JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

VYUŽITÍ PROGRAMU CABRI PŘI ŘEŠENÍ GEOMETRICKÝCH ÚLOH POMOCÍ KRUHOVÉ INVERZE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracovala: Markéta Lišková

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou literaturu, kterou jsem v této práci použila.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské - diplomové - disertační práce, a to v nezkrácené podobě - v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných ... fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích, dne 25. dubna 2007

………………………

Markéta Lišková

ANOTACE

V diplomové práci se zabývám využitím geometrického programu Cabri Geometrie II plus ve výuce matematiky. Možnosti využití tohoto programu byly ověřeny na geometrických úlohách, při jejichž řešení se užívá kruhová inverze. Vybrané úlohy jsou zpracovány s využitím geometrických i grafických prostředků programu Cabri Geometrie II plus tak, aby vynikl přínos jeho využití při výuce.

ANNOTATION

This graduation theses is engaged in using of computer programm Cabri Geometrie II plus in mathematics lessons . The potencialities of this computer programm were tested in geometrical exercises in whose solving it is neccesary to use circle inversion. Chosen exercises are solved by help of geometric and grafic applications of computer programm Cabri Geometrie II plus to show the importace of this programm in mathematics lessons.

PODĚKOVÁNÍ:

Děkuji panu Romanu Haškovi, vedoucímu mé diplomové práce, za jeho odborné vedení, cenné rady a připomínky, kterými mi pomohl při jejím vypracování.

Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu při studiu.

OBSAH

1. ÚVOD

CABRI Geometrie je kvalitní výukový program, který slouží jako prostředí k vytváření geometrických konstrukcí na obrazovce počítače.Umožňuje rychlejší a přesnější rýsování, podporuje a trénuje geometrické uvažování. Program je vhodným prostředím pro projektovou výuku. Program CABRI Geometrie je jedním z programů typu DGE – Dynamical Geometry Environment (prostředí dynamické geometrie). Přes existenci velmi kvalitních programů dynamické geometrie má CABRI stále nepopíratelnou řadu výhod, které ji staví jako velmi vhodný program pro školní geometrii.

Cílem této práce je představit program Cabri Geometrie a poukázat na výhody jeho použití při řešení geometrických úloh s užitím kruhové inverze.

2. CABRI GEOMETRIE

2.1 <u>Program Cabri Geometrie</u>

Interaktivní geometrický náčrtník Cabri Geometrie je software pro geometrii, který byl vytvoře v 80. letech na výzkumném pracovišti CNRS (Centre National De Recherche Scientifique) a na univerzitě Josepha Fouriera ve Francii.V součastné době je program Cabri Geometrie vyvíjen a distribuován společností Cabrilog, kterou založil v březnu 2000 Jean – Marie Laborde, ředitel výzkumu v CRNS a virtuální otec celé rodiny Cabri.

Cabri pracuje na principu euklidovské rovinné geometrie. Lze pracovat i s mírou (délka, obsah, úhel). Uživatel má k dispozici čtvercovou nárysnu 1m x 1m, z níž je zobrazována na monitoru její část přibližně ve skutečné velikosti. Základními objekty jsou: bod, úsečka, přímka, polopřímka, vektor, kružnice, kuželosečka, oblouk kružnice, trojúhelník, pravidelné a nepravidelné mnohoúhelníky. Objekty lze sestrojovat ve vzájemných vztazích: kolmice, rovnoběžka, vzdálenost, střed úsečky, osa úsečky atd. S body lze též provádět základní geometrická zobrazení: středová a osová souměrnost, posunutí, otočení, stejnolehlost a kruhová inverze.

Dále lze pak nastavit tloušťku, barvu a typ čáry, typ značky (bodu nebo úhlu), popis objektů, měření vzdáleností apod. Pro složité stereometrické konstrukce je obzvláště vhodná možnost skrýt vybrané objekty tak, aby se nezobrazovaly na pracovní ploše, ale přitom byly zachovány jimi dané geometrické vztahy.

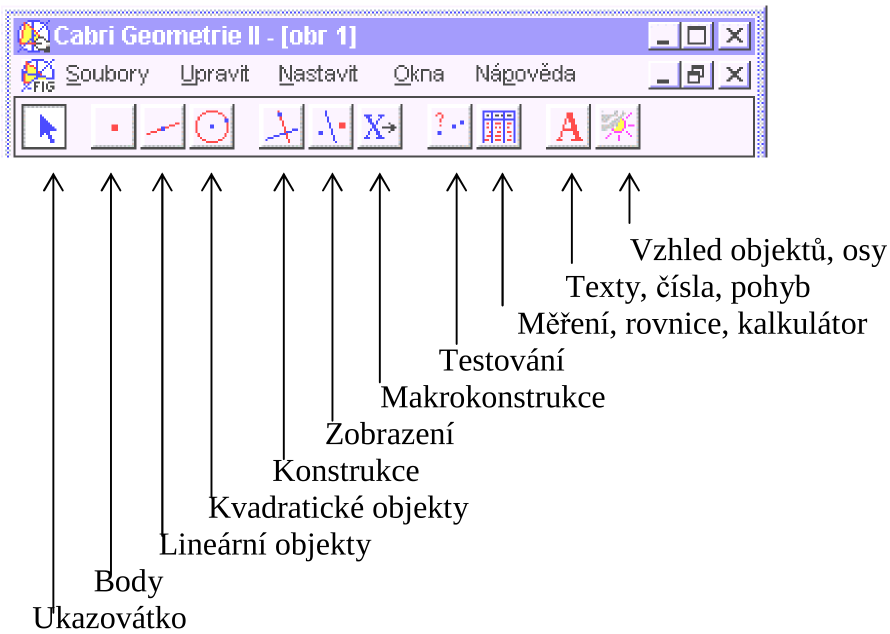
Počítačová podpora konstrukce geometrických výkresů přináší značný pokrok ve srovnání s klasickou metodou rýsování tužkou, pravítkem a kružítkem na papír: umožňuje jednou nakreslený obrázek snadno upravovat, formulovat a ověřovat domněnky, měřit a provádět výpočty. V hotovém obrázku lze skrýt pomocné konstrukce. Obrázek je připraven k šíření po Internetu nebo ke vložení do jiného dokumentu.

CABRI Geometrie II Plus umožňuje vytvářet na obrazovce počítače geometrické objekty, manipulovat s nimi a experimentálně zkoumat a objevovat geometrické zákonitosti. Program CABRI Geometrie II Plus nabízí:

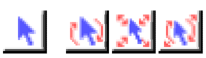
- konstrukce z bodů, přímek, úseček, vektorů, kružnic a kuželoseček
- geometrická zobrazení, množiny objektů, rovnoběžky, kolmice, osy
- analytická geometrie, měření vzdáleností, obsahů a velikostí úhlů
- dynamické proměny konstrukcí

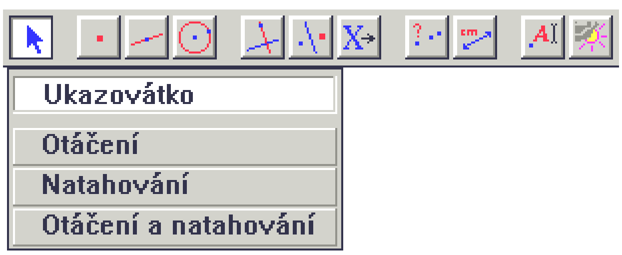
2.2 Ovládání programu

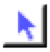
A B1 B2 B3 C1 C2 C3 D1 D2 E1 E2



Ukazovátko

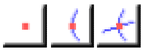




 *Ukazovátko*

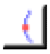
Klepnutím na objekt ho označíme k další operaci. Označení více objektů umožňuje klávesa SHIFT nebo jejich zarámování (tahem myši). Táhnutím za volný objekt ho přemístíme. Poklepáním na text, název nebo číslo spustíme příslušný editor. Přidržením tlačítka myši na prázdném místě zvýrazníme volné body.

Body

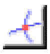


 *Bod*

Klepnutím vytvoříme volný bod, bod na objektu nebo v průsečíku dvou objektů.

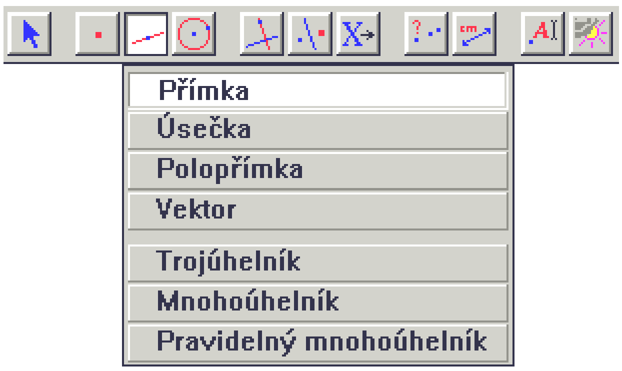
 *Bod na objektu*

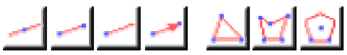
Klepnutím vytvoříme bod na objektu.

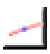
 Průsečíky

Klepnutím na dva objekty vytvoříme jejich průsečíky.

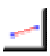
Lineární objekty





 *Přímka*

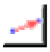
Vytvoření přímky dané bodem a směrem nebo dvěma body.

 *Úsečka*

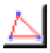
Vytvoření úsečky ze dvou krajních bodů.

 *Polopřímka*

Vytvoření polopřímky dané počátečním bodem a směrem nebo bodem.

 *Vektor*

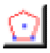
Vytvoření vektoru (orientované úsečky) z počátečního a koncového bodu.

 *Trojúhelník*

Vytvoření trojúhelníka ze tří vrcholů.

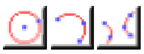
 *Mnohoúhelník*

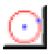
Vytvoření mnohoúhelníka z jeho vrcholů. Zadávání ukončíme poklepáním na posledním vrcholu nebo klepnutím na první vrchol.

 *Pravidelný mnohoúhelník*

Vytvoření pravidelného mnohoúhelníka. Nejprve klepneme na jeho střed a vrchol, táhnutím po obvodu pak určíme počet stran (do 30) a konvexitu nebo hvězdicovost.

Kvadratické objekty

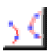


 *Kružnice*

Vytvoření kružnice dané středem a bodem.

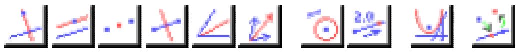
 *Oblouk*

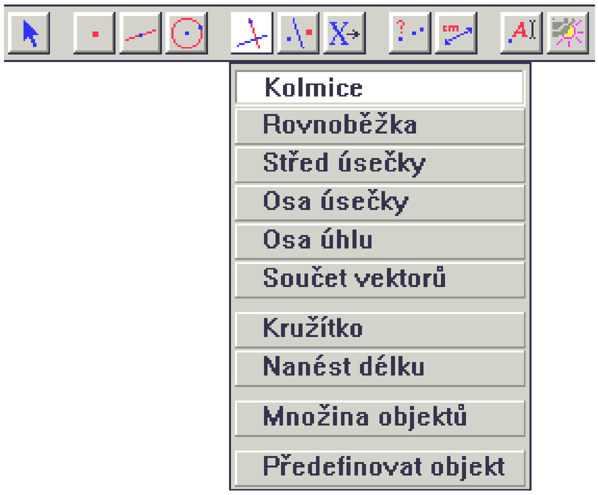
Vytvoření oblouku daného počátečním bodem, vnitřním bodem a koncovým bodem.

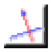
 *Kuželosečka*

Vytvoření kuželosečky (elipsy, paraboly, hyperboly, přímky nebo dvojice přímek) dané pěti body.

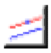
Konstrukce





 *Kolmice*

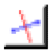
Vytvoření kolmice z bodu k přímce, úsečce, polopřímce, vektoru, ose nebo straně mnohoúhelníka.

 *Rovnoběžka*

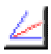
Vytvoření rovnoběžky bodem s přímkou, úsečkou, polopřímkou, vektorem, osou nebo stranou mnohoúhelníka.

 *Střed úsečky*

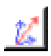
Vytvoření středu úsečky, vektoru, strany mnohoúhelníka nebo dvojice bodů.

 *Osa úsečky*

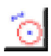
Vytvoření osy úsečky, vektoru, strany mnohoúhelníka nebo dvojice bodů.

 *Osa úhlu*

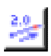
Vytvoření osy úhlu určeného třemi body.

 *Součet vektorů*

Vytvoření součtu dvou vektorů umístěného v daném bodě.

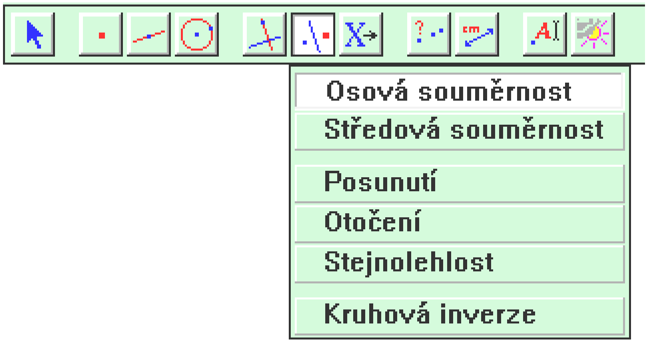
 *Kružítko*

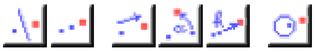
Vytvoření kružnice z poloměru daného úsečkou nebo dvojicí bodů a ze středu.

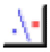
 *Nanést délku*

Nanesení dané délky od daného bodu daným směrem, na vektor (od počátečního bodu), na polopřímku (od počátečního bodu), na osu (od počátku v kladném směru), na obvod mnohoúhelníka (od prvního vrcholu ve směru jeho vytvoření) nebo na kružnici (od daného bodu proti směru hodinových ručiček). Nejprve označíme číslo, pak objekt a v případě kružnice i počáteční bod.

Zobrazení



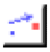


 *Osová souměrnost*

Vytvoření obrazu objektu v osové souměrnosti podle dané přímky, úsečky, polopřímky, vektoru, osy nebo strany mnohoúhelníka .

 *Středová souměrnost*

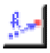
Vytvoření obrazu objektu ve středové souměrnosti dané středem.

 *Posunutí*

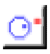
Vytvoření obrazu objektu v posunutí o daný vektor.

 *Otočení*

Vytvoření obrazu objektu v otočení kolem daného středu o úhel daný číselnou hodnotou.

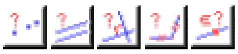
 *Stejnolehlost*

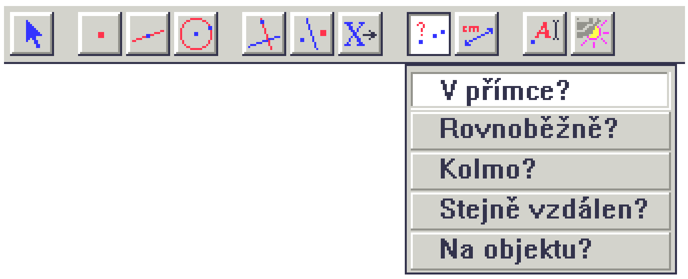
Vytvoření obrazu objektu ve stejnolehlosti dané středem a číselným koeficientem.

 *Kruhová inverze*

Vytvoření obrazu bodu v kruhové inverzi dané kružnicí.

Testování





 *V přímce?*

Zjištění, zda tři body leží v přímce.

Rovnoběžně?

Zjištění, zda dva lineární objekty (přímka, polopřímka, úsečka, vektor, osa, strana mnohoúhelníka) jsou rovnoběžné.

Kolmo?

Zjištění, zda dva lineární objekty (přímka, polopřímka, úsečka, vektor, osa, strana mnohoúhelníka) jsou kolmé.

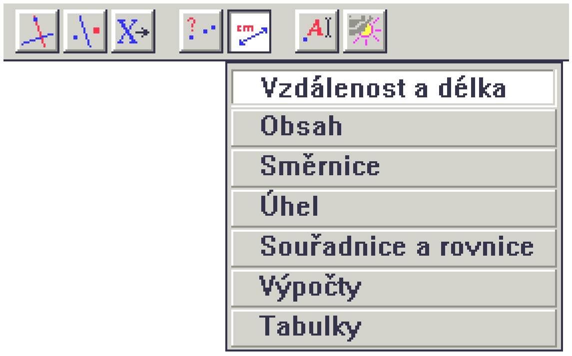
Stejně vzdálen?

Zjištění, zda je bod stejně vzdálen od dvou dalších bodů.

Na objektu?

Zjištění, zda bod leží na daném objektu.

Měření, rovnice, kalkulátor



Vzdálenost a délka

Změření vzdálenosti bodu od bodu, přímky, osy a kružnice, velikosti úsečky a vektoru, délky kružnice, oblouku a elipsy, obvodu mnohoúhelníka.

Obsah

Změření obsahu mnohoúhelníka, kruhu a elipsy.

Směrnice

Určení směrnice přímky, úsečky, polopřímky a vektoru.

Úhel

Změření velikosti úhlu daného třemi body nebo vyznačeného obloučkem.

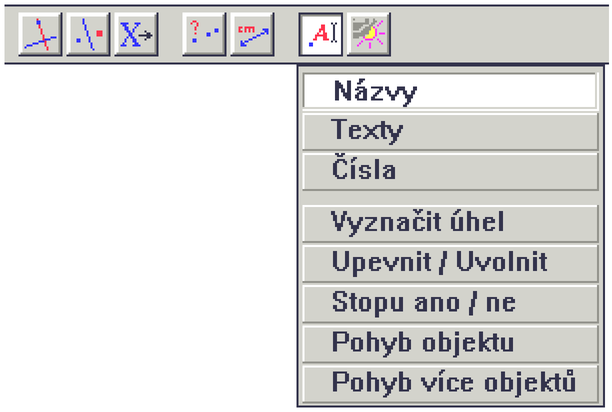
Souřadnice a rovnice

Zjištění souřadnic bodu a rovnice přímky, kružnice a kuželosečky.

Výpočty

Vyčíslení výrazu, který můžeme tvořit z číselných hodnot vkládaných z klávesnice nebo z nákresny (klepnutím). Výsledek lze vytáhnout na nákresnu. Poklepáním na výsledek umístěný na nákresně obnovíme výraz na displeji kalkulačky k editaci.

Texty, čísla, pohyb



Názvy

Připojení názvu k bodu, přímce nebo kružnici a jeho úpravy.

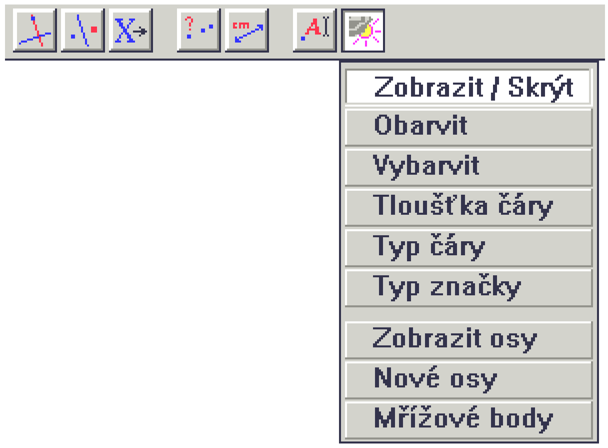
Texty

Vložení textu z klávesnice nebo ze schránky na nákresnu a jeho úpravy.

Vyznačit úhel

Vyznačení úhlu daného třemi body.

Vzhled objektů, osy



Zobrazit / Skrýt

Klepnutím na viditelný objekt ho zneviditelníme a obráceně. Neviditelné objekty se zde ukazují jako čárkované.

Tloušťka čáry

Změna tloušťky čáry.

Typ čáry

Změna typu čáry.

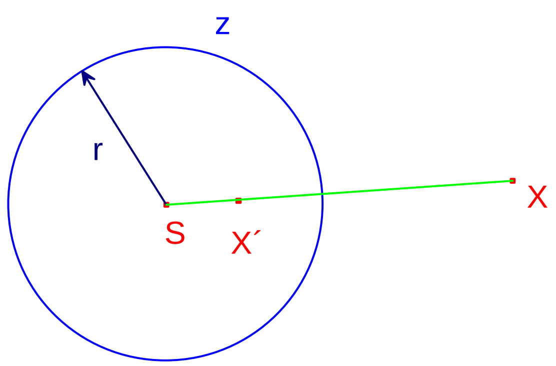
Typ značky

Změna vyznačení objektu.

3. Kruhová inverze

= geometrické zobrazení, které libovolnému bodu X$\neq$S přiřazuje bod X´ tak že platí:

1. $X' \in \mapsto SX$
2. $|SX| * |SX'| = r^2$



Kružnice ***z*** se nazývá řídící kružnice kruhové inverze. Bod S nemá obraz definován.

Kruhovou inverzi označujeme stejným písmenem jako její řídící kružnici.

3.1 <u>Obraz bodu v kruhové inverzi</u>

Každý bod řídící kružnice je v kruhové inverzi samodružný. Žádné další samodružné body kruhová inverze nemá. Vnější oblast řídící kružnice se zobrazí na oblast vnitřní, vnitřní oblast se zobrazí na oblast vnější. Je-li totiž $|SX|$ < r, musí být $|SX'|$ > r a naopak.

Zobrazení bodu X na X´ v kruhové inverzi ***z*** zapisujeme

$$z(x) = X' \text{ nebo } X' \xrightarrow{z} X .$$

Konstrukce obrazu bodu X

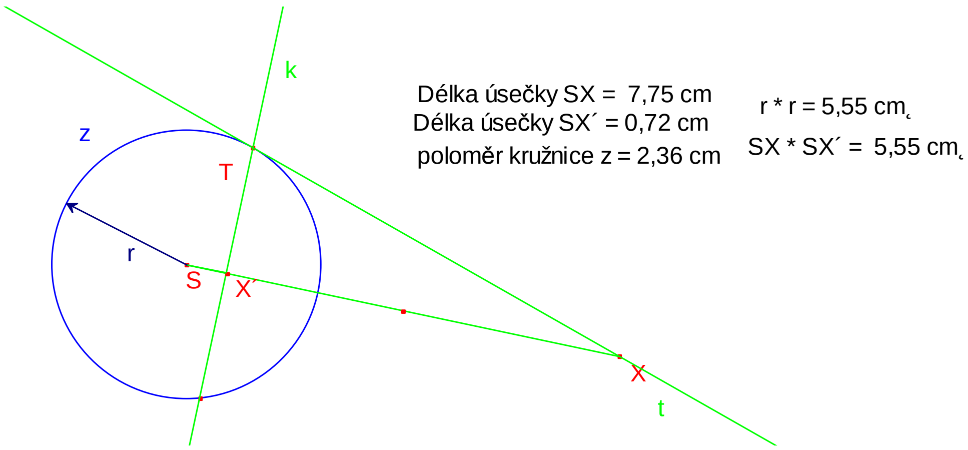
Dáno: z (S; r); bod X (X = vnější bod kružnice z)

Popis konstrukce: 1. t; tečna z X na z

2. T; $T \in t \cap k$ T ∈ t ∩ z

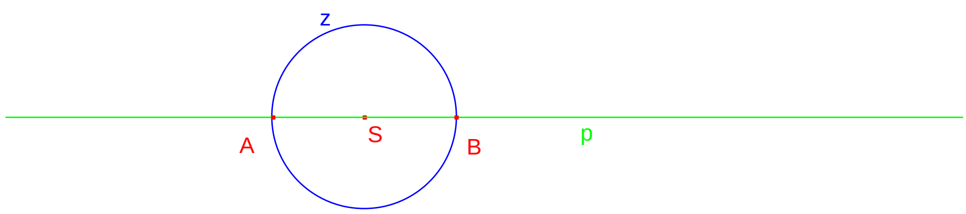
3. k; k ⊥ $|SX| \wedge T \in k$

4. X´ ; $X' \in k \cap SX$



3.2 <u>Obraz přímky v kruhové inverzi</u>

- <u>*Přímka **p** prochází středem **S** řídící kružnice a protíná ji v průměru **AB***</u>

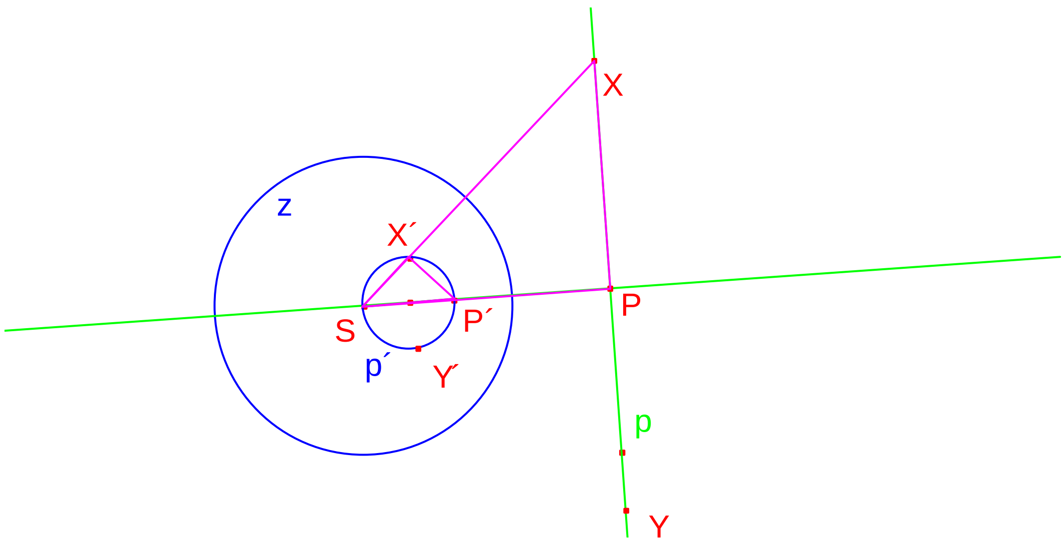


Body přímky procházející středem kruhové inverze ***S*** se zobrazí opět na tuto přímku. S výjimkou středu ***S***.

- *Přímka **p** neprochází středem **S** a protíná řídící kružnici ve dvou bodech **A,B***

Konstrukce přímky p

Dáno: Kružnice *z(S; r)*; *p*, $p \cap z = \{\ \}$



Pro obraz libovolného bodu *X* přímky *p* platí

$$|SP'| * |SP| = r^2 = |SX'| * |SX|.$$

Je tedy

$$\frac{|SP'|}{|SX'|} = \frac{|SX|}{|SP|}.$$

Podle věty *sus* je trojúhelník *SP´X´* podobný trojúhelníku *SXP*. Vrcholu P pravého úhlu trojúhelníku *SXP* odpovídá vrcholu *X´* pravého úhlu trojúhelníku *SP´X´*. Obrazem libovolného bodu *X* přímky *p* leží tedy na Thaletově kružnici *p´* s průměrem *SP´*.

Dokázali jsme tedy větu:

Věta:

Obrazem libovolné přímky, která prochází středem S řídící kružnice z(S,r) kruhové inverze, je táž přímka. Bod D nemá obraz definován. Obrazem libovolné přímky p, která neprochází středem S, je kružnice p´s průměrem SP´, kde P´je obraz paty P kolmice sestrojené z bodu S na přímku p. Bod S není obrazem žádného bodu přímky p.

3.3 Obraz kružnice v kruhové inverzi

- *Kružnice k prochází středem **S** řídící kružnice*

Věta:

Obrazem libovolné kružnice k, která prochází středem S řídící kružnice kruhové inverze, je přímka k´, která středem S neprochází. Střed S nemá obraz definován.

- *Kružnice neprochází středem S řídící kružnice*

Libovolnému bodu X kružnice k přísluší obraz X´ polopřímky SX, pro nějž platí:

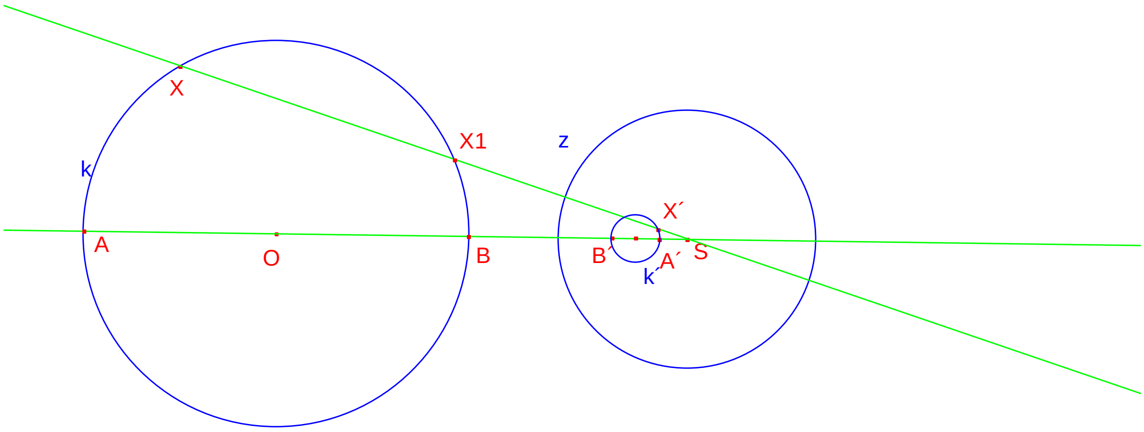
$$|SX| * |SX'| = r^2 . \qquad (1)$$

Označíme-li druhý z průsečíků přímky SX s kružnicí k jako bod X_1 , pak podle věty
o mocnosti dobu ke kružnici platí:

$$|SX| * |SX_1| = |m|, \qquad (2)$$

kde m je pro daný bod a danou kružnici konstantní. Vypočítáme-li z rovnosti (2) $|SX|$ a dosadíme výsledek do rovnosti (1), dostaneme

$$|SX|' = \frac{r^2}{|m|} * |SX_1| .$$



Věta:

Nutnou a postačující podmínkou, aby kružnice k se středem O, různá od řídící kružnice z, byla v kruhové inverzi samodružná je, aby ortogonálně protínala určující kružnici kruhové inverze z.

Věta:

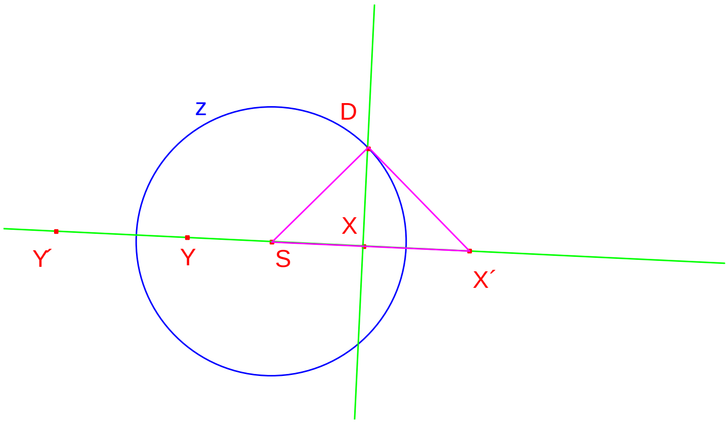
Nechť jsou a, b dvě kružnice nebo přímka a kružnice, které se dotýkají

a. *Jestliže se dotýkají v bodě T≠S, kde s je střed kruhové inverze, potom se dotýkají i jejich obrazy v bodě T´, který je obrazem bodu T.*

b. *Jestliže se dotýkají ve středu kruhové inverze S, potom jsou jejich obrazem přímky*

a´ || *b´*.

4. Analytické vyjádření kruhové inverze



Y´ pro $\kappa < 0$, *X´* pro $\kappa > 0$; κ je koeficient kruhové inverze.

$$|SX| * |SX'| = |\kappa| = r^2 \qquad (1)$$

$$|SX'| = |k| * |SX|, \qquad (2)$$

kde *k* a κ mají stejná znaménka.

Z rovnic (1), (2) dostaneme:

$$(X' - S) = k * (X - S) X$$
$$X' = S + k * (X - S)$$

$$\left.\begin{array}{l} |SX'| = \dfrac{|\kappa|}{|SX|} \\ |SX'| = |k| * |SX| \end{array}\right. \Rightarrow |k| = \frac{|\kappa|}{|SX|^2};$$

k, κ mají stejná znaménka.

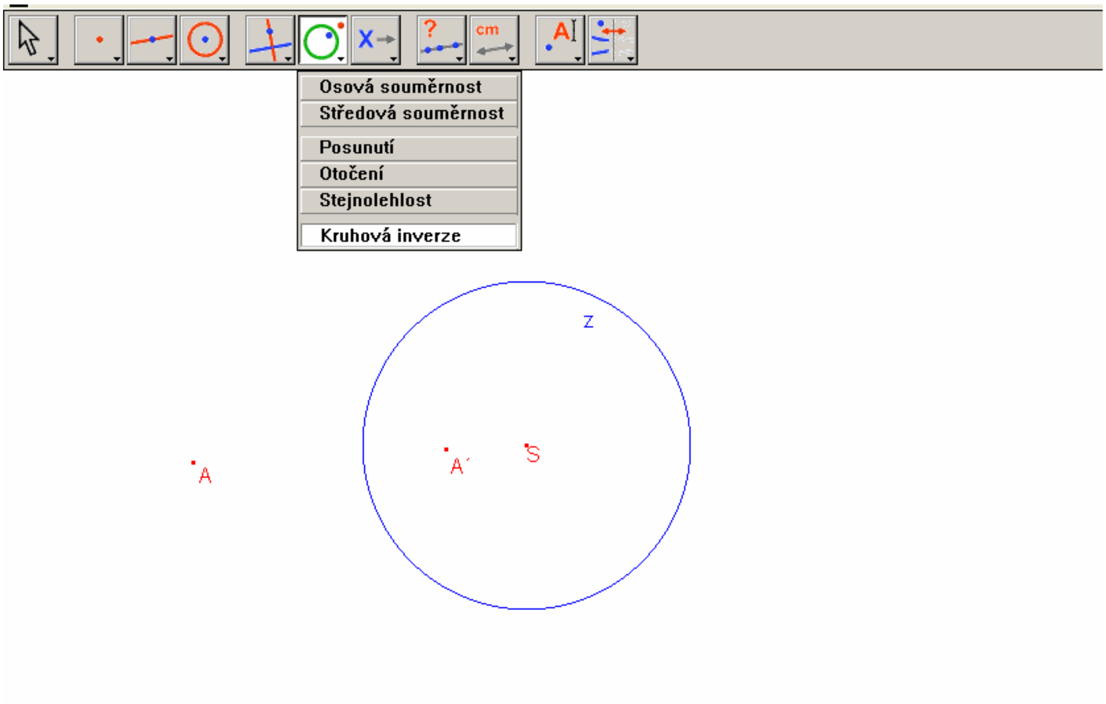
$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2}(X - S)$$

5. Cabri a kruhová inverze

Program Cabri Geometrie je interaktivní geometrický náčrtník. Řadí se ke skupině programů zvaných *Prostředí dynamické geometrie*

- Slouží k rychlému a přesnému rýsování geometrických konstrukcí
- Obsahuje nástroje pohybu, umožňující manipulaci s hotovou konstrukcí
- Dokáže měřit a čísla opět v konstrukcích používat
- Obsahuje silné nástroje pro analytickou geometrii
- Skvělý nástroj na experimentování a ověřování hypotéz
- Má i možnost omezit nabídku rýsovacích nástrojů, exportu do html
- Přidá ke geometrii novou dimenzi pohybu

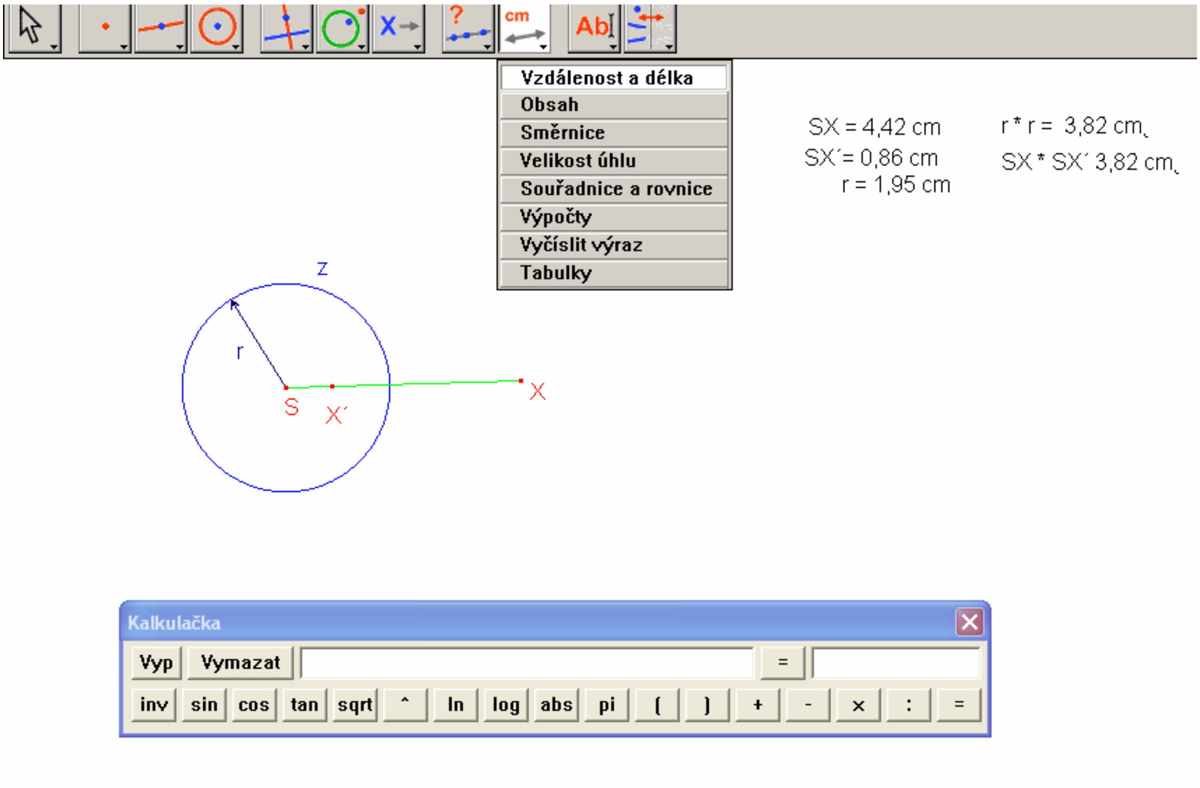
V programu Cabri geometrie najdeme mimo jiných základních geometrických zobrazeních i kruhovou inverzi. Zobrazení kruhová inverze lze však provádět pouze s body. (obrázek 1.)



obr. 1

Pomocí měření délek a výpočtů můžeme ukázat platnost druhého bodu definice kruhové inverze: $|SX| * |SX'| = r^2$. (obrázek 2)

Také můžeme využít nabídky krokování konstrukce, kdy spolu s otevřením zápisu konstrukce můžeme krok od kroku sledovat postup konstrukce.



obr. 2

6. Řešení geometrických úloh

Příklad 1

Jsou dány kružnice *m*, *n*, které se dotýkají v bodě *T*. Sestrojte jejich obrazy *m´*,*n´* v kruhové inverzi s řídící kružnicí *z(S;r)*.

$\boldsymbol{a}. S = T$

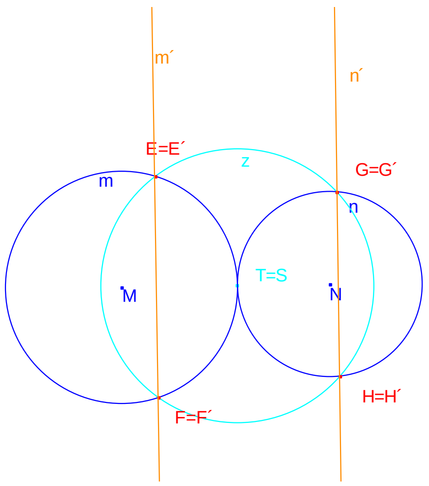
<u>Rozbor konstrukce:</u>

Podle věty o obrazu kružnice procházející středem kruhové inverze jsou obrazy obou kružnic *m*, *n* přímky.

<u>Popis konstrukce:</u>

1. $z; z(S;r)$
2. $E, E´; E \in z \cap m$
3. $F, F´; F \in z \cap m$
4. $G, G´; G \in z \cap n$
5. $H, H´; H \in z \cap n$
6. $m´; E´, F´ \in m´$
7. $n´; G´, H´ \in n´$

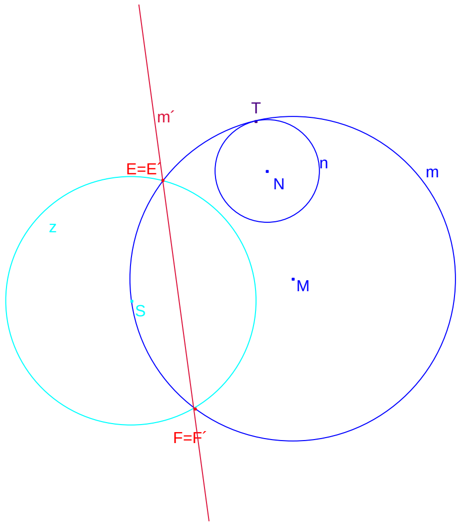
<u>Konstrukce:</u>



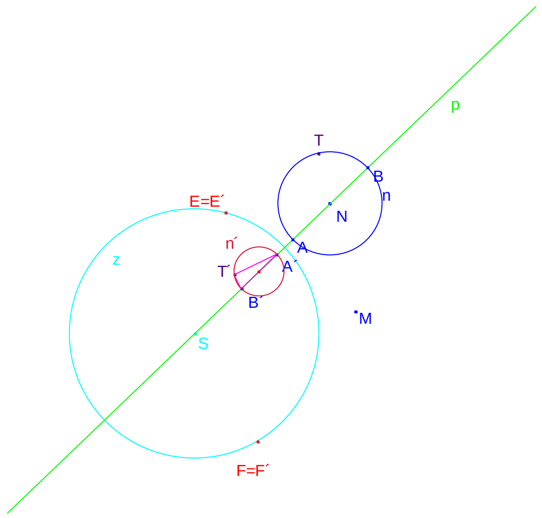
b. $S \in m; S \notin n$

<u>Rozbor konstrukce:</u>

Protože kružnice *m* prochází středem *S* řídící kružnice, bude jejím obrazem přímka *m´*.



Obrazem kružnice *n* bude, podle věty o obrazu kružnice neprocházející středem kruhové inverze, kružnice *n´*.

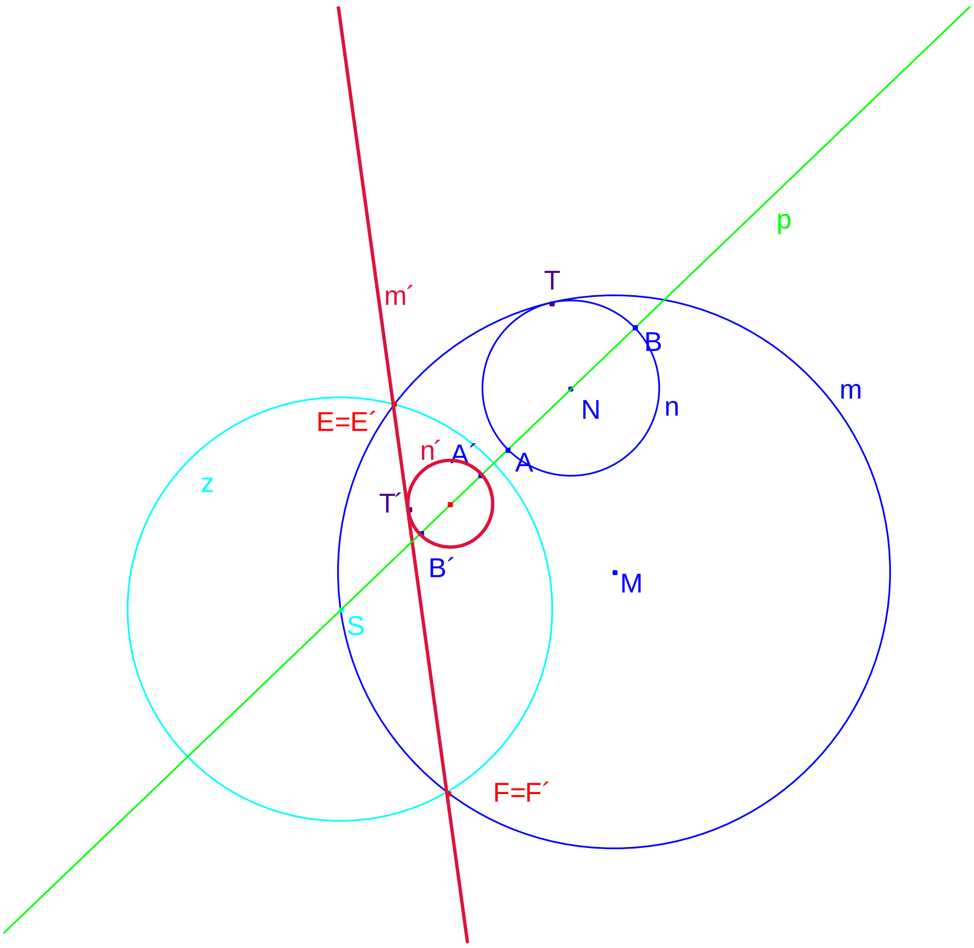


Obraz bodu dotyku kružnic *m*, *n* musí být bodem kružnice *n´* a přímky *m´*

<u>Popis konstrukce:</u>

1. $E = E', F = F'; E, E', F, F' \in m \cap z$
2. $m'; E', F' \in m'$
3. $p; S, N \in p$
4. $A, B; A, B \in p$
5. $A', B'; A \xrightarrow{z} A', B \xrightarrow{z} B'$
6. $T'; T \xrightarrow{z} T'$
7. $n'; n'$

Konstrukce:



c. $S \notin m, S \notin n$

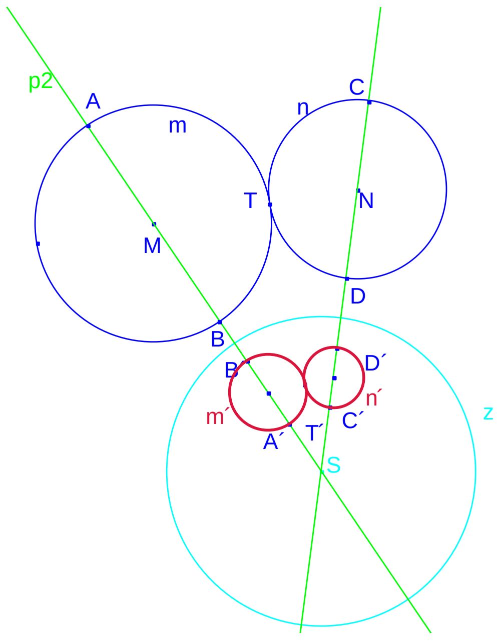
Rozbor konstrukce:

Protože žádná z kružnic neprochází středem *S* řídící kružnice kruhové inverze, budou obrazy *m´*, *n´* kružnic *m*, *n* kružnice.

Popis konstrukce:

1. $p_1; N, S \in p_1$
2. $p_2; M, S \in p_2$
3. $A, B; A, B \in p_2 \cap m$
4. $C, D; C, D \in p_1 \cap n$
5. $A', B'; A \xrightarrow{z} A', B \xrightarrow{z} B'$
6. $T'; T \xrightarrow{z} T'$
7. m', n'

Konstrukce:



Příklad 2

Jsou dány kružnice m(M,r_1), $n(N,r_2)$ a bod B, který neleží na žádné z nich. Sestrojte všechny kružnice, Které procházejí bodem B a dotýkají se kružnic m, n. Jedná se o Apolloniovu úlohu typu *Bkk*.

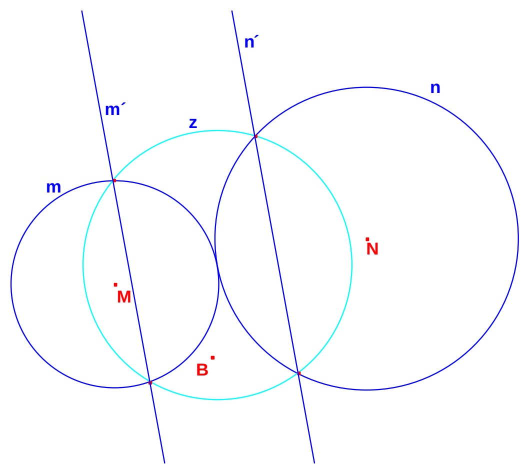
<u>Rozbor příkladu:</u>

Předpokládejme, že existuje kružnice x, která splňuje podmínky úlohy. Libovolná kruhová inverze převádí kružnice m, n a x v obrazy $m´$, $n´$ a $x´$ tak, že $x´$ se dotýká $m´$, $n´$. Přitom podle polohy středu S řídící kružnice kruhové inverze mohou být některé z útvarů $m´$, $n´$, $x´$ přímky. Kruhová inverze tak umožňuje převést úlohu o dotyku kružnic na jednodušší úlohu o dotyku přímek a kružnic.

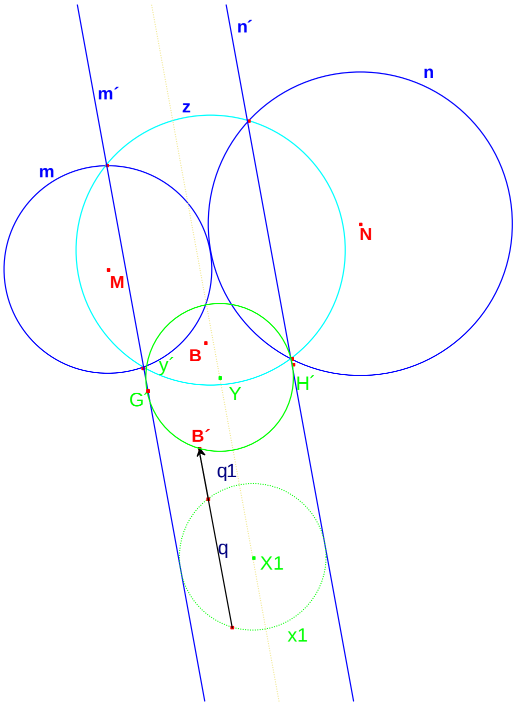
a. Kružnice *m*, *n* se dotýkají v bodě *T*.

<u>Rozbor konstrukce:</u>

Kružnice m, n se dotýkají v bodě T. Kruhová inverze převádí kružnice m, n do rovnoběžných přímek m´, n´ a bod B do bodu B´. Úloha je převedena na úlohu *Sestrojit všechny kružnice, které se dotýkají rovnoběžných přímek m´, n´ a procházející bodem B´.*



Úlohu *Sestrojit všechny kružnice, které se dotýkají rovnoběžných přímek m´, n´ a procházející bodem B´*. Tuto úlohu řešíme pomocí posunutí.



Její řešení, kružnice *x´*, *y´*, převedeme kruhovou inverzí do řešení *x*, *y* původní úlohy.

<u>Postup konstrukce:</u>

1. $m';m \xrightarrow{z} m'$

2. $n';n \xrightarrow{z} n'$

3. $B';B \xrightarrow{z} B'$

4. $x_1;\ x_1\left(x_1, r_1\right)$

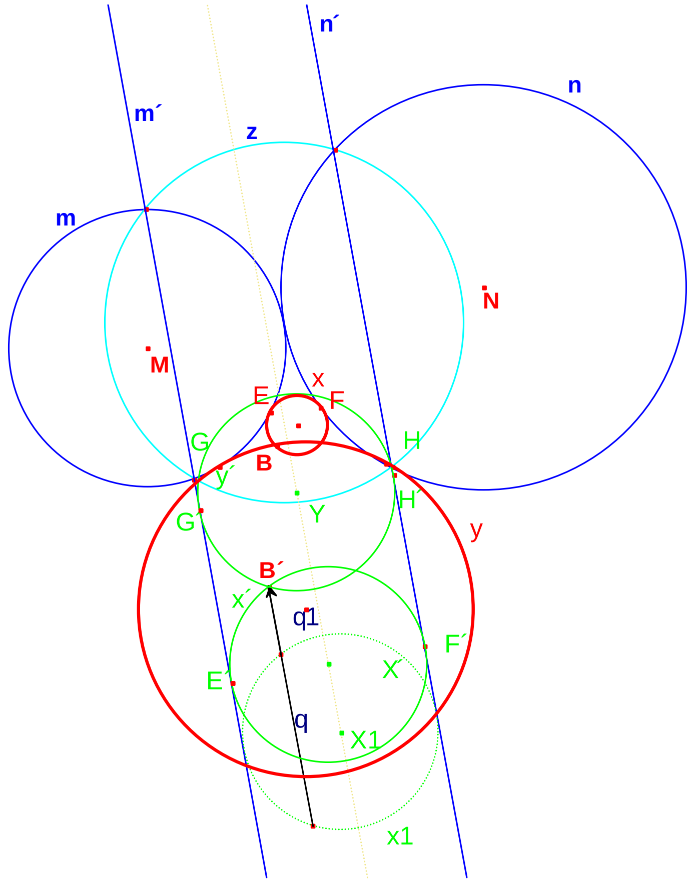
5. $x';x'$ posunutí x_1 o q_1

6. $y';y'$ posunutí x_1 o q

7. $x;x' \xrightarrow{z} x$

8. $y;y' \xrightarrow{z} y$

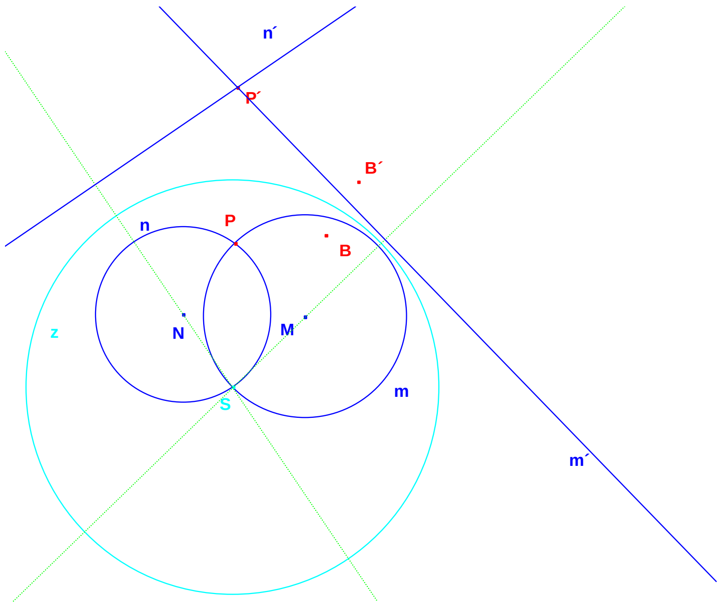
Konstrukce:



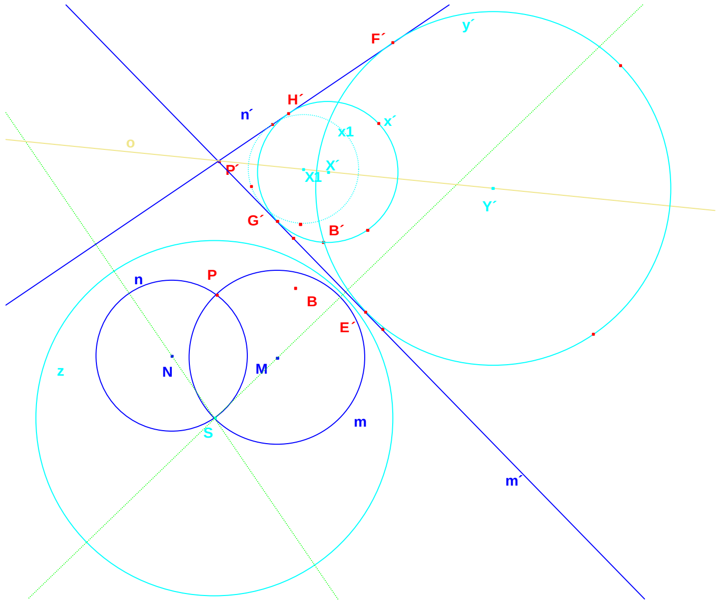
b. Kružnice *m*, *n* se protínají v bodech *P*, *S*

<u>Rozbor příkladu:</u>

Kružnice *m*, *n* se protínají v bodech *P*, *S*. Kruhová inverze s řídící kružnicí *z(S,r)* převádí kružnice *m*, *n* po řadě do přímek *m´*, *n´* a bod *B* do bodu *B´*.



Úloha je tak převedena na úlohu *Sestrojit všechny kružnice, které se dotýkají různoběžných přímek m´, n´ a prochází bodem B´.* Tuto úlohu řešíme pomocí stejnolehlosti.



Kružnice $x´$, $y´$, které se dotýkají přímek $m´$, $n´$ v bodech $E´$,$F´$,$G´$,$H´$,přejdou do hledaných řešení x, y, které se dotýkají kružnic m, n v bodech E, F, G, H.

<u>Postup konstrukce:</u>

1. $m´; m \xrightarrow{z} m´$

2. $n´; n \xrightarrow{z} n´$

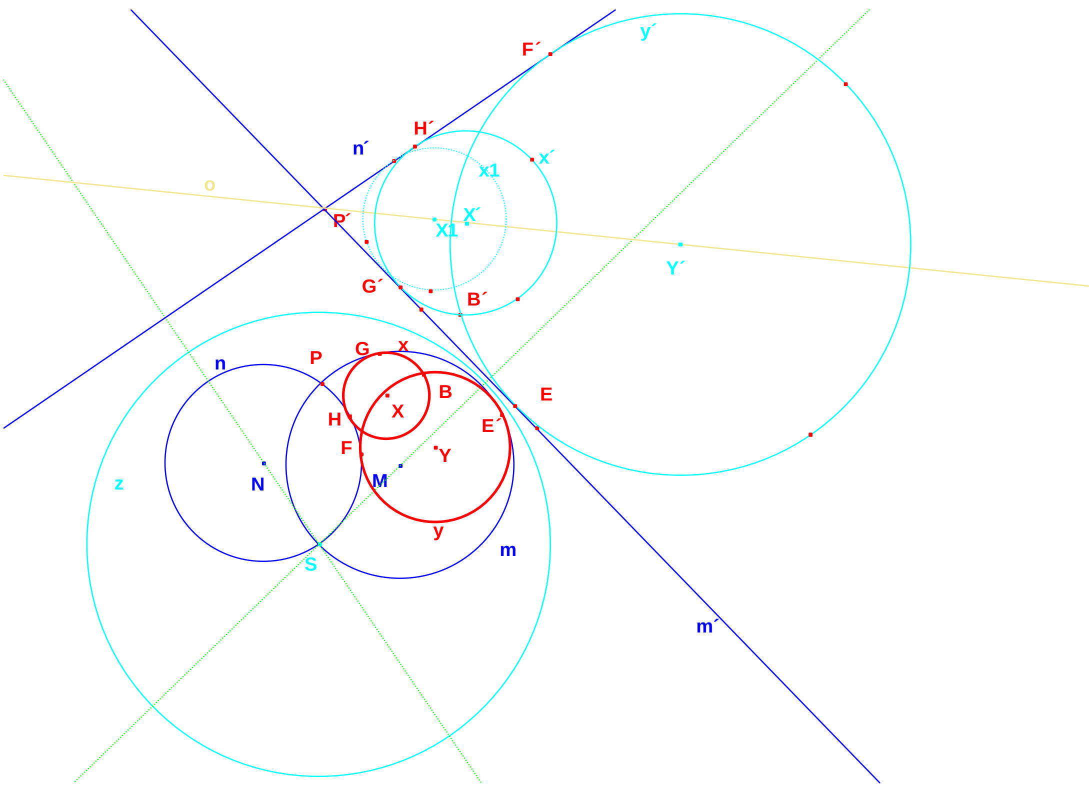
3. $x´; x´(X´, r_1´)$

4. $y´; y´(Y´, r_2´)$

5. $x; x(X, r_1)$

6. $y; y(Y, r_2)$

Konstrukce:

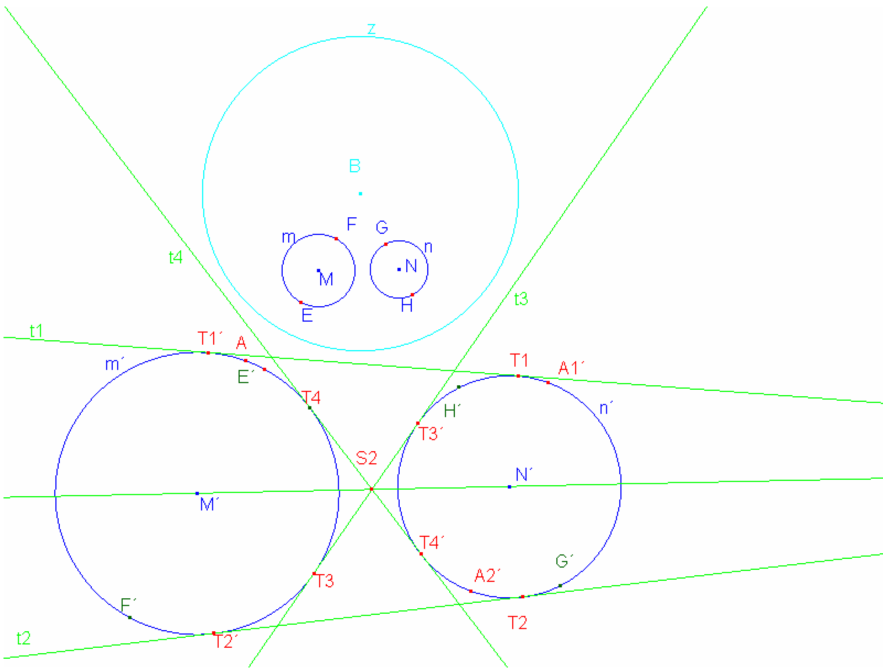


c. Kružnice *m*, *n* jsou disjunktní

<u>Rozbor příkladu:</u>

Kružnice *m*, *n* nemají společné body. V tomto případě neexistuje inverze, která by převáděla dané kružnice v přímky. Volíme-li střed řídící kružnice v bodě *B* bude obrazem hledané kružnice přímka, která se dotýká obrazů *m´*, *n´* kružnic *m*, *n*.

Kruhová inverze *z(B,r)* tak převede úlohu na úlohu Sestrojte všechny společné tečny kružnic *m´*, *n´*.



Postup konstrukce:

1. $m\acute{};m \xrightarrow{z} m\acute{}$

2. $n\acute{};n \xrightarrow{z} n\acute{}$

3. $t_1\acute{},t_2\acute{},t_3\acute{},t_4\acute{}$; společné tečny kružnic $m\acute{}$, $n\acute{}$

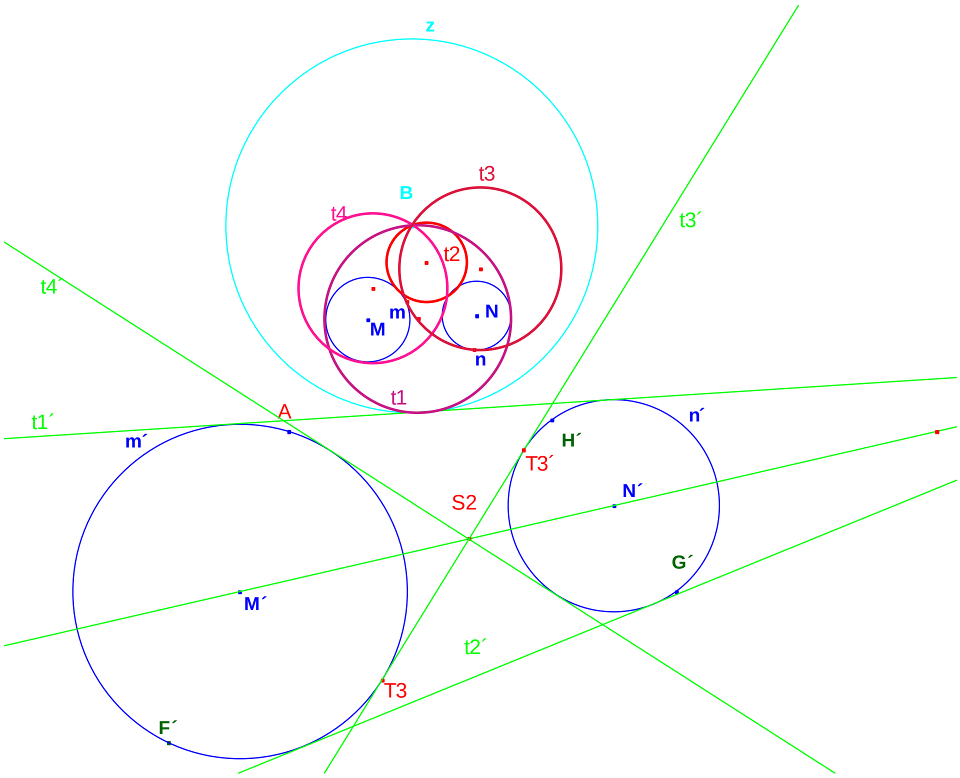
4. $t_1;t_1\acute{} \xrightarrow{\acute{z}} t_1$

5. $t_2;t_2\acute{} \xrightarrow{\acute{z}} t_2$

6. $t_3;t_3\acute{} \xrightarrow{\acute{z}} t_3$

7. $t_4;t_4\acute{} \xrightarrow{\acute{z}} t_4$

Konstrukce:

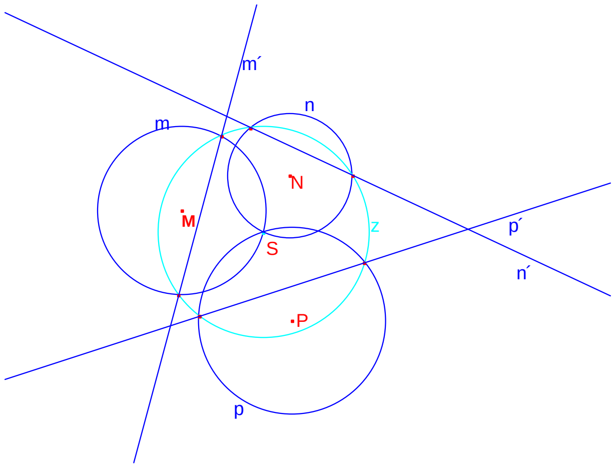


Příklad 3

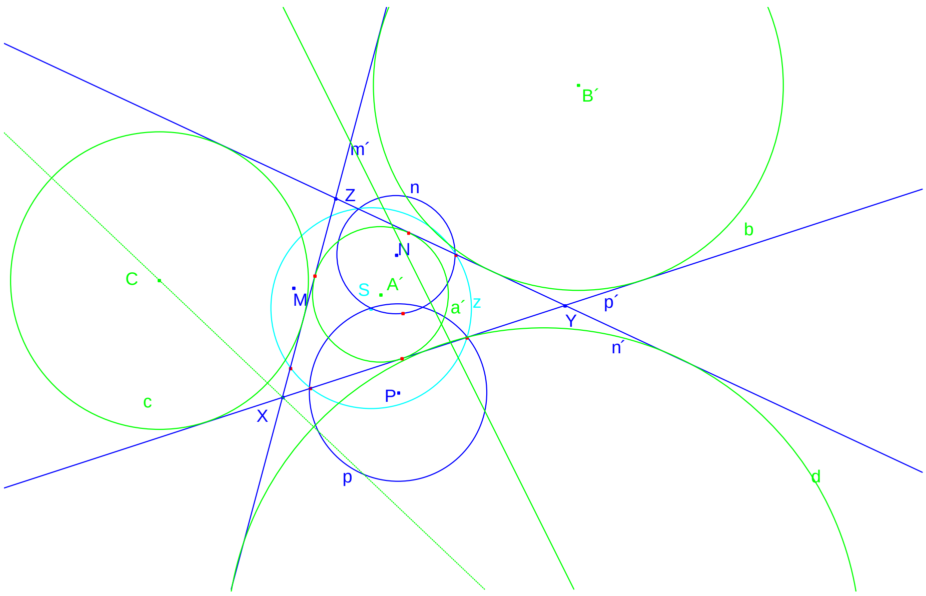
Kružnice *m*, *n*, *p* procházejí bodem *S*. Sestrojte všechny kružnice, které se jich dotýkají. Jedná se o Apolloniovu úlohu typu *kkk*.

<u>Rozbor příkladu:</u>

Kruhová inverze *z(S,r)* převádí každou z kružnic *m*, *n*, *p* do přímek.



A úlohu do úlohy *Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m´, n´, p´*.



Postup konstrukce:

1. $m';m \xrightarrow{z} m'$

2. $n';n \xrightarrow{z} n'$

3. $p';p \xrightarrow{z} p'$

4. $a';a'(A';r)$

5. $b';b'(B';r)$

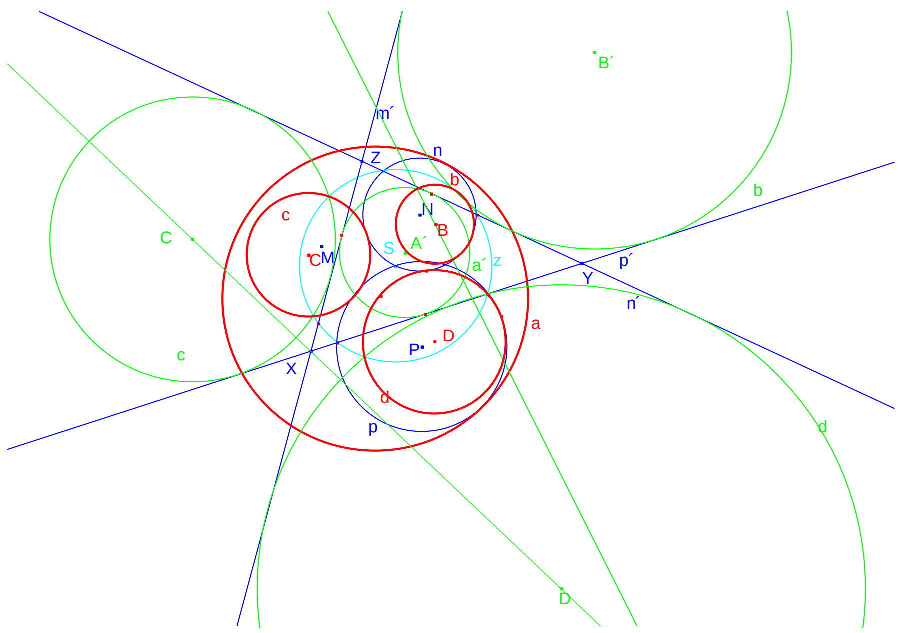
6. $c';c'(C';r)$

7. $d';d'(D';r)$

8. $a;a' \xrightarrow{z} a;b;b' \xrightarrow{z} b$

9. $c;c' \xrightarrow{z} c;\ d;d' \xrightarrow{z} d$

Konstrukce:



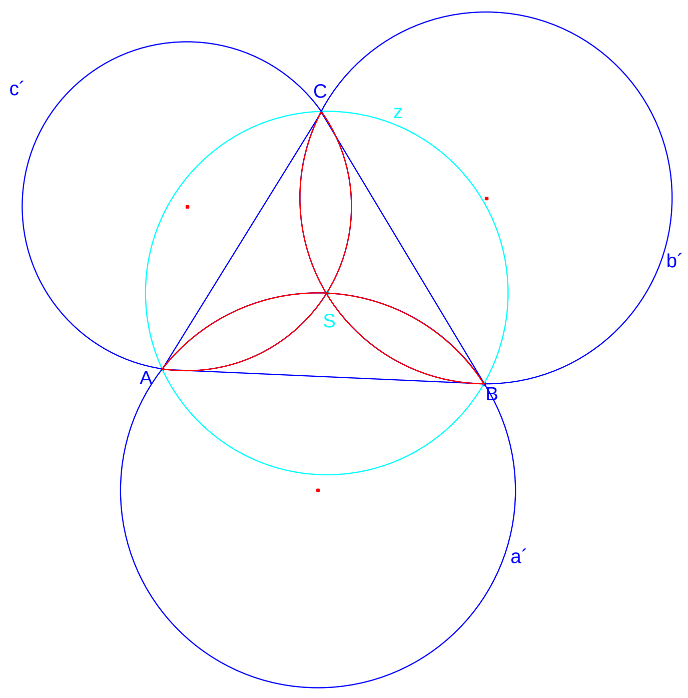
Příklad 4:

Trojúhelníku *ABC* je opsána kružnice *z(S;r)*. Sestrojte obraz trojúhelníku *ABC* v kruhové inverzi s řídící kružnicí *z*.

<u>Rozbor příkladu:</u>

Ačkoliv jsou body *A*, *B*, *C* v kruhové inverzi samodružné, není obrazem trojúhelníku *ABC* týž trojúhelník, neboť obrazy jeho stran jsou oblouky kružnic, které procházejí středem *S* řídící kružnice. Obrazem trojúhelníku je vyznačená neomezená část roviny. Bod *S* nemá obraz definován.

<u>Konstrukce:</u>

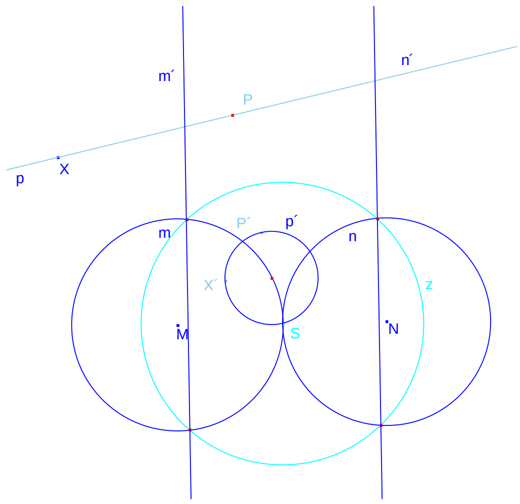


Příklad 6:

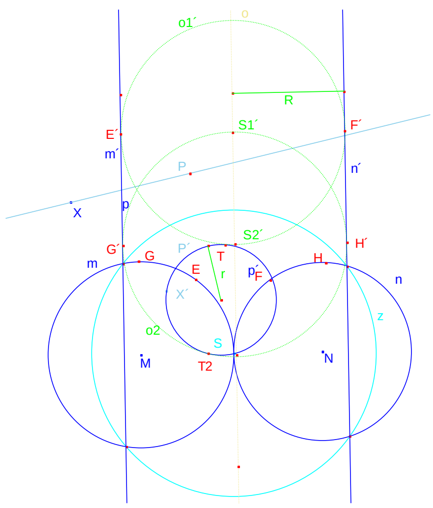
Jsou dány dvě dotýkající se kružnice *m*, *n* a přímka *p*. Sestrojte kružnici která se dotýká kružnic *m*, *n* a přímky *p*.

<u>Rozbor příkladu:</u>

Řídící kružnici *z (S;r)* zvolíme tak, aby střed *S* byl totožný s bodem dotyku kružnic. Kružnice *m*, *n* se tak v kruhové kružnici zobrazí do přímek *m´,n´* a přímka do kružnice *p´*.



Úlohu tak převedeme na úlohu *Sestrojte kružnici dotýkajících se dvou rovnoběžných přímek a kružnice p´.*



Popis konstrukce:

1. $m´; m \xrightarrow{z} m´$

2. $n´; n \xrightarrow{z} n´$

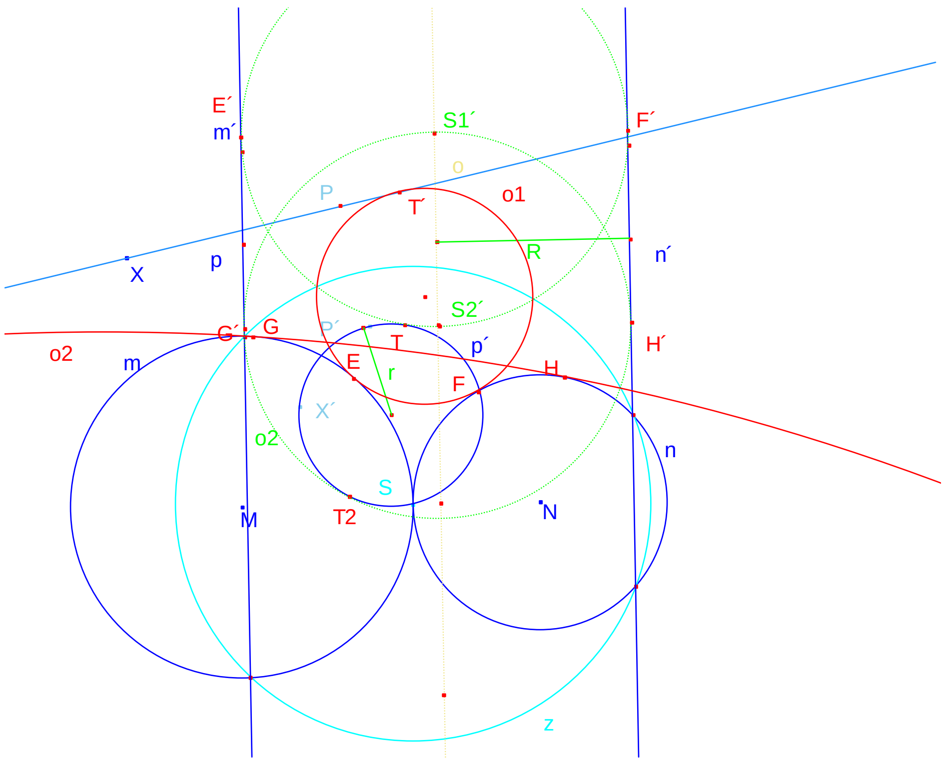
3. $p´; p \xrightarrow{z} p´$

4. $o_1´; o_2´$

5. $o_1; o_1´ \xrightarrow{z} o_1$

6. $o_2; o_2´ \xrightarrow{z} o_2$

Konstrukce:

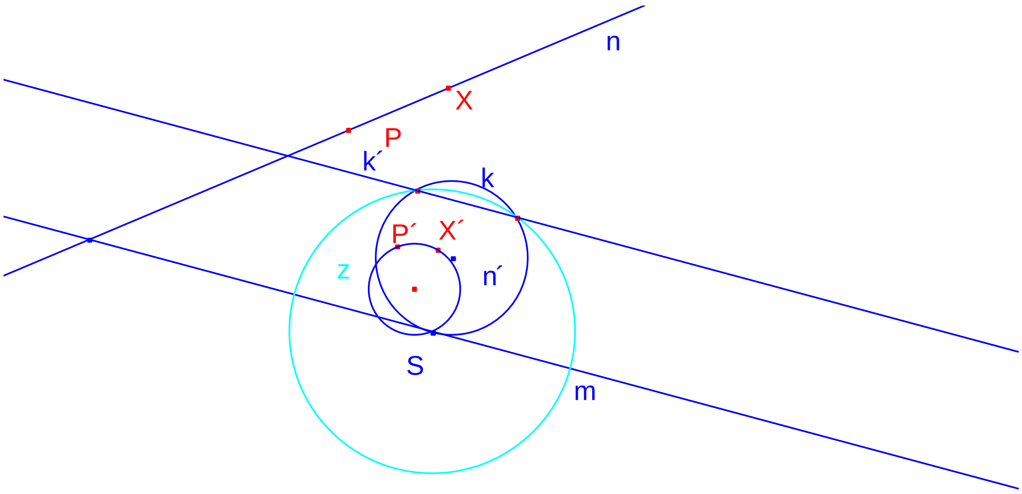


Příklad 7:

Jsou dány dvě přímky *m*, *n* a kružnice *k*, která se dotýká přímky *m* v bodě *S*. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek *m*, *n* a kružnice *k*.

<u>Rozbor příkladu:</u>

Řídící kružnici *z (S;r)* zvolíme tak, aby střed *S* byl totožný s bodem dotyku kružnice *k* a přímky *m*. Kružnice *k* se zobrazí na přímku *k´*(rovnoběžnou s p_1), přímka *m* na přímku *m´* (*m* = *m´*)a přímka *n* na kružnici *n´*.

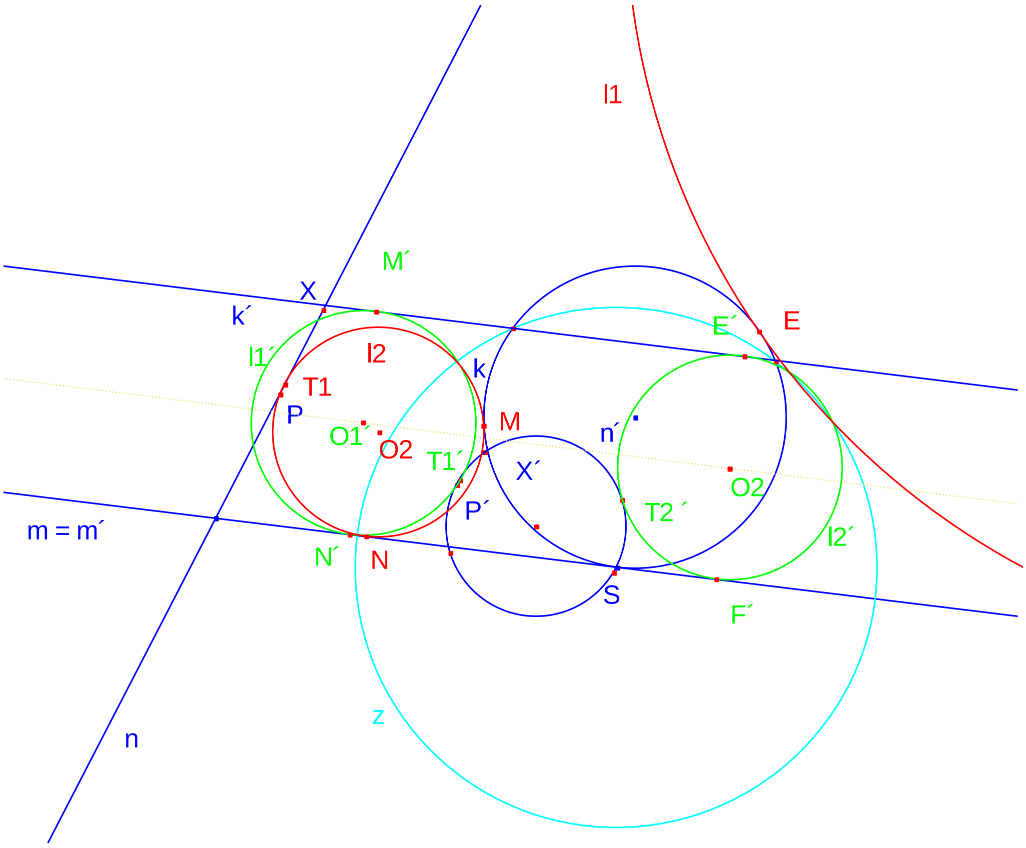


Úlohu tak převedeme na úlohu *Sestrojte kružnici dotýkajících se dvou rovnoběžných přímek a kružnice n´.*

<u>Postup konstrukce:</u>

1. $m´; m \xrightarrow{z} m´$
2. $n´; n \xrightarrow{z} n´$
3. $k´; k \xrightarrow{z} k´$
4. $l_1´; l_2´$
5. $l_1; l_1´ \xrightarrow{z} l_1$
6. $l_2; l_2´ \xrightarrow{z} l_2$

Konstrukce:



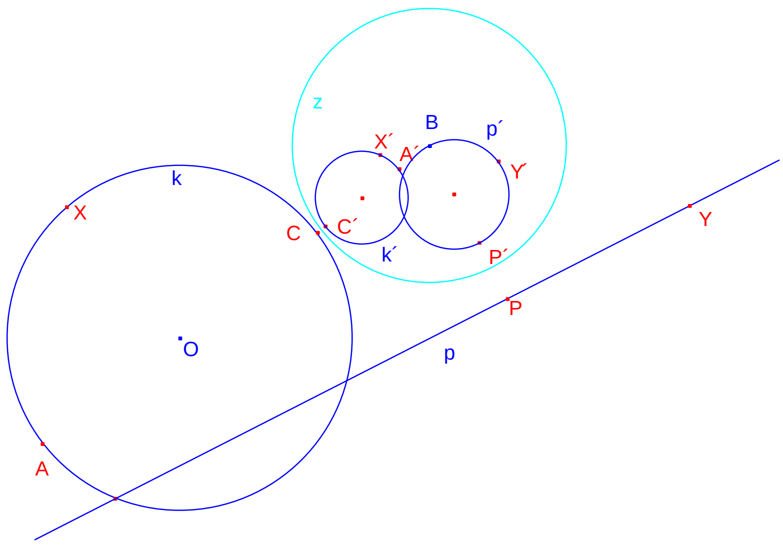
Příklad 8:

<u>Apolloniova úloha typu Bpk</u>

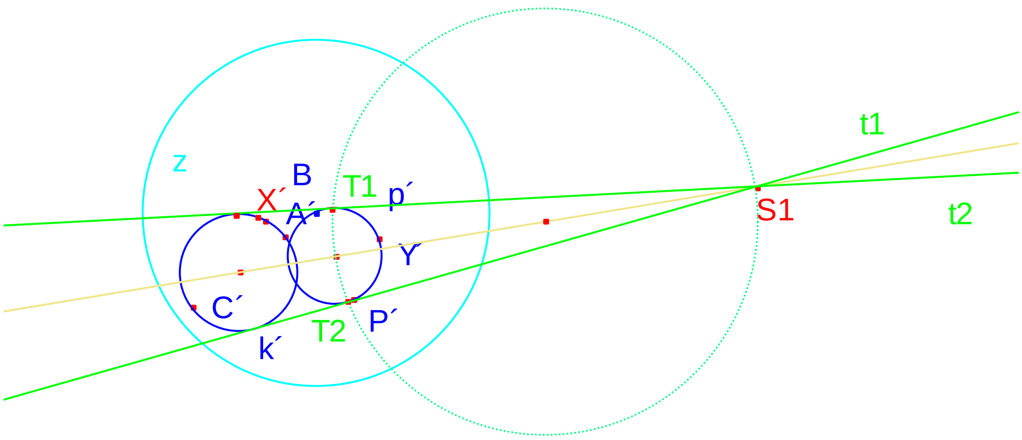
Sestrojte kružnici l, která prochází bodem B a dotýká se přímky p a kružnice k(S,r). Bod B nenáleží přímce p ani kružnici k. Přímka p je sečnou kružnice k.

<u>Rozbor příkladu:</u>

Řídící kružnici zvolíme se středem v bodě B a poloměrem libovolným. Přímka p se zobrazí na kružnici p', kružnice k se zobrazí na kružnici k' a bod B se zobrazí na nevlastní bod.

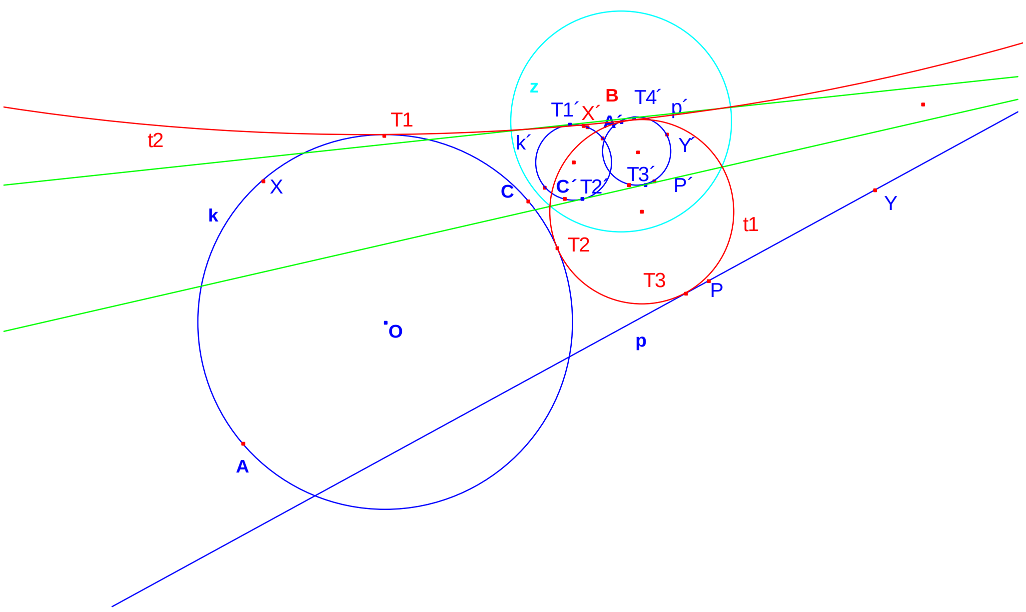


Řešíme vnitřní úlohu - nalezení společných tečen kružnic p' a k'. Společné tečny dvou kružnic.



Řešení vnitřní úlohy převedeme pomocí téže kruhové inverze na řešení úlohy původní.

<u>Konstrukce:</u>



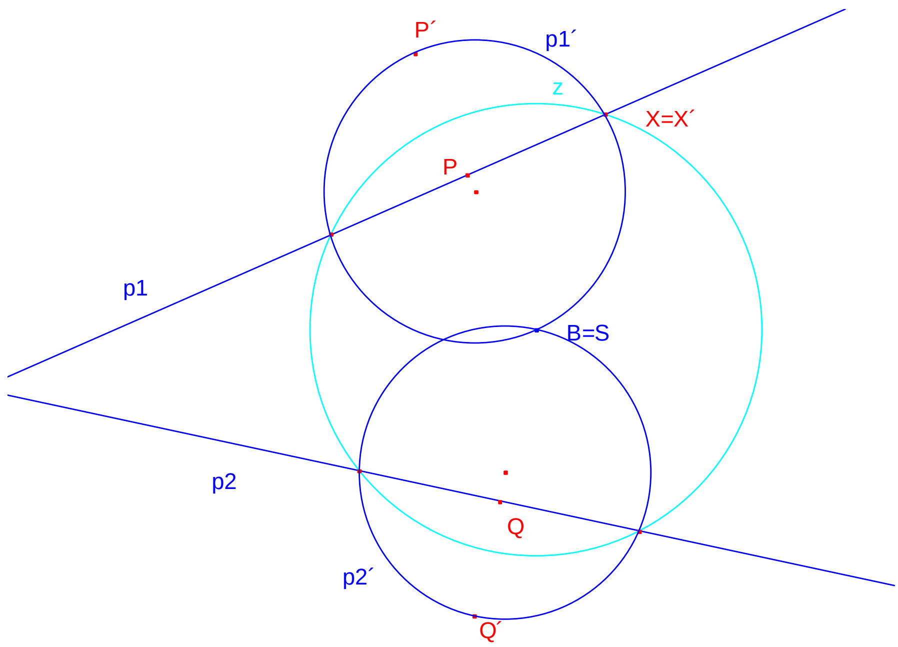
Příklad 9:

Apolloniova úloha typu Bpp

Sestrojte kružnici l, která prochází bodem B a dotýká se přímek p_1, p_2. Přímky p_1, p_2 jsou různoběžné. Bod B neleží na žádné ze zadaných přímek.

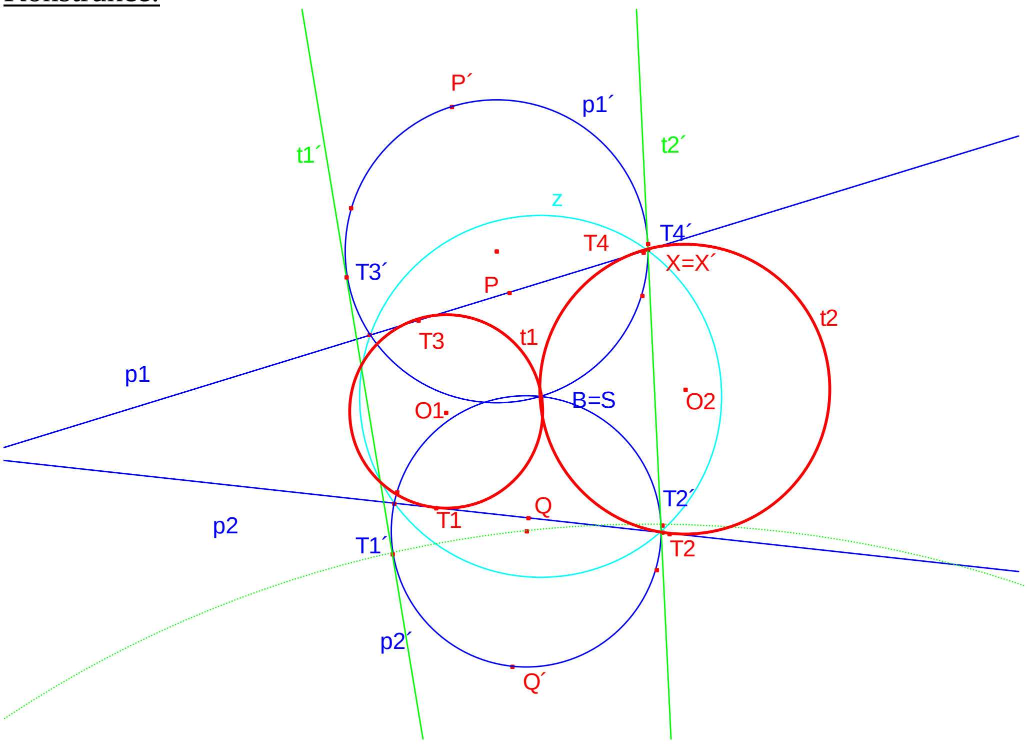
Rozbor příkladu:

Řídící kružnici zvolíme se středem v bodě B tak, aby protínala přímky p_1, p_2. Přímka p_1 se zobrazí na kružnici p'_1, přímka p_2 na kružnici p'_2 a bod B se zobrazí na nevlastní bod.



Řešíme vnitřní úlohu - nalezení společných tečen kružnic p'_1 a p'_2. Společné tečny dvou kružnic Řešení vnitřní úlohy převedeme pomocí téže kruhové inverze na řešení úlohy původní.

Konstrukce:



Příklad 10:

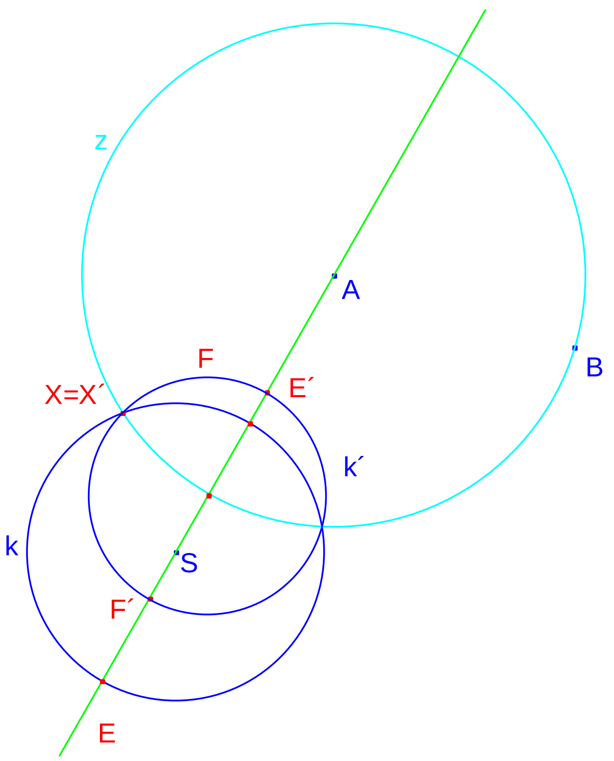
Apolloniova úloha typu BBk

Zadání polohové úlohy

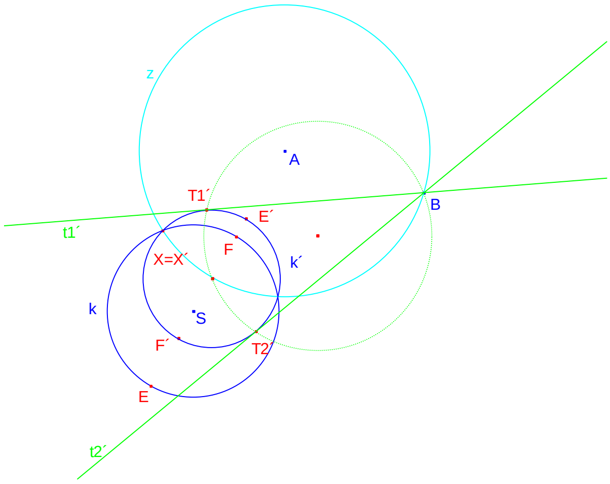
Sestrojte kružnici l, která prochází body A, B a dotýká se kružnice k(S,r). Žádný z bodů A, B neleží na kružnici k. Oba body leží vně.

Rozbor příkladu:

Řídící kružnici zvolíme se středem v bodě A a poloměrem AB. Kružnice k se zobrazí na kružnici k', bod A se zobrazí na nevlastní bod a bod B je samodružný.

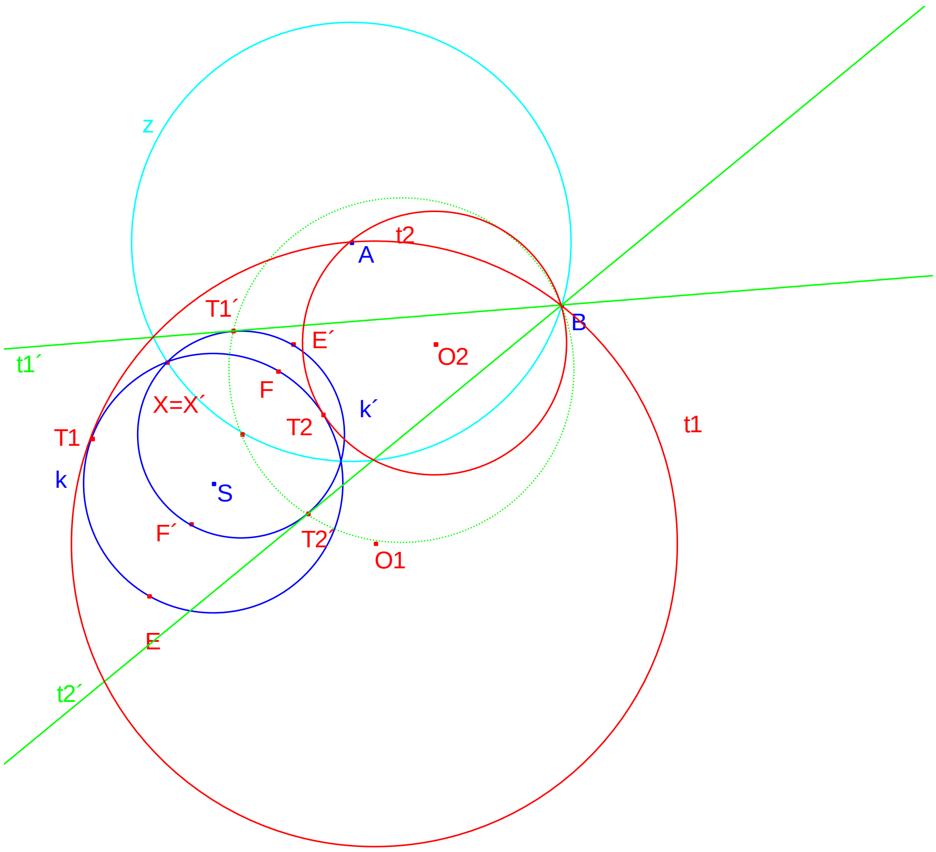


Řešíme vnitřní úlohu - nalezení tečen z bodu B ke kružnici k'.



Řešení vnitřní úlohy převedeme pomocí téže kruhové inverze na řešení úlohy původní.

<u>Konstrukce:</u>



Příklad 11:

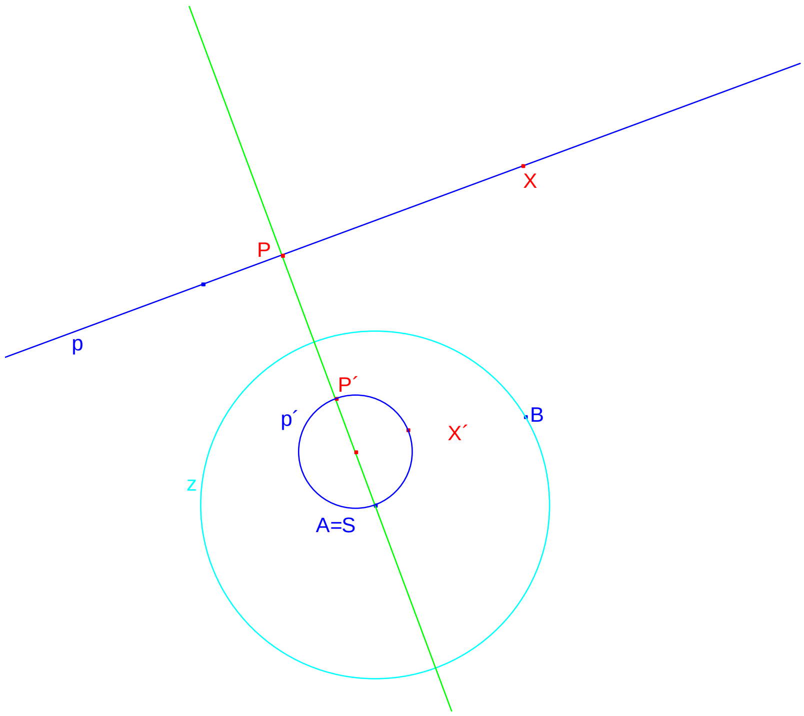
Apolloniova úloha typu BBp

Zadání polohové úlohy

Sestrojte kružnici l, která prochází body A, B a dotýká se přímky p. Žádný ze zadaných bodů A, B neleží na přímce p. Body A, B leží ve stejné polorovině a přímka AB je různoběžná s přímkou p.

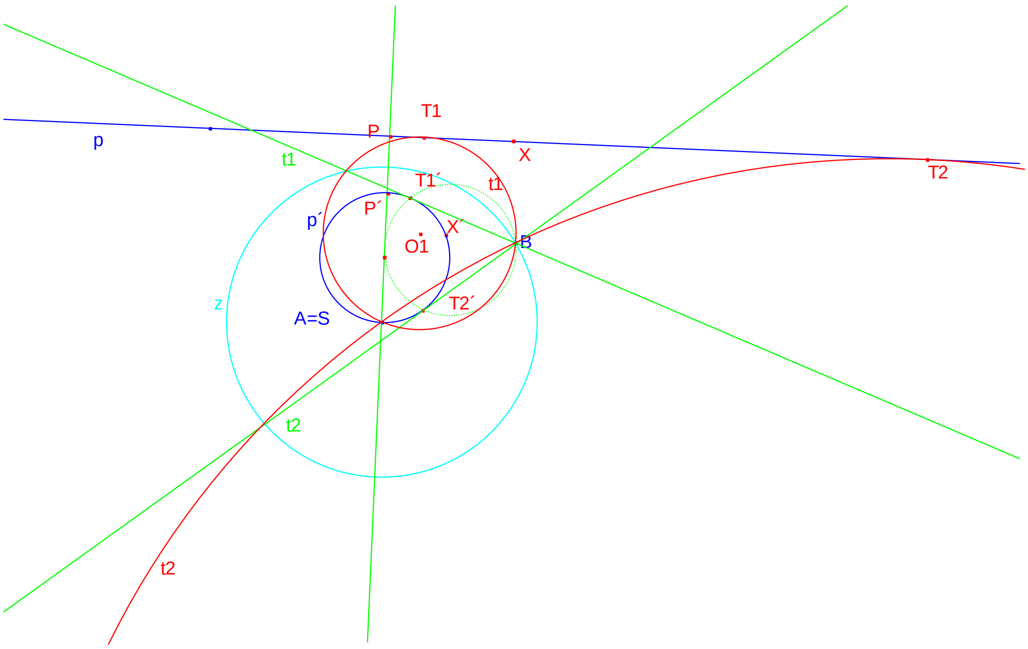
Rozbor příkladu:

Základní kružnici zvolíme se středem v bodě A a poloměrem AB. Přímka p se zobrazí na kružnici p', bod A se zobrazí na nevlastní bod a bod B je samodružný.



Řešíme vnitřní úlohu - nalezení tečen z bodu B ke kružnici p'. Řešení vnitřní úlohy převedeme pomocí téže kruhové inverze na řešení úlohy původní.

Konstrukce:



7. Apolloniovy úlohy

Apolloniova úloha má své jméno podle řeckého geometra **Apollonia z Pergy** (262 – 200 př. n. l.), který se touto úlohou zabýval a řešil ji v díle "**O dotycích**". Jedná se o dvousvazkovou práci, která se bohužel nedochovala. Nemůžeme tudíž s určitostí říci, jakým způsobem Apollonios úlohu řešil. Podle francouzského matematika Vièta podal Apollonios obecné řešení dilatací (poměr přírůstku délky úsečky k původní délce úsečky), to Vièt uvedl ve svém díle „Apollonius Gallus..." z roku 1600 n. l..

Apollonios formuloval úlohu nejprve pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) a přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru). Originální znění se nezachovalo. Je však známa reprodukce úlohy v díle "Mathématikai synagogai" (důležitý pramen historie matematiky obsahující výňatky ze ztracených matematických spisů) řeckého matematika Pappose Alexandrijského (3. stol. n. l.). Paposs uvádí úlohu v následujícím znění "*Nechť jsou dány tři předměty, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se narýsovat kruh, který prochází každým z daných bodů (jsou-li dány jen body) a dotýká se daných přímek či kruhů.*".

Apolloniova úloha je konstrukční úloha, ve které hledáme kružnici, která vyhovuje třem podmínkám. Každá podmínka říká buď, že se hledaná kružnice dotýká dané přímky či kružnice, anebo že prochází daným bodem. Různou kombinací těchto tří podmínek dostáváme celou sadu úloh. Některé Apolloniovy úlohy, které by bylo velmi obtížné řešit, lze šikovně řešit užitím kruhové inverze. Nebo používáme Apolloniovy úlohy při řešení úloh na kruhovou inverzi, kdy při vhodném zvolení řídící kružnice převedeme úlohu na Apolloniovu úlohu.

8. ZÁVĚR

Předložená diplomová práce nepřestavuje uzavřenou problematiku. Jejím úkolem je, aby spíše upozornila na možnosti využití programu Cabri geometrie.

Snažila jsem se poukázat na grafické znázornění, které mnohdy způsobují širší porozumění problému. U žáků je takový typ výuky oblíbenější, což je pravděpodobně způsobeno tím, že mohou zapojit vlastní iniciativu a nápady.

Praktické využití této diplomové práce může být ve školách nebo pro ty, kteří by se chtěli s tímto programem blíže seznámit a pracovat s ním. Některé příklady mohou sloužit pro zpestření výuky geometrie.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Sekanina, Milan: Geometrie II. Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1980. ISBN 56-03-22 /1.

[2] Kuřina, František: 10 geometrických transformací. Prométheus, 2002.

[3] http://www.pf.jcu.cz/cabri

[4] http://www.pachner.cz/html/tipy/cabri-geometrie.htm