Jihočeská uviverzita v Českých Budějovicích
Katedra matematiky

Statistický rozbor hazardních her

Diplomová práce

2007 **Pavel Novák**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, které jsem k tomu použil.

V Českých Budějovicích 20. dubna 2007 ....

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu této diplomové práce, kterým je prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., za podnětné rady a připomínky. Také bych chtěl poděkovat svým rodičům za jejich nekonečnou trpělivost.

Abstrakt

Tato práce se zabývá číselnou hrou Sportka a je zaměřena především na studium takzvaných „anomálních“ jevů. Ke každému takovému jevu je sestaven matematický model a je zjištěn jeho předpokládaný výskyt. Ten je pak porovnán se skutečnou historií této loterie.

Další část se věnuje podrobné analýze použitých losovacích zařízení. S využitím bohaté historie této hry je potvrzena nebo vyvrácena hypotéza o spravedlivosti jednotlivých losovacích zařízení.

Poslední část se věnuje výpočtu pravděpodobnosti výhry v jednotlivých výherních pořadích.

Abstract

This diploma thesis discusses the numeric game Sportka and concentrates on research of the so called abnormal effects. Mathematical models are designed for such effects and their probable appearance is found. This appearance is compared to the presence of the real events in history of the game.

The second part turns to the analysis of the lottery machines which have been used. The equitableness of the particular lottery-wheels is accepted or refused according to the abundant history of the real draws in Sportka.

The last part of the thesis is involved in the mathematical simulation of the jackpot in the case of reasonable betting.

Obsah

Seznam tabulek

ÚVOD

Hazardní hry, sázení obecně i různé loterie přitahovaly a vzrušovaly lidstvo od nepaměti. Lidská vášeň pro hru – a samozřejmě i výhru – provází lidstvo po celou dobu jeho existence. Dokazují to staré letopisy, kroniky a různá výtvarná díla. Hazardní hra se nejednou stala i literárním námětem (vzpomeňme si třeba na Dostojevského a jeho román *Hráč*, kde je ústřední postavou hráč rulety).

Hrou se zabývají filosofové, dějepisci i ekonomové, i když ti tvrdí, že člověka ke hře nutí čistě iracionální popud, který ho vede ke zbytečnému riskování peněz. Vždyť přece všechny obchodně provozované hry jsou nespravedlivé na úkor hráče. Uzavíráním sázek, svou účastí na tombolách a loteriích lidé uspokojují určitou základní lidskou povahovou vlastnost. Jde zejména o potřebu hry, rizika a vzrušení s ním spojeného. Hra v těchto případech navíc svádí vidinou snadného, bezpracně dosaženého a často velmi vysokého zisku.

1 HISTORIE HAZARDNÍCH HER A LOTERIÍ V ČESKÝCH ZEMÍCH

1.1 Hazardní hry ve středověku a za Rakouska–Uherska

Potřeba hry a zábavy a touha po vymanění se z koloběhu denních starostí patří neoddělitelně k lidské psychice. Výjimkou jistě nebyly ani různé kmeny, které v minulosti pobývaly na území dnešních Čech. Svědčí o tom nálezy různých kostěných hracích kamenů, které byly nalezeny v keltských oppidech na Stradonicích. Pravděpodobně sloužili k nějaké složitější deskové hře, jejíž podobu už dnes nedokážeme rekonstruovat.

Ve středověku se po celé Evropě, tedy i v Českých zemích, rozšířila hra v kostky. Většinou jí propadaly jen nižší vrstvy, a tak možná právě proto patřila k nejopovrhovanějším lidským činnostem té doby. Hra v kostky se hrála na několik způsobů, většinou však hlavním cílem bylo, dosáhnout co nejvyššího součtu. Běžně se házelo dvěma nebo třemi kostkami. Kromě takto jednoduché hry se hrály také *vrchcáby*. Postupem času ustupovaly kostky čím dál více kartám, které většinou nabízely daleko pestřejší hru.

V Čechách byl v té době velmi oblíbený *Mariáš*, který se hrál s dvaatřiceti kartami, na Moravě to zase byly *Taroky*, které se hrály se speciálními tarokovými kartami. Stejně tak jako hra v kostky, patřilo i hraní karet k obecně odsuzovaným a opovrhovaným činnostem.

Vedle hazardních her, které spočívaly na principu hry mezi jednotlivci, začaly se rozšiřovat i tzv. *hrnce štěstí*. Jejich kočovní provozovatelé, tzv. *karbaníci*, byly k vidění na trzích, poutích a místech, kde se shromažďoval větší počet lidí. Je pochopitelné, že velmi často docházelo k různým podvodům. Úřady tedy většinou tyto karbaníky sledovaly a např. v roce 1576 jich bylo několik obviněno, souzeno a posléze oběšeno.

Státní orgány se neustále snažily potlačovat hazard, ale většinou neúspěšně. Asi právě proto byla v druhé polovině 18. století zřízena první státní číselná loterie, která se (podle svého italského vzoru) jmenovala *Loto di Genova*. Její princip spočíval v uhodnutí 5ti čísel z 90ti losovaných. Se sázením do loterie se pojila řada pověr a zvyků, čísla do loterie předvídaly za menší peníz především různé vykladačky snů.

Ve dvacátých a třicátých letech 19. století existovala vedle státní loterie i pokoutní, tzv. *modrá loterie*. Byla oblíbená především v severních Čechách a jejími majiteli byli zámožní sedláci, mlynáři a hostinští. Většinou najímali potulné pocestné, kteří obcházeli okolní vesnice a přijímali sázky nižší než tři krejcary. Výhry se určovaly podle tahů pražské ústředny.

1.2 Hazardní hry v Československu

Po vzniku Československa v říjnu 1918 převzal stát kromě jiných institucí také státní loterii. Lotynka však neměla dlouhého trvání. Oblíbená a zavrhovaná číselná loterie *Lotynka* byla zrušena z podnětu prvního československého ministra financí Aloise Rašína už v únoru 1919. Ovšem již v červenci vzniká *Československá třídní loterie*, jejíž podmínky byly stanoveny co nejpříznivěji. Důvodem byla obava z možné účasti hráčů v zahraničních loteriích. Československá třídní loterie ovšem nebyla číselnou loterií. Podle objednávky byl vydán určitý počet losů, z nichž se pak losovala hlavní cena a další vedlejší ceny. Československo bylo tehdy jedinou zemí, která vyplácela celou výhru bez srážek (na rozdíl od ostatních loterií, které si většinou strhávaly pětinu vyhrané částky). Počet vydaných losů neustále stoupal a v letech 1926–27 bylo prodáno 250 000 losů.

Po rozbití Československa za Protektorátu Čechy a Morava byly losy zdraženy a k výhrám se zavedly přirážky. Prodej losů byl zakázán osobám židovského původu a zájemce o koupi losu se musel vykázat árijským původem. Obliba této loterie klesla v roce 1939 na polovinu.

Změny po roce 1948 zasáhly i do provozování různých loterií. Všechny soukromé sázkové podniky, které do té doby v Československu existovaly, byly zrušeny a nahrazeny monopolní státní organizací – Státní sázkovou kanceláří (STASKA). Hlavní sférou činnosti STASKY bylo sázení na sportovní utkání. Maximální výše výher zatím nebyla stanovena a výhry kolem milionu korun nebyly výjimkou. Na konci roku 1953 byla STASKA zrušena. Oficiálním důvodem bylo podezření na manipulaci s výsledky sportovních utkání. Během existence STASKY v ní lidé prosázeli 896 milionů korun. Padesát procent z této částky připadlo na výhry, 248 milionů připadlo státnímu rozpočtu a zbytek byl použit ve prospěch sportu a tělovýchovy.

Po zrušení STASKY samozřejmě docházelo k nelegálnímu sázení. Nejen to, ale především vznik Československého svazu tělesné výchovy (na který nebyly ve státní pokladně potřebné finanční prostředky), vedl v roce 1956 z založení podniku SAZKA. Hlavním úkolem mělo být organizování sázek na sportovní utkání. Tato loterie dostala stejný název, tedy *Sazka*. Veškerý zisk z této loterie měl plynout do státního rozpočtu na podporu sportu, tělovýchovy a turistiky. Zároveň byla zavedena maximální možná výhra.

Historie číselné hry Sportka

22. dubna 1957 byla spuštěna nová číselná hra, *Sportka*. Její herní princip byl převzat z podobné loterie, která byla v té době provozována ve Spolkové republice Německo, a byl přizpůsoben československým podmínkám. To znamená, že počet všech možných kombinací takové hry by měl být přibližně stejný jako počet obyvatel daného státu. Úkolem sázejících bylo správně tipovat 6 vylosovaných čísel, z celkového počtu 49. Nejvyšší možná výhra tehdy činila 40 tisíc korun. Losování probíhalo v neděli dopoledne na různých místech Československa, většinou o přestávkách sportovních utkání. V televizi se losování pravidelně objevuje od roku 1973.

Herní plán Sportky byl během její více než půlstoletí dlouhé historie mnohokrát měněn. V roce 1962 bylo zavedeno tipování sedmého, prémiového čísla. V roce 1965 se Sportka rozšířila na tzv. dvousázku, začal se zkrátka losovat ještě jeden tah. Ten se losoval vždy v Praze několik hodin po vylosování prvního tahu. Kromě výher měli být sázející motivováni i věcnými cenami, což byly televizory. ledničky, různé zájezdy a ve výjimečných případech i osobní automobily. Tyto věcné ceny se losovaly převážně ve vánočních tazích.

Od začátku roku 1977 se losuje i tzv. *dodatkové číslo*, které však platí jen pro druhé pořadí. Druhé výherní pořadí znamenalo uhodnutí pěti čísel. V roce 1980 bylo však pro dodatkové číslo zavedeno zvláštní výherní pořadí. Výherce tohoto zvláštního pořadí musí uhodnout pět ze šesti řádných losovaných čísel a k nim navíc ještě právě toto prémiové číslo.

V roce 1993 byl pro první výherní pořadí zaveden princip Jackpotu. To znamená, že pokud nikdo v daném losování neuhodl všech šest řádných losovaných čísel a nikdo tedy nevybral výhru v prvním pořadí, navyšuje se pro příští losování výhra v prvním pořadí právě o tuto nevybranou částku. Princip Jackpotu byl pro sázející velmi zajímavý, protože nedlouho po jeho zavedení se hlavní výhra mnohdy vyšplhala až ke třiceti milionům korun. Později nebyly výjimkou hlavní výhry, které byly vyšší než magických sto milionů korun. V takových případech začínají sázet i lidé, kteří jinak Sportku zásadně nesází.

Rok 1995 znamenal pro Sportku poslední důležitou změnu. Protože se zavedením tzv. „on-line terminálů“ velmi zjednodušil příjem sázenek, mohla být frekvence losování Sportky rozšířena na dvě losování týdně. Druhé losování se děje každou středu a platí pro něj naprosto stejná pravidla jako pro nedělní losování.

V devadesátých letech zavedla ještě SAZKA další dvě nové číselné hry. První z nich byl *Mates*, ten měl zpočátku téměř stejná pravidla jako Sportka, také se losovalo 6 čísel ze 49. Později však byla tato pravidla změněna na losování 5 čísel z 35. Mates se na začátku své existence losoval pouze jedenkrát měsíčně, později jednou za čtrnáct dní. S Matesem se pak střídala i další číselná loterie *Olympijská sázka 5 ze 40*. Důvody ke zřízení obou těchto loterií byly především finanční. Výnos z Matesa měl být určen na obnovu kulturních památek, výnos ze hry „5 ze 40“ měl být určen na přípravu a pobyt českých olympioniků na zimních a letních olympijských hrách.

2 ANOMÁLIE V LOSOVÁNÍ SPORTKY

Sportka se tedy v Česku losuje už více než půlstoletí. Sazka a.s. nabízí na svých webových stránkách[1] celou tuto historii. Pro nás to bude velmi důležitý materiál, na kterém budeme ověřovat své hypotézy. Zpočátku nás budou zajímat tzv „anomální tahy“. Co tím máme na mysli? Asi málokterý sázející by asi vsadil čísla: 4 5 6 7 16 17 – tedy jedna čtveřice a jedna dvojice po sobě jdoucích čísel. Navíc jsou všechna čísla malá. A přeci byla tato čísla vylosována v I. tahu nedělního losování v 16. týdnu roku 1998.

V následující části budeme hledat, jaké jsou pravděpodobnosti výskytu takovýchto anomálních tahů. Za takovéto anomálie budeme považovat tahy, ve kterých se vyskytuje několik po sobě jdoucích čísel. Tím máme na mysli tyto tahy:

- právě jedna dvojice po sobě jdoucích čísel: 1 2 17 34 43 49,
- právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel: 1 2 13 14 31 45,
- právě tři dvojice po sobě jdoucích čísel: 1 2 16 17 39 40,
- právě jedna trojice po sobě jdoucích čísel: 1 2 3 17 39 45,
- jedna trojice a jedna dvojice po sobě jdoucích čísel: 1 2 3 17 18 45,
- právě dvě trojice po sobě jdoucích čísel: 1 2 3 17 18 19,
- právě jedna čtveřice po sobě jdoucích čísel: 1 2 3 4 18 45,
- čtveřice a dvojice po sobě jdoucích čísel: 1 2 3 4 18 19,
- právě jedna pětice po sobě jdoucích čísel: 1 2 3 4 5 45,
- právě jedna šestice po sobě jdoucích čísel: 1 2 3 4 5 6
- a tahy se samými velkými, malými, lichými a sudými čísly.

2.1 Teoretické odvození počtu anomálních tahů

K tomu, abychom mohli zjistit počet všech takovýchto tahů, bude se nám hodit, pokud budeme znát vzorce pro výpočet těchto součtů:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{1}$$

[1] `http://www.sazka.cz`

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 \tag{2}$$

Pustíme se tedy do jejich odvození. Začněme vzorcem $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} 3i^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\Big[(i^3+3i^2+3i+1) - i^3 - 3i - 1\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\Big[(i+1)^3 - i^3 - 3i - 1\Big] = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\Big[(i+1)^3 - i^3\Big] - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} 3i - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\Big(2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + (n+1)^3 - n^3\Big)}_{-1^3+2^3-2^3+3^3-3^3+\ldots+n^3-n^3+(n+1)^3 \;=\; (n+1)^3-1} - \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= \frac{(n+1)^3-1}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{6}\Big(2n^2+3n+1\Big) =$$

$$= \frac{n}{6}\Big(2n(n+1) + (n+1)\Big) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A hledaný vzorec je tedy:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3}$$

Ještě se nám bude hodit vzorec pro $\sum_{i=1}^{n} i^3$, odvodíme ho podobným trikem jako při odvození vztahu (3):

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} 4i^3 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\Big[(i^4+4i^3+6i^2+4i+1) - i^4 - 6i^2 - 4i - 1\Big] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\Big[(i+1)^4 - i^4\Big]}_{(n+1)^4-1} - \frac{6}{4}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{\text{vztah (3)}} - \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= \frac{1}{4}\Big((n+1)^4 - 1\Big) - \frac{1}{4}\,n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}\,n(n+1) - \frac{1}{4}\,n =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(n^4 + 2n^3 + n^2\Big) = \frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

A hledaný vztah pro sumu (2):

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{4}$$

A do třetice budeme ještě používat vztahy: $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k$, a podobný pro tři sumy: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} k$, zkusme si je tedy odvodit (budeme používat již odvozené vztahy (3) a (4)):

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^2+j\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{12}\,n(n+1)\Big((2n+1)+3\Big) = \frac{1}{12}\,n(n+1)(2n+4) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} = \binom{n+2}{3}$$

Nakonec jsme tedy dokázali, že:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k = \binom{n+2}{3} \tag{5}$$

Zbývá nám ještě analogický vztah pro tři sumy. Při jeho odvození využijeme právě odvozeného vztahu (5) :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} k = \sum_{i=1}^{n}\binom{i+2}{3} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(i^3+3i^2+2i\right) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{24}\left(n^2+5n+6\right) =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!} = \binom{n+3}{4}$$

Dokázali jsme tedy vztah:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} k = \binom{n+3}{4} \tag{6}$$

Odvodili jsme si tedy vztahy, na které se budeme později odkazovat. Ale než budeme pokračovat dál, povšimneme si ještě, že vztahy (5) a (6) se nápadně podobají. Přidáme-li k nim ještě vztah pro $\sum_{k=1}^{n} k$, dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \binom{n+1}{2} \\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k &= \binom{n+2}{3} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} k &= \binom{n+3}{4} \\ &\vdots \\ \underbrace{\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1}\sum_{k_3=1}^{k_2}\cdots\sum_{k_m=1}^{k_{l-1}}}_{m} k_m &\stackrel{?}{=} \binom{n+m}{m+1} \end{aligned} \tag{7}$$

Přičemž poslední vztah v (7) uvádí autor této práce jako hypotézu. Zvídavý čtenář se jistě pokusí tuto zajímavou identitu dokázat.

Ještě zjistíme počet všech tahů, které jsou možné. Ve Sportce se losuje šest čísel ze 49ti možných. Kolik je možností vybrat šest prvků ze 49ti? Je jich tolik, kolik je šestičlenných kombinací ze 49ti prvků. Pro k-členné kombinace z n prvků platí obecný vztah:

$$\mathcal{K}(k,n) = \binom{n}{k}, \tag{8}$$

kde $\mathcal{K}(k,n)$ je samozřejmě počet těchto kombinací. V našem případě dostaneme:

$$\mathcal{K}(6;49) = \binom{49}{6} = 13\,983\,816. \tag{9}$$

Počet všech možných vyplnění tiketů Sportky je tedy 13 983 816.

Šest po sobě jdoucích čísel

Nyní nás tedy bude zajímat počet všech tahů, ve kterých tvoří losovaná čísla posloupnost šesti po sobě jdoucích čísel. Nejdříve bychom si ale měli uvědomit, že každá takováto šestice je jednoznačně určena svým prvním prvkem. První taková šestice bude tedy tah: 1 2 3 4 5 6, poslední taková šestice bude tah: 43 44 45 46 47 48 49. Je vidět, že první z těchto čísel musí být z množiny $\{1, 2, \dots, 43\}$. Počet takových tahů tedy bude stejný, jako je počet prvků v této množině. Počet všech tahů se šesti po sobě jsoucími čísly je tedy 43.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný tah bude tvořit šest po sobě jdoucích čísel? Pravděpodobnost počítáme jako:

$$p = \frac{N_p}{N_m}, \tag{10}$$

kde N_p je počet příznivých případů, N_m je počet všech možných případů. V našem případě je $N_p = 43$ a podle vztahu (9) je $N_m = 13\,983\,816$. Tahy s jednou šesticí by tedy měly být losovány s pravděpodobností:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{43}{13\,983\,816} \doteq 3{,}07 \cdot 10^{-6}. \tag{11}$$

Pět po sobě jdoucích čísel

Tahy, ve kterých se objevuje právě pět po sobě jdoucích čísel, budeme hledat následujícím způsobem: Opět bude dobré si uvědomit, že každá z těchto pětic je jednoznačně určena svým prvním prvkem. V každém tahu se ale losuje šest čísel, můžeme tedy ke každé pětici volit ještě jedno číslo. Toto číslo si označíme jako ?. Pojďme tedy takové tahy hledat. V Tabulce 1 postupujeme tak, že pevně zvolíme pětici a k ní pak určíme množinu, ze které může být poslední vylosované číslo ?.

1 2 3 4 5	? $\in \{7, 8, \ldots, 49\}$	43 možností	$\sum_{i=1}^{43} i$
2 3 4 5 6	? $\in \{8, 9, \ldots, 49\}$	42 možností	
3 4 5 6 7	? $\in \{9, 10, \ldots, 49\}$	41 možností	
$\vdots$		$\vdots$	
43 44 45 46 47	49	1 možnost	

Tabulka 1: Polovina počtu tahů s jednou pěticí

Ovšem pozor, tento výčet tahů není kompletní. Například tah 6 16 17 18 19 20 zde není vůbec zahrnut. V této tabulce jsme tedy uvažovali pouze tahy typu pětice–číslo, kde ono izolované číslo bylo větší než poslední číslo pětice. Kolik je ale tahů, kdy je ono izolované číslo menší než první číslo pětice?

Celá úloha je zřejmě symetrická a výše uvedenou tabulku bychom mohli pro tuto druhou, symetrickou možnost sestavit jako Tabulku 2.

V Tabulce 2 jsou tedy všechny tahy typu číslo–pětice, kde toto izolované číslo je menší než první číslo dané pětice. Všech možných tahů, ve kterých se objevuje pětice po sobě jdoucích čísel je tedy:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n=43} i = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 43 \cdot 44 = 1892. \tag{12}$$

Jiná možnost, jak najít počet všech tahů s jednou pěticí, by mohla být tato: Ke každé pětici můžeme zvolit zbylé číslo ze 44 možných – pět jsme už z osudí vytáhli,

49 48 47 46 45 ? $\in \{43, 42, \ldots, 1\}$	43 možností	$\sum_{i=1}^{43} i$
48 47 46 45 44 ? $\in \{42, 41, \ldots, 1\}$	42 možností	
47 46 45 44 43 ? $\in \{41, 40, \ldots, 1\}$	41 možností	
$\vdots$	$\vdots$	
7 6 5 4 3 1	1 možnost	

Tabulka 2: Druhá polovina počtu tahů s jednou pěticí

pokud jsme vylosovali pětici. Protože je každá pětice jednoznačně určena svým prvním číslem a poslední z nich je pětice 45 46 47 48 49, je tedy všech možných pětic 45. Ke každé z nich můžeme volit jedno ze zbylých 44 čísel, to je dohromady $44 \cdot 45 = 1980$ možností. Ovšem nyní jsme započítali i tahy, které obsahují šestice. Kolik takových tahů musíme odečíst? Pro dvě krajní pětice 1 2 3 4 5 a 45 46 47 48 49 je jen jedna možnost, jak zvolit zbývající číslo tak, aby jsme dostali šestici. V prvním případě je to číslo 6 a ve druhé číslo 44. Pro všechny ostatní případy můžeme ono krajní číslo volit ze dvou možností. Například pro pětici 21 22 23 24 25, vznikne šestice, pokud je zbylé číslo buď 20 nebo 26. Tedy pro dvě krajní pětice je pouze jedna možnost, pro 43 ostatních pětic máme dvě možnosti, jak volit poslední číslo. To je dohromady $2 \cdot 1 + 43 \cdot 2 = 88$ tahů. Všech tahů právě s jednou pěticí je tedy:

$$1980 - 88 = 1892. \tag{13}$$

Počty možností počítané prvním způsobem (12) a druhým způsobem (13) jsou samozřejmě stejné.

Ještě zjistíme pravděpodobnost tahů s jednou pěticí po sobě jdoucích čísel. S využitím vztahů (10), (9) a (13) platí:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{1892}{13\,983\,816} \doteq 1{,}35 \cdot 10^{-4}. \tag{14}$$

Jedna čtveřice a jedna dvojice po sobě jdoucích čísel

Zde je situace velmi podobná předešlému případu. Celá úloha je opět symetrická, polovinu všech možností můžeme zjistit například pomocí následující Tabulky 3. Symbolem $?_1$ je označeno menší z dvojice po sobě jdoucích čísel.

V Tabulce 3 jsme tyto tahy sestavovali tak, že jsme pevně zvolili jednu čtveřici a k ní pak uvažovali všechny možné dvojice, které k ní můžeme vybrat. Opět jsme si uvědomili, že každá dvojice je plně určena například svým menším prvkem $?_1$.

1 2 3 4	$?_1 \in \{6, 7, \dots, 48\}$	43 možností	$\sum_{i=1}^{43} i$
2 3 4 5	$?_1 \in \{7, 8, \dots, 48\}$	42 možností	
3 4 5 6	$?_1 \in \{8, 9, \dots, 48\}$	41 možností	
$\vdots$		$\vdots$	
43 44 45 46	48 49	1 možnost	

Tabulka 3: Polovina počtu tahů se čtveřicí a dvojicí

Ze symetrie úlohy plyne, že jsme takto našli jen polovinu tahů. Všech možných tahů s jednou čtveřicí a jednou dvojicí po sobě jdoucích čísel je tedy:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n=43} i = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 43 \cdot 44 = 1892. \tag{15}$$

Z logiky sestavování takovýchto tahů plyne, že takovýchto tahů je stejně jako tahů s jednou pěticí (12). Tedy i pravděpodobnost vylosování takového tahu musí být stejná jako v (14):

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{1892}{13\,983\,816} \doteq 1{,}35 \cdot 10^{-4}. \tag{16}$$

Právě jedna čtveřice po sobě jdoucích čísel

Všechny takové tahy budeme hledat následujícím postupem (viz. Tabulka 4). Nejdříve zvolíme pevně onu čtveřici, pak zvolíme pevně i menší ze dvou samostatných čísel a všechny možnosti pro volbu posledního čísla opět vyjádříme množinou. Pak čtveřici posuneme o jedno číslo a celý postup opakujeme. Z Tabulky 4 to zřejmě bude patrnější.

Zde ovšem počítáme pouze tahy typu čtveřice–číslo–číslo. Je jasné, že čtveřice může být také na druhém nebo na třetím místě. To jsou dohromady tři možnosti pro každý tah z tabulky. Například tahu 1 2 3 4 6 8 odpovídají další dva tahy: 1 3 4 5 6 8 a 1 3 5 6 7 8. Počet všech tahů s právě jednou čtveřicí po sobě jdoucích čísel je tedy (s využitím odvozeného vztahu (5)):

$$3 \cdot \sum_{j=1}^{n=42} \sum_{i=1}^{j} i = 3 \cdot \binom{n+2}{3} = 3 \cdot \binom{44}{3} = 39\,732. \tag{17}$$

Už jen zbývá dopočítat pravděpodobnost výskytu takovýchto tahů, s využitím vztahů (10), (9) a (17) platí:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{39\,732}{13\,983\,816} \doteq 2{,}84 \cdot 10^{-3}. \tag{18}$$

1 2 3 4	6	? $\in \{8, 9 \ldots, 49\}$	42 možností	$\sum_{i=1}^{42} i$	$\sum_{j=1}^{42} \sum_{i=1}^{j} i$
	7	? $\in \{9, 10, \ldots, 49\}$	41 možností		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	47	49	1 možnost		
2 3 4 5	7	? $\in \{9, 10 \ldots, 49\}$	41 možností	$\sum_{i=1}^{41} i$	
	8	? $\in \{10, 11, \ldots, 49\}$	40 možností		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	47	49	1 možnost		
$\vdots$				$\vdots$	
42 43, 44 45	47	49	1 možnost	$\sum_{i=1}^{1} i$	

Tabulka 4: Tahy s jednou čtveřicí

Dvě trojice po sobě jdoucích čísel

Nyní budeme hledat všechny takové tahy, všechny takové tahy, ve kterých se vyskytují dvě trojice po sobě jdoucích čísel. Budeme je hledat tak, že pevně zvolíme první trojici a budeme uvažovat, kolik máme možných voleb druhé trojice. V dalším kroku opět posuneme první trojici o jedno místo a zase spočítáme, kolik může být druhých trojic. Takto budeme postupovat pořád dále, až vyčerpáme všechny možnosti (viz Tabulka 5 – symbol $?_1$ označuje nejmenší číslo druhé trojice).

1 2 3	$?_1 \in \{5, 6, \ldots, 47\}$	43 možností	$\sum_{i=1}^{43} i$
2 3 4	$?_1 \in \{6, 7, \ldots, 47\}$	42 možností	
3 4 5	$?_1 \in \{7, 8, \ldots, 47\}$	41 možností	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
43 44 45	47 48 49	1 možnost	

Tabulka 5: Tahy se dvěma trojicemi

Všech tahů se dvěma trojicemi je tedy:

$$\sum_{i=1}^{43} = \frac{43 \cdot 44}{2} = 946. \tag{19}$$

Ještě dopočítáme pravděpodobnost výskytu tahů se dvěma trojicemi po sobě jdoucích čísel. Ze vztahů (10), (9) a (19) dostáváme:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{946}{13\,983\,816} \doteq 6{,}76 \cdot 10^{-5}. \tag{20}$$

Tři dvojice po sobě jdoucích čísel

Tyto tři dvojice budeme hledat tak, že vždy upevníme dvě z nich a spočítáme počet všech kombinací, jak se dá vybrat třetí dvojice. Pokud tedy pevně zvolíme dvojice 1 2 4 5 pak menší prvek třetí dvojice musí ležet v množině $\{7, \dots, 48\}$. Čísel v této množině je právě 42. Máme tedy 42 možností, jak vybrat tři dvojice tak, aby dvě z nich byly 1 2 4 5. Pokusme se popsat všechny takovéto možnosti vytvoření tří dvojic – viz Tabulka 6.

1 2	4 5	$?_1 \in \{7, \dots, 48\}$	42 možností	$\sum_{i=1}^{42} i$	$\sum_{j=1}^{42} \sum_{i=1}^{j} i$
	5 6	$?_1 \in \{8, \dots, 48\}$	41 možností		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	45 46	48 49	1 možnost		
2 3	5 6	$?_1 \in \{8, \dots, 48\}$	41 možností	$\sum_{i=1}^{41} i$	
	7 8	$?_1 \in \{9, \dots, 48\}$	40 možností		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	45 46	48 49	1 možnost		
$\vdots$				$\vdots$	
42 43	45 46	48 49	1 možnost	$\sum_{i=1}^{1} i$	

Tabulka 6: Konstrukce tří dvojic po sobě jdoucích čísel

Všech možných tahů, ve kterých se objeví právě tři dvojice je tedy $\sum_{k=1}^{42} \sum_{i=1}^{k} i$. Ze vztahu (5) víme, že platí:

$$\sum_{k=1}^{42} \sum_{i=1}^{k} i = \binom{44}{3} = \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{3!} = 1204 \text{ možností}. \tag{21}$$

Zajímavé je, že bychom se k tomuto počtu měli dostat podle kombinačního čísla $\binom{44}{3}$ také tak, že ze 44 prvků vybíráme 3. To skutečně můžeme. Pokud nám jde o právě tři dvojice po sobě jdoucích čísel, pak tyto dvojice můžeme také vybrat takovýmto myšlenkovým postupem:

- Nejdříve si musíme uvědomit, že každá dvojice je jednoznačně určena — jak už bylo zmíněno výše — svým nejmenším prvkem. Tyto tři dvojice jsou tedy jednoznačně vybrány svými nejmenšími prvky a ty jsou tři. Na každou z těchto dvojic tedy můžeme pohlížet jako na jeden prvek. To by vysvětlovalo, proč vybíráme tři prvky.

- Zbývá nám vysvětlit, proč vybíráme pouze ze 44 prvků. K tomu nám pomůže následující představa (viz [1]): Ve sběrnách Sportky v Polsku se ve vitríně se 49 čísly oznamuje výsledek losování rozsvícením vylosovaných čísel. Představme si tedy očíslované koule v řadě srovnané od 1 do 49 a že výsledek je zaznamenáván rozsvícením šesti koulí s vylosovanými čísly. Je to, jako by všechny koule byly bílé a po vylosování se zbarvily červeně. V našem případě to znamená, že máme mezi 43 bílých koulí umístit tři červené dvojice, tak aby žádná dvě spolu nesousedily. Umístěme tedy 43 koulí do řady a pokusme se spočítat kolik je takových míst, kde budou tři červené dvojice odděleny alespoň jednou bílou koulí. Jedno takové místo je na začátku, jedno na konci a pak zbývá ještě 42 míst mezi bílými koulemi. Celkem je tedy 44 takových míst, z nich máme vybrat tři. Počet všech možností je tedy $\binom{44}{3}$.

Zbývá ještě dopočítat pravděpodobnost tahu se třemi dvojicemi. S využitím vztahů (10), (9) a (21) platí:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{1204}{13\,983\,816} \doteq 8{,}61 \cdot 10^{-5}. \qquad (22)$$

Právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel

Opět se pokusme sestavovat takovéto dvojice. Začneme tak, že upevníme dvě dvojice a jedno číslo, druhé musí být prvkem nějaké množiny. Najdeme ji a zjistíme tak, kolik takových možných tipů existuje. Dále bude volné i první číslo. Opět zjistíme počet možností a celý postup opakujeme, dokud nevyčerpáme všechny možnosti. Vše je přehledně zachyceno v Tabulce 7.

Ovšem musíme si dát pozor na to, že takto spočítáme pouze číselné kombinace typu: dvojice–dvojice–číslo–číslo, ale ne už například kombinace typu číslo–dvojice–dvojice–číslo. Musíme se tedy ještě zamyslet nad tím, jak můžeme tuto skupinu nakombinovat. Máme tedy srovnat do řady prvky takovéto množiny: {číslo, číslo, dvojice, dvojice}. To je čtyřprvková množina, která má dva různé

1 2	4 5	7	? $\in \{9, \ldots, 49\}$	41 možností			
		8	? $\in \{10, \ldots, 49\}$	40 možností	$\sum_{i=1}^{41} i$		
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
		47	49	1 možnost			
	5 6	8	? $\in \{10, \ldots, 49\}$	40 možností			
		9	? $\in \{11, \ldots, 49\}$	39 možností	$\sum_{i=1}^{40} i$	$\sum_{j=1}^{41} \sum_{i=1}^{j} i$	
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
		47	49	1 možnost			
	$\vdots$				$\vdots$		
	44 45	47	49	1 možnost	$\sum_{i=1}^{1} i$		$\sum_{k=1}^{41} \sum_{j=1}^{1} \sum_{i=1}^{j} i$
2 3	5 6	8	? $\in \{10, \ldots, 49\}$	40 možností			
		9	? $\in \{11, \ldots, 49\}$	39 možností	$\sum_{i=1}^{40} i$		
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\sum_{j=1}^{40} \sum_{i=1}^{j} i$	
		47	49	1 možnost			
	$\vdots$				$\vdots$		
	44 45	47	49	1 možnost	$\sum_{i=1}^{1} i$		
$\vdots$						$\vdots$	
41 42	44 45	47	49	1 možnost	$\sum_{i=1}^{1} i$	$\sum_{j=1}^{1} \sum_{i=1}^{j} i$	

Tabulka 7: Zjištění počtu tahů se dvěma dvojicemi

prvky, z nichž každý se dvakrát opakuje. Uspořádat tuto množinu do řady je analogická úloha, jako uspořádat do řady prvky z množiny $\{1, 1, 2, 2\}$, nebo-li je to totéž jako hledat, kolik různých čtyřciferných čísel se dá vytvořit z prvků množiny $\{1, 1, 2, 2\}$. To jsou ale permutace s opakováním. Pro jejich počet platí vztah:

$$\mathcal{P}_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}, \tag{23}$$

kde n je počet prvků dané množiny a $k_1, k_2, \ldots, k_m$ jsou počty opakování jednotlivých prvků, přičemž platí, že $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. V našem případě se počet možností, srovnat do řady množinu {číslo, číslo, dvojice, dvojice}, dá zjistit za použití vztahu (23) takto:

$$\frac{4!}{2!.2!} = 6$$

Všech možných tahů, které obsahují právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel je tedy (k výpočtu použijeme vztahu (6)):

$$6 \cdot \sum_{k=1}^{41} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} i = 6 \cdot \binom{44}{4} = 814\,506. \tag{24}$$

Existuje tedy 814 506 tahů, které obsahují právě dvě dvojice po sobě jdoucích čísel.

Opět bychom tento výsledek dokázali odvodit i jinak. Jde-li nám o tahy, ve kterých se vyskytují právě dvě dvojice, znamená to (v souladu s tím, co bylo řečeno v předcházejícím odstavci), že musíme do řady 43 koulí umístit dvě dvojice a dvě samotné koule tak, aby žádné dva z těchto čtyř prvků nesousedily. Musíme je tedy umístit buď na začátek, nebo na konec této řady, nebo do některé z mezer mezi těmito koulemi. V řadě 43 koulí je 42 mezer a navíc můžeme použít i místo na začátku a na konci této řady. To je dohromady 44 míst. Vybíráme tedy čtyři místa ze 44, tj. $\binom{44}{4}$ možností. Ale navíc ještě pro každý z těchto výběrů musíme určit, na kterém místě budou ony dvojice a na kterém budou zbylá dvě čísla. Opět máme tedy seřadit čtyři prvky, které se opakují, můžeme tedy použít vztah pro permutace s opakováním (23). Takových možností je tedy 6. Opět se tedy dostáváme ke vztahu:

$$6 \cdot \binom{44}{4} = 814\,506. \tag{25}$$

Na závěr ještě dopočítáme pravděpodobnost vylosování tahů se dvěma dvojicemi po sobě jdoucích čísel. Zase využijeme vztahy (10), (9) a (24):

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{814\,506}{13\,983\,816} \doteq 0{,}0582. \tag{26}$$

Právě jedna dvojice po sobě jdoucích čísel

Nyní nás bude zajímat kolik je takových tahů, ve kterých se vyskytne jedna dvojice po sobě jdoucích čísel, a žádná ostatní čísla už spolu nesousedí.

Opět si představíme řadu 43 koulí a mezi budeme umisťovat jednu dvojici a čtyři samostatná čísla tak, aby společně žádné dva prvky nesousedili. Máme tedy umístit jednu dvojici a čtyři izolovaná čísla, to je dohromady pět prvků. Uvažovaná místa v řadě čtyřiceti tří koulí jsou opět začátek, konec a 42 mezer , tj. 44 možných míst. Vybíráme tedy 5 prvků ze 44, to znamená, že máme celkem $\binom{44}{5}$ možností. Ještě nám zbývá zjistit kolik je možností seřazení množiny jedné dvojice a čtyř izolovaných čísel. To jsou opět permutace s opakováním (23), v našem případě $\frac{5!}{1!.4!}$. Všech tahů s jednou dvojicí opakujících se čísel je tedy:

$$\frac{5!}{1! \cdot 4!}\binom{44}{5} = 5\,430\,040 \tag{27}$$

Tahů, ve kterých se vyskytuje právě jedna dvojice po sobě jdoucích čísel a kde jsou ostatní čísla od sebe oddělena, je tedy 5 430 040.

To je necelých pět a půl milionu tahů, což je poměrně dost. Jak velká bude pravděpodobnost, že v náhodném tahu Sportky se objeví právě jedna dvojice po sobě jdoucích čísel? S využitím vztahů (10), (9) a (27) platí:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{5\,430\,040}{13\,983\,816} \doteq 0{,}388 \quad \sim \quad 39\,\%. \tag{28}$$

Máme tedy pravděpodobnost 39 %, že náhodně vybraný tah losování Sportky obsahuje právě jednu dvojici po sobě jdoucích čísel. To je poměrně velká pravděpodobnost. Asi malokterý sázející tipuje na svém tiketu dvě po sobě jdoucí čísla.

Právě jedna trojice po sobě jdoucích čísel

Do těchto tahů samozřejmě nebudeme počítat tahy s trojicí a dvojicí ani se dvěma trojicemi. Opět využijeme stejnou úvahu jako v předchozím případě. Představíme si řadu 43 bílých koulí a do nich bychom chtěli umístit čtyři prvky (představme si je opět například jako čtyři červené koule). Proč čtyři? Jde přece o prvky trojice–číslo–číslo–číslo, tedy o čtyři různé prvky. Kolik máme možností umístit mezi 43 bílých koulí 4 červené? Můžeme je umístit na začátek nebo na konec této řady nebo mezi tyto koule. Mezer mezi těmito koulemi je 42, začátek a konec jsou další dvě možnosti, dohromady tedy 44 možností. Vybíráme tedy čtyři prvky ze 44. Ovšem u oné čtyřprvkové množiny trojice–číslo–číslo–číslo se prvek číslo opakuje třikrát. Jde tedy opět o permutace s opakováním (23). Tahů s jednou trojicí je tedy:

$$\frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \binom{44}{4} = 543\,004 \tag{29}$$

A pravděpodobnost výskytu takovýchto tahů je pak podle (10), (9) a (29) platí:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{543\,004}{13\,983\,816} \doteq 0{,}0388 \tag{30}$$

Jedna trojice a jedna dvojice po sobě jdoucích čísel

Opět využijeme stejnou úvahu jako v předchozím případě. Mezi 43 koulemi (a to včetně začátku a konce této řady) je tedy 44 míst. Do těchto míst nyní umisťujeme trojici prvků trojice–dvojice–číslo. Podle (8) máme tedy $\binom{44}{3}$ možností. Prvky trojice–dvojice–číslo tvoří tříprvkovou množinu, ve které se žádný prvek neopakuje. Pokud tedy pevně zvolíme mezery mezi řadou koulí, musíme ještě rozhodnout kolika způsoby můžeme do těchto tří mezer umístit tři prvky. Takových způsobů je ale stejně, jako je permutací tříprvkové množiny, a těch je $3!$. Pro počet všech tahů s jednou dvojicí a jednou trojicí tedy platí:

$$3! \cdot \binom{44}{3} = 3! \cdot \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{3!} = 44 \cdot 43 \cdot 42 = 79\,464. \tag{31}$$

Ještě musíme zjistit pravděpodobnost vylosování takovéhoto tahu, ta je podle vztahů (10), (9) a (31):

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{79\,464}{13\,983\,816} \doteq 0{,}00568. \tag{32}$$

Malá čísla

Nyní zjistíme počet tahů, ve kterých jsou jen čísla ostře menší než 25. Například tah 1 3 9 10 17 22 patří mezi takové tahy. Jejich počet zjistíme jednoduše. Stačí si jen uvědomit, že každý takovýto tah má šest čísel, která jsou vybrána z množiny $\{1, 2, \dots, 24\}$. Tato množina má 24 prvků. Všech hledaných tahů bude právě tolik jako šestiprvkových kombinací z 24 prvků (vztah (8)). Tedy:

$$\binom{24}{6} = 134\,596. \tag{33}$$

A pravděpodobnost výskytu takovýchto tahů je podle vztahů (10), (9) a (33):

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{134\,596}{13\,983\,816} \doteq 0{,}00963. \tag{34}$$

Velká čísla

Tím máme na mysli tahy, ve kterých se vyskytují jen čísla z množiny $\{26, 27, \ldots, 49\}$. Analogickou úvahou jako v předchozím případě zjistíme (obě množiny mají stejný počet prvků), že takových tahů je podle vztahu (33) přesně 134 596. Pravděpodobnost výskytu je stejná jako v (34).

Lichá čísla

Jsou takové tahy, které obsahují pouze čísla z množiny lichých čísel menších než 50, tj. $\{1, 3, 5, \ldots, 49\}$. Taková množina má 25 prvků, z těch opět vybíráme šestiprvkové podmnožiny. Podle vztahu (8) platí:

$$\binom{25}{6} = 177\,100. \tag{35}$$

A pro pravděpodobnost vylosování takovýchto tahů platí:

$$p = \frac{N_p}{N_m} = \frac{177\,100}{13\,983\,816} \doteq 0{,}0127. \tag{36}$$

Sudá čísla

Všechna sudá čísla od 1 do 49 můžeme zapsat do množiny $\{2, 4, 6, \ldots, 48\}$, která má 24 prvků. Počet tahů zjistíme tedy opět jako šestičlennou kombinaci z 24 prvků. Ze vztahu (33) už víme, že takovýchto tahů je 134 596. Pravděpodobnost výskytu je stejná jako v (34).

2.2 Analýza historie tahů Sportky v ČR

Na webových stránkách Sazky a.s.[2] je zdarma k dispozici historie všech tahů Sportky, a to jak pro nedělní, tak i středeční losování. Jak už bylo naznačeno v úvodu, číselné loterie mají v Českých zemích dlouhou tradici. První losování Sportky se uskutečnilo na konci dubna 1957. Od té doby proběhlo do dubna 2007 přesně 2596 tahů. Od ledna 1977 se losuje tzv. *dodatkové číslo*, to má ale smysl jen pro sázejícího, který uhodnul právě pět řádných čísel a toto dodatkové. V tom případě by vyhrál výhru ve druhém pořadí. Nás ale bude zajímat pouze oněch šest řádných losovaných čísel.

Pomocí jednoduchých programů[3] nalezneme počty jednotlivých anomálií. Výsledky jsou přehledně uvedeny v Tabulce 8. Asi nás překvapí, že jsme skutečně našli do-

[2] `http://www.sazka.cz`

[3] Jsou na přiloženém CD ve složce `programy/anomalie`. Jako programovací jazyk byl použit skriptovací jazyk PERL. Ve složce `historie_tahu/` je pak celá historie losovaných čísel od roku 1956.

	Neděle		Středa		Dohromady
	I. tah	II. tah	I. tah	II. tah	
Šestice	0	0	0	0	0
Pětice	2	0	0	0	2
Čtveřice a dvojice	1	1	0	0	2
Jedna čtveřice	11	8	0	0	19
Dvě trojice	0	0	0	0	0
Trojice a dvojice	9	7	3	1	20
Jedna trojice	114	79	28	25	246
Tři dvojice	2	1	0	0	3
Dvě dvojice	163	153	31	32	379
Jedna dvojice	1019	857	253	251	2380
Lichá čísla	21	23	15	9	68
Sudá čísla	18	22	8	4	52
Malá čísla	19	21	10	2	52
Velká čísla	29	25	6	4	64
Celkem tahů	2596	2184	629	629	6068

Tabulka 8: Nalezené absolutní četnosti jednotlivých zajímavých tahů

konce dva tahy, ve kterých šla jedna pětice po sobě jdoucích čísel. Byl to tahy z 50. týdne roku 1970, tehdy byla v prvním tahu Sportky vylosována čísla: 17 23 24 25 26 27. Podobný tah byl ten ze 42. týdne roku 1989: 17 18 19 20 21 26. Dodejme, že podle vztahu (14) je pravděpodobnost, že bude vylosována pětice po sobě jdoucích čísel, rovna 0,0135 %, což je zhruba podobná pravděpodobnost, jako pokud bychom chtěli, aby nám při hodu mincí padnul 13krát za sebou rub. Bez zajímavosti jistě není ani tah z 16. týdne roku 1998, tehdy byla v prvním tahu nedělního losování tažena čísla: 4 5 6 7 16 17 – tedy jedna čtveřice a jedna dvojice. Pravděpodobnost je to stejná, jako pro jednu pětici (čeho jsme si již všimli, když jsme rozebírali počty takových tahů).

Nyní nás bude zajímat porovnání vypočítané pravděpodobnosti a relativní četnosti, kterou jsme našli ve všech losováních (poslední sloupec Tabulky 8). Relativní četnosti pro jednotlivé anomálie budeme počítat následujícím způsobem:

$$r_i = \frac{\text{Počet tahů s anomálií } i}{\text{Celkový počet ověřovaných tahů}} \tag{37}$$

V našem případě byl celkový počet ověřovaných tahů 6068. Byly to výsledky losování z I. tahu nedělního losování, těch bylo od 16. týdne roku 1957 do 15. týdne

	Pravděpodobnost výskytu	Relativní četnost	Očekávaný počet	Skutečný počet
Šestice	$3{,}07 \cdot 10^{-6}$	—	0	0
Pětice	0,000 135	0,000 330	1	2
Čtveřice a dvojice	0,000 135	0,000 330	1	2
Jedna čtveřice	0,002 84	0,003 13	17	19
Dvě trojice	$6{,}76 \cdot 10^{-5}$	—	0	0
Trojice a dvojice	0,005 68	0,003 30	34	20
Jedna trojice	0,0388	0,0405	235	246
Tři dvojice	$8{,}61 \cdot 10^{-5}$	$49{,}4 \cdot 10^{-5}$	1	3
Dvě dvojice	0,0582	0,125	354	379
Jedna dvojice	0,388	0,392	2356	2380
Lichá čísla	0,0127	0,0112	77	68
Sudá čísla	0,009 63	0,008 57	58	52
Malá čísla	0,009 63	0,008 57	58	52
Velká čísla	0,009 63	0,0105	58	64

Tabulka 9: Porovnání pravděpodobností a relativních četností, očekávaného a skutečného počtu

roku 2007 přesně 2596. Dále pak ze II. tahu nedělního losování (který se začal losovat od 14. týdne roku 1965), těch bylo do 15. týdne roku 2007 přesně 2184. A konečně to byly tahy středečního losování, jehož oba tahy se losují od 15. týdne roku 1995. Jich bylo dohromady do 16. týdne roku 2007 přesně $2 \cdot 629 = 1258$. Dohromady máme tedy k dispozici historii $2596 + 2184 + 1288 = 6068$ tahů.

Spočítejme relativní četnost například pro tahy s jednou trojicí. Těch bylo dohromady 246, pro jejich relativní četnost tedy podle vztahu:

$$r_3 = \frac{246}{6068} = 0{,}0405. \tag{38}$$

Výsledky pro všechny ostatní tahy, které nás zajímají, jsou v Tabulce 9.

V Tabulce 9 jsou také porovnány skutečné a očekávané počty výskytu každé anomálie v 6068 tazích. Skutečné počty, jsou celkové hodnoty z Tabulky 8, jsou to ty, které jsme opravdu našli v bohaté historii losování Sportky. Očekávané hodnoty zjistíme pomocí pravděpodobnosti, kterou jsme si u každé anomálie vypočítali. Pokud provedeme n losování a o nějakém jevu víme, že nastane s pravděpodobností p, pak je tento očekávaný počet roven součinu této pravděpodobnosti p a počtu opakování n, tedy $p \cdot n$.

Jaký tedy bude očekávaný počet tahů s jednou trojicí po sobě jdoucích čísel, pokud provedeme 6068 losování? Podle vztahu (30) je tato pravděpodobnost 0,0388. Tahů s jednou trojicí můžeme tedy očekávat:

$$n \cdot p = 6068 \cdot 0{,}0388 = 235 \text{ tahů}. \tag{39}$$

Očekávané počty pro ostatní zajímavé tahy jsou v Tabulce 9. Je dobré si povšimnout, že očekávané a skutečné počty se nijak významně neliší.

3 TEST LOSOVACÍCH ZAŘÍZENÍ

Sportka je samozřejmě stejně tak jako ruleta hazardní hra. Z historie rulety víme, že se hráči nejednou pokoušeli využít slabin losovacího zařízení. Tak jako se to v roce 1897 podařilo Angličanovi Josephu Jaggersovi. Když poprvé vkročil do herny v Monte Carlu, ve které bylo šest ruletových kol, byl jimi jako mechanik strojů pro zpracování bavlny tak fascinován, že hned druhý den najal šest lidí k tomu, aby u jednotlivých stolů nenápadně zaznamenávali vylosovaná čísla. U ruletových stolů bývá zvykem, že se losování koná zhruba 55krát za hodinu. Vezmeme-li v úvahu, že kasino mělo otevřeno asi 8 hodin denně, mohl Jaggers za týden získat historii 3000 losovaných čísel pro každou ruletu. Po týdnu tato data analyzoval a došel k závěru, že u šesté rulety padají díky poškození jejího mechanického zařízení některá čísla častěji, něž by měl být obvyklý teoretický průměr.

Jaggers se tedy začal u této rulety hrát a začal na zjištěná čísla sázet. Jakmile došlo k prvním výhrám, začal zvyšovat sázky. Když už vyhrával asi 10 000 dolarů, začali si ho všímat dva inspektoři z onoho kasína. Když už Jaggers vyhrával 50 000 dolarů, přibylo pozorovatelů z řad personálu, mysleli si totiž, že musí jít o nějaký podvod. V jedenáct večer, když už se herna zavírala, odnášel si Jaggers necelých 70 000 dolarů. Příští den se samozřejmě do herny vrátil a opět sázel ta samá čísla. Aby zmátl tři inspektory, kteří sledovali téměř každý jeho pohyb, sázky prokládal dalšími na zcela náhodná čísla. To ale nikoho z personálu neuklidnilo, neboť druhý den vyhrál Jaggers do té doby neuvěřitelných 300 000 dolarů. Pro kasino se vše ještě zhoršilo tím, že ostatní hráči u stolu začali sázet přesně podle něho.

Kasinu už pomalu začalo docházet, že tato ruleta musí být nějakým způsobem nevyvážená. Vedení tedy rozhodlo, že během noci budou jednotlivá ruletová kola promíchána. Než tento úskok ze strany herny Jaggers následujícího dne prohlédl, přišel o sumu 200 000 dolarů. Nebyl ale hloupý, a tu „svou" ruletu v herně našel podle malého škrábance na okraji mísy ruletového kola. Přesunul se tedy k němu a dalšími sázkami nahromadil dalších 350 000 tisíc dolarů. To vše v součtu s předchozími dny dalo dohromady téměř 450 000 dolarů. Zoufalé vedení herny řešilo vzniklou situaci radikálně. Poslali kurýra s prohrávajícím ruletovým kolem spěšně k výrobci rulety do Paříže. Tamní experti bleskově poznali, že problém bude v kovových zarážkách na okraji ruletového kola. Okamžitě bylo rozhodnuto vyměnit je za jiné. Kurýr se stihl vrátit do Monte Carla nejen s upraveným ruletovým kolem, ale i se sadou náhradních zarážek pro ostatní rulety.

Samozřejmě vše bylo učiněno tajně, tak aby Jaggers nepojal ani nejmenší náznak podezření. Následující den se Jaggers opět objevil v herně. Všichni lidé z vedení kasina byli plni dychtivého očekávání, co se bude dít, a věřili, že Angličan všechny své vyhrané peníze (o nichž si mysleli, že je získal neoprávněně) zpátky prohraje. Jaggers si opět vybral označenou ruletu a začal hrát. Na konci dne už prohrával rovných 75 000. Došlo mu, že kasino dalo zřejmě nějakým způsobem ruletu do pořádku, a další den se s vyhranými 325 000 vrátil zpět do Anglie.

3.1 Jednotlivá losovací zařízení Sportky

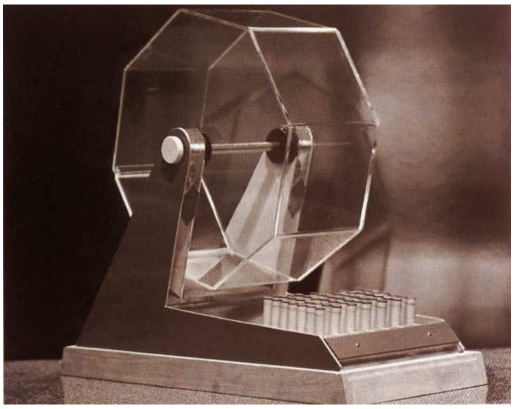
Co nás bude zajímat nyní je tedy nasnadě. Během více než padesátileté historie Sportky se losovací zařízení, která se používala k losování jednotlivých tahů, velmi často měnila. Sice nevíme, ve kterém losovacím týdnu došlo k výměně losovacích zařízení, zhruba ale víme, že jednotlivá zařízení byla používána v obdobích:

1. v letech 1957–1965
2. v letech 1965–1972
3. v letech 1972–1976 (viz Obrázek 4 na straně 34)
4. v letech 1976–1988 (viz Obrázek 8 na straně 39)
5. v letech 1988–1993 (viz Obrázek 12 na straně 44)
6. v letech 1993–2007

Odkud víme, že to byla právě tato léta? Minimálně můžeme z fotografií v [6] usoudit na léta: 1957–1972, 1972–1976, 1976–1988, 1988–1993 a 1993–2007. V roce 1965 se událo ve Sportce mnoho změn: malinko se zefektivnil příjem sázenek, přibyl druhý tah. S druhým tahem musela vzniknout i kopie losovacího zařízení. Dá se předpokládat, že v té době Sazka raději nechala vyrobit dvě nová stejná losovací zařízení. Proto dělení 1957–1972 zjemníme na: 1957–1965 a 1965–1972.

Ne vždy se ale používalo jen jedno losovací zařízení, byly například prázdninové tahy, které se losovaly jen na Slovensku, jiné v Čechách atd. Pro naši hrubou analýzu, ovšem budeme předpokládat, že se jednotlivá zařízení používala po celou výše uvedenou dobu. Ještě poznamenejme, že stejný tip losovacího zařízení byl většinou vyroben ve dvou exemplářích, které se používaly k losování I. a II. tahu.

Protože celou historii losovaných čísel, máme díky webu Sazky a.s. k dispozici, použijeme z této historie vždy tu část, která odpovídá době, kdy se jednotlivá losovací zařízení používala. Sice nevíme, ve kterém týdnu toho kterého roku došlo



Obrázek 1: Záložní losovací zařízení

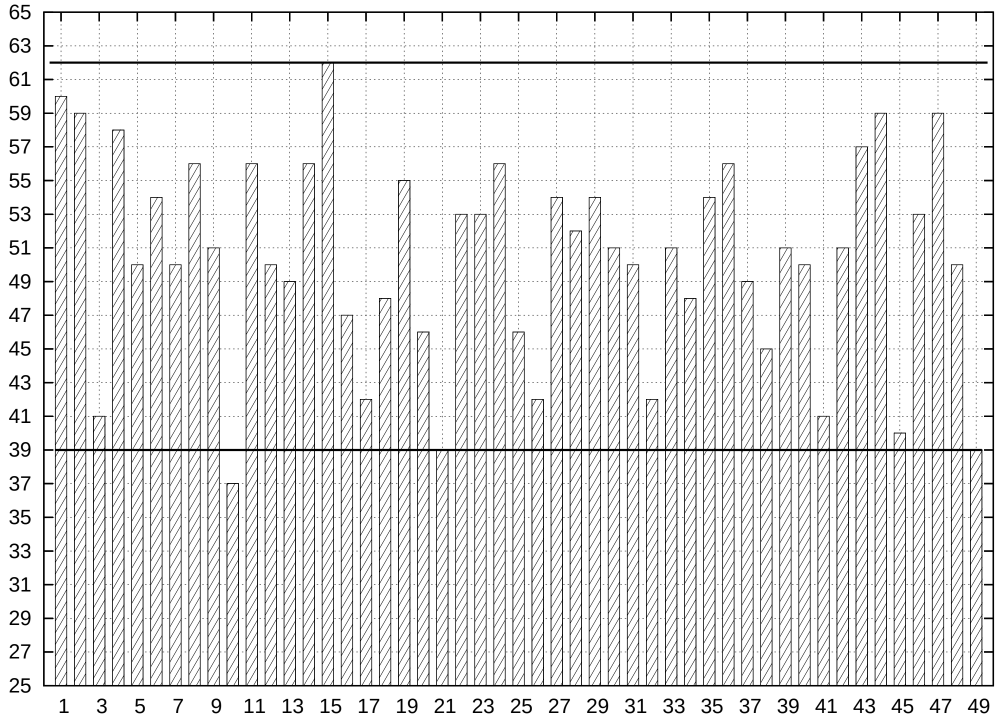
k výměně zařízení, pokud budeme ale zkoumat o deset nebo dvacet tahů navíc, neměl by to být problém. Například pokud se nějaké zařízení používalo 12 let — tak tomu bylo u zařízení z let 1976–88 — bylo na něm za tuto dobu vylosováno 624 tahů. Pokud tedy zahrneme nějakých deset tahů navíc, jsou to necelá 2 % a staticky jsou pro nás bezvýznamná.

Víme také, že se ve výjimečných případech losovalo ze záložního losovacího zařízení. Tvořil ho jednoduchý losovací buben, ve kterém bylo 49 válečků. V každém válečku byl svinutý papír s napsaným číslem (viz Obrázek 1). Sice nevíme přesně, kolik takovýchto tahů bylo provedeno, víme jen, že bylo použito ve „výjimečných případech“ [6, str. 228]. Těch bylo zřejmě jen velmi málo. Statisticky je pro nás tedy takové zařízení nezajímavé.

3.2 Losovací zařízení z let 1957–1965

V letech 1957–1965 se losoval pouze jeden tah, od 14. týdne roku 1965 se losuje i druhý tah. To prakticky znamená, že k losovacímu zařízení, které bylo použito pro losování prvního tahu, byla buď vyrobena jeho přesná kopie nebo (jak už bylo naznačeno) bylo vyrobeno úplně nové losovací zařízení, a to ve dvou identických exemplářích. Pro každé zařízení (tedy pro každé období) budeme zkoumat četnosti vylosování každého čísla.

První losování proběhlo v 16. týdnu roku 1957, poslední, ve kterém se losoval jen jeden tah, proběhlo v neděli v 13. týdnu roku 1965. Dohromady proběhlo za tuto dobu celkem 412 losování. Graf na Obrázku 2 udává kolikrát bylo v této době vytaženo každé číslo. Na horizontální ose je všech 49 čísel (pro přehlednost jsou očíslována jen lichá), na svislé ose jsou pak četnosti. Například číslo 10 bylo vylosováno přesně 37krát.



Obrázek 2: Četnosti losovaných čísel 1957–1965

Bernoulliho posloupnost nezávislých pokusů

Nyní si položme otázku, jaký počet vylosování konkrétního čísla by nám měl při 412ti provedených tazích přijít příliš malý nebo naopak příliš velký. Pěkná metoda je uvedena v [2]. Máme tedy n losování a ptáme se s jakou pravděpodobností vylosujeme nějaké konkrétní číslo právě k-krát. To je samozřejmě o Bernoulliho posloupnost nezávislých pokusů [5, str. 116–118]:

Mějme n nezávislých pokusů z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p nebo nezdarem s pravděpodobností $q = 1 - p$. Potom pravděpodobnost jevu $\mathsf{A_k}$, že právě k pokusů bude zdařilých je:

$$p(\mathsf{A_k}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{40}$$

V našem případě je počet všech losování $n = 412$, k je pak četnost, se kterou bylo nějaké číslo losováno. Například pro číslo 10, které bylo vylosováno v 37 tazích je $k = 37$. Pravděpodobnost p je v našem případě pravděpodobnost vylosování jednoho konkrétního čísla. Losujeme 6 čísel ze 49, proto je $p = \frac{6}{49}$. Pravděpodobnost jevu opačného — dané číslo nebude mezi šesti vylosovanými (a bude tedy mezi 43 nevylosovanými) — je jednoduše $q = 1 - \frac{6}{49} = \frac{43}{49}$.

Ještě si uvědomíme, že pro jev $\mathsf{A_k}$ (číslo bude taženo právě k-krát) musí platit, že jistý jev je, že číslo buď nebude losováno v žádném tahu nebo právě v k-tazích, kde $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Nebo-li:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathsf{A_k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 \tag{41}$$

Nyní bychom chtěli o nějaké četnosti prohlásit, že pokud nastane v n tazích, není losovací zařízení spravedlivé. Například pokud by bylo nějaké číslo ve 412ti tazích taženo dvakrát. Chtěli bychom tedy provést nějaký statistický test. To bývá zvykem provádět na hladině pravděpodobnosti 95 %. Hledáme nejmenší četnost, o níž může s pravděpodobností 95 % říct, že se nestane. Stane se tedy s pravděpodobností maximálně rovnou 5 %, nebo-li s využitím vztahu (41):

$$\binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{k_1} p^{k_1} q^{n-k_1} \leq 0{,}05 \tag{42}$$

Což můžeme zapsat pomocí sumy jako:

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \leq 0{,}05 \tag{43}$$

Číslo k_1 je maximální číslo, pro které jsou nerovnice (42) resp. (43) splněny. Pokud tedy bylo některé číslo taženo s četností menší než k_1, znamená to, že losovací zařízení nelosuje spravedlivě, ale naopak znatelně méně často losuje některá čísla.

Analogicky by to mělo platit pro velké četnosti. Rozpoznáme tak četnosti, které jsou příliš vysoké. Podle vztahu (43) tedy příliš vysoké četnosti poznáme podle vztahů:

$$\binom{n}{n} p^n q^0 + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q^1 + \binom{n}{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + \binom{n}{n-k_2} p^{n-k_2} q^{k_2} \leq 0{,}05 \tag{44}$$

Což můžeme zapsat pomocí sumy jako:

$$\sum_{i=k_2}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \leq 0{,}05 \tag{45}$$

Kde k_2 je nejmenší číslo, pro které jsou ještě nerovnice (44) resp. (45) splněny.

V případě losovacího zařízení z let 1957-1965 jsme tato čísla našli pomocí jednoduchého programu[4]. Nalezené hodnoty jsou v našem případě $k_1 = 39$ a $k_2 = 62$, jsou vyneseny silnými čarami v grafu na Obrázku 2, na straně 28.

Z tohoto grafu je také vidět, že číslo 10 bylo losováno pouze 37krát, což je málo. S pravděpodobností 95 % můžeme tedy říct, že losovací zařízení, které se

[4]je opět přiložen na CD ve složce `/programy/cetnosti`. Kvůli rychlosti výpočtu je napsán v jazyce kalkulačky `bc`.

používalo od začátku až do 13. sázkového týdne roku 1965, **nelosovalo spravedlivě**, protože losovalo číslo (10) méně často, než se dalo předpokládat.

Ovšem způsob výpočtu minimální četnosti k_1 a maximální četnosti k_2 podle vztahů (43) a (45) je problematický. Nejde o problém teoretický, ale praktický. Pokud si uvědomíme, že například už jen pro náš případ, kdy $n = 412$ se ve vztahu (43) objeví členy:

$$\binom{412}{412}\left(\frac{6}{49}\right)^{412}\left(\frac{43}{49}\right)^{0}+\binom{412}{411}\left(\frac{6}{49}\right)^{411}\left(\frac{43}{49}\right)^{1}+\ldots+\binom{412}{62}\left(\frac{6}{49}\right)^{62}\left(\frac{43}{49}\right)^{350} \tag{46}$$

Například číslo $\left(\frac{6}{49}\right)^{412} \doteq 1{,}728 \cdot 10^{-376}$. Po výpočetním softwaru tedy nutně požadujeme, aby počítal s přesností alespoň na 400 desetinných míst. To jednak prodlužuje výpočet (časově), jednak je pro vysoká n celý tento postup nalezení minimální a maximální četnosti k_1 a k_2 nepoužitelný.

Centrální limitní věta

Ukážeme si tedy ještě jednu metodu, jak zjistit, zdali dané losovací zařízení losuje spravedlivě. Ze statistiky víme [4, str. 115-120], že tento test můžeme provést pomocí centrální limitní věty. Popíšeme si ho na příkladu čísla (10). Zkoumejme tedy, zdali číslo (10) nebylo losováno méně často než by mělo, tedy zda dané losovací zařízení neznevýhodňuje některá čísla. Zajímá nás tedy odhad pravděpodobnosti vylosování čísla (10).

Celkem tedy proběhlo 412 losování a číslo (10) bylo taženo právě 37krát. Zaveďme si tedy náhodné veličiny $X_1, \ldots X_{412}$ s alternativním rozdělením $A(P)$, kde úspěch ($X = 1$) nastane, je-li v nějakém tahu vylosováno číslo (10), a neúspěch ($X = 0$) pokud je vylosováno jiné číslo než (10). Bodový odhad pravděpodobnosti, že v nějakém tahu bude vylosováno i číslo (10): $\overline{X} = \frac{37}{412} = 0{,}08980$, výběrový rozptyl budeme počítat podle vztahu:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \tag{47}$$

což v našem případě můžeme psát jako:

$$S^2 = \frac{1}{411}\sum_{i=1}^{412}\left(X_i - \frac{37}{12}\right)^2 = \frac{1}{411}\Big(37\cdot(1-0{,}09890)^2 + 375\cdot(0-0{,}09890)^2\Big) \tag{48}$$

$$S \doteq 0{,}08191 \tag{49}$$

Ke vztahu (48) ještě dodejme, že veličina X_i nabývá v 37mi případech hodnoty $X_i = 1$ a ve zbylých případech ($412 - 37 = 375$) je pak $X_i = 0$ (číslo nebylo vylosováno).

Pro intervalový odhad střední hodnoty na hladině pravděpodobnosti α platí podle centrální limitní věty:

$$\mathcal{I} = \left\langle \overline{X} - u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}} \right\rangle \tag{50}$$

kde $u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ je kritická hodnota normálního rozdělení. Ta se dá najít ve statistických tabulkách [4]. V našem případě bude hladina pravděpodobnosti $\alpha = 5\,\%$, a kritickou hodnotu $u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}96$. Tvrzení o spravedlivosti losovacího zařízení si tedy můžeme dovolit potvrdit nebo vyvrátit s pravděpodobností 95 %. V našem případě dostáváme odhad pravděpodobnosti vylosování čísla 10 v některém tahu:

$$\mathcal{I} = \left\langle 0{,}08980 - 1,96 \cdot \frac{0{,}08191}{\sqrt{492}};\ \ 0{,}08980 + 1,96 \cdot \frac{0{,}08191}{\sqrt{492}} \right\rangle \tag{51}$$

$$\mathcal{I} = \langle 0{,}08257;\ 0{,}09703 \rangle \tag{52}$$

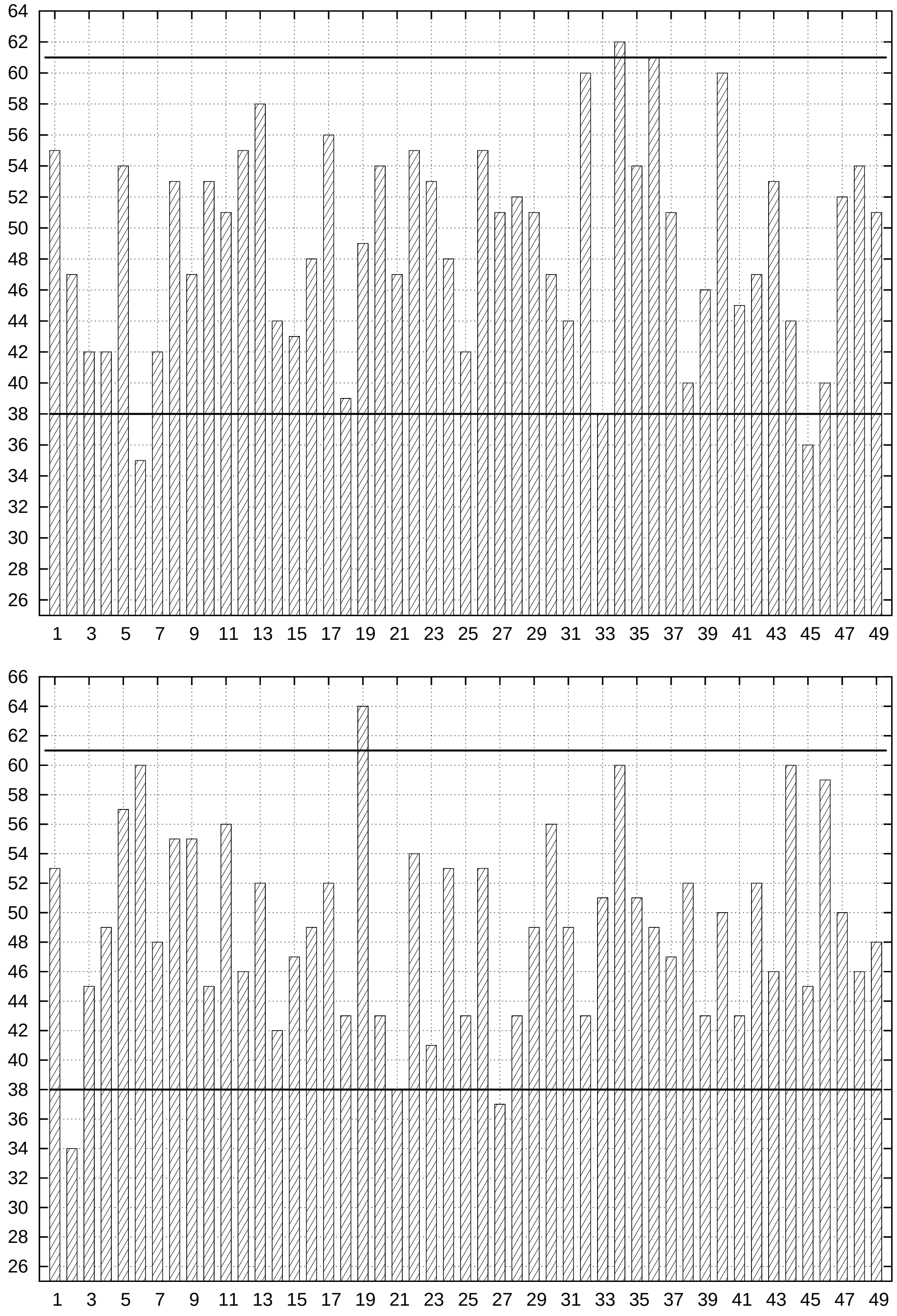
Pravděpodobnost vylosování čísla 10 by tedy měla ležet v intervalu $\mathcal{I}$. Pokud by tato losování byla spravedlivá, pak by tato pravděpodobnost byla pro každé číslo stejná, tj. $p = \frac{6}{49} = 0{,}12245$. Losujeme totiž 6 čísel ze 49. V našem případě, ale $p \notin \mathcal{I}$. Pravděpodobnost p je větší než horní mez intervalu $\mathcal{I}$, což znamená, že číslo 10 bylo losováno méně častěji než by tomu mělo být. Toto losovací zařízení tedy **není spravedlivé**, protože znevýhodňuje číslo 10.

Pokud tedy chceme zjistit, zda můžeme na hladině pravděpodobnosti 5 % o nějakém losovacím zařízení prohlásit, že losuje nespravedlivě, museli bychom intervalové odhady (jako byl ten (52)) dopočítat zvlášť pro každé číslo. To jsme skutečně udělali a výsledky jsme přehledně zapsali do Tabulky 10 v příloze na straně 56. Tučně jsou zvýrazněny intervaly, které nevyhovují. V tomto případě je to pouze číslo 10.

3.3 Losovací zařízení z let 1965–1972

Připomeňme, že od 14. týdne roku 1965 se losují dva tahy. Budeme tedy proto uvažovat dvě losovací zařízení — pro první a pro druhý tah. Poznamenejme, že kdyby tato zařízení měla nějakou výrobní chybu, musela by se tato chyba projevit na obou zařízeních. Protože se ale dá předpokládat, že před tím než se zařízení začne používat k losování jednotlivých tahů, provádí s ním pracovníci Sazky jistě řadu testů. Případné odchylky, které by se nám podařili najít, tedy asi budou pro každé zařízení jiné.

Od 14. týdne roku 1965 do konce roku 1972 proběhlo přesně 401 losování. Každé z těchto losování mělo I. a II. tah, které budeme analyzovat zvlášť. S využitím



Obrázek 3: Četnosti losovaných čísel pro I. a II. tah 1965–1972

vztahů (43) a (45) na straně 29 opět najdeme čísla k_1 a k_2, kde k_1 je největší možný sčítací index takový, pro který je ještě vztah (43) splněn. Koeficient k_2 je naopak nejmenší možný, pro který je ještě vztah (45) splněn. Čísla k_1 a k_2 jsou tedy horní a dolní odhad četnosti losování každého čísla na hladině pravděpodobnosti 95 %. Pro 401 losování platí, že $k_1 = 38$ a $k_2 = 61$. Protože předpokládáme, že I. a II. tah se losují na stejném zařízení, a že obě zařízení se použila pro všech 401 losování, musí nalezené četnosti k_1 a k_2 samozřejmě platit pro oba tahy.

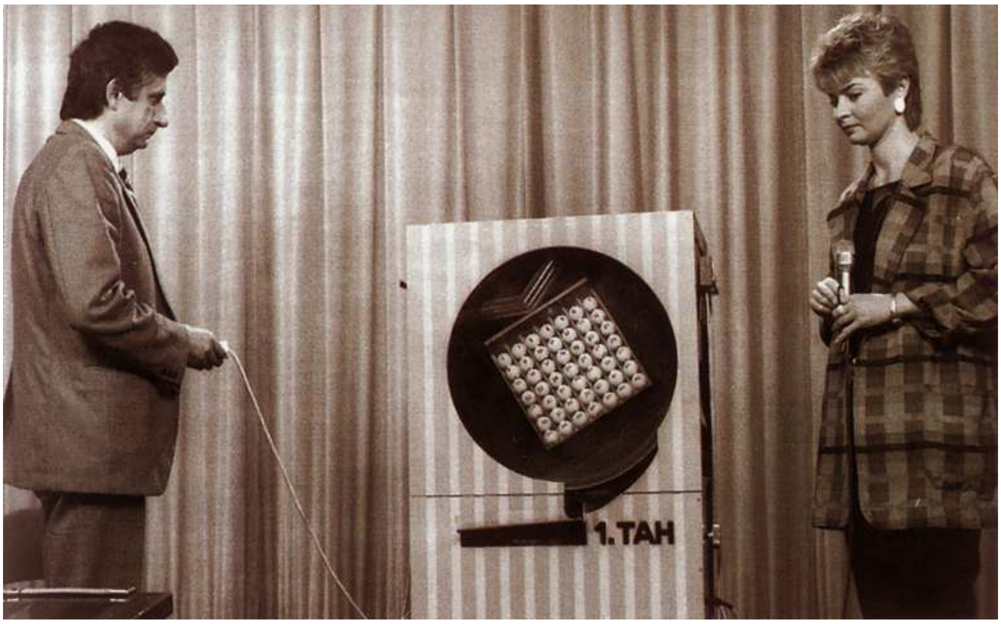
Četnosti jednotlivých čísel pro první a druhý tah jsou na Obrázku 3. Silnou čarou je zvýrazněna minimální a maximální četnost při pravděpodobnosti 95 %. Nejmenší předpokládaná četnost je $k_1 = 38$. Ovšem číslo 6 bylo v prvním tahu losováno 35krát a číslo 46 36krát. Také jsme zjistili, že maximální četnost by měla být $k_2 = 61$. Číslo 34 bylo ovšem v prvním tahu losováno 62krát. To znamená, že losovací zařízení, které se používalo k losování čísel prvního tahu **nebylo spravedlivé**, protože znevýhodňovalo čísla 6 a 46 a naopak zvýhodňovalo číslo 34.

Podobná situace je i ve druhém tahu. Méně častěji, než bychom na hladině pravděpodobnosti 95 % předpokládali, byla tažena čísla 2 (bylo taženo 34krát) a 27 (bylo taženo 37krát). Naopak, častěji než očekáváme bylo vylosováno číslo 19. Ani losovací zařízení, které se používalo pro losování druhého tahu Sportky v letech 1965–1972, tedy také **nelosovalo spravedlivě**.

Ke stejnému závěru bychom samozřejmě došli, pokud bychom podle vztahu (50) na straně 31 počítali odhady pravděpodobností. Tyto odhady jsou pro oba dva tahy a pro každé číslo uspořádány v Tabulce 11 v přílohách na straně 57. Pravděpodobnost vylosování libovolného čísla je v každém tahu $p = \frac{6}{49} = 0{,}122$. Pravděpodobnost je počet příznivých případů ku počtu všech možných, losuje se totiž 6 čísel ze 49. U každého intervalového odhadu tedy musíme zjistit, zdali $p \in \mathcal{I}$. U čísel zmíněných výše platí, že $p \notin \mathcal{I}$. Tyto intervaly jsou zvýrazněny tučně.

3.4 Losovací zařízení z let 1972–1976

Dalším obdobím, které budeme zkoumat je rozmezí let 1972–76. Protože nevíme, kdy přesně nastala výměna losovacích zařízení budeme zkoumat toto období celé, to znamená od 2. týdne roku 1972 do 52. týdne roku 1976. 1. ledna 1972 bylo totiž v sobotu, proto je odpovídající týden označen jako 53. týden roku 1971. Týden, který začal v pondělí 3. ledna 1972 je pak označen jako 2. týden roku 1972. Tolik pro vysvětlení, proč začínáme až od druhého týdne. Během těchto 4 let máme

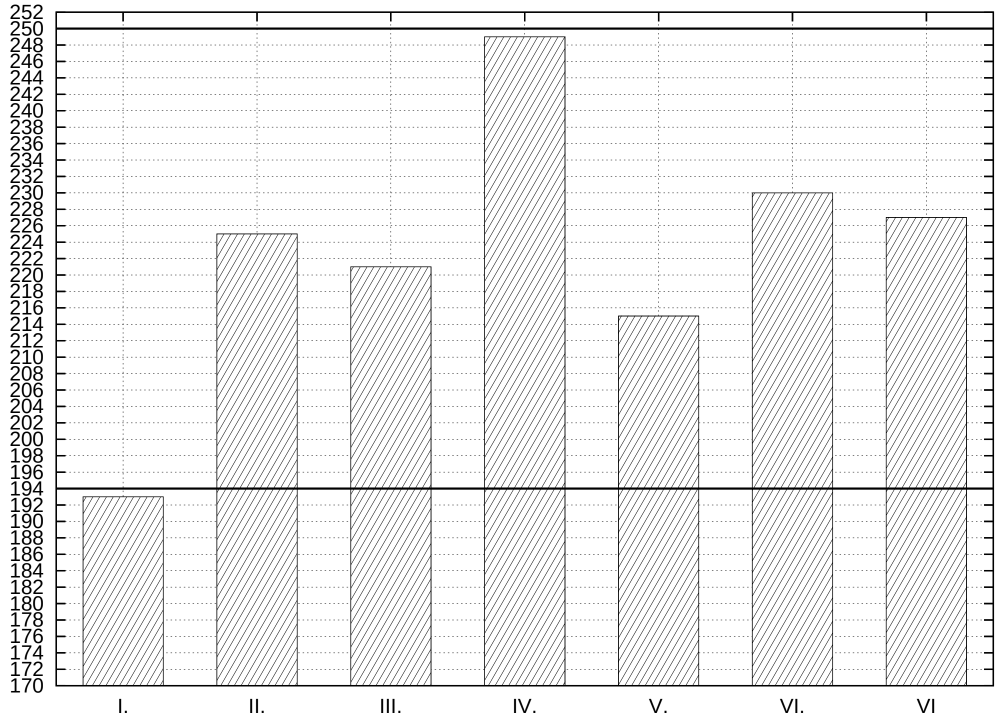


Obrázek 4: Zařízení, které se používalo v letech 1972–1976

k dispozici historii pouze 260ti tahů. Toto rozmezí vychází z fotografie v [6, str. 227], tato fotografie je na Obrázku 4. Podíváme-li se na toto zařízení, vidíme, že je určeno pouze pro jeden tah. Taky je vidět, že kvůli snazší kontrole losovacího zařízení, která probíhala před každým losováním, byly losované míčky srovnány podle hodnot do sedmi přihrádek. V první byla čísla 1 8 15 22 29 36 43 (jsou to čísla, která dávají po dělení 7mi zbytek 1). V druhém sloupci jsou čísla 2 9 ⋯ 44 (jsou to čísla, která dávají po dělení 7mi zbytek 2). Těchto sloupců je 7, v posledním z nich jsou čísla 7 14 ⋯ 49. Pro tato zařízení tedy nebudeme hledat jen četnosti jednotlivých čísel, ale porovnáme i četnosti každého sloupce.

Pokud spočítáme četnosti každé takové skupiny, zjistíme, že se liší jen velmi málo. To platí pro oba dva tahy. Obě losovací zařízení se tedy z tohoto pohledu chovají vyváženě. Grafy jednotlivých četností jsou na přiloženém CD v adresáři `/TeX/grafy/graf_72_sloupce_1t.ps` a `/TeX/grafy/graf_72_sloupce_2t.ps`.

Další možnost, jak tato čísla sloučit do skupin je podle pořadí čísel v jednotlivých sloupcích. Podle Obrázku 4 je zřejmé, že nejvýše v jednotlivých sloupcích jsou čísla 1 2 ⋯ 7. Losovací zařízení funguje tak, že po roztočení části, ve které jsou srovnány míčky, dojde k odklopení přepážky, která je nad touto první vrstvou. První „sedmice“ čísel tedy vypadne do losovacího bubnu nejdříve. Ve druhé „vrstvě“ jsou čísla 8 9 ⋯ 15 — těchto 7 čísel se dostane do osudí jako druhá „sedmice“ v pořadí. Tak můžeme pokračovat dále, v poslední vrstvě jsou čísla 44 45 ⋯ 49. Tato čísla se dostanou do osudí jako poslední. Osoba, která



Obrázek 5: Četnosti skupin losovaných čísel pro druhý tah 1972–1976. Sloupec I. je četnost skupiny 1–7, sloupec II. je četnost skupiny 8–15, atd. Silnou čarou jsou vytaženy odhady minimální a maximální četnosti pro hladinu pravděpodobnosti 98 %.

losování provádí (což byli většinou úspěšní sportovci), ovládá losovací zařízení tak, že v okamžiku, kdy jsou míčky v osudí promíchány, uvolní tlačítkem na ovladači dolní záklopku, která propustí jeden míček. To se opakuje 6krát pro každý tah.

Všechna čísla, která byla vylosována v tomto období, jsme tedy rozdělili do těchto sedmi skupin a spočítali celkový počet vylosovaných čísel v každé skupině. Zajímavé jsou výsledky pro druhý tah, které jsou v grafu na Obrázku 5. Podle vztahu (43) na straně 29 jsme opět našli nejmenší a největší četnosti k_1 a k_2. Výsledky jsou překvapivé. Odhad nejmenší četnosti jsme tentokrát prováděli pro pravděpodobnost 98 %. Vztah (43) se pak ovšem změní:

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \leq 0{,}02 \tag{53}$$

V tomto případě je počet všech vylosovaných čísel $n = 6 \cdot 260 = 1560$ (losuje se 6 čísel v každém z 260ti tahů). Pravděpodobnost p znamená v tomto případě pravděpodobnost, že vylosované číslo bude patřit například do první „sedmice“. Protože každá „sedmice“ obsahuje stejně prvků je jasné, že stejná pravděpodobnost to bude pro druhou, třetí až sedmou „sedmici“. Počet příznivých případů, kdy vylosované číslo patří do nějaké pevně zvolené „sedmice“ je 7 (musí to být jedno z čísel této „sedmice“). Všech možností, jak losovat jedno číslo, je samozřejmě 49, pro pravděpodobnost p tedy platí $p = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$. A konečně q je pravděpodobnost jevu opačného, tedy že vylosované číslo nepatří do zvolené „sedmice“, takže $q = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = \frac{42}{49}$.

Největší číslo k_1, které ještě splňuje tento vztah je $k_1 = 194$ Vztah pro horní odhad bychom opět získali pouze upravením pravé strany ve vztahu (45). Protože je ale výpočet velmi časově náročný[5], nebudeme pro výpočet horního odhadu používat vztahu (45). Stačí si totiž uvědomit, že pokud bylo celkem losováno $5 \cdot 52 \cdot 6 = 1560$ čísel[6], měla by být četnost každé skupiny stejná, totiž $1560 \cdot \frac{1}{7} \doteq 222$. Máme-li totiž nějaký jev, který nastane s pravděpodobností $p = \frac{1}{7}$, a tento jev se n-krát opakuje, můžeme očekávat, že nastane v $n \cdot p$ případech, což je *střední hodnota* tohoto jevu[7]. Z vlastnosti *binomického rozdělení* víme (např. [9]), že graf jednotlivých četností musí být symetrický podle vertikální osy, která prochází jeho maximem (viz Obrázek 6).

Jeho maximum je samozřejmě právě v hodnotě 222, což je střední hodnota četnosti každé „sedmice“. Protože víme, že na hladině pravděpodobnosti 98 % je pro 1560 losování dolní odhad četnosti $k_1 = 194$, mělo by ze symetrie alternativního rozdělení musí platit, že pokud $222 - 194 = 28$, pak by očekávané četnosti měly být v rozmezí 222 ± 38. Maximální četnost na hladině pravděpodobnosti 98 % je tedy $222 + 28 = 250$.

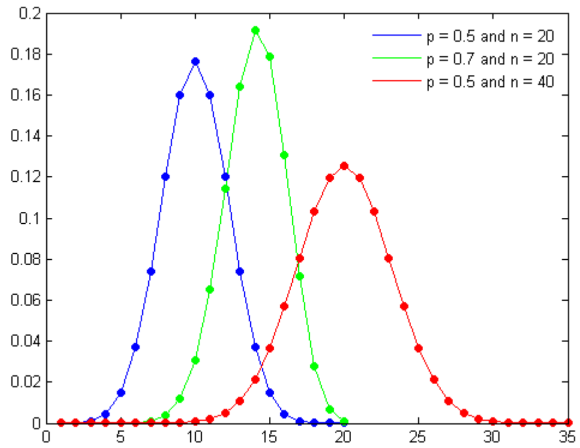
Na Obrázku 5 je vidět, že první „sedmice“, kterou tvoří čísla 1 2 ··· 7 byla losována 193krát, ale náš odhad četnosti je 194. Nápadná je taky velká četnost prostřední „sedmice“, to jsou čísla 22 23 ··· 28, ta byla tažena 249krát, a náš horní odhad je 250. Možné zdůvodnění je, že toto zařízení špatně „promíchávalo“ míčky s čísly. Míčky z prostřední „sedmice“ byly totiž přesně mezi třemi horními a třemi spodními „sedmicemi“. Pravděpodobně se tedy moc nepromíchaly s ostatními

[5] Výpočet koeficientu k_1 trval programu `bc` na běžném PC asi čtyři a půl hodiny. Bylo totiž třeba zpřesnit počet desetinných míst každého výpočtu. V tomto případě jsme počítali s přesností na 800 desetinných míst.

[6] Toto období trvalo pět let, každý rok má 52 sázkových týdnů a v každém tahu je 6 čísel.

[7] V angličtině se střední hodnotě říká *expected value* (značí se $E(X)$), tedy „očekávaná hodnota“, což je například v tomto případě jistě výstižnější. Pro střední hodnotu např. podle [8] platí: *Má-li náhodná veličina X diskrétní rozdělení, kde $P[X = s_i] = p_i$ pro $i \in I$, nejvýše spočetnou množinu různých výsledků, pak:*

$$E(X) = \sum_I s_i p_i \tag{54}$$



Obrázek 6: Grafy různých binomických rozdělení.

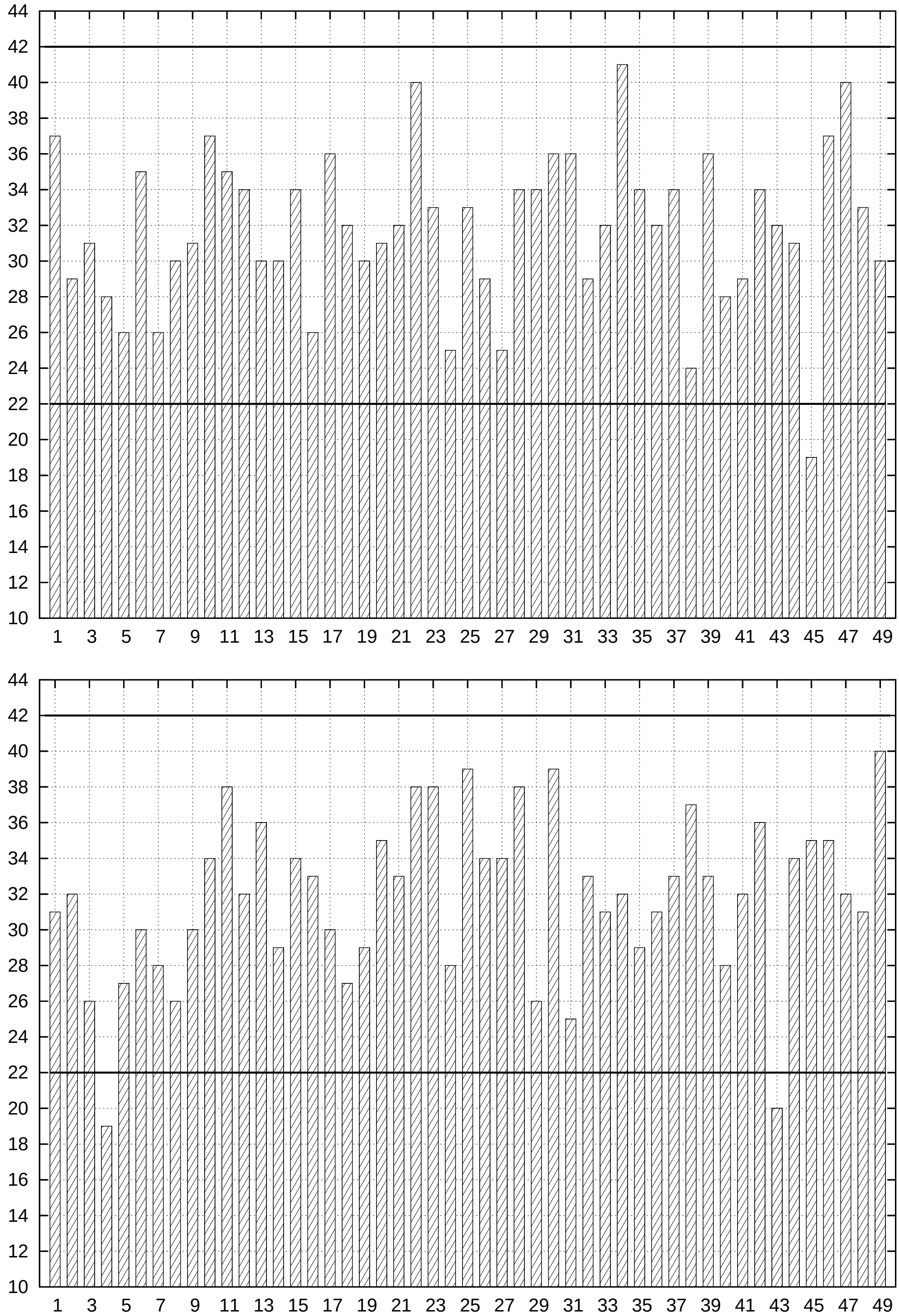
čísly, asi právě naopak, častěji se dostávaly k okraji losovacího bubnu. Malou četnost čísel z první skupiny můžeme vysvětlit podobně: při otáčení bubnu se asi dostaly blíže ke středu bubnu a byly proto losovány podstatně méně.

V prvním tahu, kde se používalo jiné losovací zařízení (zařízení na Obrázku 4 je zřetelně označeno „1. tah“), jsou už jednotlivé četnosti poměrně vyrovnané. Graf je k nalezení na přiloženém CD v adresáři `/TeX/grafy/graf_1972_g1.ps`.

Opět budeme také zkoumat četnosti jednotlivých losovaných čísel a opět nám poslouží vztahy (43) a (45) na straně 29. Můžeme tak sestavit grafy, které jsou na Obrázku 7. Silnými čarami jsou opět znázorněny horní a dolní odhady četností. V tomto období jsme analyzovali celkem 560 tahů. Minimální četnost $k_1 = 22$ a maximální četnost je $k_2 = 42$. Hladinu pravděpodobnosti jsme opět zvolili 95 %. Je vidět, že v prvním tahu bylo číslo 45 losováno 19krát, což je méně, než je naše minimální odhadovaná četnost.

Ve druhém tahu mají nižší četnost čísla 4 (bylo taženo 19krát) a 44 (bylo taženo 20krát). Pro nás je zajímavé, že číslo 4 leží právě uprostřed „sedmice“ s nejmenší četností. Také je vidět, že četnosti vylosování čísel z prostřední „sedmice“ jsou u většiny z čísel z této sedmice jedny z největších četností v daném období.

Ke stejnému závěru bychom také mohli dojít, pokud bychom podle vztahu (50) na straně 31 počítali odhady pravděpodobností. Tyto odhady jsou pro oba dva tahy a pro každé číslo uspořádány v Tabulce 12 v přílohách na straně 58. Pravděpodobnost vylosování libovolného čísla je v každém tahu $p = \frac{6}{49} = 0{,}122$. U každého intervalového odhadu musíme zjistit, zdali $p \in \mathcal{I}$. Musíme tedy každý



Obrázek 7: Četnosti losovaných čísel pro I. a II. tah 1972–1976

Obrázek 8: Zařízení, které se používalo v letech 1976–1988

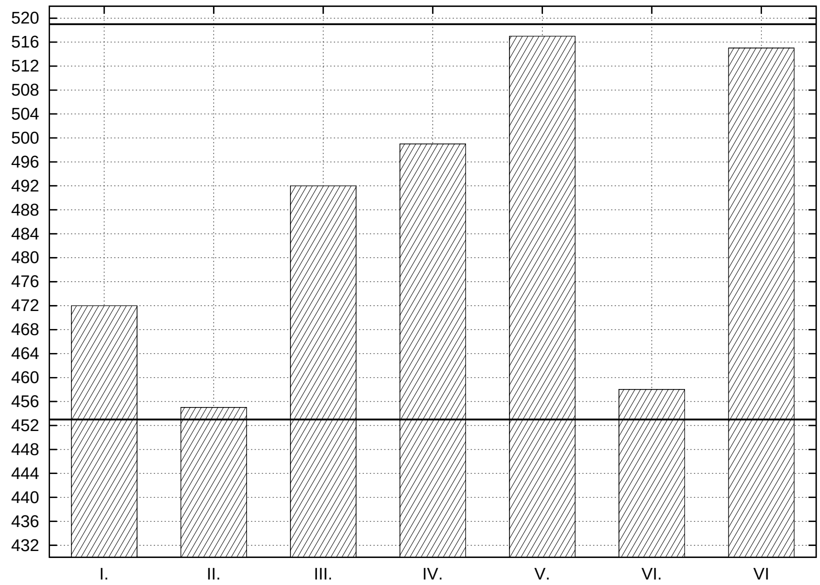
interval v této tabulce srovnat s hodnotou 0,122. Intervaly, kam tato hodnota nepatří, jsou opět zvýrazněny tučně.

Pokud by měl sázející tyto informace, zřejmě by sázel většinou čísla z oné „prostřední sedmice“ 22 23 ··· 28. Nejvíce jich bylo taženo v II. tahu 6. sázkového týdne roku 1974. tehdy byla tažena čísla 11 22 23 24 27 37.

3.5 Losovací zařízení z let 1976–1988

Podle [6, str. 228] bylo toto zařízení používáno v letech 1976–1988 s malou přestávkou v letech 1979–1980. Z Obrázku 8 je patrné, že toto zařízení fungovalo na podobném principu jako zařízení, které se používalo v předchozích letech. Opět se jednalo o otočný losovací buben, který měl ve středu část se sedmi přihrádkami, ve kterých bylo před začátkem losování vyrovnáno všech 49 losovaných čísel. Tradice, která velela, že losovat musí jen významní hosté, což už byli nejen sportovci, ale stále častěji i kasteláni různých hradů a zámků, byla dodržena i u těchto losování. Losující uvedl ovladačem zařízení do chodu a vysypal míčky do otočného bubnu, kde se začaly promíchávat. Pak podle svého uvážení uvolnil přepážku, která oddělovala buben od prostoru, který byl vyhrazen pro losovaná čísla (viz Obrázek 8).

Zkoumané tahy jsou z období 1976–1978 a 1981–1988. Pro nás to znamená, že budeme analyzovat tahy od 1. sázkového týdne roku 1976 až po 52. sázkový týden roku 1978 a dále pak tahy od 2. sázkového týdne roku 1981 až po 52. sázkový týden roku 1988. Těchto tahů je dohromady 568. Opět nás čeká analýza četností jednotlivých čísel i skupin čísel. Tyto skupiny budou opět tvořit „sedmice“



Obrázek 9: Četnosti losovaných čísel pro sedmičlenné skupiny, I. je skupina čísel $1, 8, \dots, 43$, II. je skupina $2, 9, \dots, 44$, atd. až VII. je skupina $7, 14, \dots, 49$

1 2 ⋯ 7 atd. až 44 45 ⋯ 49. Další možnost, jak rozdělit tato čísla do sedmi skupin je rozdělení 1 8 ⋯ 43 atd. až 7 14 ⋯ 49. Četnosti ovou těchto skupin v obou tazích plně odpovídají našim odhadům. Nejzamívější situace je asi u druhého tahu skupiny 1 8 ⋯ 43 atd. až 7 14 ⋯ 49 graf četností těchto skupin je na Obrázku 9.

Maximální a minimální četnost pro hladinu pravděpodobnosti 95 % byly dopočítány podle vztahů (43) a (45) na straně 29. Podobnými úvahami, jako byly ty pro předchozí losovací zařízení (na straně 36) dojdeme k tomu, že $n = 568 \cdot 6 = 3408$, $p = \frac{1}{7}$ a $q = \frac{6}{7}$. Opět dopočítáme mininimální četnost $k_1 = 453$ a maximální četnost $k_2 = 519$. Z Obrázku 9 je patrné, že se četnosti všech skupin vešli do intervalu, který jsme si vymezili minimální a maximální četností[8]. Grafy podobných rozborů pro jiné typy „sedmic“ jsou na přiloženém CD v adresáři `/TeX/grafy/`. Jejich popis je v souboru `README.txt` na tomto CD.

Ještě se zaměříme na četnosti jednotlivých čísel. Protože nevíme, kdy přesně k výměně zařízení došlo, budeme opět uvažovat celé období s výjimkou let 1979–1980, kdy se používalo jiné losovací zařízení. Podle vztahů (43) a (45) na straně 29

[8]Maximální četnost jsme zase zjistili s využitím symetrie binomického rozdělení [9]. Výpočet programem `bc` tentokráte trval 8 hodin, počítali jsme s přesností na tisíc desetinných míst. Výpočetní algoritmus zřejmě nejvíce zaměstnávaly výpočty velkých kombinačních čísel typu $\binom{3000}{408}$ a mocniny s relativně velkým exponentem, např. $\left(\frac{6}{7}\right)^{3000}$.

opět vypočítáme minimální a maximální možnou hodnotu četnosti, tedy čísla k_1 a k_2. Protože výsledky jsou v tomto případě zajímavější můžeme si dovolit počítat dokonce na hladině pravděpodobnosti 99 %. Vztahy (43) a (45) pak musíme psát ve tvaru:

$$\sum_{i=0}^{k_1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \leq 0{,}01 \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=k_2}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \leq 0{,}01 \tag{55}$$

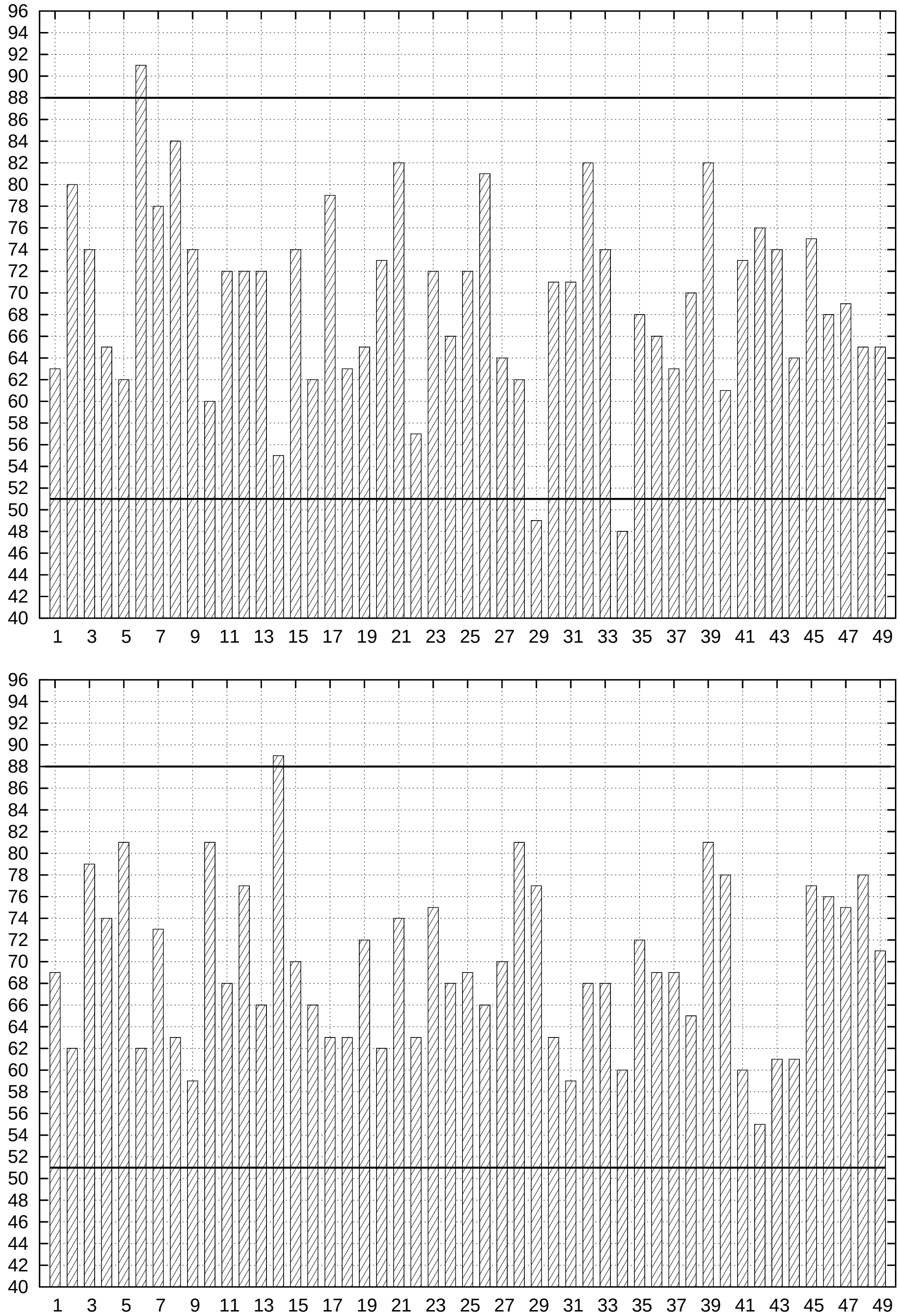
kde k_1 je ona hledaná minimální četnost na hladině pravděpodobnost 99 %, k_2 je maximální četnost na hladěni pravděpodobnosti 99 %. Čílsla p a q jsou pravděpodobnosti příznivého a nepříznivého jevu. V našem případě označíme za příznivý jev vylosování jednoho pevně zvoleného čísla. V každém tahu losujeme 6 čísel ze 49, pravděpodobnost vylosování jednoho konkrétního čísla je tedy $p = \frac{6}{49}$. Nepříznivý jev je jev opačný, tedy nevylosování onoho čísla. Pro jeho pravděpodobnost musí platit $q = 1 - \frac{6}{49} = \frac{43}{49}$, což je pochopitelné, uvědomíme-li si, že si máme vybrat jedno z čísel, která nebyla vylosována. Těch je ale 43. Číslo n je počet losování. V tomto případě je $n = 568$.

Pomocí jednoduchého skriptu[9] zjistíme, že $k_1 = 51$ a $k_2 = 87$. Četnosti jednotlivých čísel pro I. a II. tah jsou uvedeny v grafech na Obrázku 10. Hranici maximální a minimální četnosti při pravděpodobnosti 95 % opět oddělují silnější čáry. Výsledky jsou překvapivé. O zařízení, které se používalo k losování prvního tahu, i o zařízení, které se používalo k losování druhého tahu můžeme s 99 % pravděpodobností říct, že **nelosovala spravedlivě**. Číslo 6 bylo v prvním tahu taženo častěji, než bychom s 99 % pravděpodobností očekávali. Náš odhad nejvyšší četnosti byl 88, číslo 6 bylo ovšem vylosováno 91krát. A z druhé strany: náš odhad dolní četnosti je 51, čísla 29 a 34 se však do tohoto odhadu nevejdou. Číslo 29 bylo totiž vylosováno 49krát a číslo 34 bylo vylosováno dokonce jen 48krát.

Ke stejnému závěru bychom také měli dojít, pokud bychom podle vztahu (50) na straně 31 počítali odhady pravděpodobností. Tyto odhady jsou pro oba dva tahy a pro každé číslo uspořádány v Tabulce 13 v přílohách na straně 59. Pravděpodobnost vylosování libovolného čísla je v každém tahu $p = \frac{6}{49} = 0{,}122$. Každý intervalový odhad musíme tedy srovnat s hodnotou 0,122. Intervaly, kam tato hodnota nepatří, jsou opět vysázeny tučným řezem písma. Hladinu pravděpodobnosti jsme volili také 99 %.

Tento typ losovacího zařízení zřejmě tedy nebyl dobře navržen. To je možná také důvod, proč se používal jen necelé tři roky (mezi léty 1976–79). Pak bylo

[9] Je na přiloženém CD v adresáři `/programy/cetnosti.bc`



Obrázek 10: Četnosti losovaných čísel pro I. a II. tah 1976–1988

Obrázek 11: Zařízení, které se používalo v letech 1979–1980

toto zařízení nahrazeno jiným, poněkud hlučnějším, které se používalo pouze v letech 1979–80 [6, str 229]. Toto provizorní zařízení je na Obrázku 11. Používalo se tedy jen krátkou dobu. Bohužel nevíme, jestli to byly celé dva roky 1979 a 1980 nebo třeba jen 30 tahů někdy na přelomu těchto let. Pokud bychom tedy toto zařízení chtěly podrobit stejné statistické analýze jako ostatní zařízení, měli bychom k dispozici historii maximálně 104 tahů, o kterých bychom ani přesně nevěděli, zdali jsou všechny opravdu ony tahy, ve kterých se toto zařízení používalo. Takový rozbor by byl zatížen příliš velkou statistickou chybou. Zařízení na Obrázku 11 tedy nebudeme analyzovat. Toto zařízení se podle [6] používalo tak krátkou dobu z důvodu nadměrné hlučnosti. Další z důvodů jistě také byla jistá neprůhlednost tohoto zařízení před televizními kamerami. Předchozí zařízení byla všechna umístěna vertikálně tak, aby měl divák přehled a případně mohl jedním letmým pohledem ověřit, zdali je v osudí všech 49 losovacích míčků. Toto provizorní zařízení bylo ale v horizontální poloze, tudíž poměrně nepřehledné. O tom, zdali se losovalo spravedlivě, můžeme jen spekulovat. Ale potom, co už víme o předchozích zařízeních, by bylo s podivem, kdyby Sazka toto zařízení odstranila jen kvůli nadměrnému hluku. Jistě je totiž mnohem jednodušší ztišit chod tohoto zařízení než vymýšlet další losovací systém.

O to větším překvapením je, že v letech 1980–1988 se Sportka losovala opět ze stejného osudí jako v letech 1976–1979. Dá se tudíž předpokládat, že toto osudí zůstávalo stejné jen na první pohled. Případné vnitřní nerovnosti losovacího

Obrázek 12: Zařízení, které se používalo v letech 1988–1993

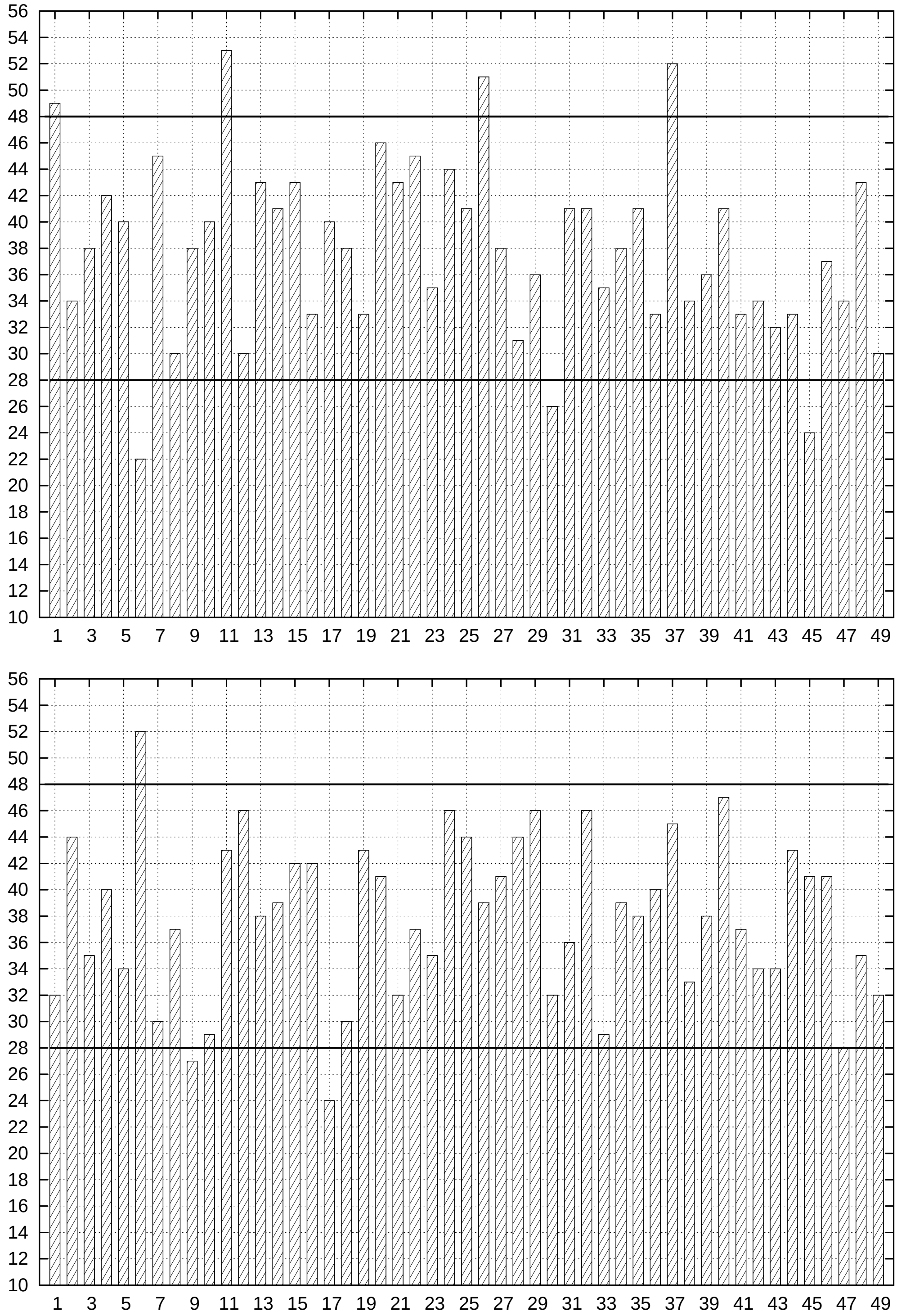
bubnu, či jiné mechanické závady, které by mohly ovlivňovat četnosti jednotlivých losovaných čísel, byly jistě odstraněny.

3.6 Losovací zařízení z let 1988–1993

Od této doby až dodnes používá Sazka k losování výherních čísel jednotlivých tahů Sportky zařízení tohoto typu. Princip je jednoduchý: potom, co se míčky sesypou do losovacího bubnu, začne ve spodní části tohoto bubnu foukat velmi silný proud vzduchu. Míčky se tak v bubnu začnou vznášet a promíchávat. To ovšem klade vysoké nároky na homogenitu jednotlivých míčků. Ty jsou proto váženy s přesností na miligramy [6]. Výhodou takovýchto osudí bylo to, že mohla být téměř celá ze skla nebo průhledného plastu, tudíž dokonale přehledná. Prvním typ takového zařízení je na Obrázku 12 (na fotografii losuje čtyřnásobný olympijský vítěz Emil Zátopek).

Mezi 2. sázkovým týdnem roku 1988 a 53. sázkovým týdnem 1993 včetně, bylo vylosováno přesně 310 tahů. Opět nás budou zajímat četnosti jednotlivých losovaných čísel. Podle vztahů (43) a (45) na straně 29 najdeme odhady maximální a minimální četnosti na hladině pravděpodobnosti 95 %. Podle těchto vztahů relativně snadno zjistíme, že nejmenší předpokládaná četnost je $k_1 = 28$ a $k_2 = 48$.

Výsledky jsou přehledně uvedeny na Obrázku 13. Je vidět, že četnosti jednotlivých losovaných čísel v prvním tahu nejsou moc vyrovnané. Vyšší četnost, než je náš odhad mají čísla: 1, které bylo losováno 49krát, 11, které bylo losováno 53krát, 26, to bylo losováno přesně 51krát a číslo 37, které bylo losováno 52krát.



Obrázek 13: Četnosti losovaných čísel pro I. a II. tah 1988-1993

Naopak nižší četnost měla čísla: 6, které bylo losováno 22krát, 30, které bylo losováno 26krát, a konečně číslo 46, to bylo losováno přesně ve 24 tazích.

Četnosti losovaných čísel ve druhém tahu už jsou malinko vyrovnanější. Našim odhadům nevyhovují pouze čísla 6, které bylo losováno 52krát (má tedy na rozdíl od prvního tahu vyšší četnost než byl předpoklad) a číslo 17, které se nevejde do našeho odhadu, protože bylo vylosováno pouze 24krát, zatímco náš minimální odhad je $k_1 = 28$. A konečně číslo 9, které se těsně nevejde do našeho odhadu, protože bylo losováno jen 27krát.

Ke stejnému závěru bychom také došli pomocí intervalových odhadů pravděpodobností, které jsme sestavovali s pomocí centrální limitní věty podle vztahu (50) na straně 31. Tyto odhady jsou pro oba dva tahy a pro každé číslo uspořádány v Tabulce 14 v přílohách na straně 60. Pravděpodobnost vylosování libovolného čísla je v každém tahu $p = \frac{6}{49} = 0{,}122$. Každý intervalový odhad musíme tedy srovnat s hodnotou 0,122. Intervaly, kam tato hodnota nepatří, jsou opět vysázeny tučně.

Pokud bychom chtěli naše odhady zpřesnit pro pravděpodobnost 99 %, pak by se do takového odhadu četností vešla všechna čísla. Je tedy patrné, že se Sazka snažila vyrábět čím dál dokonalejší losovací zařízení, což je pochopitelné. Ve srovnání s předchozím zařízením, je ale vidět, že došlo k podstatnému zlepšení.

3.7 Současné losovací zařízení

Zařízení, kterým se losuje dodnes (je na Obrázku 14), se používá od roku 1993. Protože zase nevíme, odkdy přesně se toto zaařízení používá, budeme ve shodě s [6] považovat za první tah tohoto zařízení, 2. sázkový týden roku 1993. Posledním tahem, který máme k dispozici je tah v 15. týdnu roku 2007. To je 745 losování pro první a stejný počet pro druhý tah.

Tak jako v předešlých případech, bude nás zajímat, kolikrát bylo každé číslo vylosováno. Zase najdeme minimální a maximální počet losování na hladině pravděpodobnosti 95 %. Už víme, že to jsou čísla k_1 a k_2 ze vtahů (43) a (45) V našem případě je počet tahů $n = 745$, a pravděpodobnost vylosování každého čísla v jednom tahu je $p = \frac{6}{49}$, pravděpodobnost jevu opačného je $q = 1 - \frac{6}{49} = \frac{43}{49}$. Největší číslo k_1, které ještě vyhovuje nerovnici (43) je $k_1 = 76$, nejmenší číslo k_2, které ještě vyhovuje nerovnici (45) je $k_2 = 106$. Počet vylosování je u každého čísla znázorněn v grafu na Obrázku 14. Horní graf popisuje I. tah, dolní II. tah.

Z grafů na Obrázku 15 je vidět, že o prvním tahu můžeme říct, že častěji, než bychom předpokládali, byla losována číslo 25. To bylo taženo 108krát, přitom od-

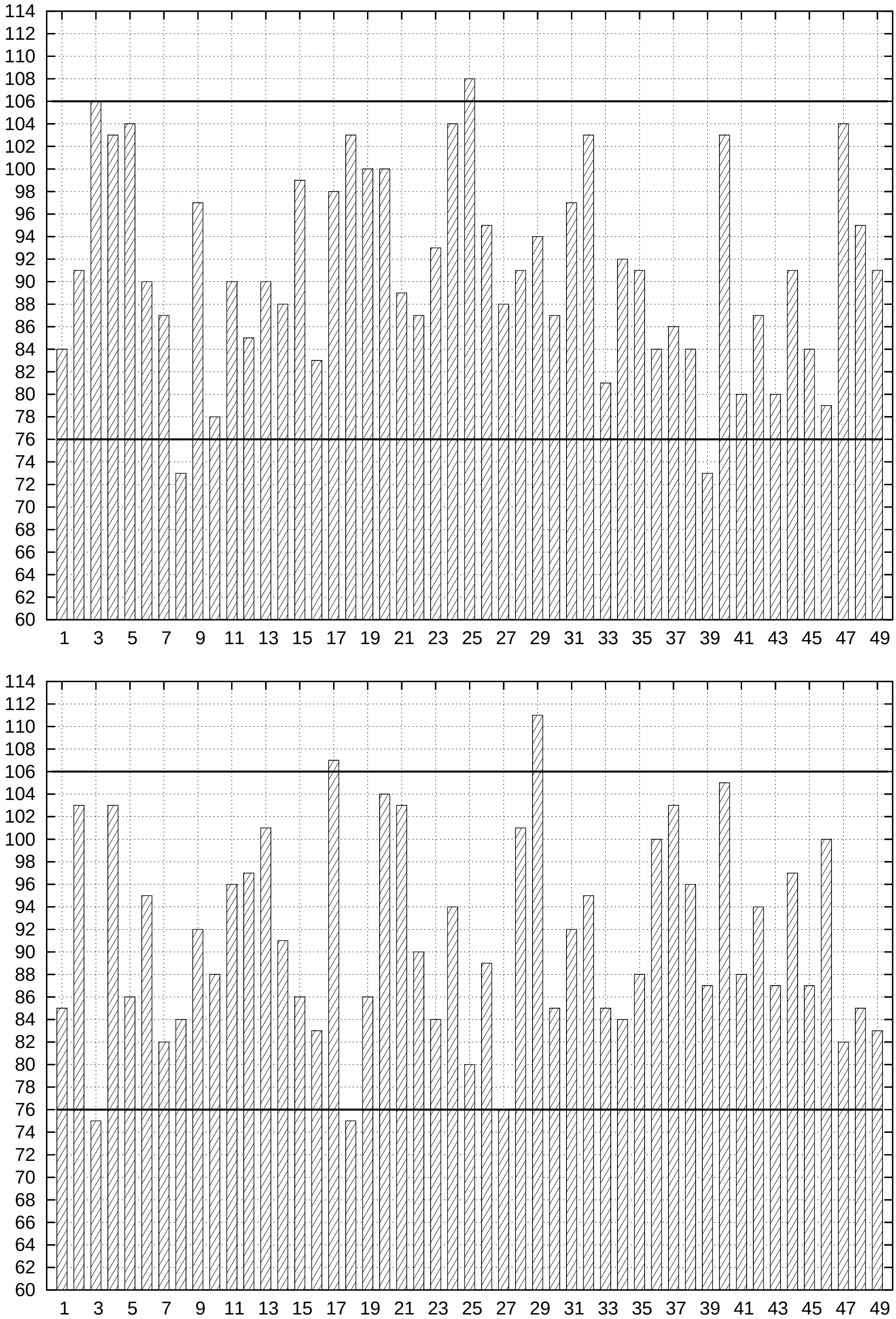
Obrázek 14: Zařízení, které se používá dnes

had maximálního počtu vylosování v 745ti tazích je na hladině pravděpodobnosti 95 % roven 106. Méně, než bychom předpokládali, byla tažena čísla 8 a 39. Obě byla zatím vylosována pouze 73krát, ale odhad minimálního počtu vylosování je na hladině pravděpodobnosti 95 % roven 76.

Druhý tah už je trošku vyrovnanější. Více, než bychom očekávali, bylo taženo číslo 17 (četnost jeho vylosování převyšuje náš odhad jen o jedno vylosování) a číslo 29. To bylo vylosováno 111krát, ale náš odhad maximální četnosti je jen 106. Do dolního odhadu se ve druhém tahu těsně nevešla čísla 3 a 18.

Stejný závěr můžeme také učinit, pokud bychom využili centrální limitní věty. Odhady pravděpodobností pro vylosování každého čísla tak můžeme najít v Tabulce 15. Při jejím sestavování jsme opět pro každé číslo našli intervalový odhad, který jsme sestavili podle vztahu (50) na straně 31. Pravděpodobnost vylosování libovolného čísla je v každém tahu tak jako v ostatních tazích $p = \frac{6}{49} = 0{,}122$. Každý intervalový odhad jsme porovnali s hodnotou 0,122. Intervaly, kam tato hodnota nepatřila, jsou opět zvýrazněny tučně.

Každý tah je losován na jiném zařízení. O obou tedy můžeme prohlásit, že s pravděpodobností 95 % **nelosují spravedlivě**. I když četnosti losovaných čísel jso u druhého tahu poměrně vyrovnané. Pokud bychom byli náročnější a hladinu pravděpodobnosti posunuly na 99 %, pak by se počty vylosování všech čísel vešli do takovýchto odhadů.



Obrázek 15: Četnosti losovaných čísel pro I. a II. tah (1993–současnost)

4 JEDNOTLIVÁ VÝHERNÍ POŘADÍ

Nejdůležitější motivací pro sázení Sportky je asi pro všechny sázející vidina prvního pořadí. V prvních letech existence Sportky se v tehdejším socialistickém Československu vedla celospolečenská debata o tom, zdali je vůbec sázková činnost žádocí pro socialistický stát. Ale z toho, že byla Sazka státní loterií, profitoval samozřejmě hlavně tehdejší státní rozpočet. Z vkladů Sportky byly financovány tělovýchovné spolky a různé sportovní akce. Ani tato skutečnost ale nezabránila tomu, aby byla v roce 1961 hlavní výhra ve Sportce snížena ze 40 tisíc na 15 tisíc korun. Za druhé pořadí se vyplácelo deset tisíc. Zvýšeny byly naopak výhry v ostatních výherních pořadích. Proti tomuto politickému rozhodnutí ale protestovala sázející veřejnost, neboť sázkové obraty začaly prudce klesat. V roce 1960 činil roční obrat Sazky 781 milionů korun, o rok později už jen 455 milionů a v roce 1962 už to bylo dokonce jen 359 milionů korun.

Tento sestupný trend potvrdil zásadu, že sázející mají zájem především o výhry v prvním pořadí a zvýšení velkého množství výher v nejnižších pořadích o relativně nízkou částku je nechává chladnými. V roce 1963 bylo tedy toto dva roky staré opatření přehodnoceno a nejvyšší výhra Sportky byla stanovena na 80 tisíc korun. Vklady nedlouho po tomto rozhodnutí dosáhly hranice dvou miliard korun. Zvyšování nejvyšších výher pak pokračovalo i v dalších letech. V roce 1965 už byla nejvyšší výhra stanovena na 200 tisíc korun. K dalšímu navýšení výhry v prvním pořadí na 300 tisíc korun došlo v roce 1984 a od roku 1990 se už hrálo o 500 tisíc. Od února roku 1993 je výše hlavní výhry neomezená a řídí se pouze vklady. [6]

V roce 1993 byl také pro první výherní pořadí zaveden princip Jackpotu. To znamená, že pokud nikdo v daném losování neuhodl všech šest řádných losovaných čísel a nikdo tedy nevyhrál výhru v prvním pořadí, navyšuje se pro příští losování výhra v prvním pořadí o nevyčerpanou částku ze všech pořadí. Princip Jackpotu byl pro sázející velmi zajímavý, protože nedlouho po jeho zavedení se hlavní výhra mnohdy vyšplhala až ke třiceti milionům korun. Později nebyly výjimkou hlavní výhry, které byly vyšší než magických sto milionů korun. V takových případech začínají sázet i lidé, kteří jinak Sportku zásadně nesází.

4.1 Pravděpodobnost výhry v jednotlivých pořadích

Zkoumejme nyní, jaká je pravděpodobnost výhry v jednotlivých pořadích. Získat výhru v **prvním pořadí** znamená uhodnout všech šest řádných losovaných čísel. Jaká je pravděpodobnost výhry prvního pořadí? Počet všech možných způsobů, jak se dá vybrat šest ze 49ti čísel je šestičlenná kombinace ze čtyřiceti devíti prvků (vzah (8) na straně 10) , tedy:

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816. \tag{56}$$

Příznivá možnost je jenom jedna, všechna tipovaná čísla musí být totiž tažena. Pravděpodobnost výhry prvního pořadí je tedy:

$$p_I = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816} \doteq 7{,}8 \cdot 10^{-8}. \tag{57}$$

Dodejme, že je to asi stejná pravděpodobnost, jako kdybychom při 24 hodech mincí hodily samé ruby.

Získat výhru ve **druhém pořadí** znamená uhodnout pět ze šesti losovaných čísel a navíc dodatkové číslo. Dodatkové číslo je v podstatě sedmé losované číslo, má smysl pouze pro výhru ve druhém pořadí. Počet všech možných způsobů, jak tipovat šest ze 49ti čísel je opět stejný, počítali jsme ho vztahem (56). Počet všech příznivých případů určíme následující úvahou: Ze šesti řádných losovaných čísel jich musíme uhodnout právě pět. Počet všech možností, jak vybrat ze šesti čísel pět, je stejný jako počet pětičlenných kombinací z šesti prvků, tedy: $\binom{6}{5}$. Zbývající číslo musí být právě dodatkové číslo, je tedy určeno jednoznačně. Pro pravděpodobnost výhry ve druhém pořadí tedy platí:

$$p_{II} = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{13\,983\,816} \doteq 4{,}29 \cdot 10^{-7}. \tag{58}$$

Třetí pořadí získá ten sázející, který uhodne právě pět řádných losovaných čísel. Kolik je takových tipů? Opět nás tedy zajímá, kolika způsoby se dá vybrat pět ze šesti čísel. Z předchozího případu víme, že je to $\binom{6}{5}$ možností. Ještě nám ale zbývá jedno číslo. Jaké může být? V podstatě jakékoli, kromě čísel, která byla vylosovaná. Kolik čísel ze 49ti nebylo vylosováno? Losuje se šest čísel a jedno dodatkové, které to být nemůže, protože už by sednalo o vyšší výherní pořadí. Do 49ti zbývá tedy ještě 43 nevylosovaných čísel . Zbývající číslo je tedy jedno z těchto 43 čísel. Pro pravděpodobnost výhry ve třetím pořadí tedy platí:

$$p_{III} = \frac{43 \cdot \binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13\,983\,816} \doteq 1{,}84 \cdot 10^{-5}. \tag{59}$$

Výherce **čtvrtého pořadí** musí uhodnout právě čtyři losovaná čísla. Kolik je tedy všech příznivých tipů? Losuje se šest čísel, my z nich vybíráme čtyři, podobně jako v předchozích případech bychom přišli na to, že je to právě $\binom{6}{4}$ možností. Znovu se ale ještě musíme zamyslet nad tím, jaká mohou být ona zbývající dvě tipovaná čísla. Opět jakákoli, kromě těch, která byla losována. Páté číslo tedy můžeme vybrat 45 způsoby, a pro šesté číslo zvývá už jen 44 způsobů, přičemž na pořadí těchto čísel nezáleží. Jinak řečeno: vybrat dvě čísla ze 45 je možno

$$\binom{45}{2} = \frac{45 \cdot 44}{2} = 990 \tag{60}$$

způsoby. Počet všech možných tipů je opět (56). Pro pravděpodobnost výhry ve čtvrtém pořadí musí tedy platit:

$$p_{IV} = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{14\,850}{13\,983\,816} \doteq 1{,}06 \cdot 10^{-3}. \tag{61}$$

Poslední je **páté výherní pořadí**. Abychom vyhráli nejnižší výhru je tedy třeba trefit právě tři losovaná čísla. Jakou máme pravděpodobnost, že se tak stane? Opět budeme uvažovat podobně jako v předcházejících dvou případech. Napřed vybereme z šesti vylosovaných čísel ony tři výherní. To je možné provést $\binom{6}{3}$ způsoby. Zbývající tři čísla je třeba vybrat z těch, která nebyla vylosovaná. Těch je 46, máme tedy $\binom{46}{3}$ možností, jak můžeme vybrat zbylá tři nevýherní čísla. A konečně pro pravděpodobnost nejnižší možné výhry platí:

$$p_{V} = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{46}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{303\,600}{13\,983\,816} \doteq 2{,}17 \cdot 10^{-2}. \tag{62}$$

To je o něco málo víc než dvě procenta. Dá se tedy říct, že nejnižší pořadí vyhrává zhruba každý padesátý.

4.2 Matematický model výše nejvyšší výhry

Zkoumejme tedy nyní, kam až by mohl vystoupat jackpot, pokud by byla Sportka provozovována sto let podle pravidel, která platí v současné době. Ta jsou nastavena tak, že losování probíhá dvakrát týdně — každou středu a neděli. Losují se vždy dva tahy, přičemž každý tah má pro své první pořadí vlastní jackpot. V každém tahu se vždy šest řádných čísel a jedno dodatkové. Dodatkové číslo má smysl jen ve druhém pořadí, tj. pokud někdo uhodne pět ze šesti řádných losovaných čísel a zároveň toto dodatkové číslo. Jackpot se ale dá vyhrát pouze v prvním pořadí. To znamená, že výherce jackpotu musí uhodnout všech šest losovaných čísel (to jsou ona řádná losovaná čísla, mezi něž nepatří dodatkové číslo).

Nejlépe to bude vidět na příkladu. Představme si, že se v některém ze středečních losování hraje v prvním pořadí prvního tahu o 83 miliónů korun a v prvním pořadí druhého tahu například o 50 miliónů korun. Představme si, že v daném lososování neuhodl v prvním tahu všech šest řádných losovaných čísel nikdo a ve druhém tahu uhodli dokonce dva výherci všech šest losovaných čísel. Každý z nich pak vyhrává polovinu výhry, to jest 25 miliónů korun. V následujícím nedělním losování bude jackpot v prvním pořadí prvního tahu 83 miliónů plus jedna osmina peněz vsazených v tomto středečním losování, ve druhém tahu se následující neděli bude hrát jen o tuto jednu osminu z peněz vsazených v tomto středečním losování.

Pokud v některém tahu nepadne výhra v prvním pořadí, v příštím losování se tato výhra navýší o jednu čtvrtinu z peněz vybraných v tomto losování (většinou tak dva až tři milióny korun). Výhry ve třetím až pátém pořadí také nejsou pevné, ale jsou určeny počtem výherců a počtem vybraných peněz v daném tahu, žádné jackpoty pro ně tedy neexistují. Výhru ve druhém pořadí získá ten, komu se podaří uhodnout pět řádných losovaných čísel a číslo dodatkové. Výhra se většinou pohybuje kolem půl miliónu korun (v závislosti na počtu jejích výherců a počtu sázejících). Výhru ve třetím pořadí získávají ti sázející, kteří uhodli pět řádných losovaných čísel, ve čtvrtém pořadí čtyři řádná losovaná čísla. Poslední, páté pořadí, získávájí ti, kterí uhodli tři řádná losovaná čísla. Pro ilustraci zde uvedeme počet výherců v daných pořadích a odpovídající výhry ve druhém tahu středečního losování z 25. sázkového týdne roku 2006[10]:

Pořadí	Počet uhodnutých čísel	Počet výher	Výše výhry [Kč]
I	6	1	27 302 959
II	5 + dodatkové	1	470 399
III	5	58	14 598
IV	4	2 639	427
V	3	45 275	83

[10]Údaje jsou převzaty z oficiální výherní listiny pro 25. sázkový týden roku 2006, která je dostupná na oficiálním webu akciové společnosti Sazka.

Model výšky jackpotu

Je známo, že s přibývající výškou jackpotu roste i počet sázejících. To má dva důvody. Ten nejprostší je zkrátka ten, že člověka vždy přitahovaly peníze, které je možno bezpracně získat. Druhý důvod je ten, že s přibývající výškou hlavní výhry rostou i prostředky, které Sazka utratí za reklamu. Pokud je tato reklamní kampaň vedena důsledně, měla by oslovit každého. Navíc pokud jackpot překoná nějakou psychologickou hranici, řekněme například 100 milionů korun, začnou sázet i ti, kteří jinak nikdy nesází. Je to také tím, že „sázecí horečce“ propadá i jejich okolí

Na přiloženém CD je v adresáři `/jackpot/model_jackpotu.pl` program, který modeluje růst jackpotu podle chování sázejících. Tímto programem jsme simulovali losování Sportky po celé jedno století. Nejvyšší výhra v prvním pořadí pak jednou vystoupala až na 347 milionů, podruhé (60 let potom) dokonce až na 357 milionů. Podrobný popis algoritmu a ostatní dokumentace je na přiloženém CD.

5 ZÁVĚR

V této práci jsme se zaměřili na číselnou hru Sportka. V první části jsme zkoumali tahy ve kterých se objevovali různé „anomální“ jevy. Mezi ně patřili tahy s jednou šesticí po sobě jdoucích čísel, s jednou pěticí, čtveřicí, čtveřicí a dvojicí, jednou trojicí, dvěma trojicemi, trojicí a dvojicí, třemi dvojicemi, dvěma dvojicemi a jednou dvojicí. Také nás zajímali tahy se samými lichými, sudými, malými a velkými čísli. U každého takového jevu jsme našli celkový počet všech takových tahů. Ke konci této části jsme předpovězené výsledky srovnali se skutečnou historií tahů. Z Tabulky 9 na straně 23 bylo vidět, že realita velmi dobře odpovídá našemu modelu. Výrazně se lišili pouze tahy, ve kterých byl počet nalezených anomálií velmi malý. Tyto nalezené četnosti jsou ale zatíženy statistickou chybou. Tak tomu bylo například u počtu nalezených tahů s pěticí po sobě jdoucích čísel. Tento tah jsme očekávali jen jeden, bylo jich ale dvakrát tolik, tedy 2. Stejně tak tomu bylo u tahů s jednou čtveřicí a jednou dvojicí po sobě jdoucích čísel. U „anomálií“, které se objevovali často (například tahy s jednou dvojicí po sobě jdoucích čísel) byl rozdíl mezi předpovězenou a skutečnou hodnotou v 6068 tazích v řádu desetin procent. Ve druhé části jsme se zaměřili na jednotlivá losovací zařízení. Většinu z nich jsme testovali na hladině pravděpodobnosti 95 %. U každého zařízení jsme pomocí binomického rozdělení našli nejmenší a největší možný počet losovaných čísel. Překvapením pro nás bylo, že na hladině pravděpodobnost 95 % se žádné losovací zařízení nejevilo jako spravedlivé. To bylo asi způsobeno tím, že počty tahů pro jednotlivá zařízení, které jsme zkoumali, byly poměrně malé. Krátká historie tahů pro každé zařízení je nepochybně i záměr provozovatele Sportky, možná i právě proto se losovací zařízení měnila tak často.

U losovacího zařízení z let 1972–1976 jsme zjistili, že s pravděpodobností 98 % znevýhodňovalo prvních sedm losovaných čísel. A s pravděpodobností 95 % můžeme tvrdit, že naopak prostřední „sedmice“ čísel byla losována častěji.

O zařízení, které se používalo v letech 1976–1988, s malou přestávkou v letech 1979–1980, můžeme říct dokonce s 99 % pravděpodobností, že nelosovalo spravedlivě. A to jak zařízení, které se používalo k losování prvního tahu, tak i pro zařízení, které se používalo pro losování druhého tahu. To už asi nebude způsobeno jen statistickou chybou. Můžeme tedy skoro jistě říct, že tato zařízení losovala nespravedlivě.

Obě tato zařízení si byla podobná, jistě by se dalo spekulovat i o tom, že taková losovací zařízení jsou zatížena velkým množstvím nepřesností, kterých by mohl šikovný sázející využít.

V poslení části jsme zjistili pravděpodobnosti výher v jednotlivých pořadích. Na přiloženém CD je také program, který modeluje růst jackpotu v prvním výherním pořadí, podle chování sázejících. Překvapivé bylo, že se jackpot mohl vyšplhat až na 357 milionů (dlužno ale dodat, že se to stalo až po 90ti letech historie této simulované Sportky). Tipy sázejících a losovaná čísla byly generovány každý jinými algoritmy. Podrobný popis včetně historie tahů jednoho století, který vyprodukoval tento model je na přiloženém CD.

Na tomto CD jsou také všechny programy a skripty (samozřejmě s komentáři), které byly k sepsání této práce potřeba.

6 PŘÍLOHY

6.1 Losovací zařízení z let 1957–1965

číslo	intervalový odhad	číslo	intervalový odhad
1	$\langle 0.11156; 0.17970\rangle$	26	$\langle 0.07271; 0.13117\rangle$
2	$\langle 0.10936; 0.17704\rangle$	27	$\langle 0.09846; 0.16366\rangle$
3	$\langle 0.07059; 0.12843\rangle$	28	$\langle 0.09413; 0.15829\rangle$
4	$\langle 0.10717; 0.17437\rangle$	29	$\langle 0.09846; 0.16366\rangle$
5	$\langle 0.08981; 0.15289\rangle$	30	$\langle 0.09197; 0.15559\rangle$
6	$\langle 0.09846; 0.16366\rangle$	31	$\langle 0.08981; 0.15289\rangle$
7	$\langle 0.08981; 0.15289\rangle$	32	$\langle 0.07271; 0.13117\rangle$
8	$\langle 0.10282; 0.16902\rangle$	33	$\langle 0.09197; 0.15559\rangle$
9	$\langle 0.09197; 0.15559\rangle$	34	$\langle 0.08551; 0.14749\rangle$
10	$\langle \mathbf{0.08257}; \mathbf{0.09703}\rangle$	35	$\langle 0.09846; 0.16366\rangle$
11	$\langle 0.10282; 0.16902\rangle$	36	$\langle 0.10282; 0.16902\rangle$
12	$\langle 0.08981; 0.15289\rangle$	37	$\langle 0.08766; 0.15020\rangle$
13	$\langle 0.08766; 0.15020\rangle$	38	$\langle 0.07909; 0.13935\rangle$
14	$\langle 0.10282; 0.16902\rangle$	39	$\langle 0.09197; 0.15559\rangle$
15	$\langle 0.11594; 0.18502\rangle$	40	$\langle 0.08981; 0.15289\rangle$
16	$\langle 0.08336; 0.14478\rangle$	41	$\langle 0.07059; 0.12843\rangle$
17	$\langle 0.07271; 0.13117\rangle$	42	$\langle 0.09197; 0.15559\rangle$
18	$\langle 0.08551; 0.14749\rangle$	43	$\langle 0.10499; 0.17169\rangle$
19	$\langle 0.10064; 0.16634\rangle$	44	$\langle 0.10936; 0.17704\rangle$
20	$\langle 0.08123; 0.14207\rangle$	45	$\langle 0.06848; 0.12568\rangle$
21	$\langle 0.06638; 0.12294\rangle$	46	$\langle 0.09630; 0.16098\rangle$
22	$\langle 0.09630; 0.16098\rangle$	47	$\langle 0.10936; 0.17704\rangle$
23	$\langle 0.09630; 0.16098\rangle$	48	$\langle 0.08981; 0.15289\rangle$
24	$\langle 0.10282; 0.16902\rangle$	49	$\langle 0.06638; 0.12294\rangle$
49	$\langle 0.08123; 0.14207\rangle$		

Tabulka 10: Tabulka intervalových odhadů (1957–1965)

6.2 Losovací zařízení z let 1965–1972

č.	odhad 1. tah	odhad 2. tah	č.	odhad 1. tah	odhad 2. tah
1	$\langle 0{,}074; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}069; 0{,}164\rangle$	26	$\langle 0{,}088; 0{,}189\rangle$	$\langle 0{,}069; 0{,}167\rangle$
2	$\langle 0{,}060; 0{,}150\rangle$	$\langle \mathbf{0{,}038}; \mathbf{0{,}120}\rangle$	27	$\langle 0{,}074; 0{,}170\rangle$	$\langle \mathbf{0{,}034}; \mathbf{0{,}120}\rangle$
3	$\langle 0{,}042; 0{,}123\rangle$	$\langle 0{,}088; 0{,}179\rangle$	28	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	$\langle 0{,}038; 0{,}127\rangle$
4	$\langle 0{,}065; 0{,}157\rangle$	$\langle 0{,}065; 0{,}157\rangle$	29	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	$\langle 0{,}112; 0{,}216\rangle$
5	$\langle 0{,}092; 0{,}195\rangle$	$\langle 0{,}116; 0{,}223\rangle$	30	$\langle 0{,}074; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}102; 0{,}203\rangle$
6	$\langle \mathbf{0{,}026}; \mathbf{0{,}113}\rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}188\rangle$	31	$\langle 0{,}069; 0{,}163\rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}191\rangle$
7	$\langle 0{,}051; 0{,}137\rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}187\rangle$	32	$\langle 0{,}114; 0{,}218\rangle$	$\langle 0{,}069; 0{,}175\rangle$
8	$\langle 0{,}069; 0{,}163\rangle$	$\langle 0{,}097; 0{,}196\rangle$	33	$\langle 0{,}060; 0{,}150\rangle$	$\langle 0{,}078; 0{,}172\rangle$
9	$\langle 0{,}065; 0{,}157\rangle$	$\langle 0{,}088; 0{,}184\rangle$	34	$\langle \mathbf{0{,}129}; \mathbf{0{,}233}\rangle$	$\langle 0{,}060; 0{,}160\rangle$
10	$\langle 0{,}056; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}074; 0{,}166\rangle$	35	$\langle 0{,}088; 0{,}189\rangle$	$\langle 0{,}047; 0{,}139\rangle$
11	$\langle 0{,}074; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}088; 0{,}186\rangle$	36	$\langle 0{,}116; 0{,}227\rangle$	$\langle 0{,}097; 0{,}205\rangle$
12	$\langle 0{,}092; 0{,}195\rangle$	$\langle 0{,}078; 0{,}179\rangle$	37	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	$\langle 0{,}069; 0{,}166\rangle$
13	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	$\langle 0{,}078; 0{,}177\rangle$	38	$\langle 0{,}065; 0{,}157\rangle$	$\langle 0{,}051; 0{,}140\rangle$
14	$\langle 0{,}056; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}051; 0{,}138\rangle$	39	$\langle 0{,}088; 0{,}189\rangle$	$\langle 0{,}065; 0{,}161\rangle$
15	$\langle 0{,}056; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}069; 0{,}160\rangle$	40	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	$\langle 0{,}042; 0{,}133\rangle$
16	$\langle 0{,}074; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}083; 0{,}181\rangle$	41	$\langle 0{,}060; 0{,}150\rangle$	$\langle 0{,}056; 0{,}144\rangle$
17	$\langle 0{,}088; 0{,}189\rangle$	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	42	$\langle 0{,}060; 0{,}150\rangle$	$\langle 0{,}102; 0{,}200\rangle$
18	$\langle 0{,}078; 0{,}176\rangle$	$\langle 0{,}078; 0{,}176\rangle$	43	$\langle 0{,}060; 0{,}150\rangle$	$\langle 0{,}056; 0{,}144\rangle$
19	$\langle 0{,}056; 0{,}143\rangle$	$\langle \mathbf{0{,}129}; \mathbf{0{,}216}\rangle$	44	$\langle 0{,}074; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}078; 0{,}175\rangle$
20	$\langle 0{,}078; 0{,}176\rangle$	$\langle 0{,}060; 0{,}154\rangle$	45	$\langle 0{,}056; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}151\rangle$
21	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	$\langle 0{,}047; 0{,}138\rangle$	46	$\langle \mathbf{0{,}030}; \mathbf{0{,}103}\rangle$	$\langle 0{,}116; 0{,}208\rangle$
22	$\langle 0{,}083; 0{,}183\rangle$	$\langle 0{,}102; 0{,}205\rangle$	47	$\langle 0{,}056; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}078; 0{,}171\rangle$
23	$\langle 0{,}092; 0{,}195\rangle$	$\langle 0{,}056; 0{,}151\rangle$	48	$\langle 0{,}092; 0{,}195\rangle$	$\langle 0{,}051; 0{,}145\rangle$
24	$\langle 0{,}078; 0{,}176\rangle$	$\langle 0{,}074; 0{,}171\rangle$	49	$\langle 0{,}069; 0{,}163\rangle$	$\langle 0{,}088; 0{,}185\rangle$
25	$\langle 0{,}065; 0{,}157\rangle$	$\langle 0{,}069; 0{,}162\rangle$			

Tabulka 11: Tabulka intervalových odhadů (1965–1972)

6.3 Losovací zařízení z let 1972–1976

číslo	odhad 1. tah	odhad 2. tah	číslo	odhad 1. tah	odhad 2. tah
1	$\langle 0{,}104; 0{,}202\rangle$	$\langle 0{,}087; 0{,}182\rangle$	26	$\langle 0{,}063; 0{,}146\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}185\rangle$
2	$\langle 0{,}063; 0{,}146\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}166\rangle$	27	$\langle 0{,}051; 0{,}129\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}163\rangle$
3	$\langle 0{,}067; 0{,}152\rangle$	$\langle 0{,}055; 0{,}138\rangle$	28	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}170\rangle$
4	$\langle 0{,}067; 0{,}152\rangle$	$\langle \mathbf{0{,}025}; \mathbf{0{,}099}\rangle$	29	$\langle 0{,}083; 0{,}174\rangle$	$\langle 0{,}051; 0{,}136\rangle$
5	$\langle 0{,}048; 0{,}124\rangle$	$\langle 0{,}048; 0{,}124\rangle$	30	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}100; 0{,}194\rangle$
6	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}071; 0{,}161\rangle$	31	$\langle 0{,}108; 0{,}207\rangle$	$\langle 0{,}044; 0{,}130\rangle$
7	$\langle 0{,}051; 0{,}129\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}163\rangle$	32	$\langle 0{,}075; 0{,}163\rangle$	$\langle 0{,}091; 0{,}182\rangle$
8	$\langle 0{,}059; 0{,}141\rangle$	$\langle 0{,}063; 0{,}146\rangle$	33	$\langle 0{,}067; 0{,}152\rangle$	$\langle 0{,}071; 0{,}157\rangle$
9	$\langle 0{,}079; 0{,}169\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}169\rangle$	34	$\langle 0{,}120; 0{,}234\rangle$	$\langle 0{,}083; 0{,}181\rangle$
10	$\langle 0{,}104; 0{,}202\rangle$	$\langle 0{,}067; 0{,}158\rangle$	35	$\langle 0{,}059; 0{,}141\rangle$	$\langle 0{,}075; 0{,}160\rangle$
11	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}112; 0{,}208\rangle$	36	$\langle 0{,}083; 0{,}174\rangle$	$\langle 0{,}075; 0{,}165\rangle$
12	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	37	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}075; 0{,}165\rangle$
13	$\langle 0{,}071; 0{,}158\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}186\rangle$	38	$\langle 0{,}063; 0{,}146\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}185\rangle$
14	$\langle 0{,}067; 0{,}152\rangle$	$\langle 0{,}067; 0{,}152\rangle$	39	$\langle 0{,}091; 0{,}185\rangle$	$\langle 0{,}075; 0{,}166\rangle$
15	$\langle 0{,}079; 0{,}169\rangle$	$\langle 0{,}087; 0{,}178\rangle$	40	$\langle 0{,}055; 0{,}135\rangle$	$\langle 0{,}067; 0{,}149\rangle$
16	$\langle 0{,}055; 0{,}135\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}164\rangle$	41	$\langle 0{,}063; 0{,}146\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}185\rangle$
17	$\langle 0{,}095; 0{,}191\rangle$	$\langle 0{,}067; 0{,}157\rangle$	42	$\langle 0{,}083; 0{,}174\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}189\rangle$
18	$\langle 0{,}079; 0{,}169\rangle$	$\langle 0{,}063; 0{,}150\rangle$	43	$\langle 0{,}091; 0{,}185\rangle$	$\langle \mathbf{0{,}040}; \mathbf{0{,}120}\rangle$
19	$\langle 0{,}059; 0{,}141\rangle$	$\langle 0{,}055; 0{,}136\rangle$	44	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}091; 0{,}185\rangle$
20	$\langle 0{,}067; 0{,}152\rangle$	$\langle 0{,}075; 0{,}162\rangle$	45	$\langle \mathbf{0{,}029}; \mathbf{0{,}094}\rangle$	$\langle 0{,}100; 0{,}181\rangle$
21	$\langle 0{,}091; 0{,}185\rangle$	$\langle 0{,}083; 0{,}176\rangle$	46	$\langle 0{,}095; 0{,}191\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}172\rangle$
22	$\langle 0{,}112; 0{,}212\rangle$	$\langle 0{,}104; 0{,}203\rangle$	47	$\langle 0{,}104; 0{,}202\rangle$	$\langle 0{,}071; 0{,}163\rangle$
23	$\langle 0{,}079; 0{,}169\rangle$	$\langle 0{,}100; 0{,}193\rangle$	48	$\langle 0{,}087; 0{,}180\rangle$	$\langle 0{,}079; 0{,}170\rangle$
24	$\langle 0{,}063; 0{,}146\rangle$	$\langle 0{,}059; 0{,}142\rangle$	49	$\langle 0{,}075; 0{,}163\rangle$	$\langle 0{,}108; 0{,}201\rangle$
25	$\langle 0{,}079; 0{,}169\rangle$	$\langle 0{,}104; 0{,}197\rangle$			

Tabulka 12: Tabulka intervalových odhadů (1972–1976)

6.4 Losovací zařízení z let 1976–1988

č.	odhad 1. tah	odhad 2. tah	č.	odhad 1. tah	odhad 2. tah
1	$\langle 0{,}068; 0{,}154\rangle$	$\langle 0{,}060; 0{,}144\rangle$	26	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}080; 0{,}169\rangle$
2	$\langle 0{,}080; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}037; 0{,}117\rangle$	27	$\langle 0{,}094; 0{,}139\rangle$	$\langle 0{,}109; 0{,}196\rangle$
3	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}088; 0{,}178\rangle$	28	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}044; 0{,}125\rangle$
4	$\langle 0{,}109; 0{,}209\rangle$	$\langle 0{,}060; 0{,}151\rangle$	29	$\langle 0{,}060; 0{,}142\rangle$	$\langle \mathbf{0{,}068}; \mathbf{0{,}120}\rangle$
5	$\langle 0{,}092; 0{,}187\rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}158\rangle$	30	$\langle 0{,}117; 0{,}220\rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}191\rangle$
6	$\langle \mathbf{0{,}126}; \mathbf{0{,}265}\rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}174\rangle$	31	$\langle 0{,}088; 0{,}181\rangle$	$\langle 0{,}072; 0{,}162\rangle$
7	$\langle 0{,}080; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}185\rangle$	32	$\langle 0{,}080; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}088; 0{,}180\rangle$
8	$\langle 0{,}076; 0{,}165\rangle$	$\langle 0{,}056; 0{,}141\rangle$	33	$\langle 0{,}084; 0{,}176\rangle$	$\langle 0{,}056; 0{,}142\rangle$
9	$\langle 0{,}064; 0{,}148\rangle$	$\langle 0{,}052; 0{,}133\rangle$	34	$\langle 0{,}056; 0{,}136\rangle$	$\langle \mathbf{0{,}034}; \mathbf{0{,}116}\rangle$
10	$\langle 0{,}052; 0{,}131\rangle$	$\langle 0{,}096; 0{,}184\rangle$	35	$\langle 0{,}064; 0{,}148\rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}172\rangle$
11	$\langle 0{,}064; 0{,}148\rangle$	$\langle 0{,}080; 0{,}167\rangle$	36	$\langle 0{,}084; 0{,}176\rangle$	$\langle 0{,}080; 0{,}171\rangle$
12	$\langle 0{,}076; 0{,}165\rangle$	$\langle 0{,}080; 0{,}170\rangle$	37	$\langle 0{,}076; 0{,}165\rangle$	$\langle 0{,}064; 0{,}150\rangle$
13	$\langle 0{,}088; 0{,}181\rangle$	$\langle 0{,}096; 0{,}191\rangle$	38	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}101; 0{,}193\rangle$
14	$\langle 0{,}080; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}109; 0{,}204\rangle$	39	$\langle 0{,}088; 0{,}181\rangle$	$\langle 0{,}096; 0{,}191\rangle$
15	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}076; 0{,}164\rangle$	40	$\langle 0{,}064; 0{,}148\rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}182\rangle$
16	$\langle 0{,}076; 0{,}165\rangle$	$\langle 0{,}064; 0{,}150\rangle$	41	$\langle 0{,}080; 0{,}170\rangle$	$\langle 0{,}060; 0{,}146\rangle$
17	$\langle 0{,}085; 0{,}201\rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}164\rangle$	42	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}076; 0{,}164\rangle$
18	$\langle 0{,}048; 0{,}125\rangle$	$\langle 0{,}080; 0{,}164\rangle$	43	$\langle 0{,}076; 0{,}165\rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}174\rangle$
19	$\langle 0{,}107; 0{,}213\rangle$	$\langle 0{,}096; 0{,}181\rangle$	44	$\langle 0{,}105; 0{,}203\rangle$	$\langle 0{,}052; 0{,}141\rangle$
20	$\langle 0{,}076; 0{,}165\rangle$	$\langle 0{,}088; 0{,}179\rangle$	45	$\langle 0{,}105; 0{,}203\rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}189\rangle$
21	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}064; 0{,}149\rangle$	46	$\langle 0{,}092; 0{,}187\rangle$	$\langle 0{,}072; 0{,}163\rangle$
22	$\langle 0{,}060; 0{,}142\rangle$	$\langle 0{,}060; 0{,}142\rangle$	47	$\langle 0{,}113; 0{,}214\rangle$	$\langle 0{,}052; 0{,}142\rangle$
23	$\langle 0{,}064; 0{,}148\rangle$	$\langle 0{,}072; 0{,}158\rangle$	48	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}076; 0{,}164\rangle$
24	$\langle 0{,}088; 0{,}181\rangle$	$\langle 0{,}117; 0{,}215\rangle$	49	$\langle 0{,}064; 0{,}148\rangle$	$\langle 0{,}072; 0{,}158\rangle$
25	$\langle 0{,}072; 0{,}159\rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}174\rangle$			

Tabulka 13: Tabulka intervalových odhadů (1978–1988)

6.5 Losovací zařízení z let 1988–1993

číslo	odhad 1. tah	odhad 2. tah	číslo	odhad 1. tah	odhad 2. tah
1	$\langle \mathbf{0{,}141}; \mathbf{0{,}301} \rangle$	$\langle 0{,}039; 0{,}176 \rangle$	26	$\langle 0{,}108; 0{,}257 \rangle$	$\langle 0{,}061; 0{,}199 \rangle$
2	$\langle 0{,}061; 0{,}188 \rangle$	$\langle 0{,}032; 0{,}150 \rangle$	27	$\langle 0{,}025; 0{,}128 \rangle$	$\langle 0{,}039; 0{,}147 \rangle$
3	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$	$\langle 0{,}061; 0{,}194 \rangle$	28	$\langle 0{,}025; 0{,}128 \rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}205 \rangle$
4	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}204 \rangle$	29	$\langle 0{,}046; 0{,}165 \rangle$	$\langle 0{,}061; 0{,}184 \rangle$
5	$\langle 0{,}039; 0{,}153 \rangle$	$\langle 0{,}046; 0{,}162 \rangle$	30	$\langle \mathbf{0{,}029}; \mathbf{0{,}113} \rangle$	$\langle 0{,}042; 0{,}134 \rangle$
6	$\langle \mathbf{0{,}018}; \mathbf{0{,}115} \rangle$	$\langle \mathbf{0{,}124}; \mathbf{0{,}250} \rangle$	31	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$
7	$\langle 0{,}116; 0{,}268 \rangle$	$\langle 0{,}032; 0{,}162 \rangle$	32	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$	$\langle 0{,}100; 0{,}242 \rangle$
8	$\langle 0{,}046; 0{,}165 \rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}222 \rangle$	33	$\langle 0{,}053; 0{,}177 \rangle$	$\langle 0{,}046; 0{,}167 \rangle$
9	$\langle 0{,}051; 0{,}118 \rangle$	$\langle \mathbf{0{,}029}; \mathbf{0{,}119} \rangle$	34	$\langle 0{,}053; 0{,}177 \rangle$	$\langle 0{,}053; 0{,}177 \rangle$
10	$\langle 0{,}068; 0{,}200 \rangle$	$\langle 0{,}025; 0{,}142 \rangle$	35	$\langle 0{,}025; 0{,}128 \rangle$	$\langle 0{,}076; 0{,}195 \rangle$
11	$\langle \mathbf{0{,}136}; \mathbf{0{,}242} \rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}221 \rangle$	36	$\langle 0{,}039; 0{,}153 \rangle$	$\langle 0{,}084; 0{,}210 \rangle$
12	$\langle 0{,}046; 0{,}165 \rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}222 \rangle$	37	$\langle \mathbf{0{,}131}; \mathbf{0{,}268} \rangle$	$\langle 0{,}061; 0{,}201 \rangle$
13	$\langle 0{,}061; 0{,}188 \rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}198 \rangle$	38	$\langle 0{,}025; 0{,}128 \rangle$	$\langle 0{,}061; 0{,}176 \rangle$
14	$\langle 0{,}061; 0{,}188 \rangle$	$\langle 0{,}092; 0{,}227 \rangle$	39	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$	$\langle 0{,}076; 0{,}213 \rangle$
15	$\langle 0{,}092; 0{,}234 \rangle$	$\langle 0{,}053; 0{,}186 \rangle$	40	$\langle 0{,}039; 0{,}153 \rangle$	$\langle 0{,}108; 0{,}239 \rangle$
16	$\langle 0{,}046; 0{,}165 \rangle$	$\langle 0{,}100; 0{,}232 \rangle$	41	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}204 \rangle$
17	$\langle 0{,}092; 0{,}234 \rangle$	$\langle \mathbf{0{,}001}; \mathbf{0{,}109} \rangle$	42	$\langle 0{,}061; 0{,}188 \rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}198 \rangle$
18	$\langle 0{,}068; 0{,}200 \rangle$	$\langle 0{,}046; 0{,}171 \rangle$	43	$\langle 0{,}066; 0{,}139 \rangle$	$\langle 0{,}053; 0{,}156 \rangle$
19	$\langle 0{,}053; 0{,}177 \rangle$	$\langle 0{,}039; 0{,}157 \rangle$	44	$\langle 0{,}039; 0{,}153 \rangle$	$\langle 0{,}061; 0{,}181 \rangle$
20	$\langle 0{,}068; 0{,}200 \rangle$	$\langle 0{,}039; 0{,}162 \rangle$	45	$\langle \mathbf{0{,}025}; \mathbf{0{,}117} \rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}186 \rangle$
21	$\langle 0{,}084; 0{,}223 \rangle$	$\langle 0{,}053; 0{,}185 \rangle$	46	$\langle 0{,}068; 0{,}200 \rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}200 \rangle$
22	$\langle 0{,}076; 0{,}212 \rangle$	$\langle 0{,}018; 0{,}135 \rangle$	47	$\langle 0{,}025; 0{,}128 \rangle$	$\langle 0{,}032; 0{,}137 \rangle$
23	$\langle 0{,}032; 0{,}140 \rangle$	$\langle 0{,}053; 0{,}169 \rangle$	48	$\langle 0{,}046; 0{,}165 \rangle$	$\langle 0{,}053; 0{,}174 \rangle$
24	$\langle 0{,}061; 0{,}188 \rangle$	$\langle 0{,}039; 0{,}159 \rangle$	49	$\langle 0{,}046; 0{,}165 \rangle$	$\langle 0{,}039; 0{,}155 \rangle$
25	$\langle 0{,}046; 0{,}165 \rangle$	$\langle 0{,}068; 0{,}193 \rangle$			

Tabulka 14: Tabulka intervalových odhadů (1988–1993)

6.6 Současné losovací zařízení

číslo	odhad 1. tah	odhad 2. tah	číslo	odhad 1. tah	odhad 2. tah
1	$\langle 0{,}093; 0{,}147\rangle$	$\langle 0{,}087; 0{,}140\rangle$	26	$\langle 0{,}103; 0{,}158\rangle$	$\langle 0{,}098; 0{,}153\rangle$
2	$\langle 0{,}087; 0{,}139\rangle$	$\langle 0{,}106; 0{,}160\rangle$	27	$\langle 0{,}085; 0{,}137\rangle$	$\langle 0{,}078; 0{,}128\rangle$
3	$\langle 0{,}106; 0{,}162\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0{,}070; 0{,}121\rangle}$	28	$\langle 0{,}101; 0{,}156\rangle$	$\langle 0{,}104; 0{,}160\rangle$
4	$\langle 0{,}119; 0{,}177\rangle$	$\langle 0{,}111; 0{,}168\rangle$	29	$\langle 0{,}100; 0{,}154\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0{,}127; 0{,}183\rangle}$
5	$\langle 0{,}106; 0{,}162\rangle$	$\langle 0{,}089; 0{,}143\rangle$	30	$\langle 0{,}093; 0{,}147\rangle$	$\langle 0{,}089; 0{,}141\rangle$
6	$\langle 0{,}098; 0{,}152\rangle$	$\langle 0{,}098; 0{,}152\rangle$	31	$\langle 0{,}089; 0{,}141\rangle$	$\langle 0{,}093; 0{,}146\rangle$
7	$\langle 0{,}082; 0{,}133\rangle$	$\langle 0{,}082; 0{,}133\rangle$	32	$\langle 0{,}114; 0{,}171\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}150\rangle$
8	$\boldsymbol{\langle 0{,}073; 0{,}121\rangle}$	$\langle 0{,}087; 0{,}138\rangle$	33	$\langle 0{,}090; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}082; 0{,}134\rangle$
9	$\langle 0{,}103; 0{,}158\rangle$	$\langle 0{,}100; 0{,}154\rangle$	34	$\langle 0{,}089; 0{,}141\rangle$	$\langle 0{,}075; 0{,}125\rangle$
10	$\langle 0{,}087; 0{,}139\rangle$	$\langle 0{,}089; 0{,}141\rangle$	35	$\langle 0{,}090; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}098; 0{,}151\rangle$
11	$\langle 0{,}087; 0{,}139\rangle$	$\langle 0{,}109; 0{,}163\rangle$	36	$\langle 0{,}087; 0{,}139\rangle$	$\langle 0{,}104; 0{,}158\rangle$
12	$\langle 0{,}090; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}148\rangle$	37	$\langle 0{,}085; 0{,}137\rangle$	$\langle 0{,}100; 0{,}153\rangle$
13	$\langle 0{,}090; 0{,}143\rangle$	$\langle 0{,}108; 0{,}162\rangle$	38	$\langle 0{,}092; 0{,}145\rangle$	$\langle 0{,}098; 0{,}152\rangle$
14	$\langle 0{,}082; 0{,}133\rangle$	$\langle 0{,}089; 0{,}140\rangle$	39	$\boldsymbol{\langle 0{,}073; 0{,}121\rangle}$	$\langle 0{,}109; 0{,}162\rangle$
15	$\langle 0{,}106; 0{,}162\rangle$	$\langle 0{,}085; 0{,}139\rangle$	40	$\langle 0{,}103; 0{,}158\rangle$	$\langle 0{,}112; 0{,}168\rangle$
16	$\langle 0{,}084; 0{,}135\rangle$	$\langle 0{,}081; 0{,}132\rangle$	41	$\langle 0{,}084; 0{,}135\rangle$	$\langle 0{,}104; 0{,}158\rangle$
17	$\langle 0{,}111; 0{,}167\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0{,}124; 0{,}181\rangle}$	42	$\langle 0{,}095; 0{,}148\rangle$	$\langle 0{,}090; 0{,}143\rangle$
18	$\langle 0{,}112; 0{,}169\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0{,}070; 0{,}121\rangle}$	43	$\langle 0{,}076; 0{,}125\rangle$	$\langle 0{,}090; 0{,}141\rangle$
19	$\langle 0{,}116; 0{,}173\rangle$	$\langle 0{,}087; 0{,}142\rangle$	44	$\langle 0{,}096; 0{,}150\rangle$	$\langle 0{,}109; 0{,}164\rangle$
20	$\langle 0{,}114; 0{,}171\rangle$	$\langle 0{,}106; 0{,}163\rangle$	45	$\langle 0{,}096; 0{,}150\rangle$	$\langle 0{,}093; 0{,}147\rangle$
21	$\langle 0{,}084; 0{,}135\rangle$	$\langle 0{,}116; 0{,}170\rangle$	46	$\langle 0{,}085; 0{,}137\rangle$	$\langle 0{,}109; 0{,}163\rangle$
22	$\langle 0{,}084; 0{,}135\rangle$	$\langle 0{,}106; 0{,}159\rangle$	47	$\langle 0{,}112; 0{,}169\rangle$	$\langle 0{,}095; 0{,}150\rangle$
23	$\langle 0{,}100; 0{,}154\rangle$	$\langle 0{,}089; 0{,}142\rangle$	48	$\langle 0{,}096; 0{,}150\rangle$	$\langle 0{,}093; 0{,}147\rangle$
24	$\langle 0{,}108; 0{,}164\rangle$	$\langle 0{,}082; 0{,}136\rangle$	49	$\langle 0{,}100; 0{,}154\rangle$	$\langle 0{,}087; 0{,}140\rangle$
25	$\boldsymbol{\langle 0{,}133; 0{,}188\rangle}$	$\langle 0{,}081; 0{,}134\rangle$			

Tabulka 15: Tabulka intervalových odhadů (1993–současnost)

LITERATURA

[1] Tlustý, P.; Płocki, A.; *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé.* Prometheus, Praha, 2007

[2] Płocki, A.; *Stochastyka I.* Wydavnictwo Naukowe WSP, Krakow, 1997

[3] Wichmann, B. A.; Hill I. D.; *An efficient and portable number generator.* Aplied Statisticks 31(2), 1982, p. 188-90

[4] Pavelka, L.; Doležalová, J.; *Pravděpodobnost a statistika.* Ostrava: VŠB, 1999

[5] Calda, E.; Dupač, V.; *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.* Prometheus, Praha, 1993

[6] kolektiv autorů; *Evropské loterie a hry.* Olympia, Praha, 1998

[7] Tuček, J; Dolinová, M.; *Kasina, aneb co nevíte o nejrychlejším hazardu.* Ikar, Praha, 2001

[8] Přispěvatelé Wikipedie; *Střední hodnota [online]*, Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2007, Datum poslední revize 9. 04. 2007, 02:25 UTC, [citováno 20. 04. 2007] ⟨http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=St%C5%99edn%C3%AD_hodnota&oldid=1380132⟩

[9] Přispěvatelé Wikipedie, *Binomické rozdělení [online]*, Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2007, Datum poslední revize 7. 04. 2007, 17:33 UTC, [citováno 20. 04. 2007] ⟨http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Binomick%C3%A9_rozd%C4%9Blen%C3%AD&oldid=1376716⟩