pro $x \in \langle 0,1 \rangle$.

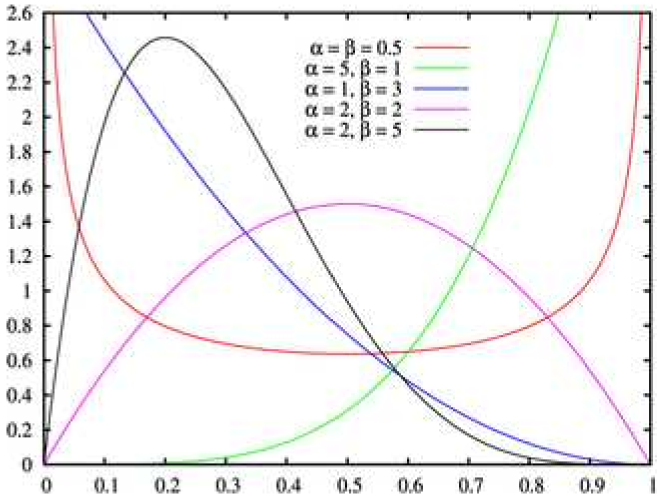
Charakteristiky rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny s beta rozdělením s parametry m a n je dáno vztahem:

$$E(X) = \frac{m}{m+n}.$$

Rozptyl náhodné veličiny s beta rozdělením je:

$$Var\ X = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}.$$



Obr. 7 Graf hustoty Beta rozdělení (parametry α, β).

Využití

1. Beta rozdělení se používá v takzvané Bayesovské statistice.

2. Dále bývá používáno v modelech událostí, které jsou omezeny v intervalu maximální a minimální hodnoty.

3. Kvůli vlastnosti popsané v předchozím bodě se beta rozdělení také používá v PERT, CPM (viz. Cipra T.: Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví, Ekopress, Praha 2002) a dalších metodách projektového managementu.

Gamma rozdělení

Poslední rozdělení, které budeme definovat je gamma rozdělení. Toto rozdělení definuje součet k náhodných veličin s exponenciálním rozdělením, z nichž každá má průměr θ.

Hustota gamma rozdělení je definována takto:

$$f\left(x;k,\theta\right)=x^{k-1}\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^{k}\Gamma(k)}.$$

Gamma rozdělení je definováno pro $x\in\left\langle 0,\infty\right)$.

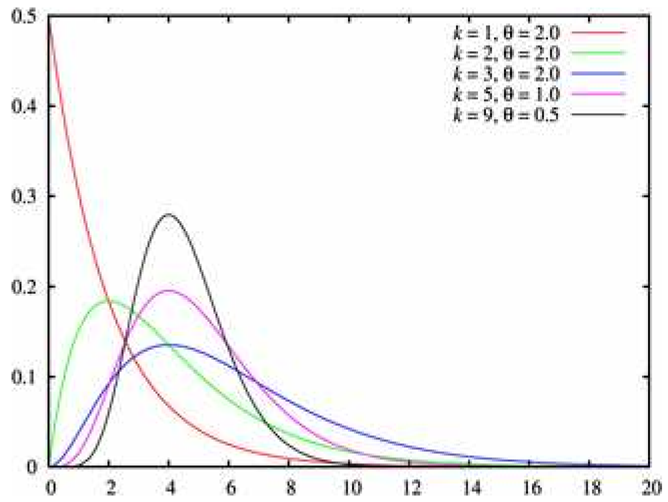
Charakteristiky rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny s gamma rozdělením s parametry k a θ je dáno vztahem:

$$E\left(X\right)=k\theta.$$

Rozptyl náhodné veličiny s gamma rozdělením je:

$$Var\ X = k\theta^{2}.$$



Obr. 8 Graf hustoty Gamma rozdělení (parametry k, θ).

Využití

Využití Gamma rozdělení bývá rozděleno všeobecně do dvou hlavních bodů:

1. Aplikace založené na intervalu mezi událostmi, které jsou odvozeny ze součtu jedné nebo více veličin s exponencionálním rozdělením. V této podobě se používá na sekvenční modely. Např. toku výrobků během výroby a distribučních procesech. Dále také při výzkumu zatížení webových serverů.

2. Vzhledem k vlastnostem tohoto rozdělení bývá využíváno v mnohých vědních oborech. Např. v meteorologii pro předpověď dešťových srážek. Dále ve finančních službách pro modelování pojišťovacích požadavků a výšek půjček.

Metoda VaR

Základní popis a historie metody VaR

V současné době jde o jednu z nejpoužívanějších metod pro měření tržního rizika portfolia. Její hodnota vyjadřuje velikost potenciální možné ztráty portfolia při stanovené pravděpodobnosti a za stanovený časový interval. Nejčastěji se VaR měří při pravděpodobnosti 95 % a časovém horizontu jeden den. Interpretace hodnoty VaR, např. jeden milión při zmíněných parametrech znamená, že ztráta příslušného portfolia následující den s 95 % pravděpodobností nepřesáhne jeden milión.

Pro výpočet hodnoty VaR lze použít několik způsobů, které budou dále popsány podrobněji. Mezi nejpopulárnější patří historická simulace, dále variačně-kovariační metoda, nebo simulace Monte Carlo.

Ještě než přejdeme k detailnějšímu popisu metody VaR, rád bych zmínil pár bodů z historie. První pokusy zavést míru rizika, která by v absolutní hodnotě vyjadřovala potenciální ztráty hodnoty portfolia se připisují roku 1888 Francisovi Edgeworthovi. Ovšem moderní éra měření rizik pozicí držených v zahraničních měnách započala roku 1973. V tomto roce zanikl Breton-Woodský systém, který se zakládal na vzájemně relativně pevných paritách měn členských zemí, které pak byly ukotveny na vedoucí měnu - americký dolar (mezinárodní měnové a finanční konference, konané 1. – 22.7.1944 za účasti 44 států v americkém lázeňském městě Bretton Woods).

Zánik Bretton-Woodského systému a rychlý přechod na systém více a nebo méně volně plavajících kurzech mezi různými zeměmi s podstatným podílem na světovém obchodu poskytl podnět k měření a managementu kurzových rizik. Jako koncepční základ byl použit Blafl-Scholesův matematický model ověřování aktiv, založený na předpokladu, že cena aktiva se vyvíjí jako stochastický proces, jinými slovy, cena aktiva v čase 1 je nezávislá na ceně v čase 0, vyvíjí se náhodně.

Prudký nárůst obchodování s cizími měnami a cennými papíry v souvislosti se vzrůstající tendencí zahraničního obchodu vedl k poptávce po kvantitativních mírách trhového rizika jako je Value at risk.

Metoda VaR

Jak již bylo řečeno v úvodu, výsledkem metody VaR může být např. výpočetně podložené tvrzení, že denní hodnota v riziku činí 10 mil. Kč se spolehlivostí 95 %. To znamená, že případná denní ztráta vyšší než 10 mil. Kč hrozí s pravděpodobností pouze 5 %. Za neměnných podmínek lze ztrátu vyšší než 10 mil Kč očekávat nejvýše v jednom z dvaceti příštích obchodních dní. Výsledky tohoto typu mohou být použity různým způsobem:

1. Pro stanovení kapitálových požadavků jako nejdůležitější aplikaci metody VaR.

2. Pro alokaci investičních prostředků (např. pro stanovení horních hranic omezujících investiční aktivity jednotlivých obchodníků banky dle jejich předchozích výsledků formulovaných právě pomocí metody VaR).

3. Pro ohodnocení jednotlivých obchodníků zohledňující také hledisko rizikovosti jejich investičních aktivit.

4. Pro názornější a operativnější informovanost jak vrcholného managementu, tak akcionářů o rizikovosti prováděných investičních aktivit.
5. Pro řízení finančních rizik (risk management) nejen v bankách, ale i jiných finančních institucích (případně i v nefinančních institucích, jako jsou pojišťovny, penzijní fondy apod.).
6. Pro integraci různých typů rizik do jedné hodnoty umožňující mimo jiné vzájemně porovnat různé systémy.

Specifikace metody VaR

Metoda VaR je specifikována dvěma základními faktory, které musí být předem nastaveny. Jsou to *časový horizont* a *spolehlivost*.

Časový horizont (holding period) specifikuje, přes jaké období se možná ztráta uvažuje (mluví se pak např. o denní hodnotě v riziku, o metodě VaR přes deset dní apod.). Volbu časového horizontu v konkrétní situaci ovlivňuje řada okolností:

1. *Likvidita trhu* - znamená schopnost rychle prodat nebo koupit určité komodity bez nebezpečí významné změny ceny. Likvidní trh se vyznačuje dostatečným množstvím kupujících a prodávajících. Dobrou charakteristikou likvidního trhu je schopnost uskutečnit další opakovaný obchod za stejnou cenu jako ten předchozí. Jestliže je obchodní portfolio banky tvořeno z větší části vysoce likvidními měnami je na místě použít denní VaR. Jestliže správce portfolia složeného z méně likvidních cenných papírů provádí výkaznictví čtvrtletně, pak je vhodný devadesátidenní VaR.

2. *Neměnnost portfolia* – často se předpokládá při výpočtu hodnoty v riziku. Vzhledem k tomu, že jsou během delších časových úseků změny ve složení portfolia reálné, je vhodnější používat pro výpočet VaR kratší časové horizonty.

3. *df Ověřitelnost výsledků* – postupy ověřování vyžadují větší objem skutečně pozorovaných hodnot (zisků a ztrát v portfoliu), tudíž i toto hledisko hovoří ve prospěch volby kratších časových horizontů při výpočtu VaR.

Spolehlivost (confidence level) specifikuje, s jakou pravděpodobností nepřevýší skutečná ztráta hodnotu v riziku (během příslušného časového horizontu). I zde záleží na okolnostech, např. pro snazší ověřitelnost výsledků je vhodnější nižší spolehlivost, neboť pak by reálně mělo dojít k vyššímu počtu pozorovaných překročení hranic VaR. Naopak pro účely vlastní kapitálové přiměřenosti je namístě spolehlivost vyšší.

Kromě časového horizontu a spolehlivosti jsou pro specifikaci metody VaR případně nutná další upřesnění, např. při výpočtu kapitálových požadavků se hodnota VaR někdy násobí „bezpečnostním" koeficientem, jehož výši (např. v předepsané minimální výši tři) je také nutné předem specifikovat.

Metody výpočtu VaR

Ačkoli má metoda VaR poměrně jednoduchou a jasnou koncepci, její výpočet je poměrně složitý statistický problém. Existuje více metod výpočtu hodnoty VaR, avšak všechny tyto metody zachovávají podobnou strukturu ve třech základních bodech:

1. Výpočet současné hodnoty portfolia (Market to Market Value).

2. Odhad rozdělení výnosu portfolia.

3. Výpočet VaR portfolia.

Hlavní rozdíl mezi jednotlivými metodami je ve výše popsaném bodě dva, tedy jakým způsobem je řešen problém odhadu rozdělení změn hodnoty portfolia.

Výpočet VaR je možné uskutečnit různými způsoby. Tradičně se používají tři:

1. Historická simulace.

2. Variačně-kovariační metoda (nazývá se též analytická metoda).

3. Simulace Monte Carlo.

Někteří autoři uvádějí rozdělení pouze na dvě metody:

1. Delta metody (různé varianty analytické metody).

2. Simulace Monte Carlo (simulační metody včetně historické simulace).

Podle nejnovějších trendů se metody VaR dělí do následujících skupin:

1. Parametrické (RiskMetrics a GARCH).

2. Neparametrické (historická simulace a hybridní model).

3. Poloparametrické (teorie extrémních hodnot a CAViaR).

4. Metoda Monte Carlo.

Poznámka:

Odhady VaR vypočítané jednotlivými metodami se mohou výrazně lišit.

Parametrický výpočet VaR

Pokud lze rozdělení míry zisku přes příslušný časový horizont popsat pomocí nějakého parametrického rozdělení s odhadnutelnými parametry, pak lze provést parametrický výpočet hodnoty v riziku. Pro tento účel se nejčastěji používá normálního rozdělení.

Aproximace normálním rozdělením ovšem nemusí být vždy vyhovující. Z hlediska výpočtu hodnoty v riziku vadí na aproximaci normálním rozdělení většinou „nedostatečně těžké konce“ tohoto rozdělení. A to vlastně jen nedostatečně těžký záporný konec na straně ztrát (nedostatečně těžký kladný konec na straně zisků, se při výpočtu hodnoty v riziku neuplatní).

Při nevhodném použití normální aproximace vyjde hodnota v riziku nižší než by správně měla být, což je při použití metody VaR v praxi nebezpečné. Pro překonání tohoto problému byly navrženy různé alternativy k normální aproximaci. Pokud se zabýváme využitím gamma funkce, bude nás zajímat především výpočet VaR pomocí Studentova *t*-rozdělení. Jako jiné varianty mohou být uvedeny: výpočet pomocí směsi normálních rozdělení, popř. pomocí rozdělení GED (generalized error distribution).

Výpočet VaR pomocí t-rozdělení

Studentovo *t*-rozdělení má pravděpodobnostní hustotu tvaru:

$$f_k(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi k}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad x \in R,$$

kde přirozené číslo k je počet stupňů volnosti a Γ je gamma funkce. I když průběh jeho pravděpodobnostní hustoty je podobný jako u normálního rozdělení, má těžší konce než odpovídající normální rozdělení. Proto jeho použití v metodě VaR místo normálního rozdělení často dává konkrétnější výsledky, jak dokazuje řada reálných příkladů. Jediný parametr n se nastaví tak, aby rozptyl $n/(n-2)$ odpovídal výběrovému rozptylu vypočtenému z dat.

Výpočet Laplaceova integrálu

Otázka integrovatelnosti

Vzhledem k tomu, že integrace je poměrně složitá procedura, v některých případech se stává, že pro mnohé funkce není vůbec možná. Jako příklad můžeme uvést některou skokovou funkci.

Pomoci nám může známá věta z diferenciálního počtu:

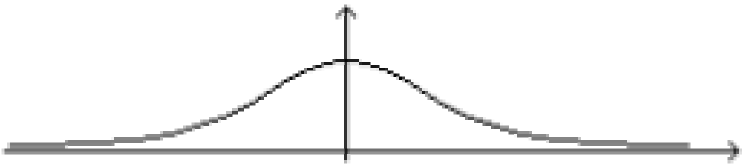
Jestliže f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu I, pak má v tomto intervalu primitivní funkci.

Tato věta nám sice říká, že za daných podmínek primitivní funkce existuje. Bohužel však nikoli, jak ji najít. Tato primitivní funkce může být jen teoretická, čímž je míněno, že existuje a dá se nakreslit její graf. Tento graf je však natolik netypický, že jej nelze popsat žádnou algebraickou kombinací elementárních funkcí.

Nyní se dostáváme k příkladu jedné z těchto funkcí, na kterou zaměříme naší pozornost. Jedná se o funkci ve tvaru:

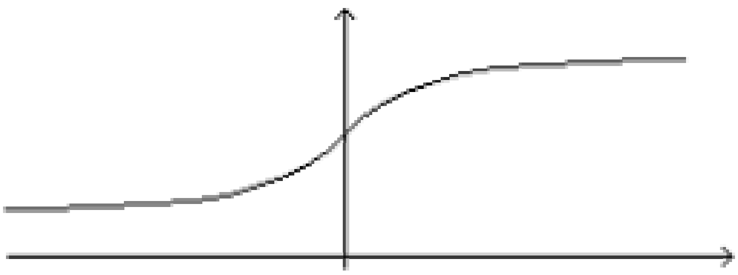
$$f(x) = e^{-x^2} \ .$$

Jak vidíme je tato funkce zadaná velice jednoduchou formulí. Jedná se o slavnou zvonovitou Gaussovu křivku (Obr. 9), která je hojně používaná ve statistice a pravděpodobnosti. Tento integrál je úzce spojený s hustotou normálního rozdělení. Při důkazu, zda je funkce opravdu hustotou nějakého rozdělení, se používá vztahu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Tento integrál se nazývá *Laplaceův integrál.*



Obr. 9 Gaussova křivka.

Protože je tato funkce spojitá na celém svém definičním oboru, existuje k ní primitivní funkce. Na Obr. 10 vidíme jednu z nich.



Obr. 10 Primitivní funkce Gaussovy křivky.

Tuto funkci na grafu však nelze popsat použitím elementárních funkcí. Ať již vymyslíme jakoukoli primitivní funkci F, nikdy nebude platit $F' = f$.

Pro výpočet hodnoty *Laplaceova integrálu* existuje několik způsobů. Následně budou některé z nich uvedeny názorně. Při výpočtu využijeme toho, že integrujeme sudou funkci, tudíž stačí vypočítat $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

1. Vypočítáme *Laplaceův integrál* přes pomocný dvojný integrál:

Označme $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Nyní budeme počítat pomocný integrál:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = I^2 .$$

Přepišme nyní pomocný integrál do polárních souřadnic. Tzn. použijeme substituci $x = r\,cos\,\varphi$, $y = r\,sin\,\varphi$, s jakobiánem $J = r$. Množina, přes kterou se integrál počítá je první kvadrant, neboť jak x tak y nabývají pouze kladných hodnot.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{r^2} rdrd\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Závěrem dostáváme $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ a proto:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Z čehož vyplývá:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2I = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} .$$

2. Vypočítáme *Laplaceův integrál* převedením substitucí $x = t^{\frac{1}{2}}$ na hodnotu gamma funkce:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^{\frac{1}{2}} \\ dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Z čehož vyplývá:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Nyní ukážeme, že $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

1. Využitím vlastnosti gamma funkce $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ vypočteme $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. Vypočítáme integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ nejprve přímým výpočtem a posléze převedením na funkci beta. Porovnáním obou výsledků dostaneme, že $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Oba tyto integrály jsou vypočteny v příkladu 1 v kapitole Využití gamma a beta funkce v integrálním počtu.

Porovnáme-li oba výsledky dostaneme:

$$\frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Tedy:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Využití gamma a beta funkce v integrálním počtu

Gamma a beta funkci lze pro jejich vlastnosti s výhodou využít v integrálním počtu. Za jejich pomoci lze spočítat integrály, které obvyklými postupy nelze vypočítat. Popřípadě lze obejít některé obtížné početní postupy, nebo také zkrátit délku výpočtu oproti klasické integraci. Protože jsou obě funkce tabelovány, je výhodné v praktických výpočtech vyjadřování hodnot integrálů pomocí těchto funkcí.

Je však důležitá jistá zkušenost při integrování funkcí, protože není pravidlem, že využití gamma a beta funkce vede vždy ke snadnějšímu výpočtu. Jak bude v této kapitole naznačeno, pro některé funkce je naopak lepší použít klasickou integraci, či jiné substituce (např. Eulerovy).

Příklad 1

Uvažujme integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Tento integrál nejprve vypočítáme přímým integrováním (jde o nevlastní integrál vlivem horní meze):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\to 1} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\to 1_-} \left[arcsin\, x\right]_0^c = \lim_{c\to 1_-} \left(arcsin\, c - arcsin\, 0\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Dále spočteme tento integrál převedením na funkci beta s použitím 5. o vlastnostech funkce beta:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} x=t^{\frac{1}{2}} \\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{1} = \frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Jak je zde vidět, je klasická metoda integrování poněkud jednodušší oproti převedení na beta funkci.

Příklad 2

Uvažujme integrál $I = \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$. Nyní ho vypočítáme pomocí Eulerovy substituce:

$$I = \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)^2}{(1-x)}}\,dx = \int_0^1 (1-x)\sqrt{\frac{x}{(1-x)}}\,dx .$$

Zavedeme substituci $t = \sqrt{\frac{x}{(1-x)}}$:

$$t^2 = \frac{x}{(1-x)}$$

$$x = t^2 - xt^2$$

$$x + xt^2 = t^2$$

$$x\left(1+t^2\right) = t^2$$

$$x = \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)}$$

$$dx = \frac{2t\left(1+t^2\right) - t^2\,2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = \frac{2t+2t^3-2t^3}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = \frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt$$

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow t = 0 \\ x = 1 &\rightarrow t = \infty \end{aligned}.$$

Nyní pokračujeme ve výpočtu integrálu:

$$I = \int_0^1 (1-x)\sqrt{\frac{x}{(1-x)}}\,dx = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)}\right) t \frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{1+t^2-t^2}{\left(1+t^2\right)}\right)\frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{t^2+1-1}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt - 2\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt = 2I_1 - 2I_2\,.$$

Integrály typu $\int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}$ vypočítáme pomocí o řád vyššího integrálu:

$$K_n = \int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,dt = \int 1 \cdot \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,dt$$

$$\begin{array}{ll} v' = 1 & v = t \\ u = \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^n} & u' = -2n\left(1+t^2\right)^{-n-1} t \end{array}$$

$$K_n = \frac{t}{\left(1+t^2\right)^n} + 2n\int \frac{t^2+1-1}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}\,dt = \frac{t}{\left(1+t^2\right)^n} + 2n\int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,dt - 2n\int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}\,dt$$

$$K_n = \frac{t}{\left(1+t^2\right)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}$$

$$K_{n+1} = \frac{t}{2n\left(1+t^2\right)^n} + \frac{2nK_n - K_n}{2n}$$

$$\int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n+1}} = \frac{t}{2n\left(1+t^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,.$$

Vrátíme se k výpočtu původního integrálu a pomocí tohoto vztahu spočteme integrály $I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt$ a $I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt$:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = K_{1+1} = \frac{t}{2\left(1+t^2\right)} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)}\,dt = \left[\frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2}\,arctg\,t\right]_0^\infty$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}\,dt = K_{2+1} = \frac{t}{4\left(1+t^2\right)^2} + \frac{3}{4}K_2 =$$

$$= \left[\frac{t}{4+4t^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2}\,arctg\,t\right)\right]_0^\infty, \text{ tedy}$$

$$I = 2I_1 - 2I_2 = 2\left[\frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2}\,arctg\,t - \frac{t}{4+4t^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2}\,arctg\,t\right)\right]_0^\infty =$$

$$= 2\left[0 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{3}{4}\left(0 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)\right] - 2(0) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16}\right) =$$

$$= 2\frac{(4\pi - 3\pi)}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Následně pro porovnání vypočítáme integrál $I = \int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$ převedením na gamma funkci:

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 - x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1 - x)^{\frac{3}{2}-1}\, dx =$$

$$= B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2}{2!} = \frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{8}.$$

Hodnota gamma funkce v bodě $\frac{3}{2}$ byla vypočítána v matematickém softwaru Maple 7.0.

Poznámka

Jak lze vidět z obou postupů je v tomto v případě nesrovnatelně efektivnější využít metodu převodu na gamma funkci.

Příklad 3

Vypočítáme integrál $\int\limits_0^\infty e^{-x^3}\,dx$ pomocí gamma funkce:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^3}\,dx = \left| \begin{matrix} x=t^{\frac{1}{3}} \\ dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty t^{-\frac{2}{3}}e^{-t}dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{3}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Povšimneme si nyní podobnost s *Laplaceovým integrálem* a můžeme naše poznatky zobecnit a vypočítat integrál typu $\int\limits_0^\infty e^{-x^a}\,dx$. Tento integrál má smysl pouze pro $a > 0$ (vzhledem k definici funkce Γ):

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^a}\,dx = \left| \begin{matrix} x=t^{\frac{1}{a}} \\ dx=\frac{1}{a}t^{\frac{1}{a}-1}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{a}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

Příklad 4

Vypočítejme integrál $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ nejprve pomocí klasické substituce:

$$\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} t=-x^2 \\ dx=\frac{dt}{-2x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^t\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Výpočet pomocí funkce gamma vypadá následovně:

$$\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x=t^{\frac{1}{2}} \\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^0e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}.$$

Příklad 5

Nyní odvodíme obecnou formuli pro integrály podobného typu za předpokladu, že $a > 0$ a $b > -1$ (vzhledem k definici funkce Γ):

$$\int_0^\infty x^b e^{-x^a} dx = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac{1}{a}} \\ dx = \frac{1}{a} t^{\frac{1}{a}-1} dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int_0^\infty t^{\frac{b}{a}} e^{-t} t^{\frac{1}{a}-1} dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty t^{\frac{b+1}{a}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{b+1}{a}\right).$$

Pokud bychom podle této formule počítali integrál z předchozího příkladu, vyjde nám:

$$b = 1,\ a = 2: \quad \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(1).$$

Příklad 6

Dále odvodíme vztah pro integrály typu $\int_0^\infty x^b e^{-ax^2} dx$:

$$\int_0^\infty x^b e^{-ax^2} dx = \left| \begin{matrix} t = ax^2 \\ dt = 2axdx \\ dx = \frac{dt}{2ax} \end{matrix} \right| = \int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{b}{2}} e^{-t} \frac{1}{2a}\left(\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{a^{\frac{b}{2}}} \frac{1}{2a} \int_0^\infty t^{\frac{b}{2}-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2a^{-\frac{1}{2}+\frac{b}{2}+1}} \int_0^\infty t^{\frac{b}{2}-\frac{1}{2}+1-1} e^{-t} dt =$$

$$= \frac{1}{2a^{\frac{-1+b+2}{2}}} \int_0^\infty t^{\frac{b+1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2a^{\frac{b+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a^{b+1}}}\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right).$$

Příklad 7

Mějme integrál $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-4x^4}\,dx$. Výpočet klasickou substitucí bude vypadat takto:

$$\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-4x^4}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=4x^4 \\ dx=\frac{dt}{16x^3} \end{array} \right| = \frac{1}{16}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{16}\left[\lim_{x\to\infty} - e^{-x^2} + 1\right] = \frac{1}{16}.$$

A nyní pomocí převodu na gamma funkci:

$$\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-4x^4}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=4x^4 \\ \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=x \\ \frac{1}{16}\left(\frac{t}{4}\right)^{-\frac{3}{4}} dt=dx \end{array} \right| = \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-t}\,\frac{1}{16}\left(\frac{t}{4}\right)^{-\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{16}\int\limits_0^{\infty} t^0 e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{16}\Gamma(1) = \frac{1}{16}.$$

Vidíme, že zde je vhodnější použít klasickou metodu oproti převodu na funkci gamma.

Příklad 8

Určete reálnou konstantu k tak, aby $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$.

Funkce $f(x) = k e^{-\frac{x^2}{2}}$ je sudá v intervalu $(-\infty,\infty)$, proto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_{0}^{\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}dx\,.$$

$$2\int_{0}^{\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left|\begin{matrix} x=\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}} \\ dx=\frac{\sqrt{2}}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \end{matrix}\right| = 2\frac{k\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = k\sqrt{2}\int_{0}^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = k\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Vidíme tedy, že $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}dx = k\sqrt{2}\sqrt{\pi} = 1$, tudíž $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Tak dostáváme funkci jedné proměnné f definovanou předpisem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in (-\infty,\infty),$$

která se nazývá *hustota normovaného normálního rozdělení* (tedy se střední hodnotou 0 a rozptylem 1) a je tabelována ve statistických tabulkách.

Příklad 9

Nechť je μ a σ kladné reálné číslo. Určete reálnou konstantu k tak, aby $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{matrix} x=\sigma y+\mu \\ dx=\sigma\, dy \end{matrix}\right| = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-\frac{y^2}{2}}dy\,.$$

Využitím výsledku z předchozího příkladu dostáváme:

$$\sigma\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-\frac{y^2}{2}}dy = \sigma k\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sigma k\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Tedy $\int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma k \sqrt{2}\sqrt{\pi} = 1$, tudíž $k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Tak dostáváme funkci jedné proměnné g definovanou předpisem:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in (-\infty, \infty),$$

která se nazývá *hustota normálního rozdělení* (tedy se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2). Toto rozdělení hraje zásadní roli v počtu pravděpodobnosti a matematické statistice.

Příklad 10

Vypočítejme převodem na funkci beta integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^5}{1+x^7} dx$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{1+x^7} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^{\frac{1}{7}} \\ dx = \frac{1}{7} t^{-\frac{6}{7}} dt \end{array} \right| = \frac{1}{7}\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{5}{7}} t^{-\frac{6}{7}}}{1+t} dt = \frac{1}{7}\int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{7}}}{1+t} dt = \frac{1}{7}\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{6}{7}-1}}{(1+t)^{\frac{6}{7}+\frac{1}{7}}} dt =$$

$$= \frac{1}{7} B\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} \frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{7}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\right)} = \frac{1}{7} \frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{7}\right)}{1} = \frac{1}{7}\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{7}\right).$$

Poznámka:

Ručně pomocí klasických postupů integrál této racionální lomené funkce vypočítat nelze. Pro úpravu integrovaného výrazu bychom museli použít matematický software (např. Maple). Pokud bychom zadali výpočet tohoto integrálu do matematického software Maple 7.0, vyjde nám výsledek

$\frac{1}{7}\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{7}\right)$, což značí, že výpočet tohoto integrálu, je jistě výhodné pomocí beta funkce.

Příklad 11

Využitím analogického postupu jako v předchozím příkladu, jsme schopni vypočítat integrály racionálních lomených funkcí s polynomy vyšších stupňů, které klasickou integrací nelze vypočítat.

Vypočítejme tedy integrál $\int_0^\infty \frac{x^{97}}{1+x^{99}}dx$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{97}}{1+x^{99}}dx = \left| \begin{array}{l} x=t^{\frac{1}{99}} \\ dx=\frac{1}{99}t^{-\frac{98}{99}}dt \end{array} \right| = \frac{1}{99}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{97}{99}}t^{-\frac{98}{99}}}{1+t}dt = \frac{1}{99}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{99}}}{1+t}dt = \frac{1}{99}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{98}{99}-1}}{(1+t)^{\frac{98}{99}+\frac{1}{99}}}dt =$$

$$= \frac{1}{99}B\left(\frac{98}{99},\frac{1}{99}\right) = \frac{1}{99}\frac{\Gamma\left(\frac{98}{99}\right)\Gamma\left(\frac{1}{99}\right)}{\Gamma\left(\frac{98}{99}+\frac{1}{99}\right)} = \frac{1}{99}\frac{\Gamma\left(\frac{98}{99}\right)\Gamma\left(\frac{1}{99}\right)}{1} = \frac{1}{99}\Gamma\left(\frac{98}{99}\right)\Gamma\left(\frac{1}{99}\right).$$

Příklad 12

Z poznatků z předchozích příkladů 9 a 10, můžeme odvodit obecný vztah pro výpočet integrálu racionální lomené funkce ve tvaru $\int_0^\infty \frac{x^{m-2}}{1+x^m}dx$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-2}}{1+x^m}dx = \left| \begin{array}{l} x=t^{\frac{1}{m}} \\ dx=\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt \end{array} \right| = \frac{1}{m}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m-2}{m}}t^{\frac{1-m}{m}}}{1+t}dt = \frac{1}{m}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{m}+1-1}}{1+t}dt = \frac{1}{m}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m-1}{m}-1}}{(1+t)^{\frac{m-1}{m}+\frac{1}{m}}}dt =$$

$$= \frac{1}{m} B\left(\frac{m-1}{m}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{m} + \frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{1} =$$

$$= \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right).$$

Příklad 13

Uvažujme integrál $\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^4} dx$, který vypočítáme nejprve pomocí klasické substituce:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \left| \begin{matrix} t = x^4 \\ dt = 4x^3 dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{1+t} dt = \left[ln|1+t| \right]_0^\infty = \infty .$$

Nyní použijeme k jeho výpočtu převedení na beta funkci pomocí stejné substituce:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^4} dx = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac{1}{4}} \\ dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{3}{4}}}{1+t} dt = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{t^0}{1+t} dt = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{t^{1-1}}{(1+t)^{1+0}} dt =$$

$$= \frac{1}{4} B(1,0) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(1)\Gamma(0)}{\Gamma(1+0)} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(1)\Gamma(0)}{1} = \frac{1}{4} \Gamma(1)\Gamma(0) = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0_+} \Gamma(x) = \infty .$$

Příklad 14

Vypočítejme integrál $\int_0^{\pi/2} sin^5 x\, cos^2 x\, dx$ nejprve pomocí klasické substituce:

$$\int_0^{\pi/2} sin^5 x\, cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} sin^4 x\, cos^2 x\, sin\, x\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 - cos^2 x\right)^2 cos^2 x\, sin\, x\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = cos\, x \\ dt = -sin\, x\, dx \end{array} \right| = -\int_1^0 \left(1 - t^2\right)^2 t^2\, dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right]_1^0 =$$

$$= \left[-\frac{cos^3 x}{3} + \frac{2\, cos^5 x}{5} + \frac{cos^7 x}{7} + \right]_0^{\pi/2} = 0 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}$$

A nyní pomocí převodu na beta funkci:

$$\int_0^{\pi/2} sin^5 x\, cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} sin^5 x \left(1 - sin^2 x\right) dx = \left| \begin{array}{l} x = arcsin\, y \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 y^5 \left(1 - y^2\right) \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int_0^1 y^5 \left(1 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} dy = \left| \begin{array}{l} y = t^{\frac{1}{2}} \\ dy = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} (1 - t)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 (1 - t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{3-1} (1 - t)^{\frac{3}{2} - 1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(3, \frac{3}{2}\right) = \frac{8}{105} .$$

Hodnota beta funkce v bodě $\left[3, \frac{3}{2}\right]$ byla vypočítána v matematickém softwaru Maple 7.0.

Příklad 15

Nyní můžeme s poznatky z předchozího příkladu vypočítat integrál typu $\int_0^{\pi/2} sin^a x \, cos^b x \, dx$. Nechť m a n jsou kladná reálná čísla. Spočteme integrál $\int_0^{\pi/2} sin^{m-1} x \, cos^{n-1} x \, dx$:

$$\int_0^{\pi/2} sin^{m-1} x \, cos^{n-1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} sin^{m-1} x \left(\sqrt{1 - sin^2 x}\right)^{n-1} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} sin^{m-1} x \left(1 - sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = arcsin \, y \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \end{array} \right| = \int_0^1 y^{m-1} x \left(1 - y^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} =$$

$$= \int_0^1 \ddot{y}^{m-1} \left(1 - y^2\right)^{\frac{n-2}{2}} dy = \left| \begin{array}{l} y = t^{\frac{1}{2}} \\ dy = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-2}{2}} (1 - t)^{\frac{n-2}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1} (1 - t)^{\frac{n}{2}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

Poznámka:

Z tohoto příkladu vyplývá, že pro každé reálné číslo m platí:

$$\int_0^{\pi/2} sin^{m-1} x\, dx = \int_0^{\pi/2} cos^{m-1} x\, dx = = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$$

Příklad 16

Uvažujme integrál $\int_0^{\pi/2} sin^6 x\, dx$, který vypočítáme nejprve klasickou metodou:

$$\int_0^{\pi/2} sin^6 x\, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} [1 - cos(2x)]^3\, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} 1 - 3cos(2x) + 3cos^2(2x) - cos^3(2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} dx - \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} cos(2x) dx + \frac{3}{16} \int_0^{\pi/2} 1 + cos(4x) dx - \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} cos^3(2x) dx.$$

Vypočítáme pomocné integrály. Zvolíme substituci $t = 2x$, $dt = 2dx$:

1. $\int cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int cos\, t\, dt = \frac{1}{2} sin\, t + C_1 = \frac{1}{2} sin(2x) + C_1.$

Zvolíme substituci $t = 4x$, $dt = 4dx$:

2. $\int cos(4x)dx = \frac{1}{4}\int cos\,t\,dt = \frac{1}{4}sin\,t + C_2 = \frac{1}{4}sin(4x) + C_2$.

Zvolíme substituci $t = 2x$, $dt = 2dx$:

3. $\int cos^3(2x)dx = \frac{1}{2}\int cos^3 t\,dt = \frac{1}{2}\int cos^2 t\,cos\,t\,dt = \frac{1}{2}\int\left(1 - sin^2 t\right)cos\,t\,dt =$

$$= \frac{1}{2}sin\,t - \frac{1}{2}\int sin^2 t\,cos\,t\,dt\,.$$

Zvolíme substituci $u = sin\,t$, $du = cos\,t\,dt$:

$$\int sin^2 t\,cos\,t\,dt = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C_3 = \frac{sin^3 t}{3} + C_3\,.$$

Je tedy:

$$\int_0^{\pi/2} sin^6 x\,dx = \left[\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}sin(2x) + \frac{3}{64}sin(4x) + \frac{1}{48}sin^3(2x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{5}{16}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}\,.$$

Vidíme tedy, že výpočet klasickou substituční metodou je poměrně zdlouhavý. Použijeme-li vztahu $\int_0^{\pi/2} sin^{m-1} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$ odvozeného v předchozím příkladě 7, dostáváme:

$$\int_0^{\pi/2} sin^6\, x\, dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{32}\,.$$

Hodnoty gamma funkce byly vypočítány v matematickém softwaru Maple 7.0.

Závěr

Tato diplomová práce je koncipována tak, aby podala základní informace o beta a gamma funkcích a jejich využití. V této práci jsem se pokusil sjednotit jednotlivé informace o této problematice, zejména z pohledu praktického využití. Hlavním zdrojem materiálu byl především internet, protože informace v literatuře (zejména v české) nejsou ucelené.

Z hlediska praktického využití jsou uvedeny definice základních statistických rozdělení, které jsou definovány pomocí gamma a beta funkce a jejich charakteristiky. Tyto informace jsou též doplněny barevnými grafy. V práci jsem také uvedl metodu VaR (value at risk), která se využívá zejména ve finančnictví a ekonomii.

Závěr práce se zabývá příklady pro využití těchto funkcí v integrálním počtu. Při výpočtu jsem využil jak postupu pomocí převodu na gamma popř. beta funkci, tak metodu klasické integrace pomocí substituce, metody per partes a Eulerovy substituce. Z výsledků je znatelné, že za určitých podmínek je výhodnější použít znalosti o těchto funkcích, ale velmi záleží na zkušenostech s integrováním při odhadu, která metoda je nejvýhodnější.

Závěrem bych rád podotknul, že tématika gamma a beta funkcí je daleko obsáhlejší než je rámec této práce a proto případného zájemnce o prohloubení znalostí a informací odkazuji na použité zdroje.

Seznam použité literatury

Anděl J.: Matematická statistika, SNTL/Alfa, Praha 1978 (str. 19, str. 74 – 97).

Bakytová H., Hátle J., Novák I., Ugron M.: Statistická indukce pro ekonomy, SNTL/Alfa, Praha 1986 (str. 25 – 38).

Brabec J., Hrůza B.: Matematická analýza II, SNTL/Alfa, Praha 1986 (str. 320 – 350).

Cipra T.: Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví, Ekopress, Praha 2002 (str. 101 – 138).

Coufal, J.: Funkce gamma a beta, NAROMA, Praha 1996.

Jarník V.: Integrální počet, Academia, Praha 1984 (str. 685 – 704).

Jirásek F., Benda J., Čipera S., Vacek M.: Sbírka řešených příkladů z matematiky III, SNTL, Praha 1989 (str. 276 – 306).

Jirásek F., Benda J., Vacek M.: Sbírka řešených příkladů z matematiky II, SNTL, Praha 1989 (str. 157 – 311).

Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky I, SNTL/Alfa, Praha 1987 (str. 532 – 625).

Kaňka M., Henzler J.: Matematika pro ekonomy II, Ekopress, Praha 1997.

Klůfa a kol.: Mundus symbolicus (Sborník katedry matematiky), VŠE, Praha 1996, ročník 4 (str. 5 – 10).

Klůfa a kol.: Mundus symbolicus (Sborník katedry matematiky), VŠE, Praha 2005, ročník 13 (str. 173 – 173).

Klůfa J., Coufal J.: Matematika pro ekonomy I, Ekopress, Praha 1997.

Likeš J., Hátle J.: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, SNTL/Alfa, Praha 1974 (str. 121 – 141).

Likeš J., Laga J.: Základní statistické tabulky, SNTL, Praha 1978.

Mrkvička T., Petrášková V.: Úvod do statistiky, Skriptum, PF JU, České Budějovice 2006 (str. 25 – 29).

Polách Eduard: Pravidla sazby diplomových prací, Skriptum, PF JU, České Budějovice 1998.

Internetové zdroje:

Wikipedia: www.wikipedia.org, www.wikipedia.cz

Časopis Natura: http://natura.baf.cz/natura/2002/4/20020405.html, http://natura.eri.cz/natura/2002/5/20020506.html

Univerzita Komenského (Bratislava): http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/maiii/iv3.pdf

University of Leeds (Leeds): http://www.maths.leeds.ac.uk/~kisilv/courses/sp-funct.html

S. O. S. Mathematics: http://www.sosmath.com/calculus/improper/gamma/gamma.html

Interaktivní učebnice statistiky (Vysoká škola ekonomická v Praze):

http://iastat.vse.cz/

Pravděpodobnost a statistika hypertextově (Západočeská univerzita):

http://home.zcu.cz/~friesl/hpsb/tit.html

Euromise – základy statistiky:

http://ucebnice.euromise.cz/index.php?conn=0&section=knihy

Akademie věd České Republiky:

http://www.cs.cas.cz/portal/AlgoMath/MathematicalAnalysis/SpecialFunctions/