Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

L I N E Á R N Í   P R O G R A M O V Á N Í

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jana Vrtilková

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice, 2007

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a veškerou použitou literaturu, zdroje a prameny jsem citovala v seznamu použité literatury.

V Českých Budějovicích dne 24. dubna 2007

Jana Vrtilková

Děkuji vedoucímu své diplomové práce Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D. za skvělý návrh zpracovat téma lineárního programování jako jakousi pomůcku či návod, který by mohl posloužit ostatním při zabývání se touto problematikou (např. studentům, ale i učitelům při výuce na střední či vysoké škole). Dále děkuji za odborné vedení a motivaci.

Děkuji panu učiteli doc. RNDr. Františku Mrázovi, CSc., že mi poskytl správnou motivaci a srozumitelný výklad v loňském roce při výuce optimalizačních metod, kde jsem se poprvé seznámila s lineárním programováním, simplexovou metodou a dopravním problémem. Většinu uvedených praktických příkladů jsem využila právě z jeho hodin.

Děkuji svému kamarádovi Davidu Paříkovi za nápad použít pro grafické řešení úloh lineárního programování geometrického programu GEONExT.

ANOTACE

Jak z názvu diplomové práce vyplývá, je zaměřena na problematiku týkající se lineárního programování, které řeší problém nalezení minima (respektive maxima) lineární funkce n-proměnných na množině popsané soustavou lineárních nerovností. Obsah tohoto tématu je velmi rozsáhlý, proto jsem se zaměřila do hloubky jen na některé bloky a to především na jeho grafické řešení a na nejznámější a nejpoužívanější algoritmus řešení, tzv. „simplexovou metodu“. Ostatní bloky jsem zmínila jen povrchově. Práce je rozdělena na dvě části, a to na teoretickou a praktickou. V praktické části jsem se snažila řešit několik úloh lineárního programování, které navazují na teorii. Jsou uvedeny příklady různého typu a stupně obtížnosti.

ABSTRACT

As we can see at the title of the thesis, we investigate questions of the linear programming which search minimum (maximum) of the linear function of n variables on the group of numbers defined by linear unequalities. The contents touch many areas of mathematics so we only deal with the graphic solution and the most known algorithm called “simplex method”, the other blocks from the contents are just roughly defined. The work consists of two parts, the theoretical one and the practical one. The practical part solves problems of linear programming which are related to their theoretical background, there are mentioned problems of different type and grade.

OBSAH

1. ÚVOD

Na úvod je třeba zmínit, že se dříve pro název lineárního programování používal termín „lineární optimalizace“.

Otázku existence řešení úlohy lineárního programování (využívá se zkratka LP) zodpovídá již teorie lineárních nerovností propracovaná na počátku minulého století maďarským matematikem **J. Farkasem**. Obrovský rozvoj lineárního programování však vyvolala až nutnost řešit složité ekonomické problémy, s nimiž se setkávaly válčící země za druhé světové války.

Lineární programování patří mezi základní optimalizační metody používané v nejrůznějších oblastech vědy, techniky a národního hospodářství. Tyto metody mají v praxi velmi široké uplatnění. Například při určování optimálního sortimentu výroby nebo pro optimální rozřezávání polotovarů (např. tyčoviny), dále se uplatňuje pro optimální plány přepravy produkce od dodavatelů ke spotřebitelům, apod. Za svoje rozšíření vděčí relativní jednoduchosti, ať už jde o samotný matematický model a nebo o jeho řešení. Vyučuje se na mnohých odborných vysokých školách.

Lineární programování se zabývá speciálními úlohami na vázané extrémy funkcí více proměnných. Specifičnost těchto úloh spočívá v tom, že jde o extrémy lineárních funkcí vázaných podmínkami ve tvaru lineárních rovnic a nerovností.

Na začátku této práce se nejprve seznámíme s postavením a historií lineárního programování, s různými formulacemi úloh lineárního programování, s jeho vybranými aplikacemi, ale také i s geometrií lineárního programování, simplexovou metodou a teorií duality, která je jeho teoretickým základem. Poté se podíváme na konkrétní příklady.

T E O R E T I C K Á Č Á S T

2. HISTORIE A FORMULACE ÚLOH LP

2.1 Historie lineárního programování

Matematické myšlenky vztahující se k lineárnímu programování lze najít již na konci 18. století, např. v pracích **Fouriera** (Sebrané spisy, rok 1888).

Na přelomu 19. a 20. století maďarský matematik **Farkas** propracoval teorii soustav lineárních nerovností, která je jedním ze základů teorie lineárního programování. Nejznámější je Farkasova práce z roku 1902. Pro zmíněné výsledky byla motivací teoretická mechanika, podobně jako pro další příspěvky k řešení optimalizačních úloh.

Ve 30. letech minulého století vznikly práce, které se týkají řešení speciálních úloh lineárního programování, tj. *přiřazovacího a dopravního problému*. Byly založeny na kombinatorických úvahách a podle národnosti autorů, jimiž byli **König** a **Egerváry**, jsou výsledné algoritmy známy jako *maďarská metoda*. Obecný postup pro řešení dopravního problému navrhl však až americký matematik **Hitchock**, a to roku 1941.

Bouřlivý rozvoj teorie a aplikací lineárního programování spadá až do období po 2. světové válce, kdy mělo být lineární programování jedním z prostředků vedoucím k řešení složitých ekonomických problémů válčících zemí i jejich poválečného rozvoje.

Za prvou práci o lineárním programování je pokládána práce sovětského matematika **Kantoroviče** z roku 1939. Její publicita ale byla válkou pozdržena. Obecnou formulaci lineárního programování (včetně dodnes používaného algoritmu pro jeho řešení, tj. *simplexové metody*), podal roku 1947 **Dantzig**, který uvádí, že šlo o vyústění několikaletých diskusí s řadou známých osobností matematiky i ekonomie (např. s J. Neymanem, W. Leontievem, J. von Neumannem a T. Koopmansem). Kantorovičovy a Koopmansovy zásluhy o rozvoj lineárního programování a jeho ekonomických aplikací byly v roce 1945 oceněny Nobelovou cenou za ekonomii.

V letech 1950 – 1960 se začaly prudce rozvíjet další oblasti matematického programování a jeho aplikací. Vývoj výpočetní techniky otevřel možnosti řešit úlohy nebývalých rozměrů. V souvislosti s tím vyvstaly otázky efektivnosti výpočtů a výpočetní složitosti. Byly navrženy nové algoritmy pro řešení úloh lineárního programování (např. elipsoidová a Karmarkarova metoda). Zkoumají se možnosti využití paralelních výpočtů.

Značný zájem o otázky efektivního algoritmického řešení úloh lineárního programování vyplývá i z toho, že opakované řešení rozsáhlých úloh lineárního programování je často součástí algoritmů pro řešení složitějších optimalizačních úloh.

2 . 2 Formulace, zápis a postavení lineárního programování

Základní úloha lineárního programování může být vyjádřena následujícím způsobem (zde uvedeno konkrétně pro hledání maxima lineární funkce). Někdy se úloha lineárního programování neformuluje pro maximum, nýbrž pro minimum účelové funkce [Klvaňa, 1990, s.90]**.**

Nalezněte maximum lineární funkce:

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ **(1.1)**

při splnění daných podmínek

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$ **(1.2)**

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

.

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$ **(1.3)**

Úloha lineárního programování je speciálním případem úlohy matematického programování, kterou lze matematicky formulovat jako úlohu nalezení extrému (tj. **maxima** nebo **minima**) lineární reálné funkce *z* více proměnných při vedlejších podmínkách vyjádřených lineárními rovnicemi nebo nerovnostmi (neboli na množině řešení soustavy rovnic a nerovností). Tato funkce se nazývá účelová (též cílová nebo kriteriální) funkce. Nerovnosti lze převést na rovnice o větším počtu neznámých a řešení úloh minimalizačních lze převést na maximalizační.

Poznámka:

Minimum je matematická funkce, jejíž hodnota představuje nejnižší hodnotu ze všech vstupních parametrů. Funkce provádí porovnání jednotlivých parametrů a výsledkem je hodnota toho parametru, který se při porovnání se všemi ostatními jeví jako nejnižší.

Maximum je matematická funkce, jejíž funkční hodnota představuje naopak nejvyšší hodnotu ze všech vstupních parametrů. Funkce provádí porovnání jednotlivých parametrů a výsledkem je hodnota toho parametru, který se při porovnání se všemi ostatními jeví jako nejvyšší.

Obecnou úlohou lineárního programování formulujeme takto:

Lineární funkci z (ad. 1.1), jejíž maximum hledáme, nazýváme **účelovou funkcí**.

Dané rovnice (ad. 1.2) nazýváme **vlastní omezení** úlohy (neboli podmínky).

Dané nerovnosti (ad. 1.3) nazýváme **podmínkami nezápornosti**.

Proměnné x_i, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, charakterizují objemy procesů, které se mají realizovat, má-li být daný úkol splněn.

Lineární programování odpovídá takovému případu, kdy jsou všechny funkce (tzn. účelová funkce i všechna vlastní omezení) lineární. V lineárním programování se vedle linearity všech funkcí předpokládá, že jsou i všechny koeficienty úlohy (tj. koeficienty všech funkcí) daná reálná čísla.

Pokud některé koeficienty lineárně závisí na jistých parametrech, mluvíme o tzv. úloze *parametrického lineárního programování* (která byla zformulována v roce 1955) a v případě, že jsou v úloze lineárního programování některé nebo všechny proměnné celá čísla, mluvíme o tzv. *celočíselném programování* (tato úloha byla poprvé řešena v roce 1958). Lze se setkat i s úlohou *lineární vektorové optimalizace*, jejímž cílem je najít takové řešení z dané množiny přípustných řešení, které je co nejlepší vzhledem k několika daným účelovým funkcím.

Četné aplikace lineárního programování v ekonomii způsobily, že se lineární programování a jeho různá zobecnění řadí pod aplikace matematiky v ekonomii a operační výzkum, a že se v něm běžně užívá ekonomického názvosloví.

V současné době nacházejí úlohy lineárního programování, ale i další optimalizační úlohy stále širší uplatnění (např. v technice). S úlohami lineárního a nelineárního programování se setkáváme i v matematické statistice (např. se používají při plánování experimentů či ve výběrových šetřeních).

<u>Úloha lineárního programování lze stručně zapsat v maticovém tvaru:</u>

Nalezněte maximum lineární funkce $z = \left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$ při splnění podmínek

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$\vec{x} \geq \vec{0}$, kde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$ je matice strukturálních koeficientů

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$ je vektor řešení

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$ je vektor omezení

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix}$$ je vektor cen

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$ je nulový vektor

Symbol T označuje transponovaný vektor.

<u>Poznámka:</u>

$\left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$ označuje skalární součin vektorů $\vec{c}$, $\vec{x}$. Množina přípustných řešení M je popsána soustavou $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$, kde A je matice soustavy typu (m, n), tedy rozměru m x n, $\vec{b}$ je m-složkový (m-rozměrný) sloupcový vektor pravých stran a $\vec{c}$, $\vec{x}$ jsou n-složkové (n-rozměrné) sloupcové vektory koeficientů účelové funkce a proměnných. Součin $A \cdot \vec{x}$ označuje součin matic.

Řešení úlohy lineárního programování lze rozdělit na:

Přípustné řešení

Jedná se o takové řešení soustavy lineárních rovnic (ad. 1.2), které vyhovuje podmínkám nezápornosti (ad. 1.3).

Optimální řešení

Je právě takové přípustné řešení, které maximalizuje účelovou funkci označenou (ad. 1.1).

Poznámka:
Slovo „optimální“ (latinsky optimus) znamená nejlepší [Klvaňa, 1990, s. 89].

Základní řešení

Jde o přípustné řešení, které má nejvýše tolik kladných složek, kolik je lineárně nezávislých rovnic tvořících vlastní omezení (ad. 1.2), (v našem případě nejvýše m kladných složek a nejméně n-m nulových složek za předpokladu, že je $n > m$). Sloupce koeficientů v matici A odpovídající kladným složkám základního řešení jsou lineárně nezávislými vektory.

Nechť $h(A) = m$. Základní řešení úlohy lineárního programování v rovnicovém tvaru nazveme *nedegenerované*, jestliže má právě m kladných složek. Řekneme, že úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru je nedegenerovaná, jsou-li nedegenerovaná všechna její základní řešení [Plesník, 1990, s. 65].

Degenerované řešení

Základní řešení, které má více něž n-m nulových složek.

Při řešení úloh lineárního programování se používají tyto důležité věty:

Věta1 (základní věta LP)

Má-li úloha lineárního programování optimální řešení, má také optimální základní řešení, tzn., že při hledání optimálního řešení se můžeme omezit na základní řešení (kterých je vždy konečný počet, nejvýše však rovný kombinačnímu číslu "*n* nad *m*").

Jak řešit úlohy lineárního programování? [Plesník, 1990, s. 71]

Na základě Věty1 (základní věty lineárního programování) můžeme hledat optimální řešení úlohy lineárního programování přímou metodou:

a) najdeme všechna základní řešení,
b) spočítáme hodnotu účelové funkce *z* pro všechna z nich,
c) má-li úloha optimální řešení, je jím základní řešení s nejmenší hodnotou účelové funkce.

Potíž při této metodě spočívá v tom, že počet základních řešení velmi rychle narůstá s rostoucím počtem proměnných a omezení.

Věta 2 (vyjadřuje vlastnost **přípustných řešení** úlohy LP)

Jsou-li $\vec{x_1}$ a $\vec{x_2}$ dvě přípustná řešení úlohy lineárního programování, pak i každá jejich konvexní kombinace, tj. $\vec{x} = k \cdot \vec{x_1} + (1 - k) \cdot \vec{x_2}$, kde $(0 \le k \le 1)$, je přípustné řešení. **Množina přípustných řešení úlohy lineárního programování je konvexní množinou s konečným počtem krajních bodů** (vrcholů).

Poznámka:

Množina je konvexní právě tehdy, patří-li do ní s každými dvěma body množiny i jejich spojnice (příkladem je trojúhelník, kruh).

Krajním bodem množiny je takový bod, který se nedá vyjádřit jako vnitřní bod úsečky, do té množiny patřící. Je to bod, který neleží na spojnici jiných dvou bodů množiny. Příkladem je rohlík.

Trojúhelník má 3 krajní body, úsečka má 2 krajní body, kruh má ∞ krajních bodů, …

Množina přípustných řešení může být:

- **prázdná** => úloha lineárního programování NEMÁ optimální řešení,
- **omezená** => úloha lineárního programování MÁ VŽDY optimální řešení,
- **neomezená** ⇒ úloha lineárního programování MŮŽE, ALE NEMUSÍ mít optimální řešení.

Při řešení úloh lineárního programování mohou nastat tyto případy:

- úloha **NEMÁ** optimální řešení (tzn., že účelová funkce *z* může na množině přípustných řešení při úlohách maximalizačních neomezeně růst a nebo při úlohách minimalizačních neomezeně klesat),
- úloha má **JEDINÉ** optimálních řešení (tzn., že účelová funkce *z* nabývá optimální hodnoty v jediném krajním bodě množiny přípustných řešení),
- úloha má **NEKONEČNĚ** mnoho optimálních řešení (tzn., že účelová funkce *z* nabývá optimální hodnoty ve více krajních bodech množiny přípustných řešení).

2 . 3 Vybrané aplikace lineárního programování

Nejstarší úlohou lineárního programování je tzv. dopravní úloha neboli **dopravní problém**.

Dopravní úloha byla jedním z prvních problémů, pro jejichž řešení se použily metody lineárního programování. Tato úloha lze řešit níže uvedenou simplexovou metodou, ale v praxi se pro její řešení užívá speciálních metod (jde o tzv. distribuční metody nebo metody využívající algoritmus z teorie grafů → hledání nejlacinějšího toku v síti).

Jde o úlohu tohoto typu [Plesník, 1990, s. 13]:

Určité libovolně dělitelné zboží se vyrábí v m výrobních střediscích. Za zvolenou jednotku času vyrobí i-té výrobní středisko $\boldsymbol{a_i}$ **jednotek množství** tohoto zboží, $a_i > 0$, $1 \leq i \leq m$. Zboží se dopravuje do n odbytových středisek, přičemž j-té odbytové středisko požaduje za uvažovanou časovou jednotku $\boldsymbol{b_j}$ **jednotek zboží**, $b_j > 0$, $1 \leq j \leq n$.

Máme tedy dáno m dodavatelů $D_1, D_2, \ldots, D_m$ s kapacitami $a_1, a_2, \ldots, a_m$ a n spotřebitelů $S_1, S_2, \ldots, S_n$ s požadavky $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Cílem je přepravit zboží od skupiny dodavatelů ke skupině spotřebitelů tak, aby náklady byly co nejmenší, tedy minimální (za co nejnižší cenu či po nejkratší cestě).

Předpokládáme, že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \qquad \textbf{(1)}$$

tzn., že výroba v daném období přesně pokrývá požadavky odbytových středisek.

Je dána sazba c_{ij} za dopravu jednotkového množství zboží z i-tého výrobního střediska (od dodavatele) do j-tého odbytového střediska (ke spotřebiteli), (tzn. známé náklady na dopravu jednotky od D_i k S_j nebo c_{ij} je odpovídající kilometrová vzdálenost) .

Úkolem je sestavit takový plán na přepravu zboží z výrobních středisek do odbytových středisek tak, aby byly splněny požadavky spotřebitelů, a aby *celkové dopravní náklady byly minimální*.

Označíme-li x_{ij} množství zboží dopravované z i-tého výrobního střediska do j-tého odbytového střediska (tj. hledané <u>množství</u> dopravené od D_i k S_j), musí platit následující omezující podmínky:

$$x_{ij} \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad 1 \leq j \leq n \tag{4}$$

(Poslední rovnici v (4) $\sum_{i=1}^{m} x_{in} = b_n$ lze vynechat, neboť je vzhledem k podmínce číslo (1) důsledkem rovnic (3) a prvních $n - 1$ rovnic z čísla (4).)

Nerovnosti (2) znamenají zřejmý požadavek nezápornosti přepravovaného množství. Rovnice (3) znamenají vyčerpání výrobní kapacity a rovnice (4) značí pokrytí požadavků na spotřebu.

Předpokládejme, že náklady na dopravu jsou přímo úměrné přepravovanému množství zboží. Označme c_{ij} sazbu za dopravu jedné jednotky množství zboží z i-tého výrobního střediska do j-tého spotřebního střediska. Celkové dopravní náklady přiřazené alternativě x_{ij} (tedy celkové náklady na dopravu), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, jsou rovny

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Budeme tedy minimalizovat funkci

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

na množině nezáporných řešení soustavy lineárních rovnic (3) a (4).

Veličiny $x_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ bez ohledu na splnění podmínek (3) a (4) představují alternativy přepravního plánu. Ve volbě alternativ jsme omezeni podmínkami číslo (3) a (4), které vymezují množinu přípustných alternativ, a proto se jim spolu s podmínkami nezápornosti říká omezení. Prvky množiny přípustných alternativ uspořádáme podle výše celkových dopravních nákladů a vybíráme nejlepší alternativu z hlediska účelu, pro který úlohu řešíme, tj. z hlediska minimalizace celkových dopravních nákladů. Odtud tedy název **účelová funkce** pro funkci f v (5) $\Rightarrow$ $f(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{mn}) = c_{11} \, . \, x_{11} + c_{12} \, . \, x_{12} + \ldots + c_{mn} \, . \, x_{mn}.$

[Plesník, 1990, s. 14] Abstrakce v modelu spočívá v tom, že nepřihlížíme k eventuálním (třeba tradičním) vztahům mezi jednotlivými výrobními a odbytovými středisky, nehledíme na odstíny v kvalitě, na kapacitu ani jakost dopravních cest, neuvažujeme náhodné odchylky v požadavcích na spotřebu a ve výrobních kapacitách.

Věta 3:

Dopravní úloha lineárního programování má řešení $\Leftrightarrow \sum_{1}^{m} a_i = A \geq B = \sum_{1}^{n} b_j$.

Je-li $A = B$, mluvíme o tzv. vyvážené (vyrovnané) dopravní úloze lineárního programování.

Věta 4:

Pro vyváženou úlohu lineárního programování platí, že všechny omezující podmínky jsou splněny jako rovnice.

Je-li $A > B$, $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, mluvíme o tzv. nevyvážené (nevyrovnané) dopravní úloze lineárního programování.

Existují i *vícerozměrné dopravní úlohy*, např. jde-li zboží od m dodavatelů k n spotřebitelům přes r meziskladů.

Pokud je problém vyrovnán, tzn. celková kapacita dodavatelů je rovna:

1. celkovým požadavkům spotřebitelů,
2. celkovým kapacitám meziskladů,

lze úlohu řešit rozkladem na dvě jednorozměrné dopravní úlohy.

Ve speciálním případě, kdy $m = n$ a $b_j = 1\ \forall j$, $a_i = 1\ \forall i$, získáme úlohu odpovídající (tedy až na požadavek celočíselnosti řešení) tzv. *přiřazovacímu problému*. Má svou vlastní ekonomickou interpretaci.

[Plesník, 1990, s. 17] Každý z n pracovníků má vykonávat jednu z n daných odlišných činností. Jejich kvalifikace pro výkon jednotlivých činností byla otestována a ohodnocena ukazateli c_{ij}, $1 \leq i,\ \ j \leq n$ (kde ukazatel c_{ij} oceňuje přínos toho, že i-tý pracovník vykonává j-tou činnost). Úkolem je najít takové přiřazení pracovníků, aby každou činnost vykonával právě jeden pracovník a aby úhrnná hodnota výsledků všech činností při tomto přiřazení byla maximálně možná.

Položme $\boldsymbol{x_{ij}} \mathbf{= 1}$, jestli-že i-tý pracovník vykonává j-tou činnost,

$\boldsymbol{x_{ij}} \mathbf{= 0}$, jestli-že j-tý pracovník nevykonává i-tou činnost.

Dostáváme úlohu maximalizovat $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad 1 \leq \mathrm{i} \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

a s dodatečnou podmínkou

$$x_{ij} = 0 \text{ nebo } 1,\ 1 \leq \mathrm{i},\ \ j \leq n \tag{6}$$

Přiřazovací problém bychom mohli vyřešit např. tak, že bychom pro každou z n! permutací přiřazení pracovníků pro daných n činností vypočítali hodnotu přiřazení a vybrali nejlepší alternativu. Pro n = 10 bychom tak museli porovnávat 10! = 3 628 800 možných přiřazení. Speciální struktura úlohy však umožňuje použít jednoduché algoritmy, a dokonce ani dodatečná podmínka (ad. 6) nepůsobí v tomto případě žádné potíže.

K jiné struktuře úlohy lineárního programování vedou úlohy *směšovací*, které vznikají při míchání krmných směsí, sestavování jídelníčku, při míchání směsí cukrovinek, při výrobě oceli a různých druhů benzínu, ale i při řešení minimalizace odpadu, rozhodování investicí apod.

3. SIMPLEXOVÁ METODA

V této kapitole se seznámíme se základním, nejznámějším a nejčastěji používaným algoritmem pro řešení úloh lineárního programování, s tzv. simplexovým algoritmem neboli **simplexovou metodou**.

Autorem této metody je americký matematik G. B. Dantzig, který ji roku 1947 navrhl pro řešení úloh lineárního programování, které byly formulovány pro potřeby letectva v USA. Je sice pravda, že publikované zprávy se objevily až později (r. 1949 a r. 1951), ale název „simplexová“ má původ již dříve a udržel se až dodnes.

Jde o nejpoužívanější a velmi jednoduchou metodu, která se dobře programuje. Existují však i jiné, asymptoticky rychlejší algoritmy pro řešení úloh lineárního programování. Patří mezi ně například **elipsoidová metoda** (autorem je L. Khachiyan, r. 1979) či **metoda vnitřních bodů** (autorem je N. Karmarkar, r. 1984).

3.1 Popis a formulace simplexové metody

Pro účelovou funkci (neboli lineární funkci) s více než 2 proměnnými není příliš jednoduché používat grafickou metodu (řešení pomocí grafu), proto se používá tzv. SIMPLEXOVÁ METODA.

Myšlenka simplexového algoritmu

<u>Krajní body procházíme systematicky:</u>

0. krok: určíme výchozí krajní bod,
1. krok: rozhodneme, zda je optimálním řešením, tj. zda máme extrém (pokud „ano“, končíme; jinak přejdeme do kroku č. 2),
2. krok: přejdeme do sousedního krajního bodu,
3. krok: návrat do 1. kroku.

Pokud uvažujeme úlohu lineárního programování ve tvaru:

Nalezněte maximum lineární funkce $z = \left(\vec{c}\right)^{T} \cdot \vec{x}$ při splnění podmínek $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ $\quad \vec{x} \geq \vec{0}$,

lze použít univerzální metodu pro řešení úloh lineárního programování, a to právě simplexovou metodu. Jedná se o **finitivní iterační metodu**, která je založena z velké části na Gaussově-Jordanově eliminaci.

Řešení simplexové metody lze rozdělit do třech kroků:

1. nalezení výchozího řešení,
2. kriterium, zda je řešení optimální,
3. změna řešení.

Pokud se hned v prvním kroku neukáže, že daná úloha nemá vůbec přípustné řešení, vede simplexová metoda u nedegenerovaných úloh po konečném počtu kroků buď k optimálnímu řešení nebo k výsledkům, že úloha optimální řešení nemá.

Simplexová metoda pro řešení úlohy lineárního programování

Matematik G. B. Dantzig navrhl postup, jak pracovat s úlohou lineárního programování ve tvaru: $max\ \{c^T x: Ax = b, x \geq 0\}$ či $min\ \{c^T x: Ax = b, x \geq 0\}$. Tento tvar má tu výhodu, že s rovnicemi umíme lépe manipulovat než s nerovnicemi. Eliminované proměnné v soustavě lineárně nezávislých rovnic $Ax = b$ nazýváme bázické proměnné, ostatní proměnné se nazývají nebázické proměnné.

Mějme tedy dánu úlohu lineárního programování ve tvaru $min\ \{c^T x: Ax = b, x \geq 0\}$.

Předpokládejme, že lze soustavu $Ax = b$ řešit vzhledem k prvním m proměnným:

$$x_i = d^1_{i0} + \sum d^1_{ij} x_{m+j}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (1)$$

Dosadíme do účelové funkce

$$f\,(x_1, \ldots, x_n) = f^{\,1}(x_{m+1}, \ldots, x_n) = c^1{}_0 + \sum c^1{}_j\, x_{m+j}\ . \qquad (2)$$

Výchozí bod

$$x_{m+j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n-m; \qquad x_i = d^1{}_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (3)$$

Za předpokladu $X \neq \emptyset$ a nedegenerace, existuje krajní bod množiny přípustných řešení X tvaru (ad. 3), přičemž $d^1{}_{i0} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Věta 5:

Nechť $c^1 j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n-m$. Pak fce f nabývá v bodě (ad. 3) svého minima na množině X.

Nechť existuje $c^1{}_p = \dfrac{\partial f^{\,1}}{\partial x_{m+p}} < 0$ (derivace v libovolném bodě x), pak při postupném zvětšování x_{m+p} klesá hodnota funkce $f^{\,1}$.

Věta 6:

Jestli-že existuje p tak, že $c^1{}_p < 0$ a $d^1{}_{ip} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), pak f není na množině X zdola omezená (pro maximum shora omezená).

Nechť naopak existuje q tak, že $d^1{}_{qp} < 0$. Pak z q-té rovnice soustavy (ad. 1) plyne, že x_{m+p} lze zvětšovat pouze do hodnoty $x_{m+p} = -\,d^1{}_{q0}/d^1{}_{qp}$, neboť pak je $x_q = 0$. Přešli jsme tak do sousedního krajního bodu A s menší hodnotou účelové funkce.

Věta 7:

Jestli-že existuje p, q tak, že $\boldsymbol{c^1{}_p < 0}$ a $\boldsymbol{d^1{}_{qp} < 0}$, pak pro $\bar{x}_{m+p} = -\,d^1{}_{q0}/d^1{}_{qp} > 0$ je $x_q = 0$ a přitom $f^{\,1}(0, \ldots, 0, \bar{x}_{m+p}, 0, \ldots, 0) < f^{\,1}(0, \ldots, 0)$.

<u>Nově vypočtený bod *A* má souřadnice:</u>

$x_q = 0$; $x_{m+j} = 0$, $\quad j = 1, \ldots, n-m$; $j \neq p$;

$x_{m+p} = -\,d^1{}_{q0}/d^1{}_{qp}$; $x_i = d^1{}_{i0} - d^1{}_{ip} \cdot d^1{}_{q0}/d^1{}_{qp}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq q$.

<u>Pro tento bod vyjádříme koeficienty soustavy (ad. 1) a účelové funkce (ad. 2):</u>

Z q-té rovnice soustavy (ad. 1) vyjádříme x_{m+p} :

$$x_{m+p} = -\,d^1{}_{q0}/d^1{}_{qp} + x_q/d^1{}_{qp} - \sum j \neq p\, \frac{d^1{}_{qj}}{d^1{}_{qp}}\; x_{m+j} =$$

$$= d^2{}_{q0} + d^2{}_{qp}x_q + \sum j \neq p\;\; d^2{}_{qj}\, x_{m+j}.$$

<u>Dosadíme do ostatních rovnic systému (ad. 1):</u>

$$x_i = d^1{}_{\mathrm{i}0} + \sum j \neq p\;\; d^1{}_{ij}\, x_{m+j} + d^1{}_{ip}\, \{ \qquad\qquad \} =$$

$$= \underbrace{\left(d^1{}_{i0} - d^1{}_{ip}\, \frac{d^1{}_{q0}}{d^1{}_{qp}} \right)}_{d^2{}_{i0}} + \underbrace{\frac{d^1{}_{ip}}{d^1{}_{qp}}}_{d^2{}_{ip}} x_q + \sum j \neq p\, \underbrace{\left(d^1{}_{ij} - d^1{}_{ip}\, \frac{d^1{}_{qj}}{d^1{}_{qp}} \right)}_{d^2{}_{ij}} x_{m+j},$$

$i \neq q.$

Podobně dosadíme x_{m+p} do vyjádření účelové funkce (ad. 2), čímž získáme

$$f^{\,2}(x_{m+1}, \ldots, x_q, \ldots, x_n) = c^1{}_0 + \sum j \neq p\;\; c^1{}_j\, x_{m+j} + c^1{}_p\, \{ \qquad\qquad \}=$$

$$= \underbrace{\left(c^1{}_0 - c^1{}_p\, \frac{d^1{}_{q0}}{d^1{}_{qp}} \right)}_{c^2{}_0} + \underbrace{\frac{c^1{}_p}{d^1{}_{qp}}}_{c^2{}_p} x_q + \sum j \neq p\, \underbrace{\left(c^1{}_j - c^1{}_p\, \frac{d^1{}_{qj}}{d^1{}_{qp}} \right)}_{c^2{}_j} x_{m+j}.$$

V novém bodě A jsou tedy soustava (ad. 1) a účelová funkce (ad. 2) popsány analogicky jako v bodě výchozím, postup lze opakovat.

Věta 8:

Nechť je splněn předpoklad nedegenerace a množina $X \neq \emptyset$. Pak po konečném počtu výše popsaných kroků dospějeme do bodu, v němž jsou splněny předpoklady Věty 5 nebo Věty 6.

Průběh celého výpočtu zapisujeme v tzv. SIMPLEXOVÝCH TABULKÁCH.

BÁZE	b	x_{m+1}	…	x_{m+p}	…	x_n
x_1	d_{10}	d_{11}	…	d_{1p}	…	$d_{1,n-m}$
…	…	…	…	….	…	…
x_q	d_{q0}	d_{q1}	…	d_{qp}	…	$d_{q,n-m}$
…	…	…	…	….	…	…
x_m	d_{m0}	d_{m1}	…	d_{mp}	…	$d_{m,n-m}$
$\boldsymbol{f}$	c^k_0	c^k_1	…	c^k_p	…	c^k_{n-m}

Transformace simplexové tabulky (viz vztahy pro d^2_{ij}, c^2_j):

1. Proměnná x_{m+p} se stane bázickou proměnnou místo proměnné x_q.
2. Klíčový prvek nahradíme jeho převrácenou hodnotou $\dfrac{1}{d_{qp}}$.
3. Ostatní prvky klíčového (řídícího) řádku dělíme hodnotou ($-\,d_{qp}$).
4. Ostatní prvky klíčového (řičícího) sloupce dělíme hodnotou ($+\,d_{qp}$), tedy přímo klíčovým prvkem.
5. Ostatní prvky tabulky transformujeme podle tzv. křížového pravidla, které zní: $d_{ij} - \dfrac{d_{qj} d_{ip}}{d_{qp}}$.

Simplexová metoda (nalezení výchozího řešení)

Úloha 1

Je dána úloha lineárního programování ve tvaru

$min\ \{c^T x: Ax \leq b,\ x \geq 0\},$ (1)

kde A je matice typu $m\ x\ n$, $m < n$, $c \in R^n$, $x \in R^n$, $b \in R^m$, $b \geq 0$ a $Ax \leq b$ jsou tzv. podmínky omezení.

Uvažujeme vektor $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)^T \in R^m$ (tzv. „doplňkové“ proměnné) a řešíme úlohu

$min\ \{c^T x: Ax + \mathbf{x'} = b,\ x \geq 0,\ x' \geq 0\}.$ (2)

Bazickými proměnnými ve výchozí tabulce jsou právě <u>doplňkové proměnné</u>.

Úloha 2

Je dána úloha lineárního programování ve standardním tvaru

$min\ \{c^T x: Ax = b,\ x \geq 0\}.$ (3)

Uvažujeme vektor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T \in R^m$ (tzv. „umělé“ proměnné) a dále funkci $g(u) = \sum u_i$.

Řešíme pomocnou úlohu lineárního programování (jde o 1. fázi simplexové metody)

$min\ \{g(u): Ax + \mathbf{u} = b,\ x \geq 0,\ u \geq 0\}.$ (4)

Bazickými proměnnými ve výchozí tabulce jsou <u>umělé proměnné</u>.

Věta 9:

Jestliže hodnota minima v úloze (ad. 4) je kladná, potom množina přípustných řešení úlohy (ad. 3) je prázdná.

Jestli-že hodnota minima v úloze (ad. 4) je rovna nule, potom závěrečnou tabulku 1. fáze simplexové metody použijeme jako tabulku výchozí pro řešení úlohy (ad. 3). Umělé proměnné a funkci g už neuvažujeme. Do tabulky však zařadíme řádek koeficientů účelové funkce f: $f(x) = c^T x$ (pokud jsme již s těmito koeficienty však nepočítali v 1. fázi).

Úloha 3

Je dána úloha lineárního programování ve tvaru

$$min\ \{c^T x: Ax \geq b, x \geq 0\}. \qquad (5)$$

Uvažujeme vektory $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)^T \in R^m$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in R^m$ a dále funkci $g(u) = \sum u_i$.

Řešíme pomocnou úlohu lineárního programování

$$min\ \{g(u): Ax - \mathbf{x'} + \mathbf{u} = b, x \geq 0, x' \geq 0, u \geq 0\}. \qquad (6)$$

Úloha 4

Úloha lineárního programování, v níž se vyskytují všechny výše zmíněné druhy omezujících podmínek. Jde tedy o tzv. podmínky smíšené.

4. DUALITA ÚLOH LP

Jedním z důležitých výsledků teorie lineárního programování je poznatek, že s každou maximalizační úlohou je také nerozlučně spjata úloha minimalizační.

Minimalizační úloha je danou maximalizační úlohou jednoznačně určena a má i velmi užitečné vlastnosti. Protože není podstatné, zda se zabýváme maximalizací či minimalizací, je s každou minimalizační úlohou obdobným způsobem spjata i úloha maximalizační.

V této kapitole se zaměřím na objasnění vztahů mezi těmito dvěma úlohami. Poznatky o těchto vztazích mají důležitou roli právě při zjišťování existence optimálních řešení a jsou široce využívány v takových oblastech, jako je například ekonomie.

Ke každé úloze týkající se lineárního programování (tzv. **primární úloze**) lze nějakým způsobem přiřadit jinou úlohu lineárního programování, a to <u>úlohu sdruženou</u> neboli <u>duální</u>.

Duální úloha je sestavena z identických konstant. Dvojice sdružených úloh spolu úzce souvisí. Má řadu zajímavých společných vlastností, a to jak z hlediska výpočetní interpretace, tak i z hlediska ekonomické interpretace. **Dualita představuje vzájemný vztah**. Jakákoliv úloha z dvojice duálních úloh může být brána jako primární.

Je užitečné si uvědomit, že přívlastky primární a duální jsou podmíněné tím, ze které úlohy vycházíme. Každému vlastnímu omezení primární úlohy odpovídá jedna duální proměnná a každé podmínce nezápornosti primární úlohy odpovídá jedno duální omezení.

<u>Duální úlohy lze rozdělit na 2 typy:</u>

1. **Souměrné** (symetrické) **duální úlohy**
2. **Nesouměrné** (nesymetrické) **duální úlohy** – lze je odvodit ze souměrných duálních úloh

Souměrné duální úlohy

<u>Nechť je dána primární úloha tvaru:</u>

Nalezněte *maximum* funkce $z = \left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$,

za daných omezujících podmínek $A \cdot \vec{x} \leq \vec{b}$

$\vec{x} \geq \vec{0}$.

Úloha **duální** k **primární úloze** $z = \left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$ lze formulovat jako:

Nalezněte *minimum* funkce $f = \left(\vec{b}\right)^T \cdot \vec{u}$,

za daných omezujících podmínek $A^T \cdot \vec{u} \geq \vec{c}$

$\vec{u} \geq \vec{0}$.

<u>Poznámka:</u>

Pokud v primární maximalizační úloze máme vlastní omezení vyjádřena nerovnostmi ≥, lze úlohu převést na typ $z = \left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$ a to tak, že nerovnosti vynásobíme číslem − 1. Naopak, pokud jsou v primární úloze vlastní omezení vyjádřena nerovnostmi ≤, ale úloha je minimalizační, lez úlohu převést na typ $z = \left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$ tak, že maximalizujeme funkci $-\left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$.

Nesouměrné duální úlohy

<u>Nechť je dána primární úloha tvaru:</u>

Nalezněte *minimum* funkce $z = \left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$,

za daných omezujících podmínek $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$\vec{x} \geq \vec{0}$.

Úloha **duální** k **primární úloze** $z = \left(\vec{c}\right)^T \cdot \vec{x}$ lze formulovat jako:

Nalezněte *maximum* funkce $f = \left(\vec{b}\right)^T \cdot \vec{u}$, za daných omezujících podmínek $A^T \cdot \vec{u} \leq \vec{c}$

$$\vec{u} \leq \vec{0} \text{ nebo } \vec{u} \geq \vec{0}$$

Poznámka:

Pokud jsou v primární úloze vlastní omezení vyjádřena rovnicemi, jsou odpovídající proměnné v duální úloze neomezené co do znaménka.

Pro sdružené (duální) úlohy platí základní věty o dualitě:

Věta 10:

Jestliže má jedna úloha z dvojice sdružených úloh optimální řešení, má optimální řešení i úloha druhá a optimální hodnoty obou účelových funkcí jsou stejné.

Naopak, jestliže nemá jedna úloha z dvojice sdružených úloh přípustné řešení, nemá druhá úloha optimální řešení, tzn. buď také nemá přípustné řešení nebo má, ale účelová funkce může neomezeně růst (popřípadě klesat).

Věta 11:

Jestliže je v optimálním řešení jedné úlohy z dvojice sdružených úloh příslušné omezení splněno jako ostrá nerovnost, pak je odpovídající duální omezení splněno jako rovnice.

Poznámka:

Obě duálně sdružené úlohy není nutno řešit samostatně. Jestliže řešíme například jednu z úloh simplexovou metodou, získáme tak automaticky i řešení úlohy k ní duální.

Věta 12:

Jestliže nemá jedna z dvojic vzájemně duálních úloh přípustné řešení, nemá ani jedna z nich optimální řešení [Plesník, 1990, s. 88].

Ekonomická iterpretace duality (duální úlohy)

K uplatnění lineárního programování v praxi přispělo významnou měrou to, že interpretaci primární (duální) úlohy obvykle odpovídá přirozená interpretace duální (primární) úlohy [Plesník, 1990, s. 101].

V praxi při řešení rozsáhlých úloh lineárního programování simplexovou metodou pomocí počítače se může stát, že primární úloha přesahuje rozsah použitelnosti příslušného programu. Příslušná duální úloha může mít rozměry přijatelné, stačí tedy jen tuto úlohu vyřešit.

P R A K T I C K Á Č Á S T

5. GRAFICKÉ ŘEŠENÍ ÚLOH LP

Grafickou metodu lze užít nejen při řešení nejjednodušších úloh, ve kterých se vyskytují dvě proměnné a vlastní omezení (tj. množina řešení soustavy lineárních nerovností neboli podmínky) jsou vyjádřena nerovnostmi, ale i při řešení úloh složitějších, které lze na výše uvedený případ převést. Tato metoda je cenná zejména v tom, že je názorná. Zkušenosti, které při její aplikaci získáme, lze intuitivně použít v prostorech vyšších dimenzí [Klvaňa, 1990, s. 91].

Zajímáme se přitom nejen o existenci a určení maximální či minimální hodnoty účelové funkce na dané množině, ale i o existenci, vlastnosti a výpočet bodů, v nichž maximum či minimum nastává.

Z analytické geometrie již víme, že grafické znázornění jednotlivých rovnic v omezujících podmínkách vyjadřuje přímky v rovině *xy*, a že grafickým znázorněním lineární nerovnosti se dvěma proměnnými je polorovina. Omezujícím podmínkám pak odpovídá **průnik jednotlivých polorovin** a ten (pokud není prázdnou množinou), **tvoří mnohoúhelník**.

Proto v prvním kroku nejprve sestrojíme oblast (množinu) přípustných řešení a na množině přípustných řešení hledáme maximum (MAX) či minimum (MIN) dané **účelové funkce** (= lineární funkce; funkce, jejíž extrém hledáme), kterou zde značíme ***z***.

Ve druhém kroku provedeme znázornění účelové funkce *z*. Nejjednodušším znázorněním jsou vrstevnice (neboli izočáry), které tvoří soustavy rovnoběžek [Klvaňa, 1990, s. 91]. Dosadíme za účelovou funkci *z* různé hodnoty (kladné či záporné) a dostaneme tedy soustavu rovnoběžných přímek, ze které vybereme právě tu přímku, která má s danou množinou přípustných řešení alespoň jeden společný bod a je přitom nejdále od počátku (v případě, pokud hledáme maximum) a nebo nejblíže počátku (v případě, pokud hledáme minimum). Pokud existuje alespoň jeden takovýto bod, odpovídá **optimálnímu řešení**. Extrém účelové funkce je tedy v bodě, ve kterém se množina přípustných řešení dotýká s vrstevnicí buď o nejvyšší hodnotě nebo o nejnižší hodnotě. Říkáme také, že hledaný bod je bodem optima a nebo že jde o optimální bod či optimální řešení.

Lineární funkce může nabývat svého minima nebo maxima na množině řešení soustavy lineárních rovnic a nerovností i v nespočetně mnoha bodech [Plesník, 1990, s. 13].

Na jednoduchých příkladech lze ukázat, že množina přípustných řešení dané soustavy lineárních nerovností může být prázdná (tj. úloha lineárního programování nemá optimální řešení), omezená (tj. úloha lineárního programování má vždy optimální řešení) nebo může být neomezená (tj. úloha lineárního programování může, ale nemusí mít optimální řešení, tedy lineární funkce v ní nemusí nabývat svého minima nebo maxima).

Povahu úloh lineárního programování si ukážeme na několika jednoduchých příkladech.

1. PŘÍKLAD:

(omezená množina přípustných řešení, účelová funkce z má v tomto případě <u>jediné</u> optimální řešení)

Hledáme **maximum** funkce $z = 4x + 2y$

na množině nezáporných řešení soustavy, za omezujících podmínek

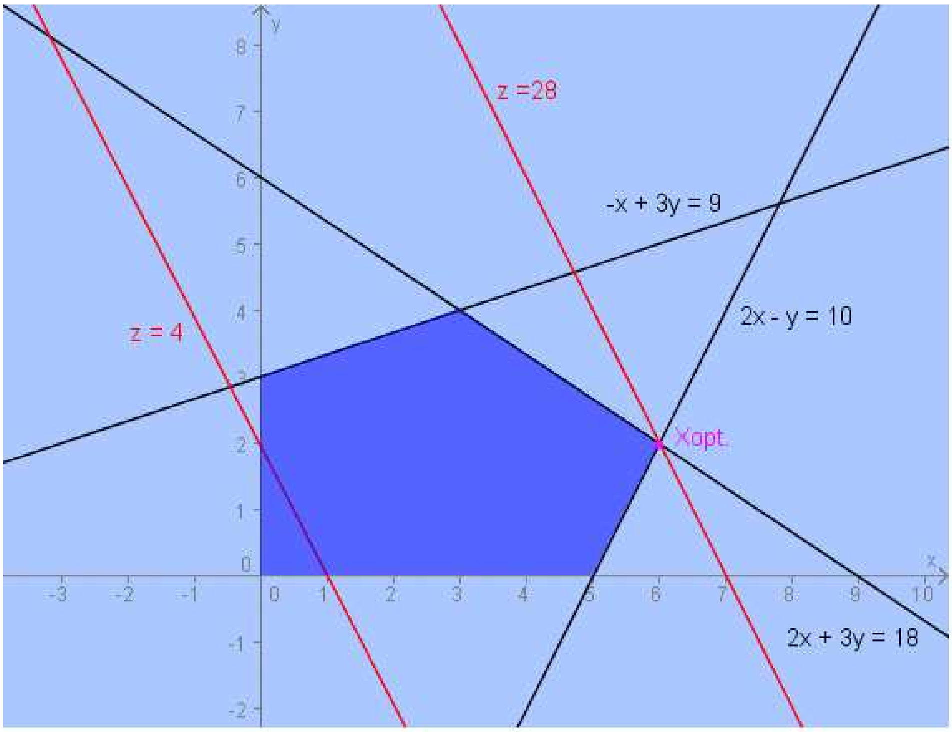
$$
\begin{aligned}
-x + 3y &\le 9\\
2x + 3y &\le 18\\
2x - y &\le 10\\
x &\ge 0\\
y &\ge 0
\end{aligned}
$$

<u>Řešení:</u>

$\Rightarrow$ Položíme nejprve $x = 0$, poté $y = 0$ a dosadíme do všech zadaných podmínek. Dále sestrojíme oblast přípustných řešení a na množině přípustných řešení hledáme maximum účelové funkce z tak, že za ni dosadíme různé hodnoty (např. pro z nabývající hodnoty 4, 28, …, tedy: $z = 4$, $z = 28$, …), dostaneme soustavu rovnoběžných přímek. Vybereme tu přímku, která má s danou množinou přípustných řešení alespoň jeden společný bod a zároveň je nejdále od počátku.

1. podmínka	$x = 0$	$\rightarrow$	$y = 3$		
	$y = 0$	$\rightarrow$	$x = -9$	$\Rightarrow$	**[0,3]; [– 9,0]**
2. podmínka	$x = 0$	$\rightarrow$	$y = 6$		
	$y = 0$	$\rightarrow$	$x = 9$	$\Rightarrow$	**[0,6]; [9,0]**
3. podmínka	$x = 0$	$\rightarrow$	$y = -10$		
	$y = 0$	$\rightarrow$	$x = 5$	$\Rightarrow$	**[0, – 10]; [5,0]**

Grafické řešení:



Optimální řešení: Maximum pro $\boldsymbol{x = 6}$ $\boldsymbol{y = 2}$ $\boldsymbol{z = 28}$

(Lineární funkce $z = 4x + 2y$ na množině řešení soustavy nerovností nabývá konečného maxima 28 v bodě [6,2]).

2. PŘÍKLAD:

(omezená množina přípustných řešení, účelová funkce z má v tomto případě nekonečně mnoho optimálních řešení)

Hledáme **maximum** funkce $z = x + y$

na množině nezáporných řešení soustavy, za omezujících podmínek

$$
\begin{aligned}
-x + 2y &\le 4 \\
2x - y &\le 4 \\
x + y &\le 5 \\
x &\ge 0 \\
y &\ge 0
\end{aligned}
$$

Řešení:

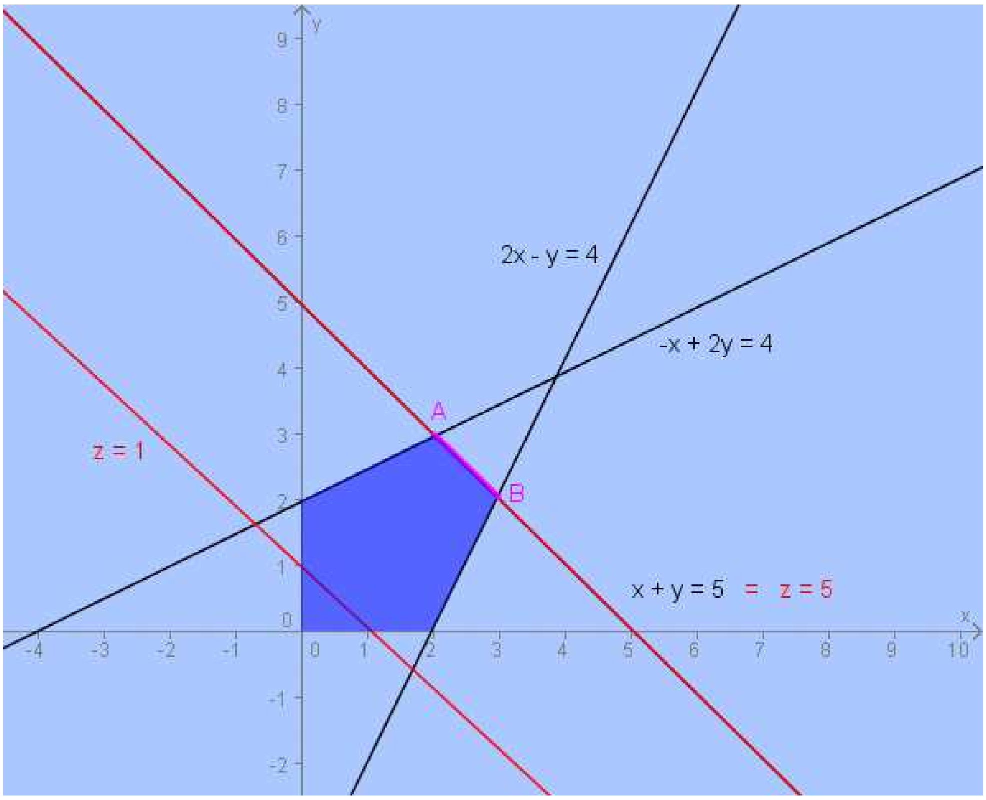
$\Rightarrow$ Položíme nejprve $x = 0$, poté $y = 0$ a dosadíme do všech zadaných podmínek. Dále sestrojíme oblast přípustných řešení a na množině přípustných řešení hledáme maximum účelové funkce z tak, že za ni dosadíme různé hodnoty (např. pro z nabývající hodnoty 1, 5, …, tedy: $z = 1$, $z = 5$, …), dostaneme soustavu rovnoběžných přímek. Vybereme tu přímku, která má s danou množinou přípustných řešení alespoň jeden společný bod a zároveň je nejdále od počátku.

1. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 2$
   $y = 0 \rightarrow x = -4 \Rightarrow$ **[0,2]; [– 4,0]**

2. podmínka $x = 0 \rightarrow y = -4$
   $y = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow$ **[0, – 4]; [2,0]**

3. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 5$
   $y = 0 \rightarrow x = 5 \Rightarrow$ **[0, 5]; [5,0]**

Grafické řešení:



Optimální řešení: Úloha má nekonečně mnoho řešení. Účelová funkce nabývá maximální hodnoty ***z* = 5** ve všech bodech úsečky AB.

3. PŘÍKLAD:

(neomezená množina přípustných řešení, úloha v tomto případě <u>nemá konečné</u> optimální řešení nebo stačí krátce, že úloha LP nemá řešení)

Hledáme **maximum** funkce $z = 2x + 4y$

na množině nezáporných řešení soustavy, za omezujících podmínek

$$x + y \leq 4$$
$$-2x + y \leq 2$$
$$x - y \leq 0$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

<u>Řešení:</u>

$\Rightarrow$ Položíme nejprve $x = 0$, poté $y = 0$ a dosadíme do všech zadaných podmínek. Dále sestrojíme oblast přípustných řešení a na množině přípustných řešení hledáme maximum účelové funkce z tak, že za ni dosadíme různé hodnoty (např. pro z nabývající hodnoty 4, 12, 24, …, tedy: $z = 4$, $z = 12$, $z = 24$, …), dostaneme soustavu rovnoběžných přímek.

Vybereme tu přímku, která má s danou množinou přípustných řešení alespoň jeden společný bod a zároveň je nejdále od počátku.

1. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 4$
   $y = 0 \rightarrow x = 4 \Rightarrow$ **[0,4]; [4,0]**

2. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 2$
   $y = 0 \rightarrow x = -1 \Rightarrow$ **[0,2]; [–1,0]**

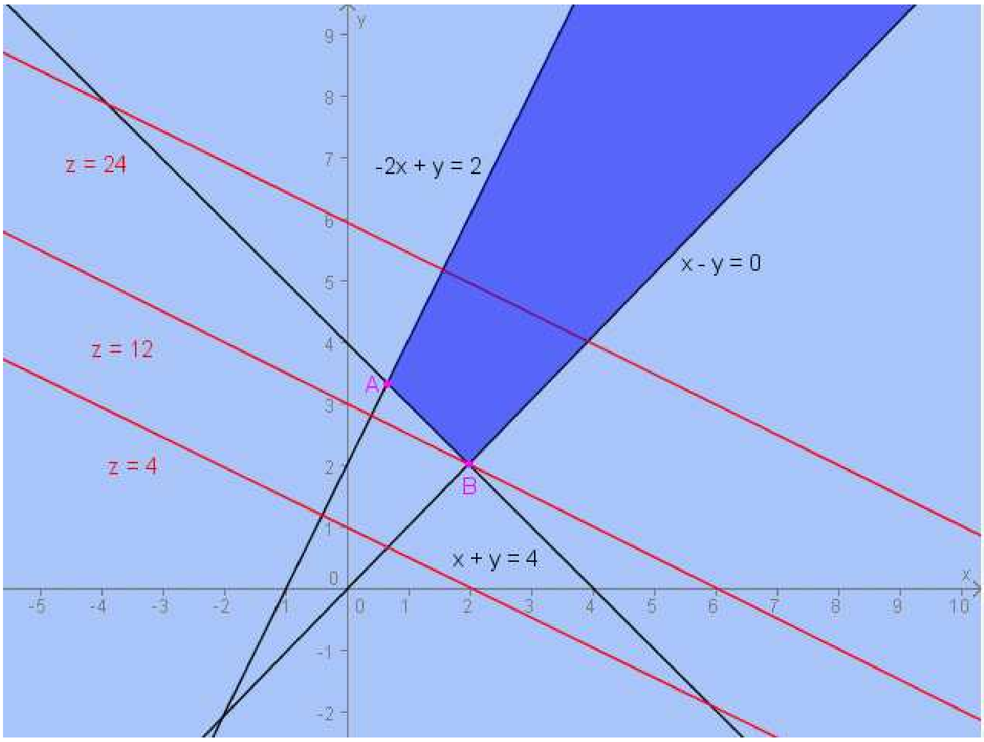
3. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 0$
   $y = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow$ **[0, 0]; [0,0]**

nelze, neboť potřebujeme 2 různé body, proto volíme jiný bod

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$y = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad$ **[0, 0]; [1,1]**

Grafické řešení:



Optimální řešení: Úloha nemá konečné optimální řešení. Účelová funkce ***z*** může na neomezené množině přípustných řešení nabývat libovolně velkých hodnot.

(V případě, že bychom hledali minimum funkce $z = 2x + 4y$ při stejných omezujících podmínkách, tak by hledané optimální řešení odpovídalo bodu **B**.)

4. PŘÍKLAD:

(omezená množina přípustných řešení, účelová funkce z má v tomto případě <u>jediné</u> optimální řešení pro minimum a <u>jediné</u> optimální řešení pro maximum)

Hledáme **minimum, maximum** funkce $z = 3x - 2y$
na množině nezáporných řešení soustavy, za omezujících podmínek

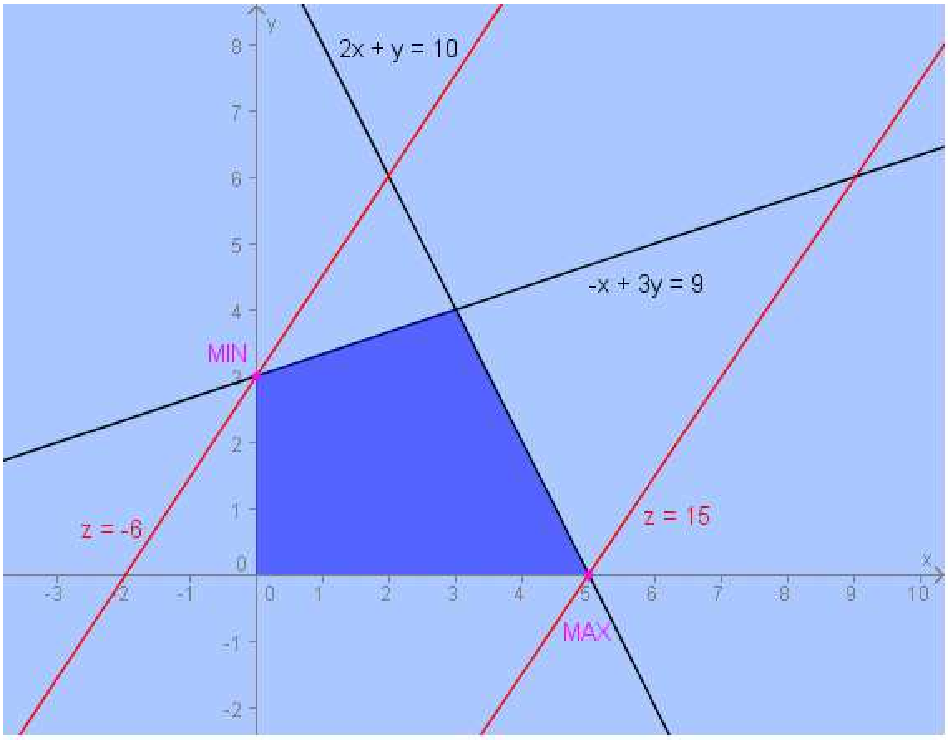
$$-x + 3y \leq 9$$
$$2x + y \leq 10$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

<u>Řešení:</u>

$\Rightarrow$ Položíme nejprve $x = 0$, poté $y = 0$ a dosadíme do všech zadaných podmínek. Dále sestrojíme oblast přípustných řešení a na množině přípustných řešení hledáme minimum a maximum účelové funkce z tak, že za ni dosadíme různé hodnoty (např. pro z nabývající hodnoty 15, – 6, …, tedy: $z = 15$, $z = -6$, …), dostaneme soustavu rovnoběžných přímek.
Vybereme tu přímku, která má s danou množinou přípustných řešení alespoň jeden společný bod a zároveň je nejblíže počátku (pokud se jedná o minimum) a nebo nejdále od počátku (pokud se jedná o maximu).

1. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 3$
   $y = 0 \rightarrow x = -9 \Rightarrow$ **[0,3]; [– 9,0]**
2. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 10$
   $y = 0 \rightarrow x = 5 \Rightarrow$ **[0,10]; [5,0]**

Grafické řešení:



Optimální řešení: Minimum pro **x = 0** **y = 3** **z = – 6**

Maximum pro **x = 5** **y = 0** **z = 15**

(Lineární funkce $z = 3x - 2y$ na množině řešení soustavy nerovností nabývá konečného minima – 6 v bodě [0,3] a konečného maxima 15 v bodě [5,0]).

5. PŘÍKLAD:

(neomezená množina přípustných řešení, účelová funkce z má v tomto případě jediné optimální řešení pro minimum,ale nemá konečné optimální řešení pro maximum)

Hledáme **minimum, maximum** funkce $z = x + y$
na množině nezáporných řešení soustavy, za omezujících podmínek

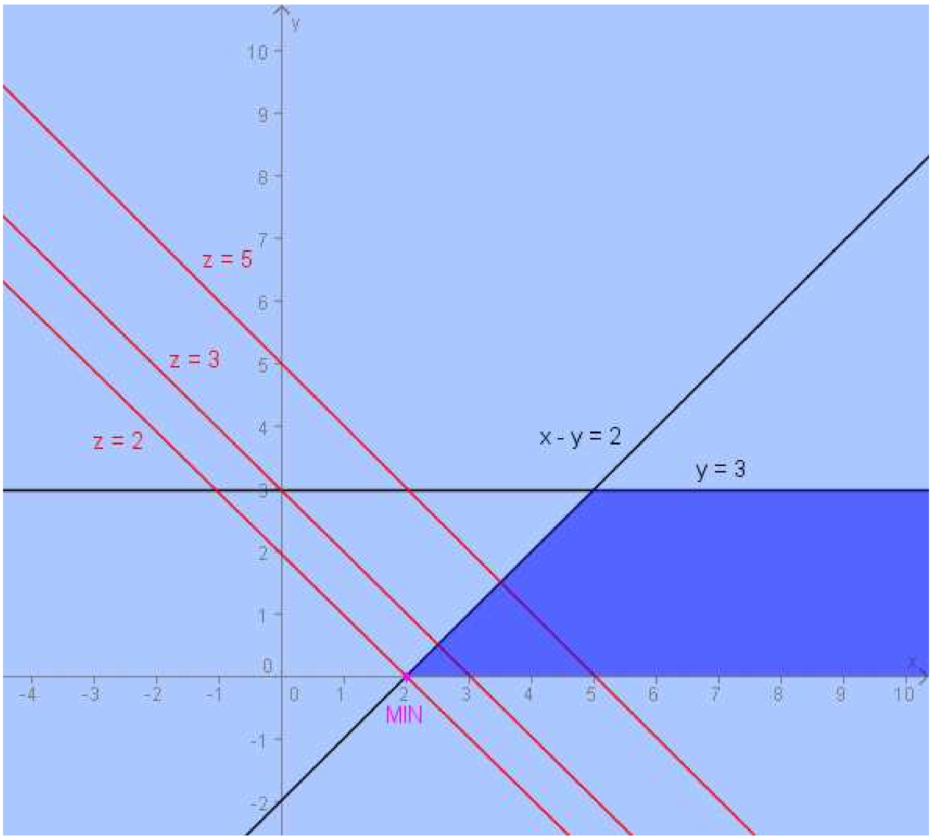
$$x - y \geq 2$$
$$y \leq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Řešení:

$\Rightarrow$ Položíme nejprve $x = 0$, poté $y = 0$ a dosadíme do všech zadaných podmínek. Dále sestrojíme oblast přípustných řešení a na množině přípustných řešení hledáme minimum a maximum účelové funkce z tak, že za ni dosadíme různé hodnoty (např. pro z nabývající hodnoty 2, 3, 5, …, tedy $z = 2$, $z = 3$, $z = 5$, …), dostaneme soustavu rovnoběžných přímek.
Vybereme tu přímku, která má s danou množinou přípustných řešení alespoň jeden společný bod a zároveň je nejblíže počátku (pokud se jedná o minimum) a nebo nejdále od počátku (pokud se jedná o maximu).

1. podmínka $x = 0 \rightarrow y = -2$
   $y = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow$ **[0, – 2]; [2,0]**
2. podmínka $\boldsymbol{y = 3}$

Grafické řešení:



Optimální řešení: Minimum pro ***x* = 2** ***y* = 0** ***z* = 2**

(Lineární funkce $z = x + y$ na množině řešení soustavy nerovností nabývá konečného minima 2 v bodě [2,0] a konečného maxima na ní nenabývá, z důvodu neohraničenosti účelové funkce na množině přípustných řešení).

6. PŘÍKLAD:

(množina přípustných řešení je prázdná, úloha nemá v tomto případě optimální řešení)

Hledáme **minimum, maximum** funkce $z = 3x + 2y$

na množině nezáporných řešení soustavy, za omezujících podmínek

$$x + y \geq 10$$
$$3x + 5y \leq 15$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

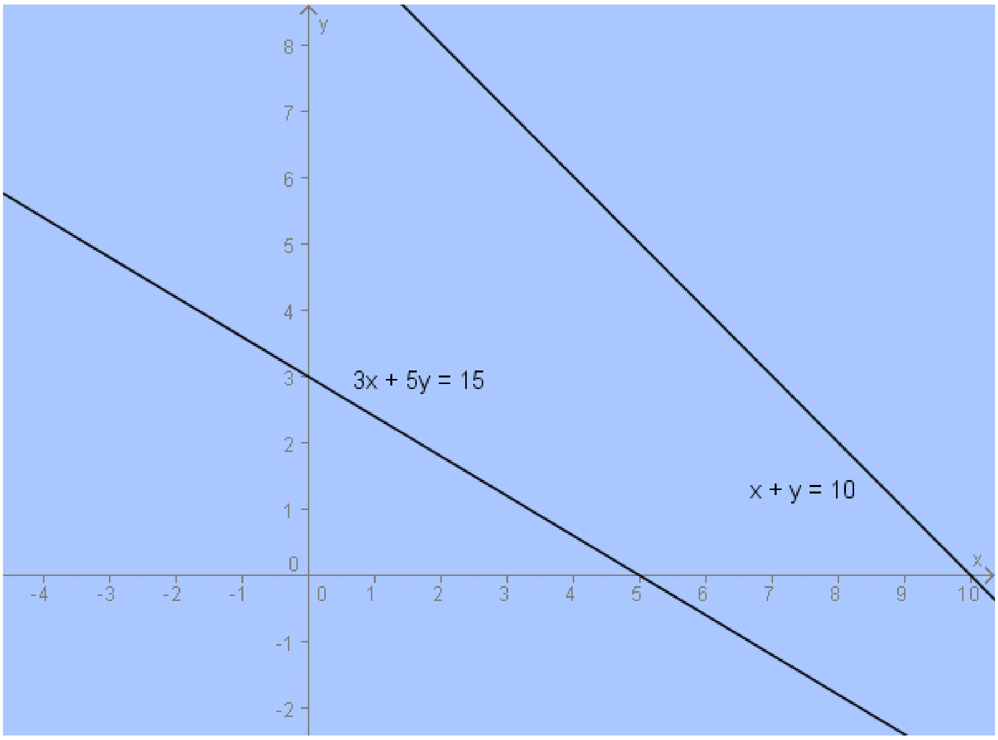
Řešení:

$\Rightarrow$ Položíme nejprve $x = 0$, poté $y = 0$ a dosadíme do všech zadaných podmínek. Dále sestrojíme oblast přípustných řešení

1. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 10$
   $y = 0 \rightarrow x = 10 \Rightarrow$ **[0, 10]; [10,0]**

2. podmínka $x = 0 \rightarrow y = 3$
   $y = 0 \rightarrow x = 5 \Rightarrow$ **[0,3]; [5,0]**

Grafické řešení:



Optimální řešení: Množina přípustných řešení je prázdná, proto neexistuje optimální řešení.

6. SIMPLEXOVÁ METODA V PŘÍKLADECH

Při ručním řešení těchto úloh se mi velmi dobře osvědčilo uspořádání výpočtů do tzv. **simplexové tabulky**. Tabulka obsahuje koeficienty soustavy m + 1 lineárních rovnic v kanonickém tvaru o n + 1 neznámých.

Do hlavičky simplexové tabulky vždy píšeme označení všech proměnných (a to i včetně všech pomocných proměnných). Do prvního sloupce pak píšeme označení proměnných, které tvoří v příslušném kroku základní řešení a do posledního sloupce píšeme pravé strany soustavy lineárních rovnic. A konečně poslední řádka odpovídá rovnici pro účelovou funkci. V záhlaví tabulky jsou všechny nebázické proměnné (např. x, y, …) nulové!

Vstupující proměnné odpovídá v tabulce tzv. **klíčový sloupec** (někdy se též používá řídící sloupec). Naopak řádek, který obsahuje vystupující proměnnou, se nazývá **klíčový řádek** (někdy se též používá řídící sloupec). Prvek, který leží v průsečíku klíčového řádku s klíčovým sloupcem, se nazývá **klíčový prvek** (někdy se též používá tzv. pivot nebo vedoucí či řídící prvek). Klíčový prvek potřebujeme znát pro přechod od jedné tabulky ke druhé. Při simplexové metodě se výběr klíčového prvku řídí účelovou funkcí.

Při řešení příkladů lineárního programování pomocí simplexové metody, musí být všechna omezení ve tvaru rovnic.

Následující příklady jsou vyřešeny krok po kroku simplexovou metodou. V 7. příkladě souhlasí nalezené optimální řešení s řešením nalezeným pomocí grafické metody (viz. 1. Příklad, kapitola 5). Dále jsou uvedeny různé typy příkladů s více proměnnými, které graficky řešit nelze.

7. PŘÍKLAD:

(úloha maximalizační, vlastní omezení nerovnosti typu $\leq$)

Je dána úloha lineárního programování:

Max $\{4x + 2y: -x + 3y \leq 9;\ 2x + 3y \leq 18;\ 2x - y \leq 10;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Upravte tuto úlohu pro výpočet simplexovou metodou a sestavte výchozí simplexovou tabulku.

Řešení:

1) Přidání bazických proměnných (doplňkových) s požadavkem nezápornosti a jejich vyjádření

$$-x + 3y \leq 9 \qquad + \boldsymbol{x'} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x' = 9 + x - 3y$$

$$2x + 3y \leq 18 \qquad + \boldsymbol{y'} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad y' = 18 - 2x - 3y$$

$$2x - y \leq 10 \qquad + \boldsymbol{z'} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad z' = 10 - 2x + y \qquad (1)$$

2) Účelová funkce: $f = 4x + 2y$ (2)

3) Sestavení výchozí tabulky pro 1. fázi:

Hledáme maximum účelové funkce. Stanovíme klíčový sloupec (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje kladné číslo, platí tedy $c^1{}_p > 0$), na jeho základě klíčový řádek (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu $x_{m+p} = -\dfrac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku klíčový prvek.

Optimální řešení platí pro: **Min $c \geq 0$**

Max $c \leq 0$

$\rightarrow$ kritérium pro to, zda je řešení optimální dává poslední řádka f

BÁZE	b	x	y	Podíly
$x´$	9	1	– 3	
$y´$	18	– 2	– 3	9
$z´$	10	**– 2**	1	5
f	0	4	2	

klíčový řádek

Max ⟵

klíčový sloupec

<u>Výchozí základní řešení:</u> $x´ = 9$, $y´ = 18$, $z´ = 10$, $x = y = 0$, $f = 0$

Pokud bychom hledali minimum účelové funkce, vidíme, že **Min *c* ≥ 0** (neboť 4 ≥ 0, 2 ≥ 0), tak jsme jej našli, ale my hledáme optimální řešení pro maximum (**Max *c* ≤ 0**), proto pokračujeme dále.

<u>Poznámka:</u>

Výpočet podílů: $-\frac{18}{-2} = 9$, $-\frac{10}{-2} = 5$

4) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné $z´$ a x si vymění místo → klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\frac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 2 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem ($+d_{qp}$), zde tedy – 2; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	$z´$	y	Podíly	
$x´$	14	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{28}{5}$	
$y´$	8	1	**– 4**	2	klíčový řádek
x	5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
f	20	– 2	4		

Max ← (řádek f)

klíčový sloupec (y)

$\Rightarrow$ optimální řešení není, neboť není **Max *c* ≤ 0**

<u>Zlepšené řešení:</u> $x = 5$, $y = 0$, $y´ = 8$, $z´ = 0$, $f = 20$

<u>Poznámka:</u>

Výpočet pomocí křížového pravidla: $9 - \frac{10*1}{-2} = 14$, $-3 - \frac{1*1}{-2} = -\frac{5}{2}$, $18 - \frac{10*(-2)}{-2} = 8$, $-3 - \frac{1*(-2)}{-2} = -4$, $0 - \frac{4*10}{-2} = 20$, $2 - \frac{4*1}{-2} = 4$

Výpočet podílů: $-\frac{14}{-\frac{5}{2}} = \frac{28}{5}$, $-\frac{8}{-4} = 2$

5) Přechod k sousednímu krajnímu bodu – další krok - výpočet nové tabulky (proměnné $y´$a y si vymění místo $\rightarrow$ prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku, zde tedy 4 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem, zde tedy – 4; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	$z´$	$y´$
$x´$	9	$-\frac{9}{8}$	$\frac{5}{8}$
y	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
y	6	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$
f	28	-1	-1

Max $c \leq 0$

$\rightarrow$ finální (optimální) tabulka

Optimální řešení $\Rightarrow$ Hodnota funkce: **MAX = 28 v bodě $x = 6$, $y = 2$**

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $14 - \frac{8 * \left(-\frac{5}{2}\right)}{-4} = 9$, $-\frac{1}{2} - \frac{1 * \left(-\frac{5}{2}\right)}{-4} = -\frac{9}{8}$, $5 - \frac{\frac{1}{2} * 8}{-4} =$ 6, $-\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} * 1}{-4} = -\frac{3}{8}$, $20 - \frac{8 * 4}{-4} = 28$, $-2 - \frac{4 * 1}{-4} = -1$

Poznámka:

Lze provést kontrolu, pokud dosadíme výsledné hodnoty do zadané funkce (tzn. zda bod vyhovuje soustavě).

Např. dosadíme do soustavy $-x + 3y \leq 9$ bod x a bod y

$\Rightarrow$ $-6 + 3 * 2 \leq 9$

$0 \leq 9$ PLATÍ!

8. PŘÍKLAD:

(úloha minimalizační a maximalizační, vlastní omezení nerovnosti typu $\leq$)

Je dána úloha lineárního programování:

Min, Max $\{3x - 2y$: $3y - x \leq 9$; $2x + y \leq 10$; $x \geq 0$, $y \geq 0\}$.

Upravte tuto úlohu pro výpočet simplexovou metodou a sestavte výchozí simplexovou tabulku.

Řešení:

1) Přidání bazických proměnných (doplňkových) s požadavkem nezápornosti a jejich vyjádření

$3y - x \leq 9$ $\quad$ $+\, \boldsymbol{x'} \geq 0 \rightarrow$ $\quad$ $x' = 9 + x - 3y$

$2x + y \leq 10$ $\quad$ $+\, \boldsymbol{y'} \geq 0 \rightarrow$ $\quad$ $y' = 10 - 2x - y$ $\quad$ (1)

2) Účelová funkce: $f = 3x - 2y$ $\quad$ (2)

3) Sestavení výchozí tabulky pro 1. fázi:

Vždy nejprve hledáme minimum a až poté maximum účelové funkce, pokud máme za úkol maximum najít. Stanovíme klíčový sloupec (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje záporné číslo, platí tedy $c^1_p < 0$), na jeho základě klíčový řádek (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu $x_{m+p} = -\dfrac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku klíčový prvek.

Optimální řešení platí pro: $\quad$ **Min $\boldsymbol{c \geq 0}$**

Max $\boldsymbol{c \leq 0}$

$\rightarrow$ kritérium pro to, zda je řešení optimální dává poslední řádka f

BÁZE	b	x	y	Podíly
x'	9	1	**– 3**	3
y'	10	**– 2**	– 1	10
f	0	3	– 2	

klíčový řádek

klíčový řádek

Min ←

klíčový sloupec

klíčový sloupec

Výchozí základní řešení: $x' = 9$, $y' = 10$, $x = y = 0$, $f = 0$

Poznámka:

Výpočet podílů: $-\dfrac{9}{-3} = 3$, $-\dfrac{10}{-1} = 10$

4) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné x' a y si vymění místo → klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\dfrac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 3 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem ($+d_{qp}$), zde tedy – 3; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	x	x'
y	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y'	7	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$
f	– 6	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$

Min c ≥ 0

Optimální řešení $\Rightarrow$ Hodnota funkce: **MIN = – 6 v bodě $x = 0$, $y = 3$**

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $10 - \frac{9*(-1)}{-3} = 7$, $-2 - \frac{1*(-1)}{-3} = -\frac{7}{3}$, $0 - \frac{(-2)*9}{-3} =$ -6, $3 - \frac{(-2)*1}{-3} = \frac{7}{3}$

Této tabulce odpovídá bod o souřadnicích: $x = x´ = 0$, $y = 3$, $y´ = 7$

5) Výpočet nové tabulky pro nalezení maxima (vrátíme se k původní tabulce a určíme klíčový sloupec (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje kladné číslo, platí tedy $c^1_p > 0$), na jeho základě klíčový řádek (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu $x_{m+p} = -\frac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku klíčový prvek.

Dále přejdeme k sousednímu krajnímu bodu a provedeme výpočet nové tabulky (proměnné $y´$ a x si vymění místo $\rightarrow$ prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku, zde tedy 2 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem, zde tedy – 2; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	$y´$	y
$x´$	14	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$
x	5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
f	15	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$

Max c $\leq$ 0

Optimální řešení $\Rightarrow$ Hodnota funkce: **MAX = 15 v bodě *x* = 5 , *y* = 0**

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $9 - \frac{10*1}{-2} = 14$, $0 - \frac{3*10}{-2} = 15$, $-2 - \frac{3*(-1)}{-2} = -\frac{7}{2}$, $-3 - \frac{(-1)*1}{-2} = -\frac{7}{2}$

Poznámka:

Lze provést kontrolu, pokud dosadíme výsledné hodnoty do zadané funkce (tzn. zda bod vyhovuje soustavě).

Např. dosadíme do soustavy $3y - x \leq 9$ bod x a bod y

$\Rightarrow$ $3 * 0 - 5 \leq 9$

$-5 \leq 9$ PLATÍ!

9. PŘÍKLAD:

(úloha minimalizační, vlastní omezení nerovnosti typu $\leq$ a typu $\geq$)

Je dána úloha lineárního programování:

Min $\{6x + 4y$: $2x + 3y \leq 30$; $3x + 2y \leq 24$; $x + y \geq 3$; $x, y \geq 0\}$.

Upravte tuto úlohu pro výpočet simplexovou metodou a sestavte výchozí simplexovou tabulku.

<u>Řešení:</u>

1) Přidání bazických proměnných (třech doplňkových a jedné umělé) s požadavkem nezápornosti a jejich vyjádření

$2x + 3y \leq 30$	$+\boldsymbol{x'} \geq 0$	$\rightarrow$	$x' = 30 - 2x - 3y$
$3x + 2y \leq 24$	$+\boldsymbol{y'} \geq 0$	$\rightarrow$	$y' = 24 - 3x - 2y$
$x + y \geq 3$	$-\boldsymbol{z'} + \boldsymbol{u_1}$, $z' \geq 0$	$\rightarrow$	$u_1 = 3 - x - y + z'$ (1)

V přípravné fázi (1. fázi simplexové metody), hledáme minimum umělé funkce

$\boldsymbol{g(u_1) = u_1}$, $u_1 \geq 0$.

<u>Možné závěry 1. fáze:</u>

1. **min $\boldsymbol{g}$ = 0** $\rightarrow$ konečná tabulka je výchozí pro řešení původní úlohy, umělé proměnné vypustíme,
2. **min $\boldsymbol{g}$ > 0** $\rightarrow$ množina přípustných řešení původní úlohy je prázdná.

2) Účelová funkce: $f = 6x + 4y$ (2)

3) Sestavení výchozí tabulky pro 1. fázi:

Hledáme minimum účelové funkce. Stanovíme <u>klíčový sloupec</u> (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje záporné číslo, platí tedy $c^1{}_p < 0$), na jeho základě <u>klíčový řádek</u> (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu $x_{m+p} = -\dfrac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku <u>klíčový prvek</u>.

Optimální řešení platí pro: **Min $c \geq 0$**

Max $c \leq 0$

$\rightarrow$ kritérium pro to, zda je řešení optimální dává poslední řádka f

BÁZE	b	x	y	z'	Podíly
x'	30	– 2	– 3	0	15
y'	24	– 3	– 2	0	8
u_1	3	**– 1**	– 1	1	3
g	3	– 1	– 1	1	
f	0	6	4	0	

klíčový řádek

Min $\leftarrow$ (g)

klíčový sloupec

Výchozí základní řešení: $x' = 30$, $y' = 24$, $u_1 = 3$, $x = y = z' = 0$, $f = 0$

Poznámka:

Výpočet podílů: $-\frac{30}{-2} = 15$, $-\frac{24}{-3} = 8$, $-\frac{3}{-1} = 3$

4) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné z' a x si vymění místo $\rightarrow$ klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\frac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 2 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem ($+d_{qp}$), zde tedy – 2; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	u_1	y	$z´$
$x´$	24	2	–1	–2
$y´$	15	3	1	–3
x	3	–1	–1	1
g	0	1	0	0
f	18	–6	–2	6

⇒ 1. fáze končí, neboť **min *g* = 0**, funkci g můžeme vypustit a tím pádem i umělou proměnou u_1. Pro přehlednost upravíme tabulku:

BÁZE	b	y	$z´$	Podíly
$x´$	24	– 1	– 2	24
$y´$	15	1	– 3	
x	3	**– 1**	1	3
f	18	– 2	6	

klíčový řádek

Min ←

klíčový sloupec

<u>Poznámka:</u>

Výpočet podílů: $-\dfrac{24}{-1} = 24$, $-\dfrac{3}{-1} = 3$

Této tabulce odpovídá bod o souřadnicích: $x´ = 24$, $y´ = 15$, $x = 3$, $y = z´ = 0$

5) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné x a y si vymění místo → klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\dfrac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 1 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým

prvkem $(+d_{qp})$, zde tedy –1; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	x	$z´$
$x´$	21	1	– 3
$y´$	18	– 1	– 2
y	3	– 1	1
f	12	2	4

Min $c \geq 0$

Optimální řešení $\Rightarrow$ Hodnota funkce: **MIN = 12 v bodě $x = 0$, $y = 3$**

<u>Poznámka:</u>

Výpočet pomocí křížového pravidla: $24 - \frac{3*(-1)}{-1} = 21$, $-2 - \frac{1*(-1)}{-1} = -3$, $15 - \frac{3*1}{-1} = 18$, $-3 - \frac{1*1}{-1} = -2$, $18 - \frac{(-2)*3}{-1} = 12$, $6 - \frac{(-2)*1}{-1} = 4$

<u>Poznámka:</u>

Lze provést kontrolu, pokud dosadíme výsledné hodnoty do zadané funkce (tzn. zda bod vyhovuje soustavě).

Např. dosadíme do soustavy $2x + 3y \leq 30$ bod x a bod y

$\Rightarrow$ $2 * 0 + 3 * 3 \leq 30$

$9 \leq 30$ PLATÍ!

10. PŘÍKLAD:

(úloha minimalizační, vlastní omezení nerovnosti typu ≤ a typu ≥, vlastní omezení rovnice)

Je dána úloha lineárního programování:

Min {$2x + 4y$: $x + y \le 4$; $x + 2y \ge 5$; $2x - y = 2$; $x \ge 0$, $y \ge 0$}.

Upravte tuto úlohu pro výpočet simplexovou metodou a sestavte výchozí simplexovou tabulku.

Řešení:

1) Přidání bazických proměnných (dvou doplňkových a dvou umělých) s požadavkem nezápornosti a jejich vyjádření

$x + y \le 4$	$+ \boldsymbol{x'} \ge 0$	$\rightarrow$	$x' = 4 - x - y$	
$x + 2y \ge 5$	$- \boldsymbol{y'} + \boldsymbol{u_1}$, $y' \ge 0$	$\rightarrow$	$u_1 = 5 - x - 2y + y'$	
$2x - y = 2$	$+ \boldsymbol{u_2}$	$\rightarrow$	$u_2 = 2 - 2x + y$	(1)

V přípravné fázi (1. fázi simplexové metody), hledáme minimum umělé funkce

$\boldsymbol{g(u_1, u_2) = u_1 + u_2}$, $u_1, u_2 \ge 0$.

Možné závěry 1. fáze:

3. **min g = 0** $\rightarrow$ konečná tabulka je výchozí pro řešení původní úlohy, umělé proměnné vypustíme,
4. **min g > 0** $\rightarrow$ množina přípustných řešení původní úlohy je prázdná.

2) Účelová funkce: $f = 2x + 4y$ (2)

3) Sestavení výchozí tabulky pro 1. fázi:

Hledáme minimum účelové funkce. Stanovíme klíčový sloupec (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje záporné číslo, platí tedy $c^1_p < 0$), na jeho základě klíčový řádek (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu x_{m+p}

$= -\dfrac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku klíčový prvek.

Optimální řešení platí pro: **Min $c \geq 0$**

Max $c \leq 0$

→ kritérium pro to, zda je řešení optimální dává poslední řádka f

BÁZE	b	x	y	y'	Podíly
x'	4	– 1	– 1	0	4
u_1	5	– 1	– 2	1	5
u_2	2	**– 2**	1	0	1
g	7	– 3	– 1	1	
f	0	2	4	0	

klíčový řádek (u_2)

Min ← (g)

klíčový sloupec (x)

Výchozí základní řešení: $x' = 4$, $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $x = y = y' = 0$, $f = 0$

Poznámka:

Výpočet podílů: $-\dfrac{4}{-1} = 4$, $-\dfrac{5}{-1} = 5$, $-\dfrac{2}{-2} = 1$

4) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné u_2 a x si vymění místo → klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\dfrac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 2 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem ($+d_{qp}$), zde tedy – 2; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	u_2	y	$y´$	Podíly
$x´$	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	2
u_1	4	$\frac{1}{2}$	**–5/2**	1	$\frac{8}{5}$
x	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
g	4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	
f	2	-1	5	0	

klíčový řádek

Min ←

klíčový sloupec

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $4-\frac{2*(-1)}{-2}=3$, $-1-\frac{1*(-1)}{-2}=-\frac{3}{2}$, $0-\frac{0*(-1)}{-2}=0$, $5-\frac{2*(-1)}{-2}=4$, $-2-\frac{1*(-1)}{-2}=-\frac{5}{2}$, $1-\frac{0*(-1)}{-2}=1$, $7-\frac{(-3)*2}{-2}=4$, $-1-\frac{(-3)*1}{-2}=-\frac{5}{2}$, $1-\frac{(-3)*0}{-2}=1$, $0-\frac{2*2}{-2}=2$, $4-\frac{2*1}{-2}=5$, $0-\frac{2*0}{-2}=0$

Výpočet podílů: $-\frac{3}{-\frac{3}{2}}=2$, $-\frac{4}{-\frac{5}{2}}=\frac{8}{5}$

Této tabulce odpovídá bod o souřadnicích: $x´=3$, $u_1=4$, $x=1$, $u_2=y=y´=0$, $f=0$

5) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné u_1 *a* y si vymění místo $\rightarrow$ prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku, tj. zde tedy $\frac{5}{2}$ a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme

přímo klíčovým prvkem, tj. zde tedy $-\frac{5}{2}$; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	u_2	u_1	$y´$
$x´$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
y	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
x	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
g	0	1	1	0
f	10	0	-2	2

$\Rightarrow$ 1. fáze končí, neboť **min g = 0**, funkci g můžeme vypustit a tím pádem i umělé proměnné u_1, u_2. Pro přehlednost upravíme tabulku:

BÁZE	b	$y´$
$x´$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
y	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$
x	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}$
f	10	2

Min $c \geq 0$

Optimální řešení $\Rightarrow$ Hodnota funkce: **MIN = 10 v bodě $x = 9/5$, $y = 8/5$**

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $3 - \dfrac{4 * \left(-\dfrac{3}{2}\right)}{-\dfrac{5}{2}} = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\dfrac{1}{2} * \left(-\dfrac{3}{2}\right)}{-\dfrac{5}{2}} = \dfrac{1}{5}$, $0 -$

$$\frac{1 * \left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5},\ 1 - \frac{\frac{1}{2} * 4}{-\frac{5}{2}} = \frac{9}{5},\ -\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5},\ 0 - \frac{\frac{1}{2} * 1}{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{5},\ 4 - \frac{\left(-\frac{5}{2}\right) * 4}{-\frac{5}{2}} = 0,\ \frac{3}{2} -$$

$$\frac{\left(-\frac{5}{2}\right) * \frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}} = 1,\ 1 - \frac{\left(-\frac{5}{2}\right) * 1}{-\frac{5}{2}} = 0,\ 2 - \frac{5 * 4}{-\frac{5}{2}} = 10,\ -1 - \frac{5 * \frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}} = 0,\ 0 - \frac{5 * 1}{-\frac{5}{2}} = 2$$

Poznámka:

Lze provést kontrolu, pokud dosadíme výsledné hodnoty do zadané funkce (tzn. zda bod vyhovuje soustavě).

Např. dosadíme do soustavy $x + 2y \geq 5$ bod x a bod y

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{5} + 2 * \frac{8}{5} \geq 5$$

$$\frac{9}{5} + \frac{16}{5} \geq 5$$

$5 \geq 5$ PLATÍ!

11. PŘÍKLAD:

(úloha minimalizační, vlastní omezení rovnice)

Je dána úloha lineárního programování:

Min $\{30x + 25y + 10z: x + 2y - z = 8; 2x - 2y + 3z = 18; x, y, z \geq 0\}$.

Upravte tuto úlohu pro výpočet simplexovou metodou a sestavte výchozí simplexovou tabulku.

Řešení:

1) Přidání bazických proměnných (dvou umělých) s požadavkem nezápornosti a jejich vyjádření

$$x + 2y - z = 8 \qquad + \boldsymbol{u_1} \geq 0 \rightarrow \qquad u_1 = 8 - x - 2y + z$$

$$2x - 2y + 3z = 18 \qquad + \boldsymbol{u_2} \geq 0 \rightarrow \qquad u_2 = 18 - 2x + 2y - 3z \qquad (1)$$

V přípravné fázi (1. fázi simplexové metody), hledáme minimum umělé funkce

$\boldsymbol{g(u_1, u_2) = u_1 + u_2}$, $u_1, u_2 \geq 0$.

Možné závěry 1. fáze:

5. **min *g* = 0** → konečná tabulka je výchozí pro řešení původní úlohy, umělé proměnné vypustíme,
6. **min *g* > 0** → množina přípustných řešení původní úlohy je prázdná.

2) Účelová funkce: $f = 30x + 25y + 10z$ (2)

3) Sestavení výchozí tabulky pro 1. fázi:

Hledáme minimum účelové funkce. Stanovíme klíčový sloupec (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje záporné číslo, platí tedy $c^1_p < 0$), na jeho základě klíčový řádek (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu $x_{m+p} = -\dfrac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku klíčový prvek.

Optimální řešení platí pro: **Min $c \geq 0$**

Max $c \leq 0$

$\rightarrow$ kritérium pro to, zda je řešení optimální dává poslední řádka f

BÁZE	b	x	y	z	Podíly	
u_1	8	**– 1**	– 2	1	8	klíčový řádek
u_2	18	– 2	2	– 3	9	
g	26	– 3	0	– 2		
f	0	30	25	10		

Min ← (řádek g)

klíčový sloupec

Výchozí základní řešení: $u_1 = 8$, $u_2 = 18$, $x = y = z = 0$, $f = 0$

Poznámka:

Výpočet podílů: $-\dfrac{8}{-1} = 8$, $-\dfrac{18}{-2} = 9$

4) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné $u_1{'}$ a x si vymění místo $\rightarrow$ klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\dfrac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 1 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem ($+d_{qp}$), zde tedy –1; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	u_1	y	z	Podíly
x	8	– 1	– 2	1	
u_2	2	2	6	**– 5**	$\frac{2}{5}$
g	2	3	6	– 5	
f	240	– 30	– 35	40	

klíčový řádek

Min ←

klíčový sloupec

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $18 - \frac{(-2)*8}{-1} = 2$, $2 - \frac{(-2)*(-2)}{-1} = 6$, $-3 - \frac{(-2)*1}{-1} = -5$, $26 - \frac{(-3)*8}{-1} = 2$, $0 - \frac{(-3)*(-2)}{-1} = 6$, $-2 - \frac{(-3)*1}{-1} = -5$, $0 - \frac{30*8}{-1} = 240$, $25 - \frac{30*(-2)}{-1} = -35$, $10 - \frac{30*1}{-1} = 40$

Výpočet podílů: $-\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$

Této tabulce odpovídá bod o souřadnicích: $x = 8$, $u_2 = 2$, $u_1 = y = z = 0$, $f = 240$

5) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné u_2 *a* z si vymění místo → prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku, zde tedy 5 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem, zde tedy – 5; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	u_1	y	u_2
x	$\frac{42}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$
z	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$
g	0	1	0	1
f	256	-14	13	-8

$\Rightarrow$ 1. fáze končí, neboť **min g = 0**, funkci g můžeme vypustit a tím pádem i umělé proměnné u_1, u_2. Pro přehlednost upravíme tabulku:

BÁZE	b	y
x	$\frac{42}{5}$	$-\frac{4}{5}$
z	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
f	256	13

Min $c \geq 0$

Optimální řešení $\Rightarrow$ Hodnota funkce: **MIN = 256 v bodě x = 42/5, y = 0, z = 2/5**

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $8-\frac{2*1}{-5}=\frac{42}{5}$, $-1-\frac{2*1}{-5}=-\frac{3}{5}$, $-2-\frac{6*1}{-5}=-\frac{4}{5}$, $2-\frac{(-5)*2}{-5}=0$, $3-\frac{(-5)*2}{-5}=1$, $6-\frac{(-5)*6}{-5}=0$, $240-\frac{40*2}{-5}=256$, $-30-\frac{40*2}{-5}=-14$, $-35-\frac{40*6}{-5}=13$

<u>Poznámka:</u>

Lze provést kontrolu, pokud dosadíme výsledné hodnoty do zadané funkce (tzn. zda bod vyhovuje soustavě).

Např. dosadíme do soustavy $x + 2y - z = 8$ bod x, bod y a bod z

$$\Rightarrow \quad \frac{42}{5} + 2 * 0 - \frac{2}{5} \geq 8$$

$$\frac{42}{5} - \frac{2}{5} = 8$$

$$\frac{40}{5} = 8$$

$$8 = 8 \qquad \text{PLATÍ!}$$

Dosadíme do soustavy $2x - 2y + 3z = 18$ bod x, bod y a bod z

$$\Rightarrow \quad 2 * \frac{42}{5} - 2 * 0 + 3 * \frac{2}{5} = 18$$

$$\frac{84}{5} + \frac{6}{5} = 18$$

$$\frac{90}{5} = 18$$

$$18 = 18 \qquad \text{PLATÍ!}$$

Nebo pokud dosadíme přímo do účelové funkce $30x + 25y + 10z$ bod x, bod y a bod z

$$\Rightarrow \quad 30 * \frac{42}{5} + 25 * 0 + 10 * \frac{2}{5} = 256 \quad \text{PLATÍ!}$$

12. PŘÍKLAD:

(úloha minimalizační, vlastní omezení nerovnosti typu ≥ a typu ≤, vlastní omezení rovnice)

Je dána úloha lineárního programování:

Min $\{2x + y: 3x - y \geq 12;\ x + y \leq 10;\ x + 2y = 8;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Upravte tuto úlohu pro výpočet simplexovou metodou a sestavte výchozí simplexovou tabulku.

<u>Řešení:</u>

1) Přidání bazických proměnných (dvou doplňkových a dvou umělých) s požadavkem nezápornosti a jejich vyjádření

$3x - y \geq 12$	$\boldsymbol{- x' + u_1},\ x' \geq 0$	$\rightarrow$	$u_1 = 12 - 3x + y + x'$	
$x + y \leq 10$	$\boldsymbol{+ y'} \geq 0$	$\rightarrow$	$y' = 10 - x - y$	
$x + 2y = 8$	$\boldsymbol{u_2} \geq 0$	$\rightarrow$	$u_2 = 8 - x - 2y$	(1)

V přípravné fázi (1. fázi simplexové metody), hledáme minimum umělé funkce

$\boldsymbol{g(u_1, u_2) = u_1 + u_2}$, $u_1, u_2 \geq 0$.

<u>Možné závěry 1. fáze:</u>

7. **min *g* = 0** → konečná tabulka je výchozí pro řešení původní úlohy, umělé proměnné vypustíme,
8. **min *g* > 0** → množina přípustných řešení původní úlohy je prázdná.

2) Účelová funkce: $f = 2x + y$ (2)

3) Sestavení výchozí tabulky pro 1. fázi:

Hledáme minimum účelové funkce. Stanovíme <u>klíčový sloupec</u> (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje záporné číslo, platí tedy $c^1_p < 0$), na jeho základě <u>klíčový řádek</u> (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu x_{m+p}

$= -\dfrac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku klíčový prvek.

Optimální řešení platí pro: **Min $c \geq 0$**

Max $c \leq 0$

$\rightarrow$ kritérium pro to, zda je řešení optimální dává poslední řádka f

BÁZE	b	x	y	x'	Podíly	
u_1	12	**– 3**	1	1	4	klíčový řádek
y'	10	– 1	– 1	0	10	
u_2	8	–1	– 2	0	8	
g	20	– 4	– 1	1		Min ←
f	0	2	1	0		

klíčový sloupec

Výchozí základní řešení: $u_1 = 12$, $y' = 10$, $u_2 = 8$, $x = y = x' = 0$, $f = 0$

Poznámka:

Výpočet podílů: $-\dfrac{12}{-3} = 4$, $-\dfrac{10}{-1} = 10$, $-\dfrac{8}{-1} = 8$

4) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné u_1 a x si vymění místo $\rightarrow$ klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\dfrac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 3 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem ($+d_{qp}$), zde tedy – 3; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	u_1	y	$x´$	Podíly
x	4	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$y´$	6	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{18}{4}$
u_2	4	$\frac{1}{3}$	**–7/3**	$-\frac{1}{3}$	$\frac{12}{7}$
g	4	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
f	8	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	

klíčový řádek

Min ←

klíčový sloupec

Poznámka:

Výpočet pomocí křížového pravidla: $10-\frac{(-1)*12}{-3}=6$, $-1-\frac{(-1)*1}{-3}=-\frac{4}{3}$, $0-\frac{(-1)*1}{-3}=-\frac{1}{3}$, $8-\frac{(-1)*12}{-3}=4$, $-2-\frac{(-1)*1}{-3}=-\frac{7}{3}$, $0-\frac{(-1)*1}{-3}=-\frac{1}{3}$, $20-\frac{(-4)*12}{-3}=4$ $-1-\frac{(-4)*1}{-3}=-\frac{7}{3}$, $1-\frac{(-4)*1}{-3}=-\frac{1}{3}$, $0-\frac{2*12}{-3}=8$, $1-\frac{2*1}{-3}=\frac{5}{3}$, $0-\frac{2*1}{-3}=\frac{2}{3}$

Výpočet podílů: $-\frac{6}{-\frac{4}{3}}=\frac{18}{4}$, $-\frac{4}{-\frac{7}{3}}=\frac{12}{7}$

Této tabulce odpovídá bod o souřadnicích: $x = 4$, $y´ = 6$, $u_2 = 4$, $u_1 = y = x´ = 0$, $f = 8$

5) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné u_2 *a* y si vymění místo → prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku, zde tedy $\frac{7}{3}$ a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme

přímo klíčovým prvkem, zde tedy $-\frac{7}{3}$; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	u_1	u_2	x'
x	$\frac{32}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
y'	$\frac{26}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$
y	$\frac{12}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$
g	0	1	1	0
f	$\frac{76}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$

$\Rightarrow$ 1. fáze končí, neboť **min g = 0**, funkci g můžeme vypustit a tím pádem i umělé proměnné u_1, u_2. Pro přehlednost upravíme tabulku:

BÁZE	b	x'
x	$\frac{32}{7}$	$\frac{2}{7}$
y'	$\frac{26}{7}$	$-\frac{1}{7}$
y	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$
f	$\frac{76}{7}$	$\frac{3}{7}$

Min $c \geq 0$

Optimální řešení $\Rightarrow$ Hodnota funkce: **MIN = 76/7 v bodě *x* = 32/7, *y* = 12/7**

<u>Poznámka:</u>

Výpočet pomocí křížového pravidla: $4-\dfrac{4*\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}}=\dfrac{32}{7}$, $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\frac{1}{3}*\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}}=-\dfrac{2}{7}$, $\dfrac{1}{3}-\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)*\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}}=\dfrac{2}{7}$, $6-\dfrac{4*\left(-\frac{4}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=\dfrac{26}{7}$, $\dfrac{1}{3}-\dfrac{\frac{1}{3}*\left(-\frac{4}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=\dfrac{1}{7}$, $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)*\left(-\frac{4}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=-\dfrac{1}{7}$, $8-\dfrac{\frac{5}{3}*4}{-\frac{7}{3}}=\dfrac{76}{7}$, $-\dfrac{2}{3}-\dfrac{\frac{5}{3}*\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}}=-\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{2}{3}-\dfrac{\frac{5}{3}*\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=\dfrac{3}{7}$, $4-\dfrac{\left(-\frac{7}{3}\right)*4}{-\frac{7}{3}}=0$, $\dfrac{4}{3}-\dfrac{\left(-\frac{7}{3}\right)*\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}}=1$, $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\left(-\frac{7}{3}\right)*\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=0$

<u>Poznámka:</u>

Lze provést kontrolu, pokud dosadíme výsledné hodnoty do zadané funkce (tzn. zda bod vyhovuje soustavě).

Např. dosadíme do soustavy $3x-y\geq 12$ bod x a bod y

$$\Rightarrow \qquad \frac{32}{7}+\frac{12}{7}\geq 12$$

$$\frac{84}{7}\geq 12 \qquad \text{PLATÍ!}$$

13. PŘÍKLAD:

(úloha minimalizační a maximalizační, vlastní omezení nerovnosti typu ≥ a typu ≤)

Je dána úloha lineárního programování:

Min, Max $\{3x + 2y: x + y \geq 10;\ 3x + 5y \leq 15;\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

Upravte tuto úlohu pro výpočet simplexovou metodou a sestavte výchozí simplexovou tabulku.

Řešení:

1) Přidání bazických proměnných (dvou doplňkových a dvou umělých) s požadavkem nezápornosti a jejich vyjádření

$x + y \geq 10 \qquad \boldsymbol{-x' + u_1},\ x' \geq 0 \quad \rightarrow \qquad u_1 = 10 - x - y + x'$

$3x + 5y \leq 15 \qquad \boldsymbol{+y'} \geq 0 \quad \rightarrow \qquad y' = 15 - 3x - 5y \qquad (1)$

V přípravné fázi (1. fázi simplexové metody), hledáme minimum umělé funkce

$\boldsymbol{g(u_1) = u_1}$, $u_1 \geq 0$.

Možné závěry 1. fáze:

9. **min $\boldsymbol{g}$ = 0** → konečná tabulka je výchozí pro řešení původní úlohy, umělé proměnné vypustíme,
10. **min $\boldsymbol{g}$ > 0** → množina přípustných řešení původní úlohy je prázdná.

2) Účelová funkce: $f = 3x + 2y$ (2)

3) Sestavení výchozí tabulky pro 1. fázi:

Vždy nejprve hledáme minimum a až poté maximum účelové funkce, pokud máme za úkol maximum najít. Stanovíme klíčový sloupec (tj. sloupec, ve kterém se v účelové funkci vyskytuje záporné číslo, platí tedy $c^1_p < 0$), na jeho základě klíčový řádek (tj. řádek, který určíme podle podílů – podíly počítáme pouze v řádcích, kde je $d_{ip} < 0$, tzn. pouze tam, kde je záporná řádka a kde nám vyjde menší hodnota podílu $x_{m+p} = -\dfrac{d_{io}}{d_{ip}}$, tam je klíčový řádek) a poté stanovíme v průniku klíčového sloupce a klíčového řádku <u>klíčový prvek</u>.

<u>Optimální řešení platí pro:</u> **Min $c \geq 0$**

Max $c \leq 0$

→ kritérium pro to, zda je řešení optimální dává poslední řádka f

BÁZE	b	x	y	$x´$	Podíly
u_1	10	– 1	– 1	1	10
$y´$	15	**– 3**	– 5	0	5
g	10	– 1	– 1	1	
f	0	3	2	0	

klíčový řádek

Min ←

klíčový sloupec

<u>Výchozí základní řešení:</u> $u_1 = 10$, $y´ = 15$, $x = y = x´ = 0$, $f = 0$

<u>Poznámka:</u>

Výpočet podílů: $-\dfrac{10}{-1} = 10$, $-\dfrac{15}{-3} = 5$

4) Přechod k sousednímu krajnímu bodu - výpočet nové tabulky (proměnné $y´$ a x si vymění místo → klíčový prvek d_{qp} nahradíme jeho převrácenou hodnotou ($\dfrac{1}{d_{qp}}$); prvky, které se vyskytují v klíčovém řádku dělíme opačnou hodnotou klíčového prvku ($-d_{qp}$), zde tedy 3 a prvky, které se vyskytují v klíčovém sloupci dělíme přímo klíčovým prvkem ($+d_{qp}$), zde tedy – 3; ostatní prvky vypočteme podle výše zmíněného křížového pravidla).

Optimální řešení?

BÁZE	b	y'	y	x'
u_1	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
x	5	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0
g	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
f	25	–1	– 3	0

Min $c \geq 0$

Min $c \geq 0$, ale řádek funkce g nemůžeme vyškrtnout, neboť jsme nedocílili, že $u_1 = 0$.

$\Rightarrow$ Množina přípustných řešení je prázdná!

<u>Poznámka:</u>

Výpočet pomocí křížového pravidla: $10 - \frac{15*(-1)}{-3} = 5$, $-1 - \frac{(-5)*(-1)}{-3} = \frac{2}{3}$, $1 - \frac{0*(-1)}{-3} = 1$, $10 - \frac{(-1)*15}{-3} = 5$, $-1 - \frac{(-1)*(-5)}{-3} = \frac{2}{3}$, $1 - \frac{(-1)*0}{-3} = 1$, $0 - \frac{3*15}{-3} = 15$, $2 - \frac{3*(-5)}{-3} = -3$, $0 - \frac{3*0}{-3} = 0$

7. ZÁVĚR

Myslím si, že by tato diplomová práce mohla sloužit jako jakýsi náhled do problematiky lineárního programování, a to nejen pro žáky středních a vysokých škol, ale i pro jejich učitele.

V teoretické části jsem se snažila vysvětlit veškeré potřebné pojmy a uvést základní věty a formulace, které jsem poté v praktické části s podrobným popisem rozebrala.

Při grafickém řešení jsem dlouho přemýšlela, jaký vhodný program použít, aby dané obrázky byly pro všechny čitelné a měly náležitou vypovídací schopnost. Nejprve jsem se pokusila obrázky vykreslit v matematickém programu Maple 6, ale nezdály se mi příliš dostačující a tak jsem se pokusila najít jiný program, který bych použila. Nakonec jsem použila pro tvorbu obrázků geometrický program GEONExT, s nímž jsem se sama naučila pracovat bez cizí pomoci. Tento program bych chtěla všem doporučit a to pro jeho jednoduchost a názornost.

Jak jsem již zmínila, v mé diplomové práci byl využit pro grafické řešení úloh lineárního programování výše jmenovaný geometrický program, ale dané úlohy jdou samozřejmě řešit i ručně na papír. Jen je potřeba rýsovat velmi přesně a hlavně pomocí pravítka a nejlépe na milimetrový papír.

Při ponoření do tématu lineárního programování mě velmi upoutalo právě jeho grafické řešení, ale také i simplexový algoritmus, který mně přišel velmi zajímavý a hlavně srozumitelný. Čím více jsem se touto problematikou zabývala, tím více se mi právě toto zvolené téma líbilo a mohu jej všem doporučit.

8. POUŽITÁ LITERATURA

[1] Dont, M.: Numerické metody – cvičení. ČVUT Praha, 1990.

[2] Klvaňa, J.: Operační výzkum I. ČVUT v Praze, fakulta stavební,1990.

[3] Plesník, J., Dupačová, J., Vlach, M. : Lineárne programovanie, Vydavatelství Alfa, Bratislava, 1990.

[4] Zörnig, P.:Numerické metody. ČVUT Praha, 1989.

9. ELEKTRONICKÉ ZDROJE

[5] URL: <http://home.eunet.cz/berka/o/matempro.htm>

[6] URL: <http://www.ftvs.cuni.cz/hendl/lpiscs.ppt#5>

[7] URL: <http://www1.osu.cz/studium/mopv2/simplex/>

[8] URL: <http://www.uai.fme.vutbr.cz/~jdvorak/vyuka/tsoa/PredO4.ppt#1>

[9] URL: <http://ekonom.feld.cvut.cz/materialy/ov/cviceni03.htm>

[10] URL: <http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/extrem/node14.html>