JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

TRANSLACE A ROTACE VE STŘEDOŠKOLSKÉ GEOMETRII

(Diplomová práce)

Vypracovala: Martina Šťávová

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Datum odevzdání: duben 2007

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích dne 27. IV . 2007

…………………………………….

Děkuji panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytoval.

Anotace

Název:	Translace a rotace ve středoškolské geometrii
	Diplomová práce 2007, České Budějovice
Vypracoval:	Martina Šťávová
Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Klíčová slova:	didaktika matematiky, planimetrie, konstrukční úlohy, Cabri geometrie

Práce se zabývá výukou tématu posunutí a otočení s podporou Cabri geometrie. Obsahuje jednak interaktivní soubory v příloze na CD, jednak metodický návod k jejich užití. Je i vhodnou pomůckou k samostatnému studiu.

Annotation

Title:	The translation and rotation in the secondary school geometry Graduation thesis 2007, České Budějovice
Work up:	Martina Šťávová
Master of Graduation thesis:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Keywords:	mathematics didactics, plane geometry, constructive problems, Cabri Geométre II.

The theme of this graduation thesis is the translation and rotation in the secondary school geometry using the Cabri Geométre II. It includes interactive files on CD and methodical instruction how to use them. So it represents a useful tool for self-education.

Obsah

1. Úvod

Cílem této práce je vytvořit vhodné interaktivní pomůcky v Cabri geometrii pro podporu výuky tématu „shodná zobrazení v rovině“. Toto téma je v celém svém rozsahu dosti objemné. Na středních školách jsou probírána čtyři shodná zobrazení (osová a středová souměrnost, otočení a posunutí). Tématicky moje práce navazuje na diplomovou práci Martina Schwarzbacha - Shodná zobrazení a dynamické geometrie. Já jsem propracovala metodiku témat posunutí a otočení.

První část práce je věnována krátkému pojednání o shodných zobrazeních, obsahuje definice a základní vlastnosti shodných zobrazení. Některé definice jsou doplněny pro názornost obrázky vytvořenými v Cabri.

Stěžejní částí jsou kapitoly s konkrétními didaktickými postupy, které lze použít při výuce posunutí a otočení a řešené příklady s využitím těchto shodných zobrazení. Prezentace látky je spojena s využitím interaktivních obrázků vytvořených v Cabri geometrii. Pod každým obrázkem lze nalézt dvě ikony. Dvojitým kliknutím na první se otevře příslušný soubor s příkladem v programu Cabri geometrie II., po kliknutí na druhou ikonu se symbolem plus se otevře soubor formátovaný pro program Cabri geometrie II. plus. Příklady jsou tvořeny tak, aby byly okamžitě použitelné i pro žáky či učitele bez hlubších znalostí o ovládání programu. Obsahují ovladače, které umožňují libovolně skrývat a zobrazovat postupy a konstrukce.

Za každou teoretickou částí jsou řešené příklady, také v interaktivní podobě. Využití dynamické geometrie v řešených příkladech je velmi výhodné. Studentům umožňuje experimentování a objevování hlubších souvislostí, umožňuje i rychlé a pohotové vytváření či názorné vyvracení hypotéz. Příklady jsou určeny pro využití při individuální výuce ve třídě, pro domácí samostudium nebo pro matematické kroužky.

Závěr práce je věnován vztahům mezi shodnými zobrazeními, zejména v souvislosti s otočením a posunutím.

2. Základní poznatky

2.1 Shodná zobrazení v rovině

***Zobrazení Z** v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X´ roviny. Bod X se nazývá vzor, bod X´ jeho obraz.* [8]

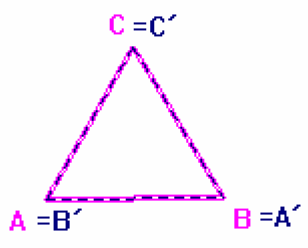
Pro označení geometrických zobrazení používáme velká písmena latinské abecedy. Zapisujeme různými způsoby, nejčastěji Z: $X \to X'$ nebo $Z(X) = X'$.

Pokud každým dvěma různým vzorům jsou přiřazeny dva různé obrazy nazýváme takové zobrazení **prosté**.

*Prosté zobrazení v rovině nazýváme **shodným zobrazením** nebo krátce shodností, právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X´, Y´ (X → X´, Y → Y´) v tomto zobrazení platí:* $|X'Y'| = |XY|$. [5]

V každém zobrazení přiřazujeme libovolnému bodu roviny X jako jeho obraz právě jeden bod X' téže roviny. Pokud body X a X' splynou, tedy $X=X'$, pak se takový bod nazývá **samodružný bod** v daném zobrazení. Zapisujeme $Z(X) = X$.

Pokud obrazem útvaru U je útvar U' který splývá s U, tedy obraz každého bodu útvaru U je opět bodem útvaru U, říkáme, že útvar U je **samodružným útvarem** daného zobrazení. Zapisujeme $Z(U) = U'=U$. Samodružný útvar nemusí však být útvarem samodružných bodů (obr. *Samodružný útvar*).



Obr. Samodružný útvar

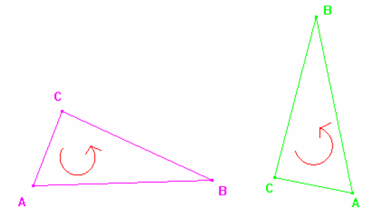
Základní vlastnosti shodných zobrazení:

- obrazem každé úsečky *AB* je úsečka *A´B´* s ní shodná
- obrazem každé polopřímky *AB* je polopřímka *A´B´*; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky
- obrazem každé přímky *AB* je přímka *A´B´*; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky
- obrazem každé poloroviny *pA* je polorovina *p´A´*; obrazy navzájem opačných polorovin jsou navzájem opačné poloroviny
- obrazem každého konvexního úhlu je *AVB* je konvexní úhel *A´V´B´* s ním shodný
- obrazem každého trojúhelníku *ABC* je trojúhelník *A´B´C´* s ním shodný
- obrazem každé kružnice *k* je kružnice *k´* s ní shodná

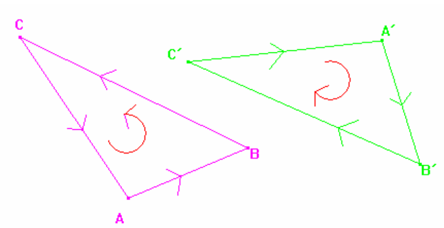
[5]

Jak vypadá shodné zobrazení můžeme ukázat na průsvitném papíru. Obkreslíme na průsvitku nějaký útvar *U* a pak průsvitku přemístíme a útvar obtáhneme - získáme útvar *U´*. Při přemísťování můžeme průsvitný papír obrátit na rubovou stranu. Výsledkem je tedy útvar *U´* - obraz shodný s útvarem *U* – vzorem. Pokud při přemisťování průsvitku obrátíme „na rub“ hovoříme o **nepřímé shodnosti** nebo ji necháme „lícem“, pak se jedná o **shodnost přímou**.

Přesněji lze přímou a nepřímou shodnost popsat v příkladu se shodnými trojúhelníky. Máme dva různé shodné trojúhelníky *ABC* a *A´B´C´*. „Obíháme“ jejich hranice od bodu *A* přes bod *B* k bodu *C* a znovu k *A*, a od bodu *A´* přes *B´* k *C´*. Pokud postupujeme ve vzoru i obrazu ve stejném smyslu otáčení, říkáme, že trojúhelníky *ABC* a *A´B´C´* jsou **přímo shodné trojúhelníky** (obr. Přímá shodnost). Pokud postupujeme v nestejných (opačných) smyslech otáčení, pak jsou trojúhelníky *ABC* a *A´B´C´* **nepřímo shodné trojúhelníky (**obr. Nepřímá shodnost).



Obr. Přímá shodnost



Obr. Nepřímá shodnost

***Přímá shodnost** je každá taková shodnost, ve které libovolný trojúhelník ABC a jeho obraz, trojúhelník A´B´C´, jsou přímo shodné trojúhelníky.*

***Nepřímá shodnost** je každá taková shodnost, v níž libovolný trojúhelník ABC a jeho obraz, trojúhelník A´B´C´, jsou nepřímo shodné trojúhelníky.* [5]

Mezi přímé shodnosti patří identita, středová souměrnost, posunutí (translace), otočení (rotace). Nepřímá shodnost je osová souměrnost.

***Identické zobrazení** (identita) je takové zobrazení, jež každému bodu X dané roviny přiřazuje jako obraz týž bod X´=X.* [5]

*Je dána přímka o. **Osová souměrnost** s osou o je shodné zobrazení O(o), které přiřazuje:*

1. *každému bodu $X \notin o$ bod X´ tak, že přímka XX´ je kolmá k přímce o a střed úsečky XX´ leží na přímce o,*
2. *každému bodu $Y \in o$ bod Y´ = Y.*

Skutečnost, že v osové souměrnosti s osou o se bod X (vzor) zobrazí na bod X´ (obraz), zapisujeme O(o): $X \rightarrow X´$. [8]

*Je dán bod S. **Středová souměrnost** se středem S je shodné zobrazení S(S), které přiřazuje:*

3. *každému bodu $X \neq S$ bod X´ tak, že bod S je středem úsečky XX´,*
4. *bodu S bod S´ = S.*

Skutečnost, že ve středové souměrnosti se středem S se bod X (vzor) zobrazí na bod X´ (obraz), zapisujeme S(S): $X \rightarrow X´$. [8]

Posunutím a otočením a jejich základními vlastnostmi se zabýváme podrobně v následujících kapitolách.

2. Základní poznatky

2.2 Konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy jsou geometrické úlohy v nichž máme sestrojit geometrický útvar daných vlastností. Abychom mohli útvar sestrojit, musí být zadané některé z jeho prvků a to v dostatečném počtu tak, aby úloha byla jednoznačně určená a připouštěla konečný počet řešení. Jednotlivé prvky musí být na sobě nezávislé.

Konstrukční úlohy vždy zaujímaly důležité místo v geometrii, a to zejména protože:

- poskytují krásné motivační úlohy, které podněcují zvědavost žáků a vedou je k samostatnému objevování zákonitostí;
- ukazují žákovi jasný cíl – potřeba sestrojit! – na rozdíl od vět a důkazů, jejichž význam a smysl bývá žákům často nejasný;
- jsou přirozeným mostem, po kterém mohou předcházející manuální zkušenosti žáka přejít do jeho geometrické poznatkové struktury na straně druhé;
- ukazují, jak je možno teoretické poznatky zužitkovat v praxi a tím jednak
- přispívají k interiorizaci pojmů a vět a jednak
- rozvíjejí schopnost didaktického vidění vztahu teorie a praxe;
- jsou vhodným testovacím prostředkem pomocí kterého může učitel diagnostikovat kvalitu neformálních znalostí žáka

[1]

Při řešení jednoduchých i složitějších úloh zachováváme následující 4 kroky: rozbor úlohy, konstrukce, zkouška (důkaz konstrukce), diskuze.

Rozbor úlohy je vlastně analýza úlohy. Předpokládáme, že úloha je již vyřešena, načrtneme si obrázek, kde je hledaný útvar již sestrojený. Vyznačíme barevně prvky, které jsou známy a začneme obrázek zkoumat. Hledáme, jak z daných prvků útvar sestrojit nebo převést na úlohu jednodušší nebo již dříve vyřešenou.

V samotné **konstrukci** narýsujeme podle rozboru daný útvar pomoci pravítka a kružítka.

Důkaz neboli zkouška správnosti je podstatnou částí řešení úlohy. Je to ověření, že zkonstruovaný útvar má skutečně všechny vlastnosti požadované v zadání úlohy. Často je to jen obrácení postupu použitého při rozboru.

Při **diskuzi** zjišťujeme, za jakých podmínek lze útvar sestrojit a kolik různých řešení bude úloha mít v závislosti na parametrech úlohy.

Konstrukční úlohy můžeme obecně rozdělit na **polohové** a **nepolohové**. V polohových úlohách je určeno umístění důležitých bodů nebo směry jiných prvků a tím je daná i poloha výsledného útvaru. U nepolohových úloh je poloha daných prvků volitelná. Umístěním některého zadaného prvku převedeme nepolohovou úlohu na polohovou, tzv. ji lokalizujeme.

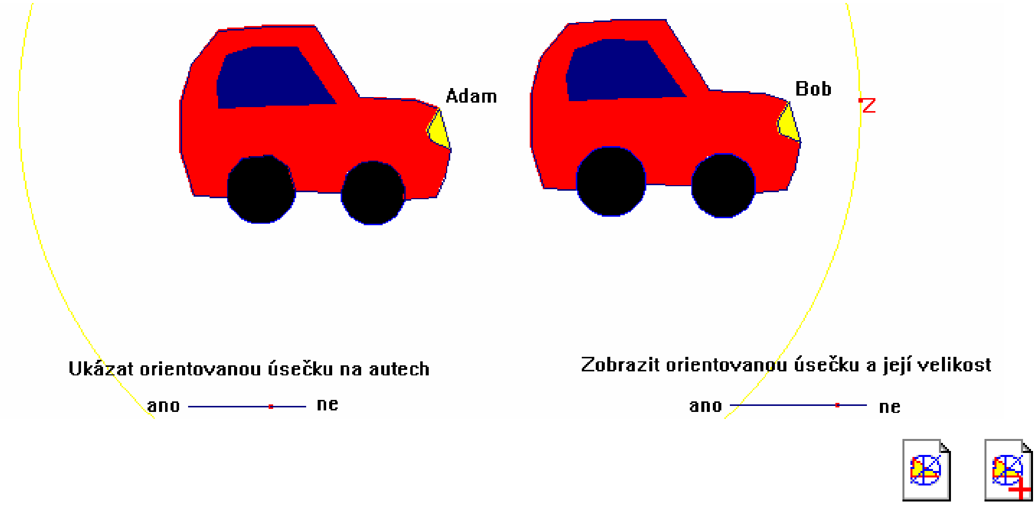
Počtem řešení polohové úlohy se rozumí počet všech nalezených a sestrojených geometrických útvarů, které splňují dané podmínky úlohy bez ohledu na to, zda tyto útvary jsou, anebo nejsou shodné. Počet řešení nepolohové úlohy se stanoví úvahou o shodnosti výsledných útvarů polohové úlohy, určíme počet tříd navzájem shodných útvarů, jež mají nepolohové vlastnosti.

3. Posunutí

3.1 Základní poznatky

Pojem posunutí obvykle pro studenty není neznámý. Již ze základu slova je patrné, jak takové zobrazení bude vypadat a žáci znají posuvný pohyb z hodiny fyziky. Je však třeba přesně definovat jak se vzor a obraz chovají.

Úloha posunutí 1: *Vzdálenost a směr*



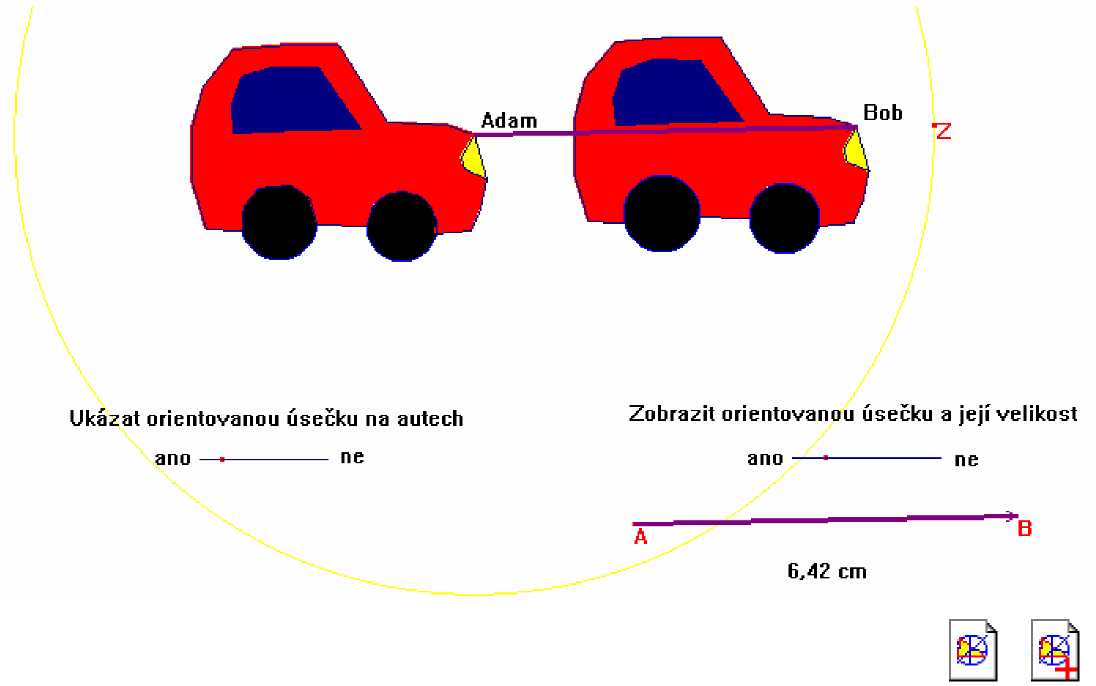
Obr. Posunutí 1.0

Na obrázku *Posunutí 1.0* je možné pohybovat černým bodem *B* - „Bob“ nahoře na předním světle směrem doprava nebo doleva. Položíme žákům otázku: „Jakým směrem popojelo auto Bob od auta Adam? Jakou vzdálenost auto Bob od Adama ujelo?“

Auto Adam je umístěno pevně, můžeme pohybovat pouze autem Bob. Směr je tedy vždy od Adama k Bobovi. Žáci si mohou spojit body Adam a Bob úsečkou pro lepší představu jak se auto pohybuje. Stejně tak mohou spojit jiné různé dva odpovídající si body, např. pravý dolní roh aut nebo levý horní roh aut. Je však třeba dát pozor, aby vždy spojili skutečně odpovídající si body, jinak směr bude špatný. Vzdálenost jakou auto ujelo zjistí jednoduše pomocí nabídky Cabri

„*Vzdálenost a délka*“. Stačí aktivovat dva odpovídající si body např. opět přední světla a program změří jejich vzdálenost.

Řešení si žáci zkontrolují pomocí ovladačů. Posuneme-li bod na úsečce „Ukázat orientovanou úsečku na autech“ na ano, zobrazí se orientovaná úsečka. Stejně tak velikost zjistíme, posuneme-li bod na druhé úsečce na ano (obr. *Posunutí 1.1*).



Obr. Posunutí 1.1

Na obrázku je bod *Z* a žlutá kružnice. Uchopením kružnice lze měnit délku posunutí, aniž by se měnil směr. Směr měníme pohybem bodu *Z* po kružnici, délka posunutí je však zachována.

Žáci pohybují bodem *B*, žlutou kružnicí nebo bodem *Z* a pozorují jak lze měnit směr a velikost. Soubor můžeme využít k definici pojmu orientovaná úsečka a její velikost. Z obrázku je vidět, že se pohybuje vždy auto Bob od auta Adam. Adam je počáteční bod a Bob koncový. Takové úsečky, u kterých rozlišujeme koncový a počáteční bod nazýváme **orientované úsečky**.

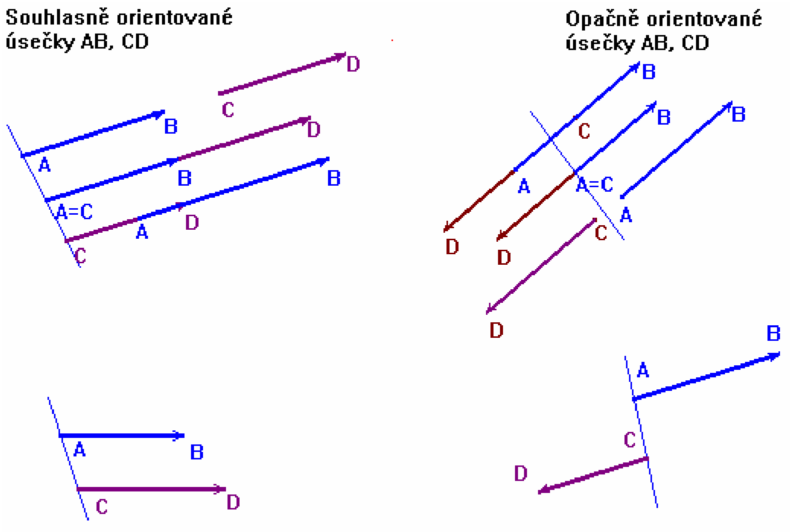
<u>*Definice:*</u>

Orientovaná úsečka *je úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je tzv.* ***počáteční bod****; druhý krajní bod je jejím* **koncovým bodem**. *Orientovanou úsečku* *s počátečním bodem A a koncovým bodem B značíme* $\overrightarrow{AB}$*. Graficky znázorňujeme orientovanou úsečku jako šipku z počátečního do koncového bodu.*

Délka (velikost) orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ *je délka úsečky AB. Značíme* $|AB|$. [8]

Rozdíl mezi souhlasně a opačně orientovanými úsečkami je na obrázku *Posunutí 2.0*. Po otevření v Cabri je možno pohybovat koncovými body.

Úloha posunutí 2: *Orientované úsečky*



Obr. Posunutí 2.0

<u>Definice:</u>

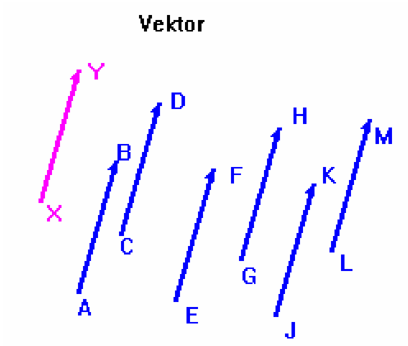
Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{CD}$ *jsou* ***souhlasně orientované*** *jestliže buď*

1. leží na téže přímce a polopřímka AB je částí polopřímky CD, příp. polopřímka CD je částí polopřímky AB, příp. obě polopřímky splynou nebo

2. leží na různých rovnoběžkách a polopřímky AB, CD leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC. [8]

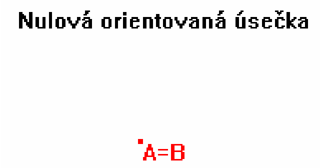
Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{CD}$ *jsou* ***opačně orientované*** *jestliže orientované úsečky* $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{DC}$ *jsou souhlasně orientované.*

Na obrázku *Posunutí 2.1* vidíme orientované úsečky stejné velikosti a směru. Je možné hýbat bodem *X* a *Y*. Množinu všech souhlasně orientovaných úseček stejné velikosti nazýváme **vektor**.



Obr. Posunutí 2.1

Mezi orientované úsečky řadíme i nulovou **orientovanou úsečku**. Ta vznikne tehdy, pokud počáteční a koncový bod splynou (obr. *Posunutí 2.2*).

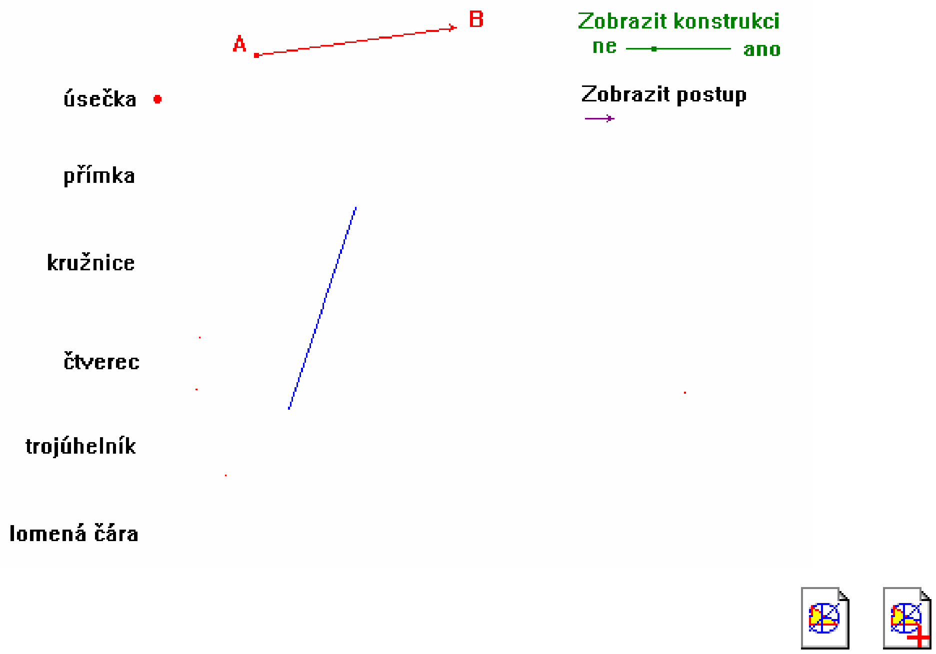


Obr. Posunutí 2.2

Vrátíme-li se k původnímu obrázku aut, můžeme si s žáky říci, co je potřeba, abychom mohli nějaký objekt zobrazit v posunutí. Na obrázku jsme posunovali auto Bob nějakým směrem od auta Adam o určitou délku. Je tedy třeba znát **směr** a **velikost.** Směr udává orientovaná úsečka, velikost posunutí je délka této (neorientované) úsečky.

Po otevření souboru posunuti3 v Carbi vidíme na obrazovce obrázek *Posunutí 3.0*. Umožňuje žákům objevovat, jak se v posunutí zobrazují různé objekty. Příklad je ilustrační, takže využívá nabídky Cabri „*Posunutí*“. Směr a velikost je dána orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$.

Úloha posunutí 3: *Pomocí stopy objektu nalezněte obraz v posunutí daném orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{AB}$.

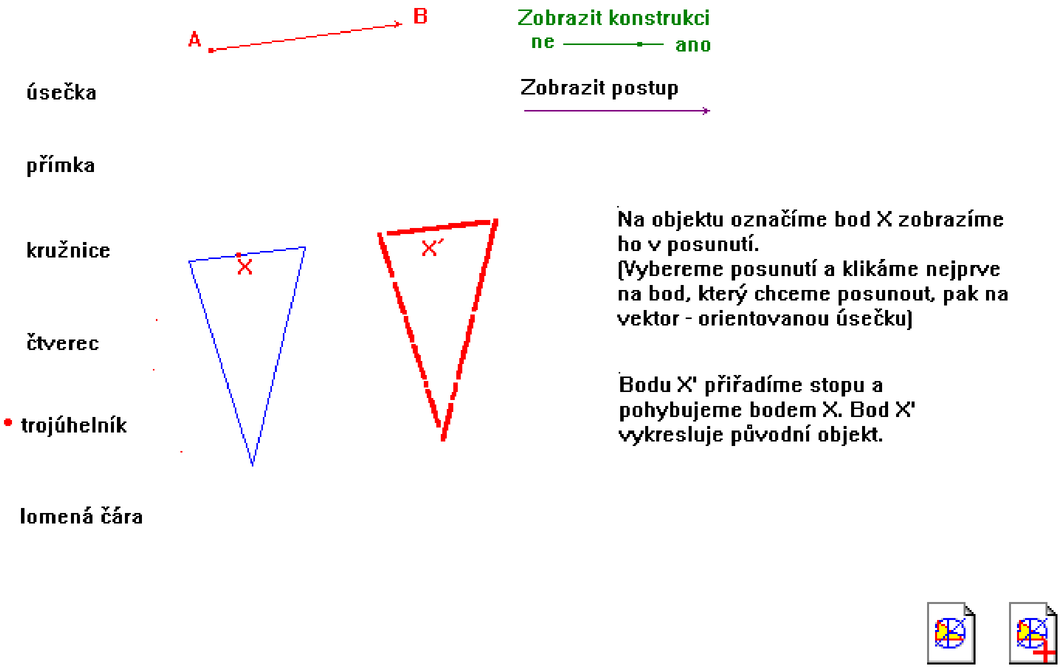


Obr. Posunutí 3.0

Posouváním červeného bodu lze volit různé objekty – úsečku, přímku, kružnici, čtverec, trojúhelník a lomenou čáru.

Žáci mají za úkol pomocí stopy objektu nalézt obraz v posunutí. Zvolí si libovolný bod *X* na objektu. V nabídce Cabri vyberou položku „*Posunutí*“ a aktivují kliknutím myši bod *X* a poté orientovanou úsečku. S případnou nápovědou sestrojí obraz *X*‘ bodu *X*. Aktivací bodu *X*‘ při zvolené nabídce „*Stopu ano/ne*“ a následným pohybem bodu *X* způsobí, že bod *X*‘ svojí stopou vykresluje posunutý obraz objektu (obr. *Posunutí 3.1*).

Žáci si mohou zobrazit postup podle kterého naleznou obraz bodu *X* a nebo rovnou řešení, kdy pak zadají pouze stopu bodu *X*‘.



Obr. Posunutí 3.1

Lze měnit velikost a směr posunutí přemístěním bodů úsečky $\overrightarrow{AB}$. Je však nutné při těchto pokusech vypnout stopu objektu, jelikož změníme-li směr a velikost posunutí, změní se i obraz a při změně by kreslil stopu. Smazání stopy se provede stisknutím kláves CTRL+F nebo v nabídce „upravit → překreslit“.

Experimentováním s délkou a směrem posunutí žáci rychle pochopí, že obraz je vždy stejný jako vzor. Posunutí patří mezi shodné zobrazení. Pokud bod *B* na orientované úsečce $\overrightarrow{AB}$ posuneme přesně na bod *A*, vznikne nulová orientovaná úsečka a objekt se zobrazí sám na sebe.

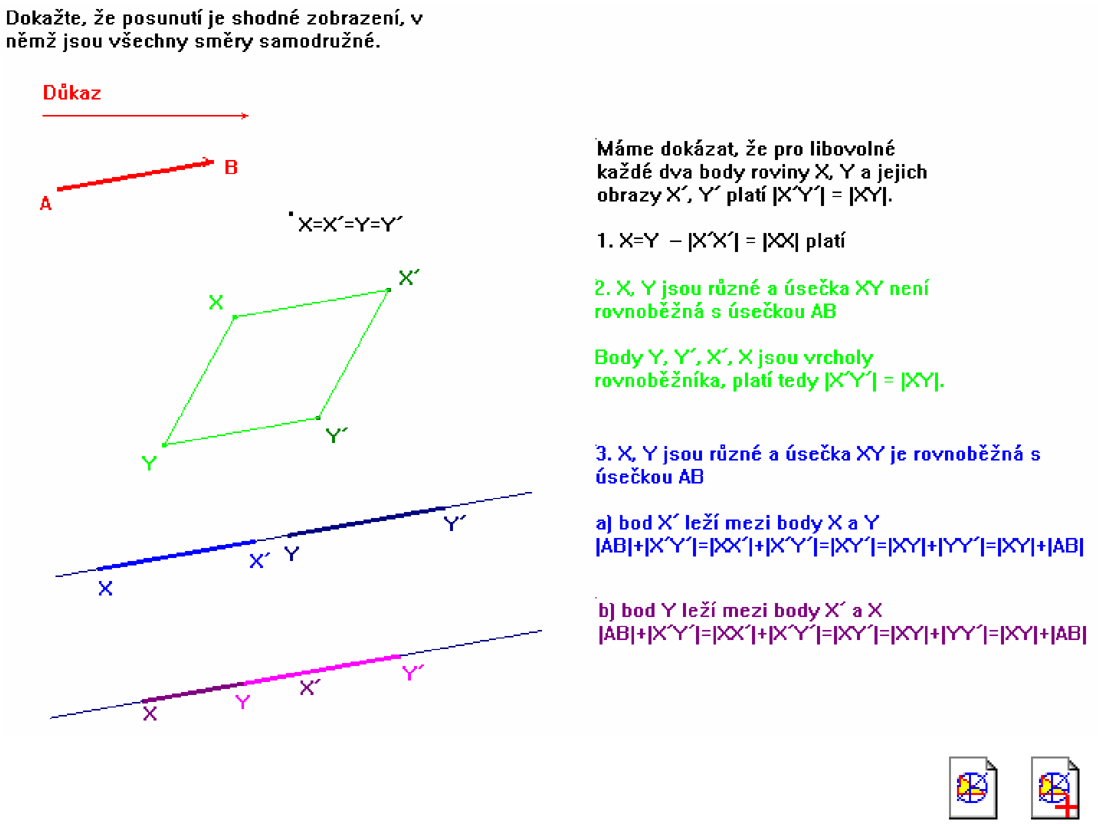
Společně s žáky vyslovíme definici posunutí.

<u>*Definice:*</u>

Je dána orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. ***Posunutí*** *neboli translace je shodné zobrazení* $T_{\overrightarrow{AB}}$, *které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky* $\overrightarrow{XX'}$ *a* $\overrightarrow{AB}$ *mají stejnou délku a jsou souhlasně orientovány.* [8]

Věta 1: *Dokažte, že posunutí je shodné zobrazení, v němž jsou všechny směry samodružné.*

Podle definice shodných zobrazení chceme dokázat, že pro libovolné každé dva body roviny X, Y a jejich obrazy X', Y' v posunutí daném orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ platí $|X'Y'| = |XY|$.



Obr. Posunutí jako shodnost

Na obrázku *Posunutí jako shodnost* vidíme, že musíme rozlišovat tři případy:

1. $X=Y$
2. X, Y jsou různé a úsečka XY není rovnoběžná s úsečkou AB
3. X, Y jsou různé a úsečka XY je rovnoběžná s úsečkou AB
   a) bod X' leží mezi body X a Y
   b) bod Y leží mezi body X' a X

Pro úplnost je třeba dokázat platnost vztahu $|X'Y'| = |XY|$ ještě pro dvě situace, které nastanou, když má orientovaná úsečka $\overrightarrow{XY}$ opačný směr jak orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Důkazy jsou analogické.

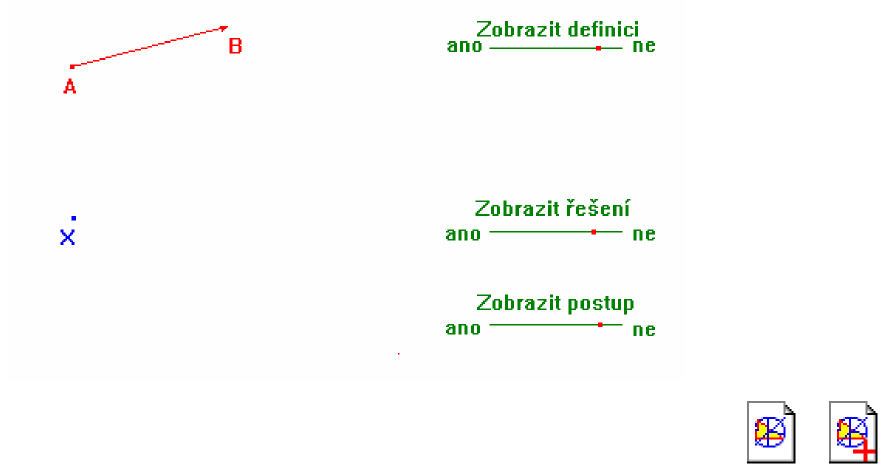
Dokázali jsme, že posunutí je shodné zobrazení. Platí tedy pro ně všechny základní vlastnosti shodných zobrazení (viz kapitola Shodné zobrazení – str.9).

V následující řadě úloh si žáci procvičí zobrazování různých objektů podle definice. Úlohy by měli řešit stejnou metodou jako pomocí pravítka a kružítka na papíře, ne využitím nabídky Cabri „*Posunutí*“. V Cabri je možno skrýt na liště některé ikony, tedy například i možnost „*Posunutí*“.

Po otevření souboru v Cabri geometrii se nabízí pomoc v podobě zobrazení definice a zobrazení postupu díky ovladačům „Zobrazit definici“, „Zobrazit řešení“ a „Zobrazit postup“. Pokud posuneme červený bod do polohy ano, nápověda se zobrazí, pokud je bod nastaven do polohy ne, zůstane skryta.

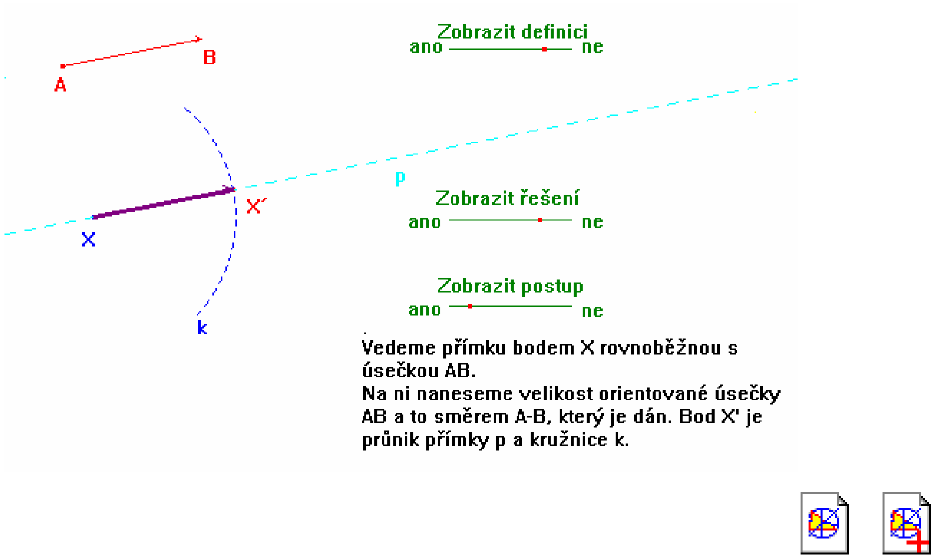
První nejjednodušší úloha je nalezení obrazu bodu v daném posunutí (obr. *Posunutí 4.0*).

Úloha posunutí 4: *Pomocí definice posunutí nalezněte obraz bodu X v posunutí daném orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{AB}$.



Obr. Posunutí 4.0

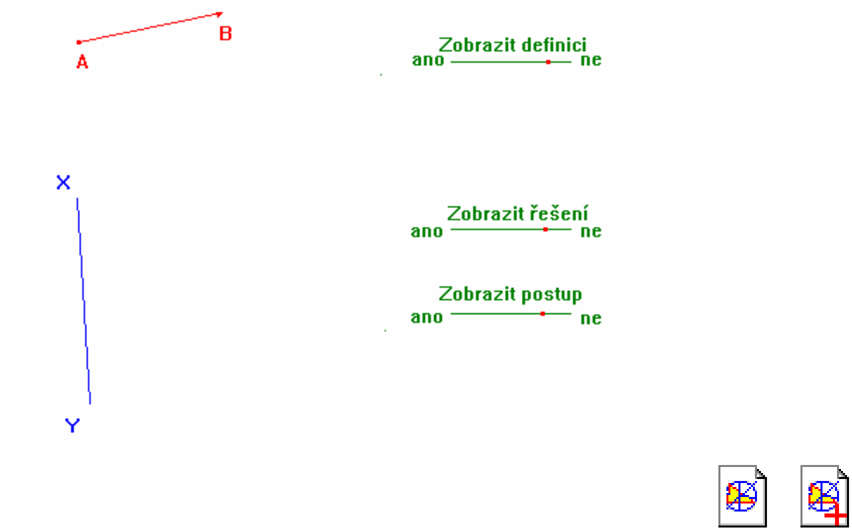
Žák má možnost samostatně úlohu vypracovat a správnost zkontrolovat pomocí ovladače. Pokud si ještě dokonale definici neosvojí, nabízí se možnost „Zobrazit definici“. Poslední ovladač je návod, jak při konstrukci postupovat v Cabri i při rýsování na papíře (obr. *Posunutí 4.1*).



Obr. Posunutí 4.1

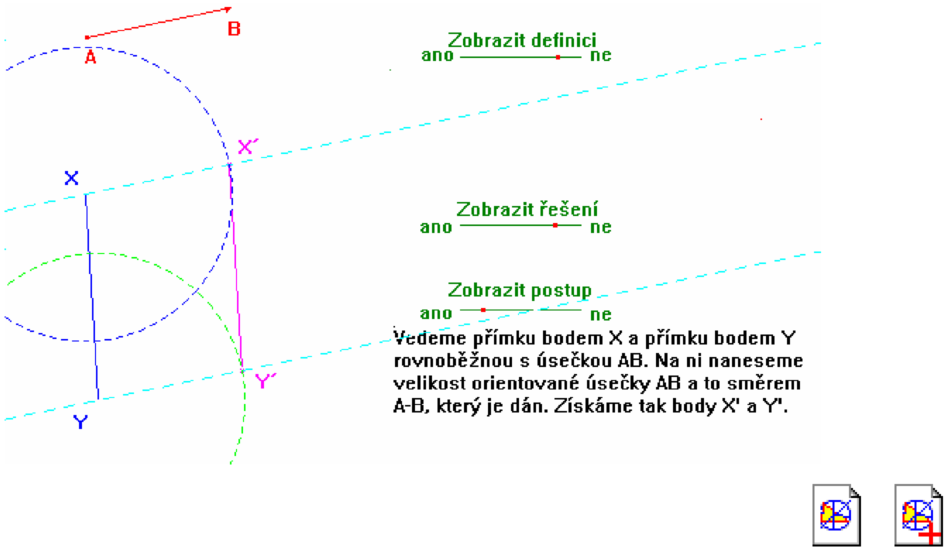
Po zvládnutí úlohy „nalezněte obraz bodu“ by úloha s úsečkou neměla představovat větší problém. Žáci si musí uvědomit, že úsečka je dána dvěma různými body; k nalezení obrazu tedy stačí najít obrazy jejích krajních bodů a ty potom spojit.

Úloha posunutí 5: *Pomocí definice posunutí a věty1 nalezněte obraz úsečky XY v posunutí daném orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{AB}$ *(obr. Posunutí 5.0).*



Obr. Posunutí 5.0

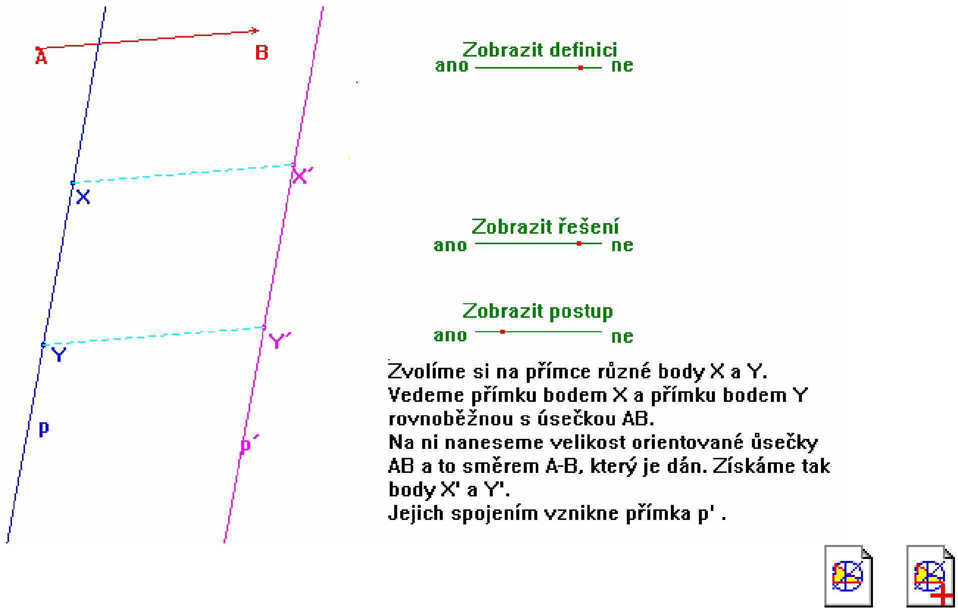
Po otevření v Cabri se opět nabízí možnosti využití ovladačů. Žák může opět samostatně pracovat, zobrazit si nápovědu nebo ověřit správnost řešení. Po vyřešení úlohy je možno pohybovat s body X a Y a orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$. Pozorujeme, jak se obraz mění v závislosti na změně směru a velikosti posunutí (obr. *Posunutí 5.1*) .



Obr. Posunutí 5.1

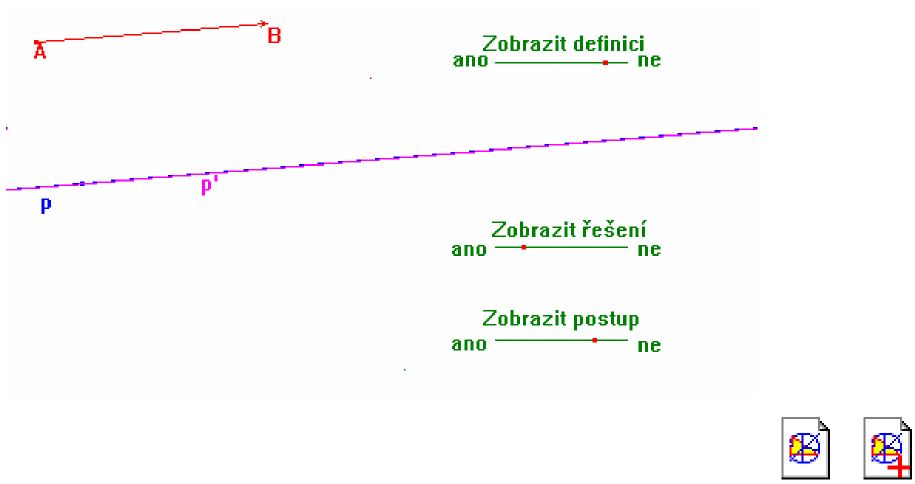
Úloha nalezení obrazu přímky v daném posunutí je podobná jako nalezení obrazu úsečky. Stačí zvolit dva libovolné různé body a ty v posunutí zobrazit. Obrazy těchto bodů pak určí přímku.

Úloha posunutí 6: *Pomocí definice posunutí a Věty 1 nalezněte obraz přímky p v posunutí daném orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{AB}$ *(obr. Posunutí 6.0).*



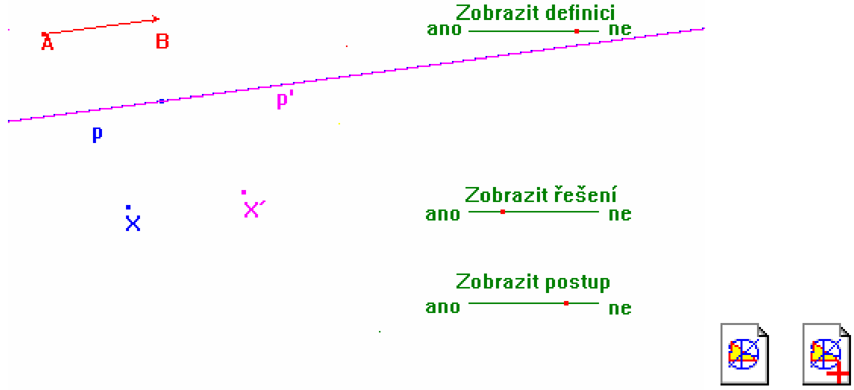
Obr. Posunutí 6.0

Při experimentování s různými polohami přímky lze objevit zajímavou věc: pokud je přímka rovnoběžná se směrem posunutí, zobrazí se sama na sebe (obr. *Posunutí 6.1*). Jak se nazývají útvary, které se zobrazí samy na sebe? Připomeneme-li si definici z předchozí kapitoly (2.1 - Shodná zobrazení v rovině) víme, že takové útvary nazýváme **samodružné útvary** daného zobrazení.



Obr. Posunutí 6.1

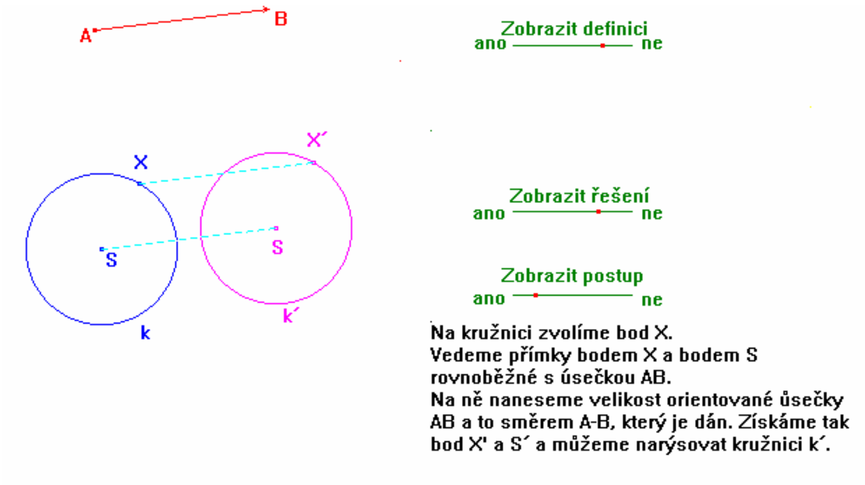
Existují nějaké další útvary, které jsou v posunutí samodružné? Jak se zobrazí polorovina nebo část roviny omezená rovnoběžnými přímkami? Na obr. *Posunutí 6.2* vidíme, že polorovina *pX* se zobrazí na polorovinu *p´X´*, tedy sama na sebe, pokud je její hraniční přímka rovnoběžná se směrem posunutí. Stejně tak například pás roviny se zobrazí sám na sebe, pokud budou jeho hraniční přímky rovnoběžně se směrem posunutí.



Obr. Posunutí 6.2

Když si uvědomíme, že posunutí je shodné zobrazení a platí tedy pro ně vlastnosti ze strany 9, můžeme úlohy typu „nalezněte obraz objektu v daném posunutí“ převádět na nalezení obrazu skupiny bodů, které daný objekt jednoznačně určí. Např. kružnice – je určena středem a bodem, který na ní leží. Stačí tedy zobrazit střed S a libovolný bod X ležící na kružnici. Obraz dané kružnice pak sestrojíme jako kružnici se středem $S´$ procházející bodem $X´$ (obr. *Posunutí 7.0*).

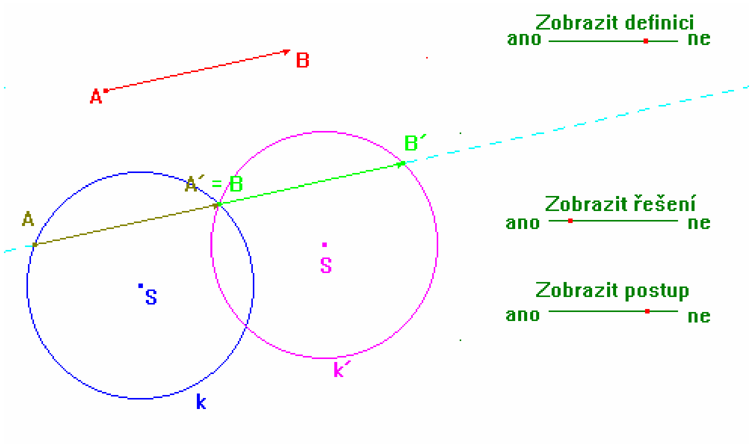
Úloha posunutí 7: *Pomocí definice posunutí nalezněte obraz kružnice k v posunutí daném orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{AB}$.



Obr. Posunutí 7.0

Při hledání obrazu kružnice postupují žáci individuálně, mohou využít nápovědy nebo si zkontrolovat výsledek pomocí ovladačů.

Pří experimentování s kružnicí může nastat situace, kdy se obraz kružnice protíná se svým vzorem. Průsečíky však nejsou samodružné body! Žáci si musí uvědomit, kde se nachází obrazy bodu A a bodu B. Průsečík kružnice k s kružnicí $k´$ je bod $A´$ (obraz A) rovný bodu B (vzor) (obr. *Posunutí 7.1*).



Obr. Posunutí 7.1

Úlohy typu „nalezněte obraz objektu v daném posunutí“ jsou důležité pro pochopení daného zobrazení. Postupujeme od jednodušších útvarů – bod, úsečka – k zobrazování složitějších – kružnice, trojúhelník, mnohoúhelník, … . Žáci by si měli vytvořit správné a přesné představy o zobrazení v posunutí a jasně definovat všechny související pojmy a správně jim porozumět.

Pro vyvození jednotlivých vlastností klademe žákům otázky typu: „Co určuje jak a kam se objekt zobrazí? Co můžeme říci o obrazu a vzoru? Jsou shodné nebo se něčím liší? Zobrazují se některé body samy na sebe?“ Po zkušenostech z předchozích příkladů a dostatečném experimentování žáci snadno odpoví.

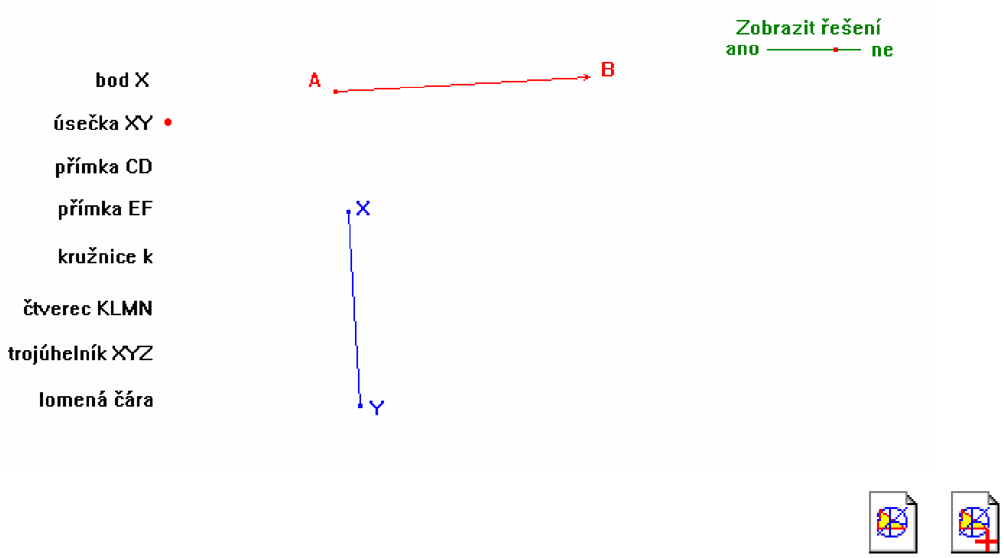
Závěrem shrneme základní vlastnosti:

- směr posunutí je určen orientovanou úsečkou a velikost posunutí je délka této (neorientované) úsečky
- obraz a vzor lze na sebe umístit tak, aby se kryly; posunutí je **shodné zobrazení**
- krytí obrazu a vzoru dosáhneme opačným (inverzním) posunutím; jde o **přímou shodnost**, neboť orientace libovolného trojúhelníku se zobrazením zachovává (viz str. 9)
- pokud se nejedná o nulovou orientovanou úsečku, posunutí **nemá samodružné body**

- přímce odpovídá přímka s ní rovnoběžná, všechny směry v posunutí jsou samodružné
- je-li zobrazovaná přímka rovnoběžná se směrem posunutí, zobrazí se sama na sebe, posunutí **má samodružné přímky**

Pro procvičení a ověření že žák zvládl zobrazování v posunutí slouží následující příklad (obr. *Posunutí 8.0*). Žáci samostatně řeší úlohu, správnost si zkontrolují pomocí ovladače „Zobrazit řešení“. Po dokonalém osvojení „klasického“ postupu je možné využívat nabídky Cabri geometrie „*Posunutí*“ a konstrukce zjednodušit a urychlit.

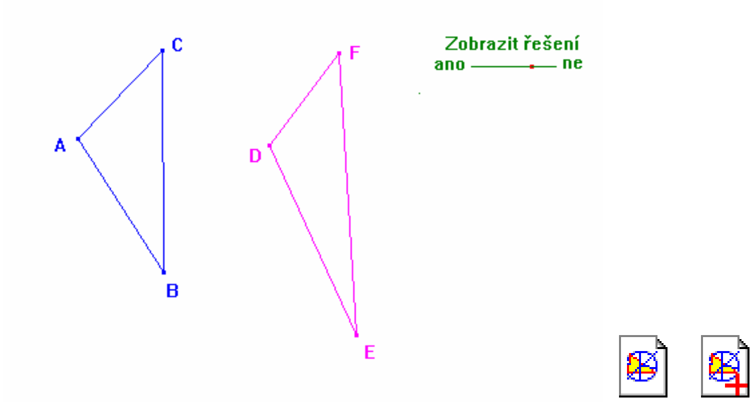
Úloha posunutí 8: *Nalezněte obrazy různých objektů v posunutí daném orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{AB}$.



Obr. Posunutí 8.0

V předcházejících úlohách hledáme obraz k danému vzoru. Zadání však může být i naleznout směr a velikost posunutí, je-li dán obraz a vzor.

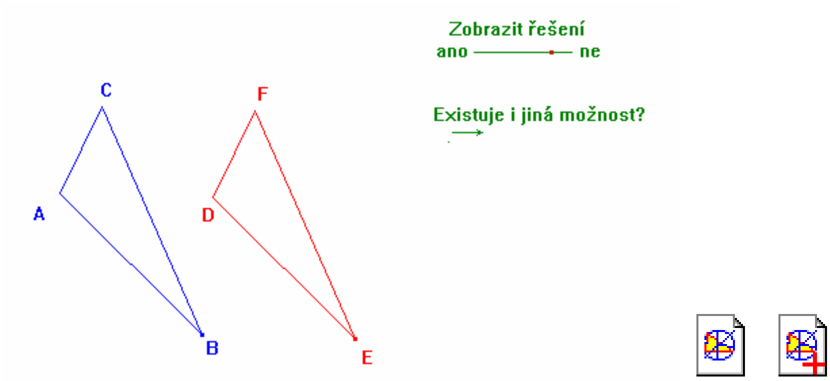
Úloha posunutí 9: *Nalezněte směr a velikost posunutí u daných trojúhelníků ABC a DEF (obr. Posunutí 9.0).*



Obr. Posunutí 9.0

Trojúhelníky *ABC* a *DEF* nejsou shodné, tudíž nemůže existovat žádné shodné zobrazení, které by tyto trojúhelníky zobrazovalo.

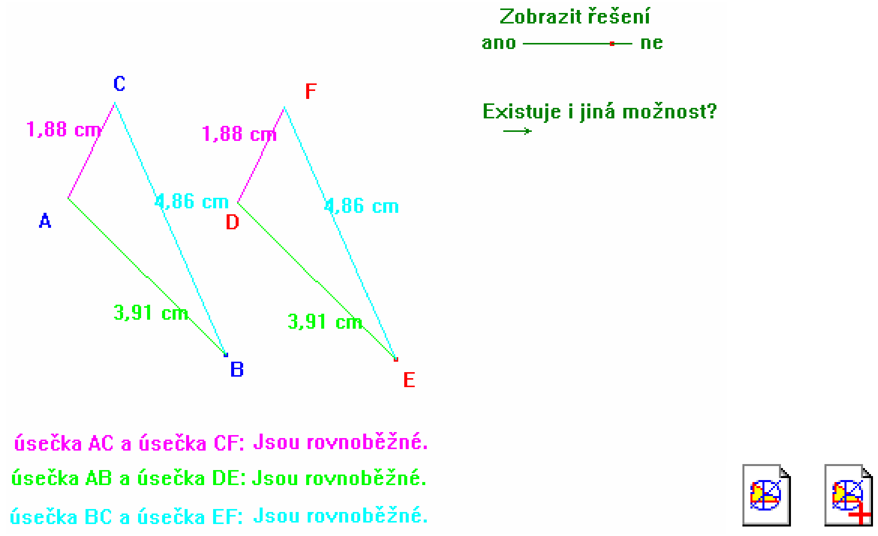
Úloha posunutí 10: *Nalezněte směr a velikost posunutí u daných dvou trojúhelníků ABC a DEF.*



Obr. Posunutí 10.0

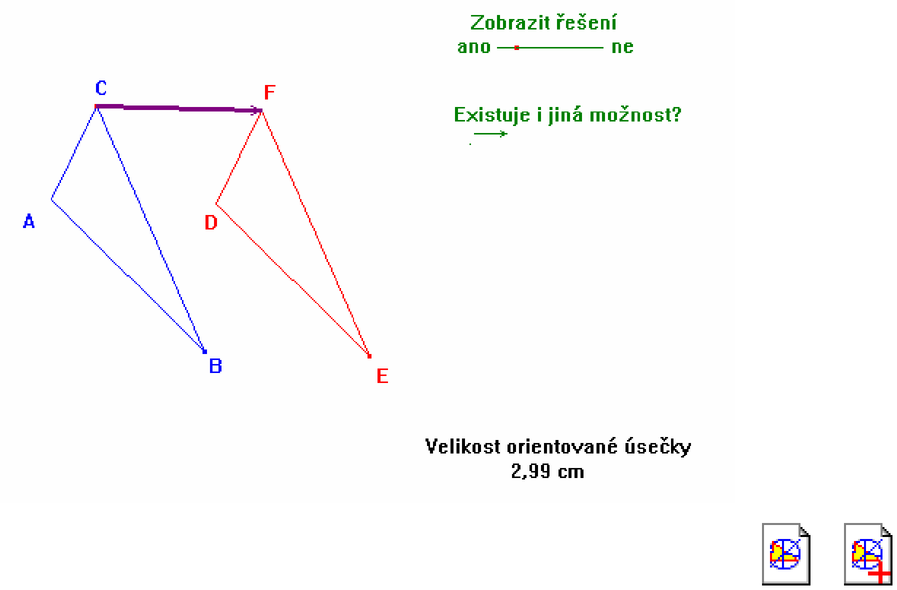
Trojúhelníky se nám na první pohled jeví jako shodné (obr. *Posunutí 10.0*). Jak se přesvědčíme zda skutečně jsou shodné? Ověříme je-li splněno některé z kritérií vět o shodnosti trojúhelníků např. dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve všech třech stranách (sss) [5]. Za pomoci nabídky v programu „*Vzdálenost a délka*“ změříme jednotlivé strany a vidíme, že odpovídající strany se shodují (obr. *Posunutí 10.1*).

Pokud má být trojúhelník *ABC* zobrazen na trohúhelník *DEF* v posunutí, podle vlastostí posunutí musíme ověřit ještě rovnoběžnost odpovídajících stran pomocí nabídky „*Rovnoběžně?*“ (obr. *Posunutí 10.1*).



Obr. Posunutí 10.1

Oba trojúhelníky jsou shodné a odpovídající strany jsou rovnoběžné, lze tedy určit orientovanou úsečku. Vybereme dvojici odpovídajících si bodů, např. body *C* a *F*. Délka úsečky spojující body *C* a *F* určuje velikost posunutí, ještě je třeba určit orientaci. Pokud se obrázek otevřeme v Cabri, bystrý žák brzy zjistí, že manipulovat lze s trojúhelníkem *ABC* a trojúhelník *DEF* se v závislosti na to mění. Proto tento obrázek byl vytvořen tak, že *ABC* je vzor a *DFE* obraz. Orientovaná úsečka je tedy daná a její velikost zjistíme jednoduše pomocí nabídky „*Vzdálenost a délka*“. Správnost řešení si lze ověřit ovladačem „Zobrazit řešení“ (obr. *Posunutí 10.2*).

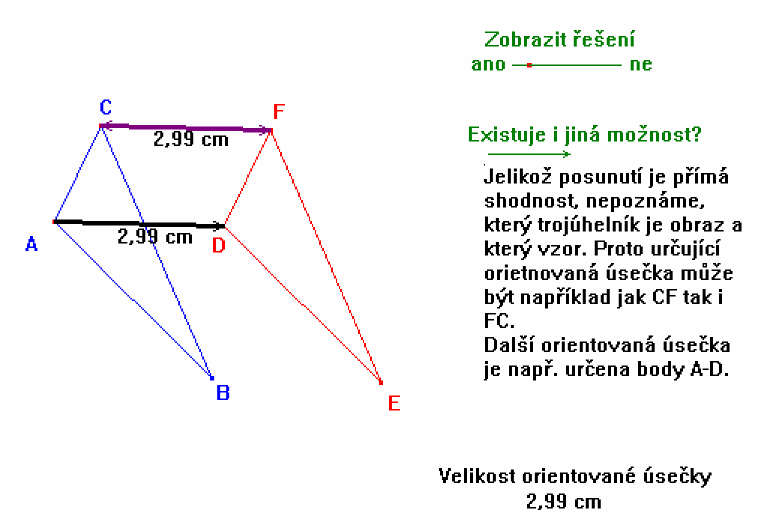


Obr. Posunutí 10.2

Na papíře ovšem takto experimentovat a uvažovat nemůžeme, proto by trojúhelník *DEF* mohl být vzor a trojúhelník *ABC* obraz. Orientovaná úsečka by pak byla od *F* k *C*. Po změření pomocí nabídky „*Vzdálenost a délka*“ žáci zjistí, že velikost úsečky je pochopitelně stejná, liší se jen její orientace.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{CF}$ zobrazí bod *C* do *F*, orientovaná úsečka $\overrightarrow{FC}$ zobrazí bod *F* do *C*. Obě úsečky mají stejnou velikost, jsou však opačně orientované. Další orientovaná úsečka daného posunutí může být určena i např. odpovídajícími si body *A* a *D* nebo *B* a *E* (obr. *Posunutí 10.3*).

V podstatě můžeme říci, že orientovaná úsečka reprezentující dané posunutí může být jakákoliv orientovaná úsečka shodná a souhlasně rovnoběžná s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CF}$ (respektive $\overrightarrow{FC}$ při posunutí opačném).



Obr. Posunutí 10.3

V Cabri se nabízí možnost ověření, že orientované úsečky $\overrightarrow{CF}$ a $\overrightarrow{AD}$ mají skutečně stejnou velikost a jsou rovnoběžné pomocí nabídky „*rovnoběžně*?“ a „*vzdálenost a délka*“.

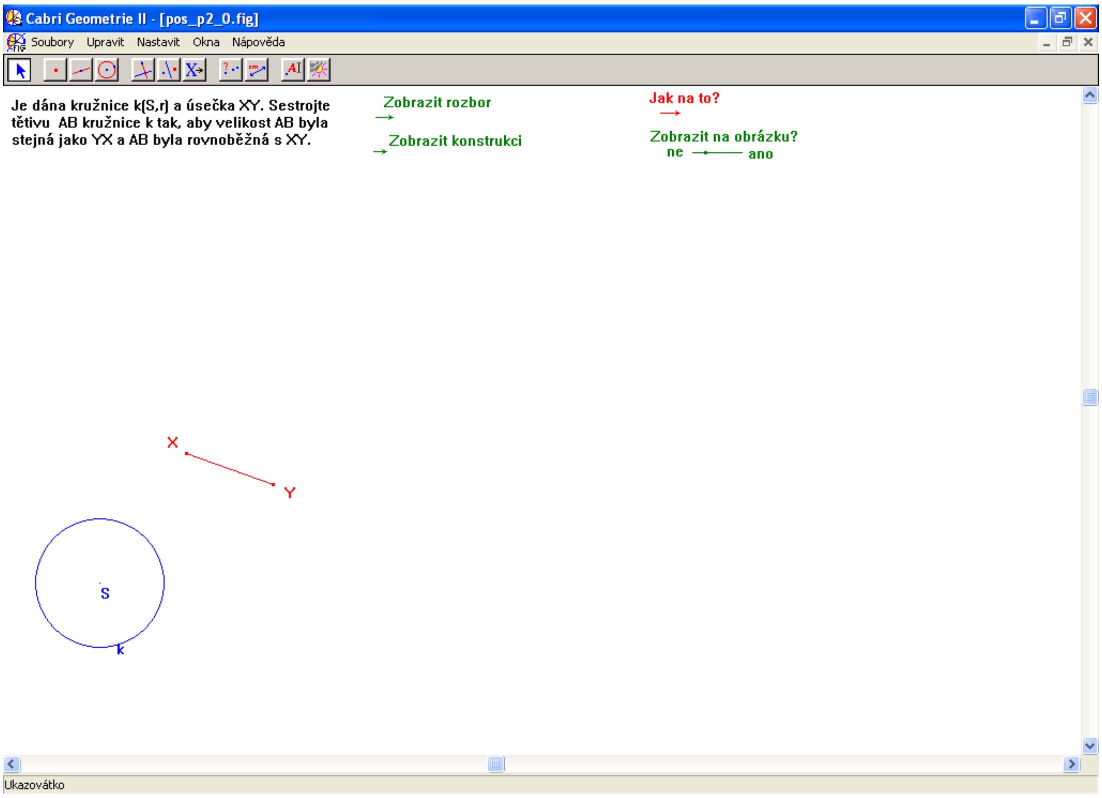
Opačně orientované úsečky stejné velikosti v posunutí se často využívají při řešení konstrukčních úloh.

3. Posunutí

3.2 Konstrukční úlohy

Následující příklady ukazují, jak využít program Cabri geometrie při řešení konstrukčních úloh. Ke každému příkladu jsou dva soubory, jeden s rozborem a konstrukcí, ve druhém je samostatně řešena diskuze. Soubory s diskuzí mají za číslem příkladu dvojici znaků „_d“, např. pos_p1_d.

Na obrázku *Příklad v Cabri* vidíme, jak vypadají jednotlivé soubory po otevření v programu.



Obr. Příklad v Cabri

V levém horním rohu je černou barvou zadání úlohy, dále se nabízí zelené ovladače „Zobrazit rozbor“, „Zobrazit konstrukci“, „Zobrazit na obrázku?“ a červený ovladač „Jak na to?“. Jak napovídají názvy, posouváme-li zelenou šipku doprava u ovladače „Zobrazit rozbor“ postupně se nám zobrazuje rozbor s náčrtkem. U konstrukce je možné si vybrat, zda chceme jednotlivé kroky konstrukce rovnou rýsovat nebo ne a to za pomoci ovladače „Zobrazit na obrázku?“. Zápis jednotlivých kroků je zjednodušený, není vypsán přesně do podrobností. U žáků však pří rýsování obvykle požadujeme přesné a úplné zápisy. Červený ovladač „Jak na to?“ zobrazí nápovědu, jak začít příklad řešit.

V dolní části obrázku jsou zobrazeny prvky, které jsou zadány.

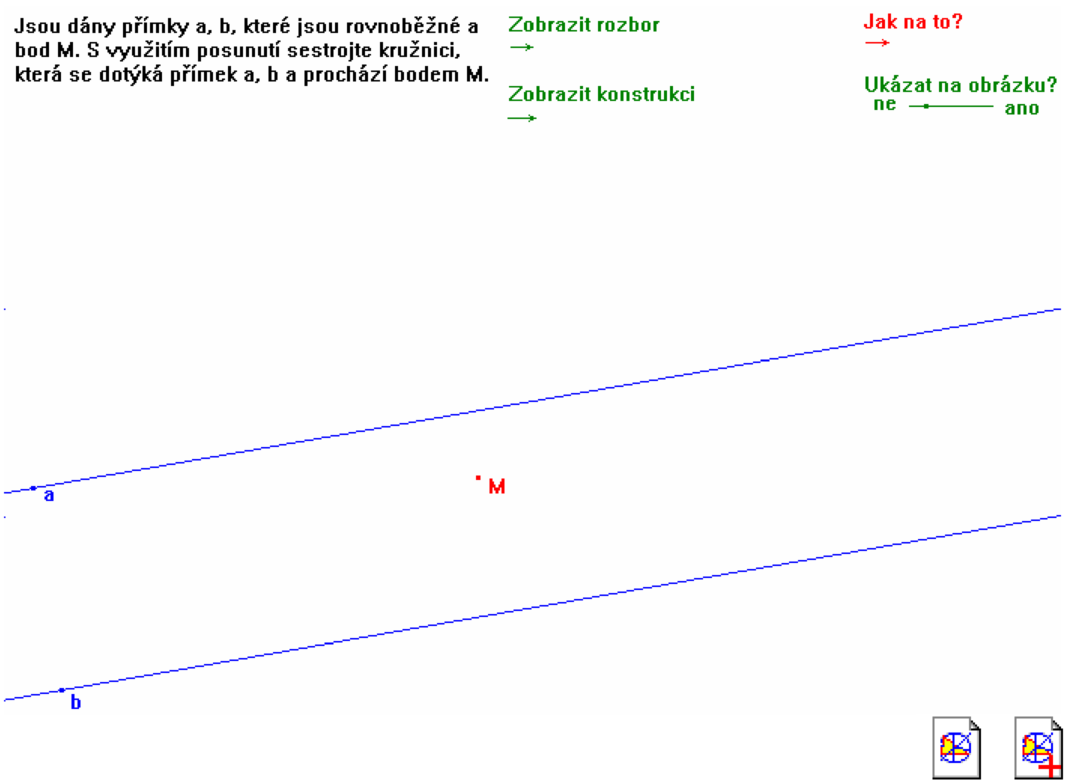
Využití ovladačů v konkrétních situací je podrobněji popsáno v prvním příkladu pos_p1, v ostatních příkladech je použití stejné a není tedy rozebíráno tolik detailně.

Při řešení příkladů se zaměřujeme pouze na ten způsob řešení, kdy lze využít posunutí.

Příklad pos_p1

Máme za úkol s využitím posunutí sestrojit kružnici, která se dotýká dvou různých rovnoběžných přímek a prochází bodem *M* (obr. *Pos_p1_0*).

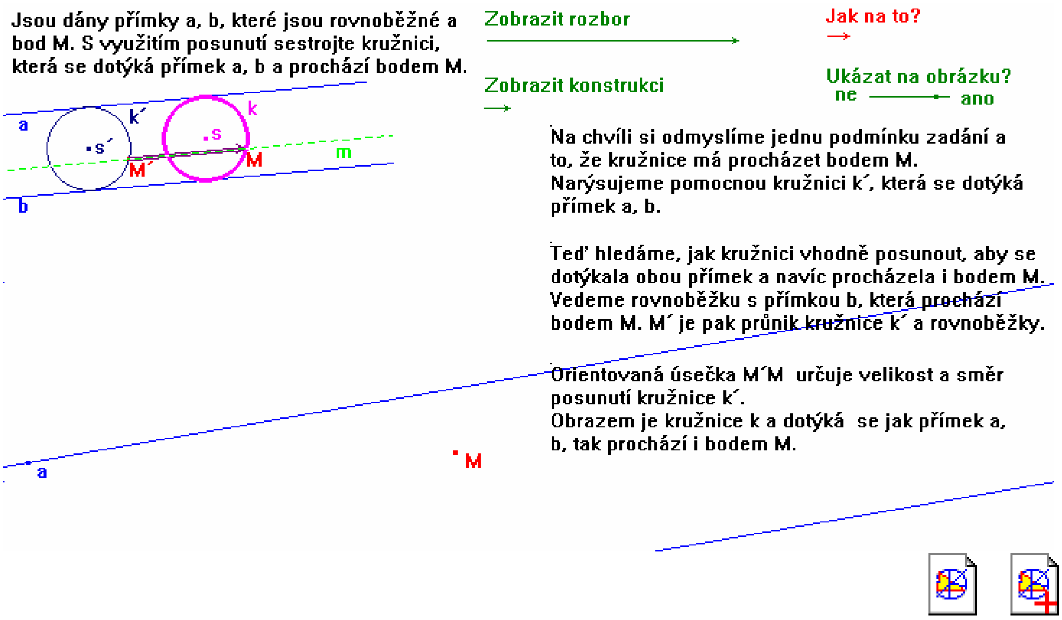
V posunutí často řešíme příklady tak, že si na chvíli jednu z podmínek zadání odmyslíme. Narýsujeme pomocný objekt, jenž splňuje ostatní podmínky a ten vhodně posuneme tak, aby splnil i podmínku, kterou jsme předtím vypustili. Takový postup využijeme i v tomto případě.



Obr. Pos_p1_0

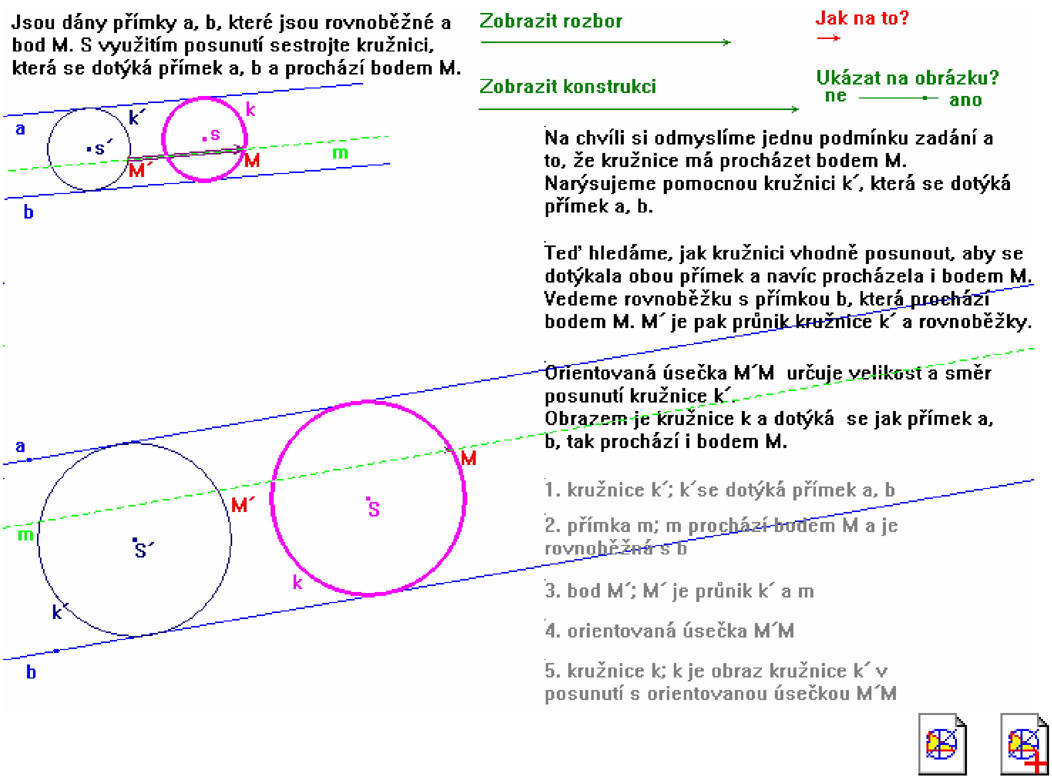
Jakou podmínku zadání však na chvíli vynechat? Posuneme-li šipku u ovladače „Jak na to?“, zobrazí se nám nápověda, abychom narýsovali nejprve pomocnou kružnici dotýkající se pouze dvou přímek *a*, *b* a tu poté vhodně posuneme.

Pokud nápověda stačí nebo ji žák vůbec nepotřebuje, může začít samostatně rýsovat. Není-li mu jasné, jak při řešení postupovat, zobrazí si rozbor (obr. *Pos_p1_1*). Pomocná kružnice *k´* splňuje podmínku, že se dotýká obou rovnoběžek. Neprochází však bodem *M*. Hledáme vhodné posunutí kružnici *k´* tak, aby splnila i tento požadavek a bodem *M* procházela.



Obr. Pos_p1_1

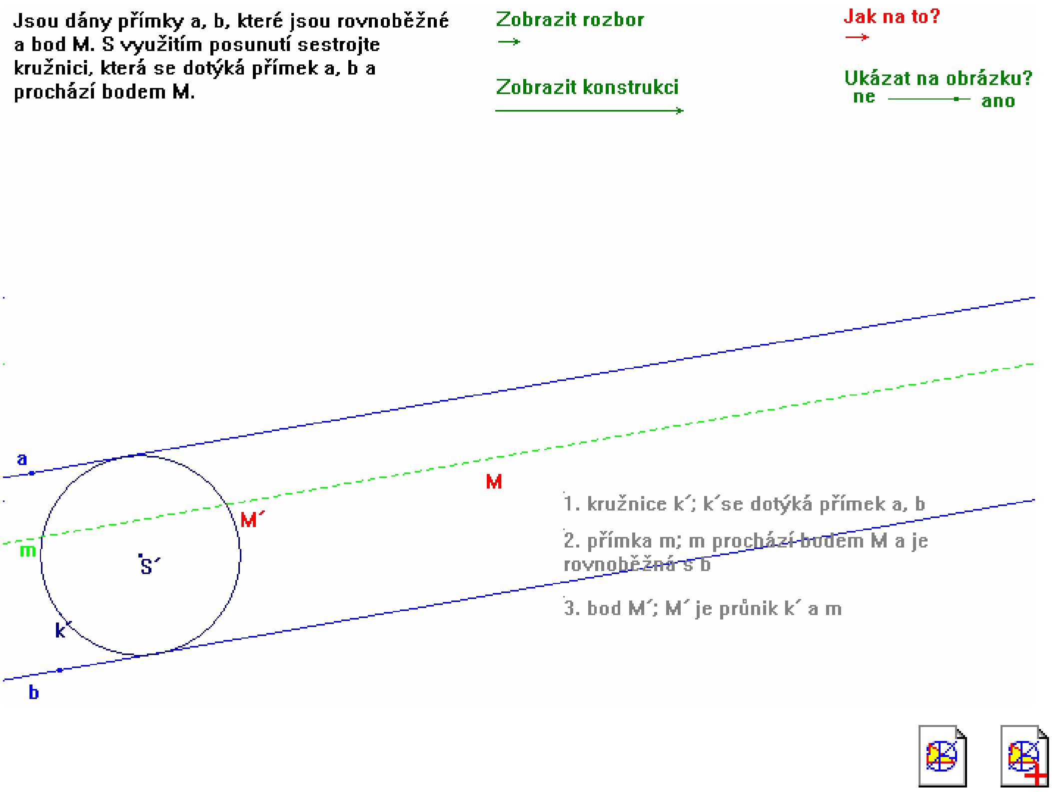
Po prostudování rozboru může žák přistoupit ke konstrukci. Pokud si stále není jistý, posune šipku u ovladače „Zobrazit konstrukci?“ a rýsuje podle jednotlivých kroků. Správnost konstrukce si ověří, když posune bod u ovladače „Ukázat na obrázku?“ do polohy ano (obr. *Pos_p1_2*).



Obr. Pos_p1_2

Díky jednotlivým ovladačům mohou někteří rychlejší žáci okamžitě začít rýsovat, ostatním se nabízí možnosti nápovědy, zobrazení rozboru a konstrukce. Každý žák postupuje svým tempem.

Pokud nastavíme ovladač „Zobrazit na obrázku?“ do polohy ano a posouváme šipkou u ovladače konstrukce, zároveň s kroky konstrukce se nám hned narýsuje daný krok na obrázku (obr. *Pos_p1_3*). Využije-li učitel tento postup, žáci se pak stávají pozorovateli.

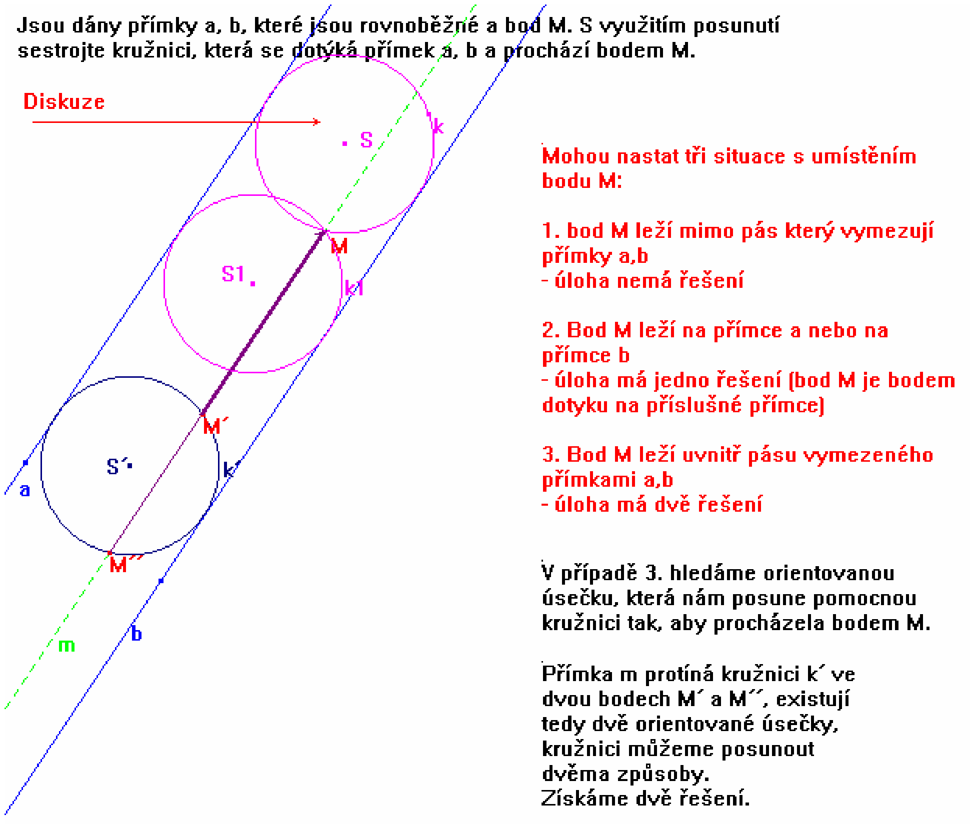


Obr. Pos_p1_3

Narýsovaný obrázek je plně interaktivní, lze měnit polohu zadaných prvků - bodu *M*, stejně tak i vzdálenost rovnoběžek *a*, *b*. Experimentováním s obrázkem se žák dostává k diskuzi. Pro diskuzi otevřeme příslušný soubor pos_p1_d.

Buď z předchozího experimentování žák už ví, za jakých podmínek je úloha řešitelná a kolik má řešení, nebo si pomocí ovladače „Diskuze“ jednotlivé kroky zobrazí tak, že posouvá koncový bod u červené šipky doprava.

Počet řešení závisí na umístění bodu *M*. Změnou polohy bodu *M* na obrázku se také skutečně přesvědčíme, že úloha za daných podmínek má daný počet řešení (obr. *Pos_p1_d_0*).



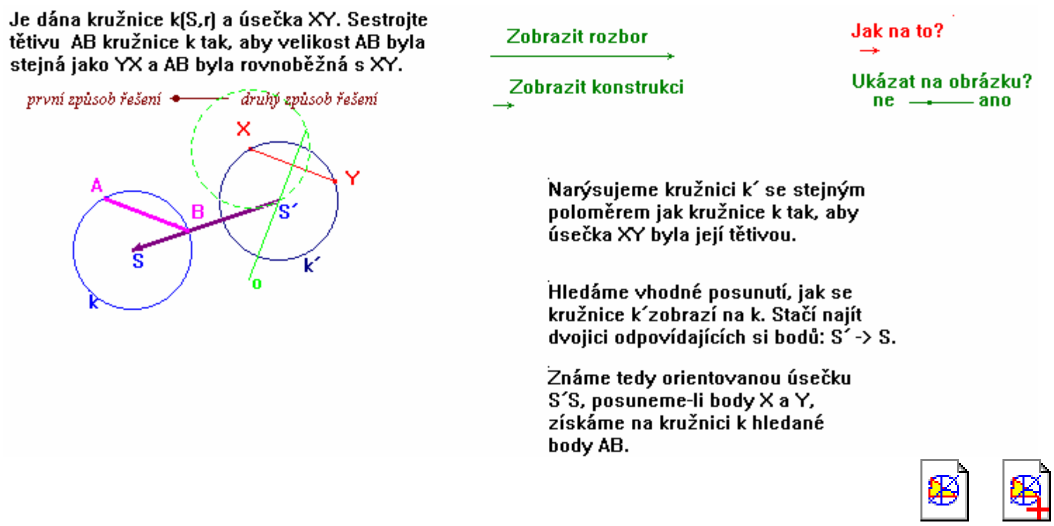
Obr.Pos_p1_d_0

Mohou nastat tři situace:

1. bod *M* leží mimo pás, který vymezují přímky *a*, *b* – úloha nemá řešení
2. bod *M* leží na jedné z přímek *a*, *b* – úloha má jedno řešení
3. bod *M* leží uvnitř pásu vymezeném přímkami *a*, *b* – úloha má dvě řešení

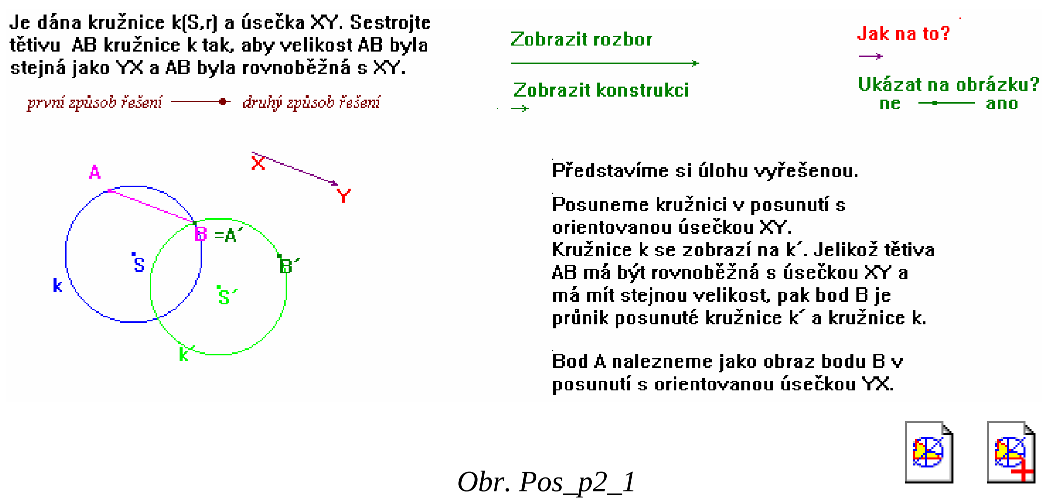
Příklad pos_p2

Máme sestrojit tětivu dané kružnice *k* tak, aby splňovala dané podmínky (obr. *Pos_p2_0*). Úlohu budeme řešit postupem v podstatě opačným, než v předchozím příkladě. Narýsujeme pomocný objekt, který splňuje podmínky zadání, v našem případě pomocnou kružnici *k´* o stejném poloměru *r* jako má kružnice *k*, kdy úsečka *XY* je tětivou *k´*. Středy kružnic *SS´* určují orientovanou úsečku, kterou využijeme při zobrazování bodů *X*, *Y*. Získáme tak hledané body *AB* na kružnici *k*.



Obr. Pos_p2_0

Úlohu však lze řešit ještě jiným způsobem s využitím posunutí. Posuneme bod ovladače na „druhý způsob řešení“ a na obrázku *Pos_p2_1* vidíme, že jsme posunovali kružnici *k* v posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{XY}$.



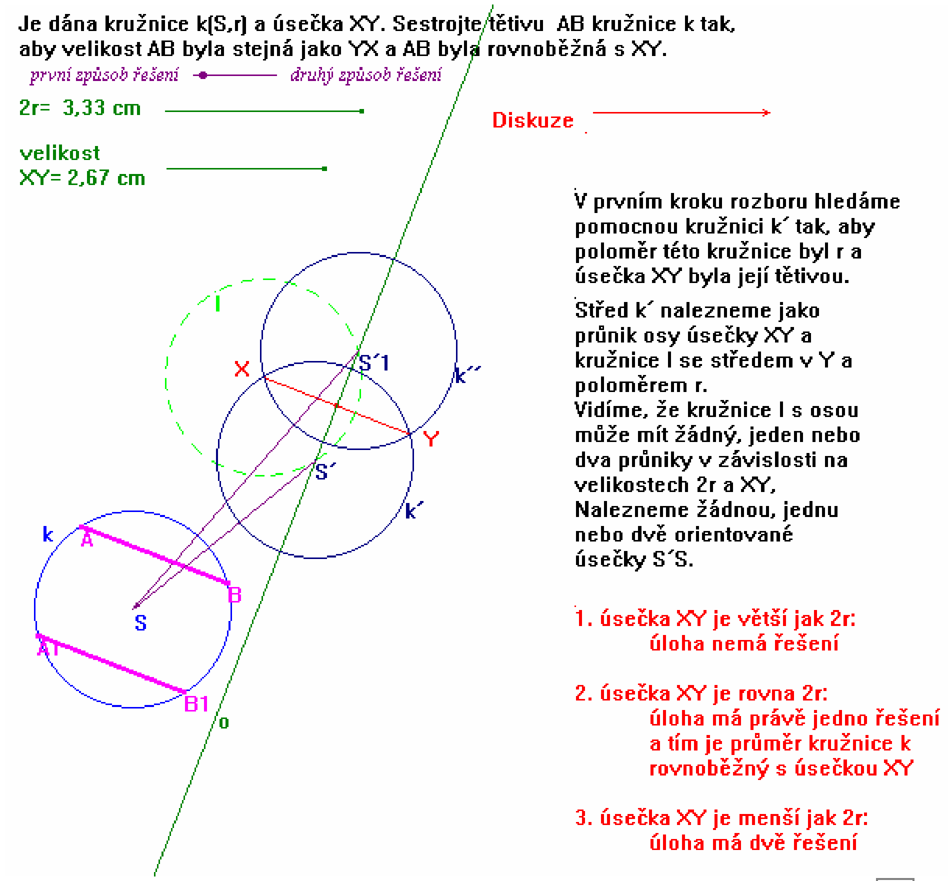
Obr. Pos_p2_1

V posunutí $T_{\overrightarrow{XY}}$ se kružnice *k* zobrazí na *k´*. Jelikož tětiva *AB* má být rovnoběžná s úsečkou *XY* a má mít stejnou velikost, pak bod *B* je průnik posunuté kružnice *k´* a kružnice *k*. Bod *A* je obraz bodu *B* v posunutí $T_{\overrightarrow{YX}}$.

Kolik má úloha řešení? Jelikož hledáme tětivu kružnice, řešitelnost a počet řešení bude záviset na velikosti úsečky *AB* a velikosti průměru *d* zadané kružnice *k*.

Otevřeme-li příslušný soubor s diskuzí (obr. *Pos_p2_d_0)* vidíme, že velikost úsečky *AB* a velikost průměru kružnice *k* se ovládá pomocí úseček v levém horním rohu obrázku a to tak, že pohybem zeleného bodu na konci úseček směrem doprava nebo doleva měníme velikost.

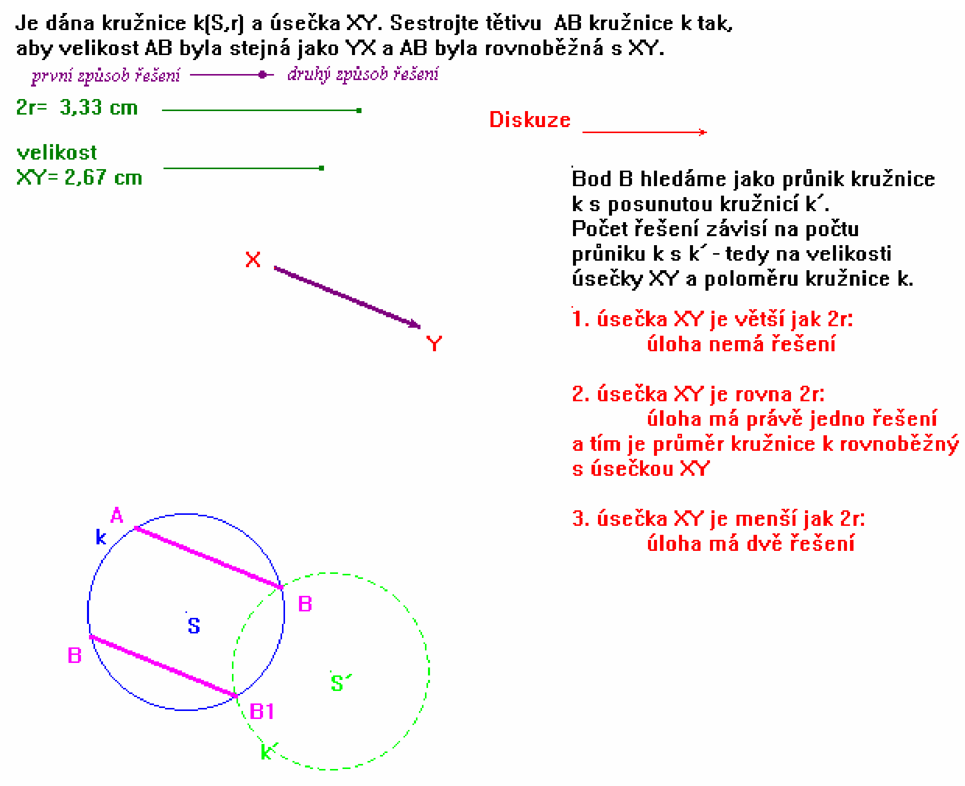
Aniž bychom hledali nějaké průniky, šikovní žáci si uvědomí, že pokud je velikost hledané úsečky – tětivy větší jak průměr kružnice, nelze takovou tětivu narýsovat.



Obr. Pos_p2_d_0

Při hledání pomocné kružnice *k´* hledáme nejdříve střed této kružnice, a to jako průnik kružnice *l* a osy *o* úsečky *XY* . Mění-li žák velikost úsečky *XY*, mohou nastat tři situace. Kružnice *l* a osa *o* mají jeden nebo dva průsečíky, nebo se vůbec neprotínají. Z této situace žáci pochopí, že pokud je úsečka *XY* větší jak průměr *d* kružnice, nemůžeme nalézt žádnou tětivu. Pokud se velikosti rovnají, tětivou bude průměr kružnice a pokud je úsečka *XY* menší jak průměr kružnice, nalezneme tětivy dvě.

Analogicky při druhém způsobu řešení hledáme průsečíky kružnice *k* s *k´*. Počet řešení závisí opět na počtu průsečíků těchto kružnic (Obr. *Pos_p2_d_1*).

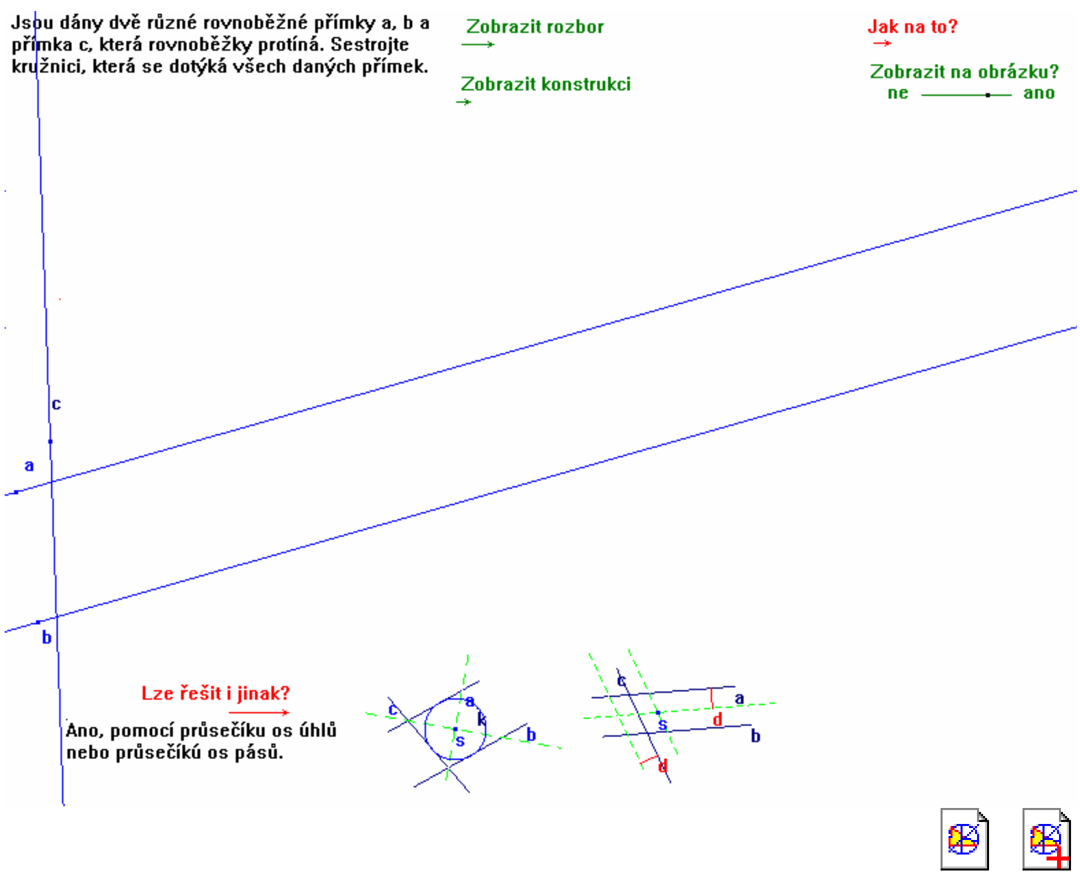


Obr. Pos_p2_d_1

Příklad pos_p3

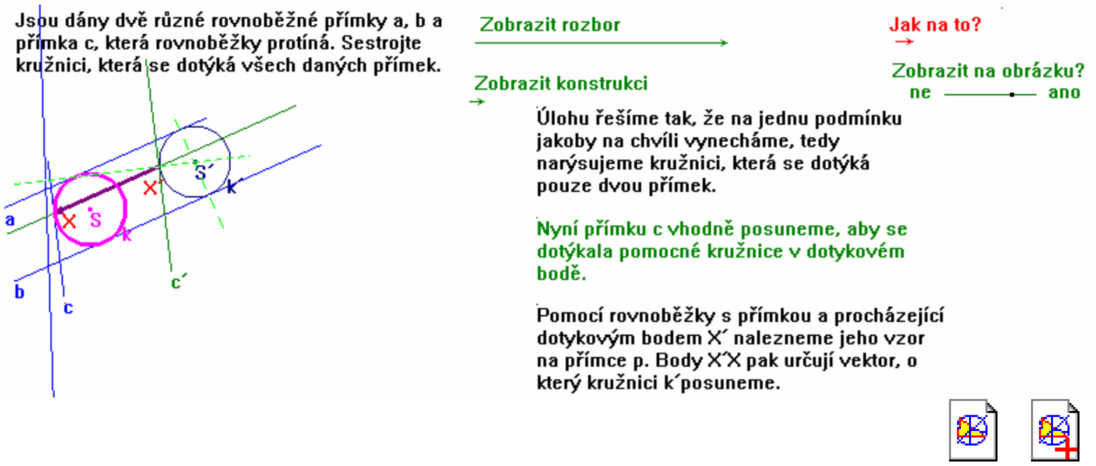
Následující příklad opět řešíme způsobem, kdy jednu z podmínek zadání nejprve opomeneme, narýsujeme pomocný objekt který vhodně posuneme aby splňoval i podmínku vynechanou. Úkolem je sestrojit kružnici, která se dotýká všech tří daných přímek.

Kromě obvyklých ovladačů je v tomto příkladě i ovladač „Lze řešit i jinak?“. Pokud posuneme šipku doprava, objeví se náčrtek s alternativním řešením. Příklad lze řešit i pomocí množin bodů dané vlastnosti. Střed hledané kružnice je průsečík os úhlů, které svírají přímky *a*, *b*, *c* nebo průsečík os pásů (obr. *Pos_p3_0*). Jelikož nám jde v příkladech o využití posunutí při řešení a konstrukci, dále zde tento způsob není podrobně rozebírán. Bystrý žák však může na jiný způsob řešení přijít a jeho postup rozhodně oceníme.



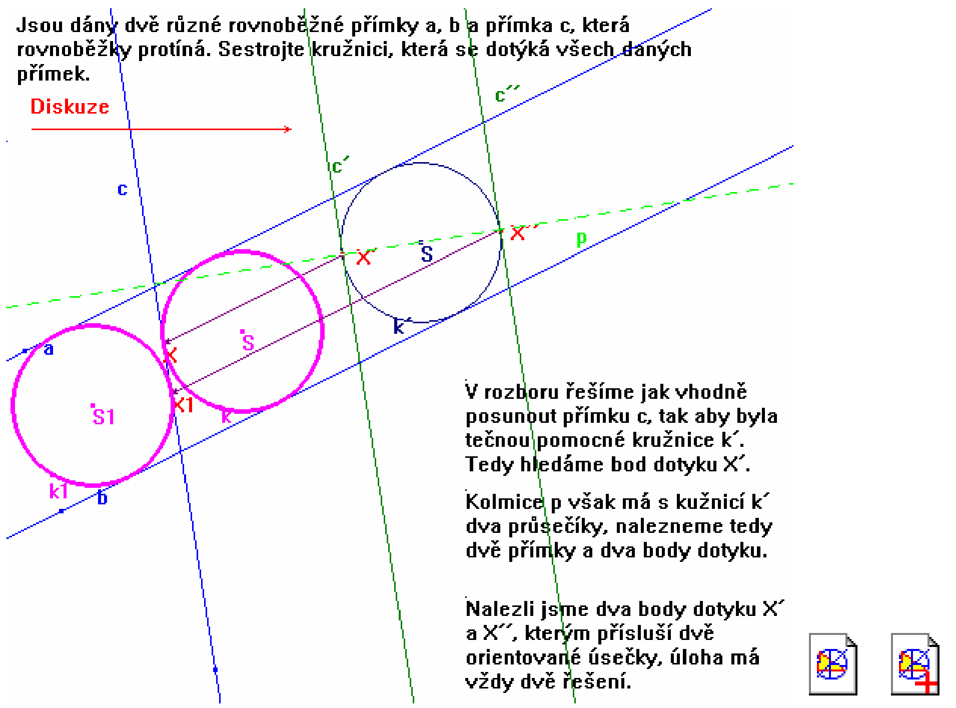
Obr. Pos_p3_0

Na obrázku *Pos_p3_1* vidíme, že narýsujeme pomocnou kružnici *k´*, která se dotýká pouze rovnoběžek *a*, *b*. Tu posuneme tak, aby se dotýkala i přímky *c*.



Obr. Pos_p3_1

Existuje však pouze jediné řešení? Otevřeme soubor s diskuzí a důkladně prostudujeme situaci, kdy hledáme tečnu k pomocné kružnici *k´*, jež je rovnoběžná s přímkou *c*. Abychom narýsovali tečnu, je nutné nalézt nejdříve bod dotyku. Vedeme kolmici na přímku *c* procházející bodem *S*. Bod dotyku je průnik kolmice *p* a kružnice *k´*. Kolmice *p* však protíná kružnici *k´* vždy ve dvou bodech, neboť musí procházet středem. Na obrázku *Pos_p3_d_1* vidíme, že pokud jsme nalezli dvě tečny *c´* a *c´´* existují tedy dva způsoby posunutí pomocné kružnice *k´* tak, aby se dotýkala přímky *c*. Úloha má tedy vždy dvě řešení.

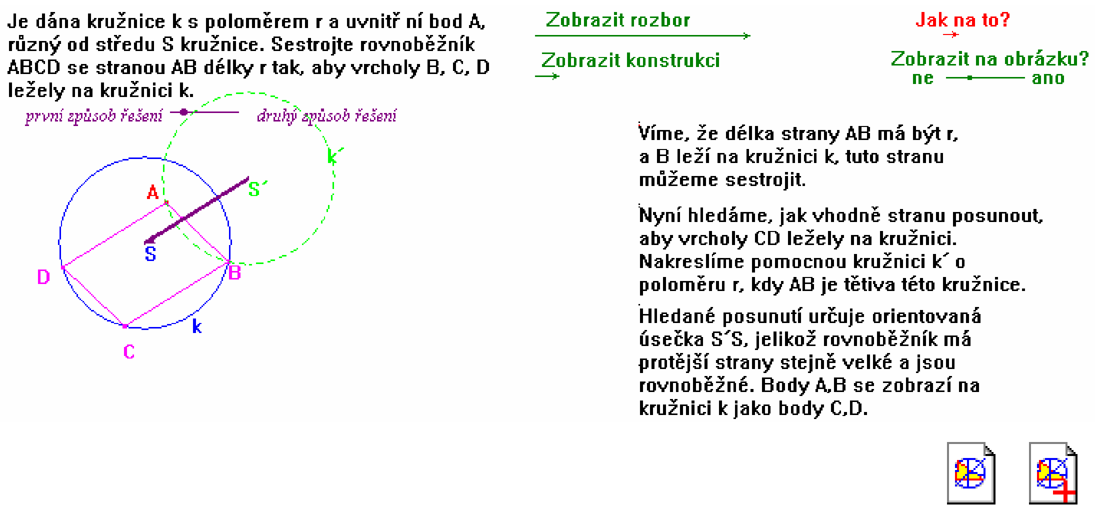


Obr. Pos_p3_d_1

Příklad pos_p4

V příkladu máme sestrojit rovnoběžník tak, aby strana *AB* měla velikost jako poloměr zadané kružnice a všechny vrcholy kromě vrcholu *A*, který je zadaný, ležely na kružnici *k*.

Stranu *AB* lze sestrojit (obr. *Pos_p4_0*) – známe velikost úsečky *AB* a víme, že bod *B* leží na kružnici *k*.

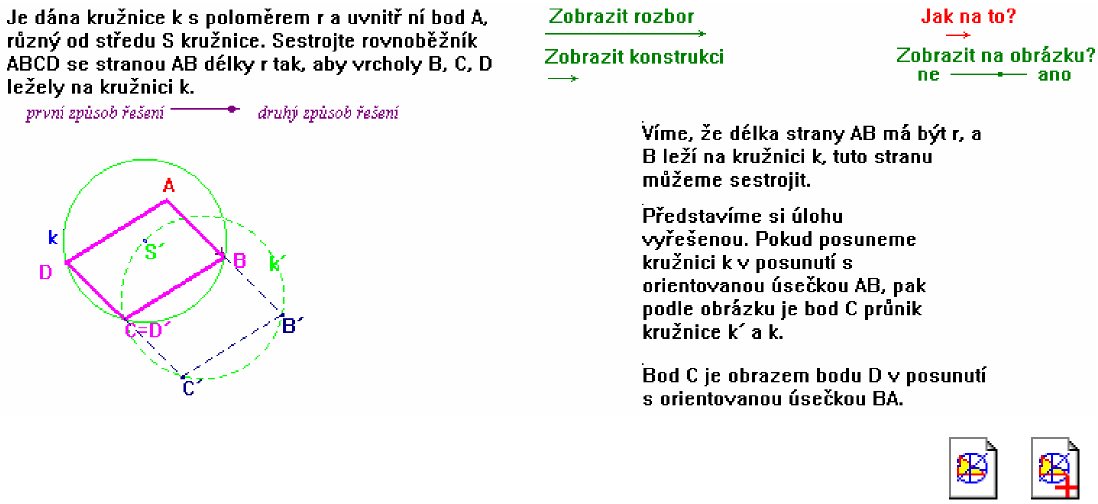


Obr. Pos_p4_0

Nyní hledáme, jak doplnit na rovnoběžník. Co víme o rovnoběžníku, respektive o straně *CD*? Víme, že strana *CD* je rovnoběžná s *AB* a obě úsečky mají stejnou velikost a body *C*, *D* leží na kružnici - úsečka *CD* musí být vlastně tětiva kružnice *k*. Vzpomeneme-li si na příklad Pos_p2 je řešení jasné. Stačí narýsovat pomocnou kružnici *k´* o stejném poloměru jako kružnice *k*, kdy *AB* bude tětivou této pomocné kružnice. Posunutí je pak dáno orientovanou úsečkou *S´S* (obr. *Pos_p4_0*).

Celou konstrukci podle rozboru žáci po jednotlivých krocích provedou na zadané kružnici, přičemž lze samozřejmě měnit poloměr a umístění kružnice, stejně tak umístění bodu *A* uvnitř kružnice

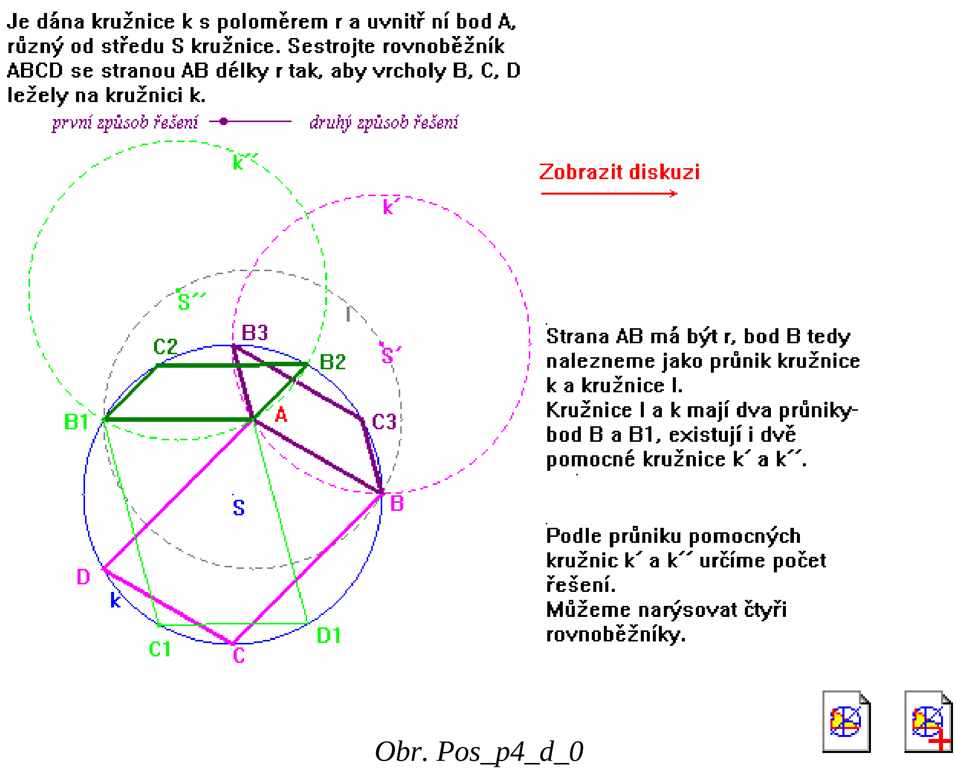
Existuje ještě druhý způsob řešení. Podobně jako v příkladu pos_p2 můžeme rovnou využít posunutí $T_{\overrightarrow{AB}}$ a posunout kružnici *k*. (obr. *Pos_p4_1*). Bod *C* je pak průnik posunuté kružnice *k´* s kružnicí *k*. Bod *D* získáme v posunutí $T_{\overrightarrow{BA}}$ jako obraz bodu *C*.



Obr. Pos_p4_1

Na místě je otázka, zda neexistuje více řešení. Víme, že úsečka *AB* má velikost *r* a bod *B* leží na kružnici *k*. Bod *B* nalezneme jako průnik kružnice *l* se středem v *A* a poloměrem *r*. Kružnice *l* protíná kružnici *k* vždy ve dvou bodech, nalezneme tedy bod *B* a *B1* a dvě pomocné kružnice *k* a *k´*(obr. *Pos_p4_d_0*).

Pokud bod *A* leží uvnitř kružnice, úloha má vždy čtyři řešení.



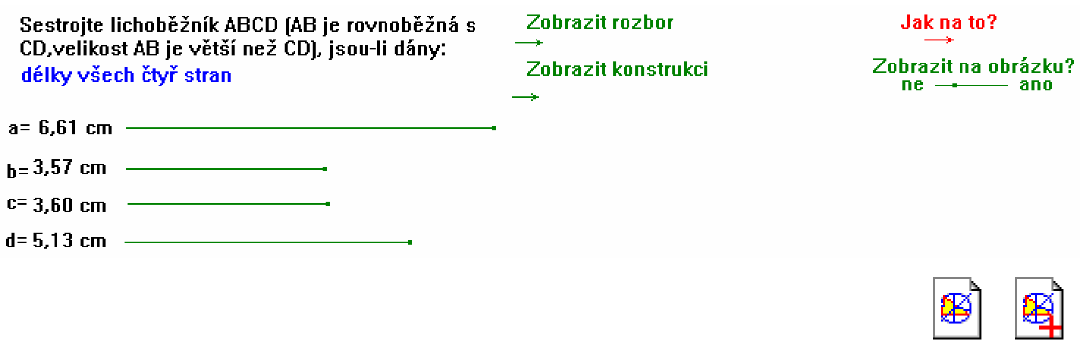
Obr. Pos_p4_d_0

Podobně provedeme diskuzi pro druhý způsob řešení.

Příklad pos_5a

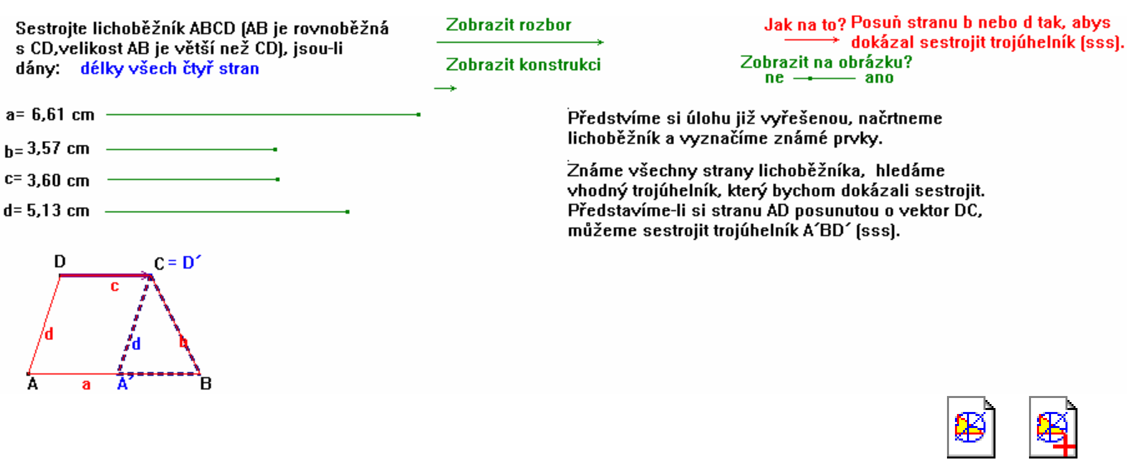
Posunutí se často užívá při konstrukci lichoběžníku. V našich příkladech uvažujeme takové lichoběžníky kde strana *AB* je rovnoběžná s *CD* a velikost úsečky *AB* je větší než *CD*.

Máme sestrojit lichoběžník, jsou-li dány délky všech čtyř stran. Délku jednotlivých stran můžeme měnit tak, že pohybujeme koncovým bodem zelených úseček směrem doprava nebo doleva. Délka úsečky je vyjádřena číslem nalevo od úsečky (obr. *Pos_p5a_0*).



Obr. Pos_p5a_0

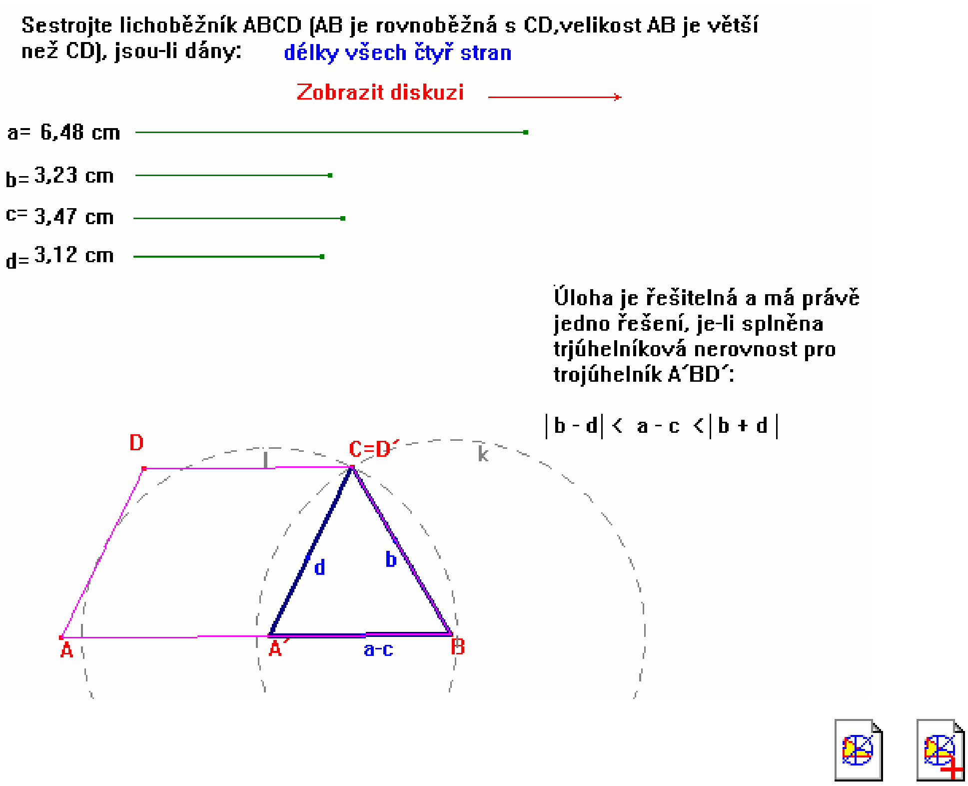
Na obr. *Pos_p5a_1* vidíme příklad otevřený v Cabri, kdy jsme si zobrazili nápovědu a část rozboru. Na obrázku jsou vyznačeny známé prvky červeně a snažíme se najít trojúhelník, který dokážeme sestrojit. Zobrazíme-li stranu *AD* v posunutí $T_{\overrightarrow{DC}}$, lehce pak sestrojíme trojúhelník *A´BD´* jelikož známe všechny strany. Na lichoběžník doplníme, neboť známe i zbývající strany *d*, *c*.



Obr. Pos_p5a_1

Zobrazí-li si žáci celou konstrukci a experimentují s délkami stran lichoběžníka, může nastat situace, že lichoběžník najednou zmizí, tedy nelze ho za daných podmínek sestrojit. V diskuzi řešíme, co musí platit pro jednotlivé délky stran, aby úloha byla řešitelná.

Po otevření souboru vidíme, že podmínkou řešitelnosti je trojúhelníková nerovnost pro trojúhelník *A´BD´* (obr. *Pos_p5a_d_0*).

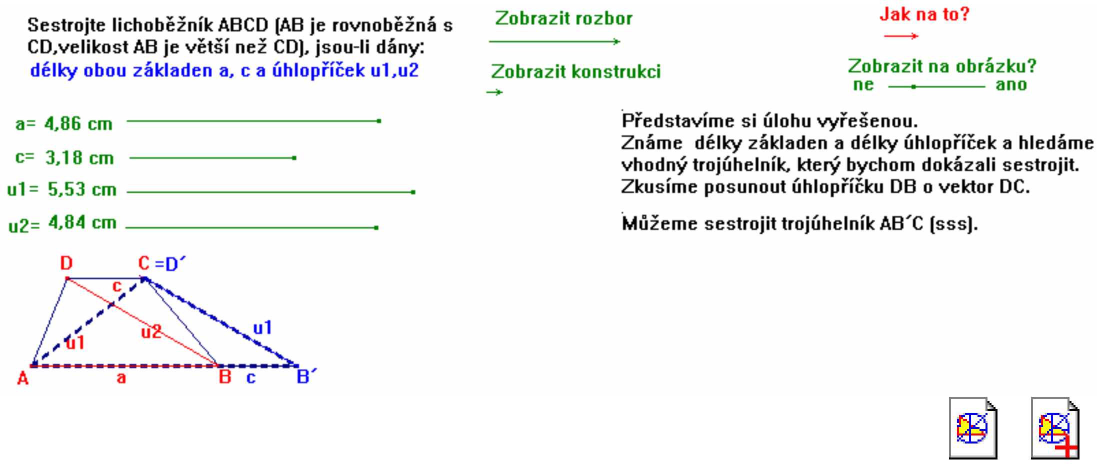


Obr. Pos_p5a_d_0

Pokud si žáci chtějí ověřit, že skutečně trojúhelníková nerovnost platí, stačí si pomocí nabídky programu Cabri „*Výpočty*“ jednotlivé části nerovnosti vypočítat. Změnou velikosti délek se mění i čísla v nerovnosti a v okamžiku, kdy nerovnost neplatí, neexistuje ani lichoběžník.

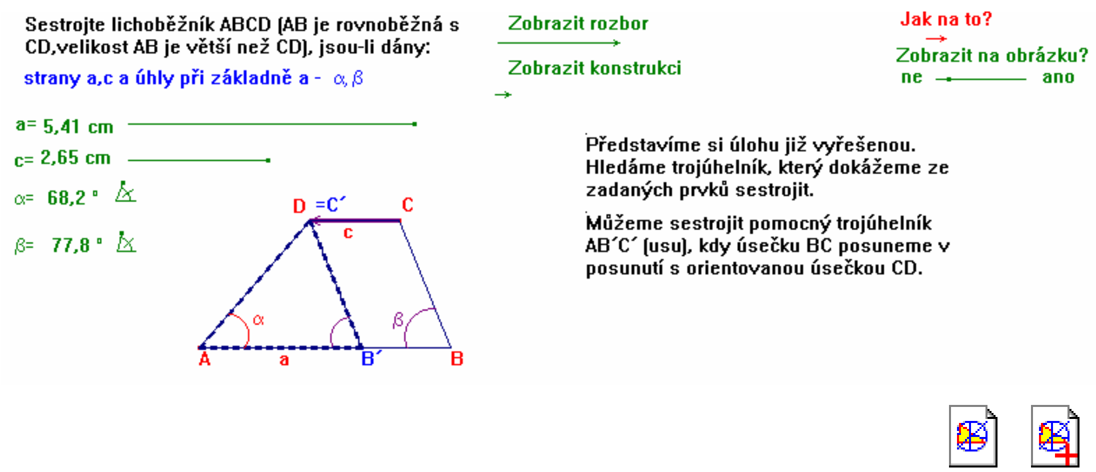
V následujících třech příkladech je opět úkolem sestrojit lichoběžník. Postup při řešení je podobný jak u příkladu Pos_p5a, proto je jen naznačen. Podrobněji je vše rozebrané v jednotlivých Cabri souborech.

V ***příkladu pos_p5b*** máme sestrojit lichoběžník, známe-li délky obou základen a úhlopříček. Zobrazíme-li úhlopříčku *u2* v posunutí $T_{\overrightarrow{DC}}$, Vidíme, že lze sestrojit trojúhelník *AB´D´* (obr. *Pos_p5b_0*).



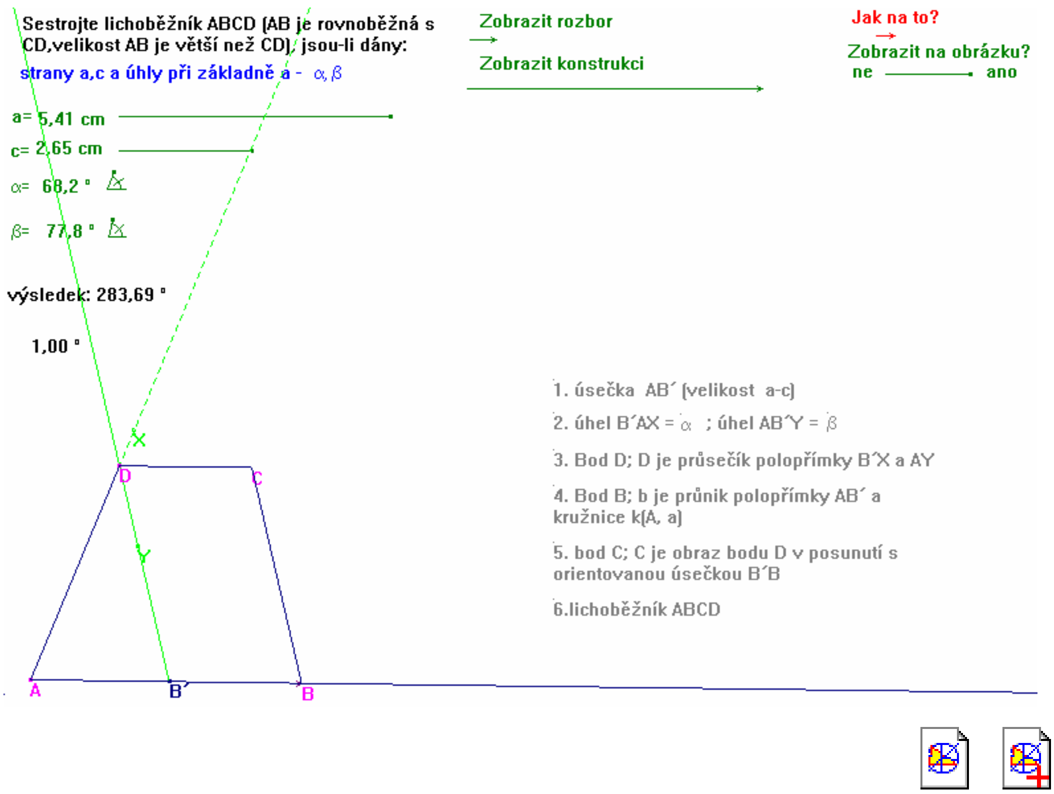
Obr. Pos_p5b_0

V ***příkladu pos_p5c*** máme sestrojit lichoběžník, jsou-li zadány délky základen a úhly při základně *a* (obr. *Pos_p5c_0*). Využijeme posunutí $T_{\overrightarrow{CD}}$ a na obrázku vidíme, že trojúhelník *AB´C´* sestrojíme podle věty sus.



Obr. Pos_p5c_0

Při konstrukci v programu Cabri geometrie může být problém s narýsováním úhlu *α* a *β*. Abychom narýsovali úhel dané velikosti, využijeme nabídku „*Otočení*“. Úhel *α* vytvoříme tak, že zvolíme libovolný bod na polopřímce *AB´* např. *B´* a postupně myší aktivujeme bod *B´*, bod *A* (střed otáčení) a číslo vyjadřující úhel otočení. Vytvoříme tak úhel *B´AX* o velikosti *α*. V případě úhlu *β* chceme nanést úhel v záporném smyslu, ale nabídka „*Otočení*“ dokáže nanést úhel pouze v kladném smyslu. Proto náš zadaný úhel *β* musíme odečíst od 360° a tento výsledek použít při otáčení (obr. *Pos_p5c_1*) *.



Obr. Pos_p5c_1

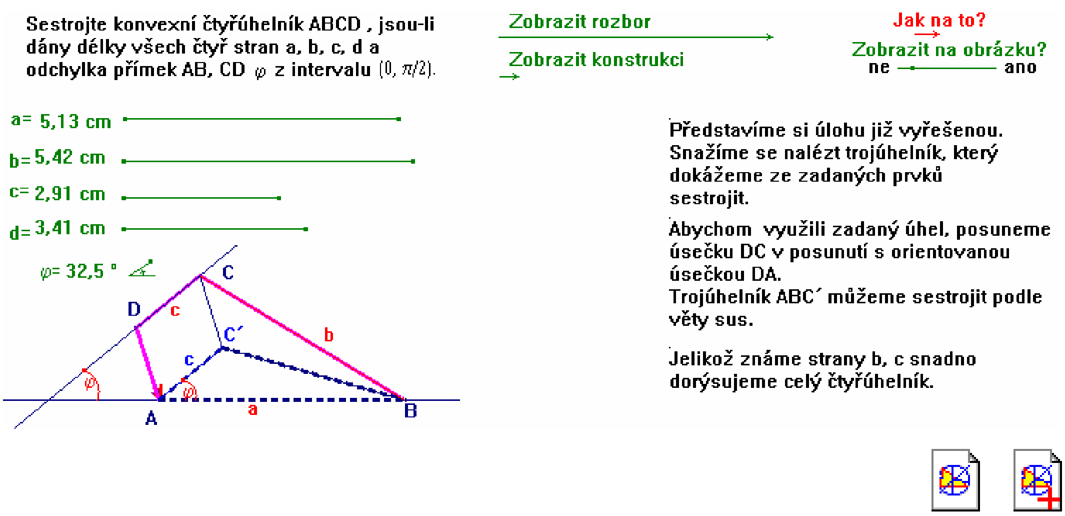
V ***příkladě pos_p5d*** je lichoběžník zadán pomocí úhlopříček, střední příčky a úhlu *α* při základně. Pokud si uvědomíme, že pro střední příčku lichoběžníku *s*, platí vztah $s = \dfrac{a+c}{2}$, tedy velikost $a + c = 2 \cdot s$, je řešení analogické jako v příkladě pos_p5b (obr. *Pos_p5b_0*).

* Program Cabri geometrie umožňuje základní výpočty pomocí nabídky „*Výpočty*“. Bohužel však při výpočtech se stupni, např. 360°-56° není možno zadat znak „stupeň“. Proto si vytvoříme pomocný úhel o velikosti 1,00° a číslo 360 vynásobíme tímto úhlem, pak odečteme libovolný úhel *β* a výpočet je v pořádku.

Příklad pos_p6

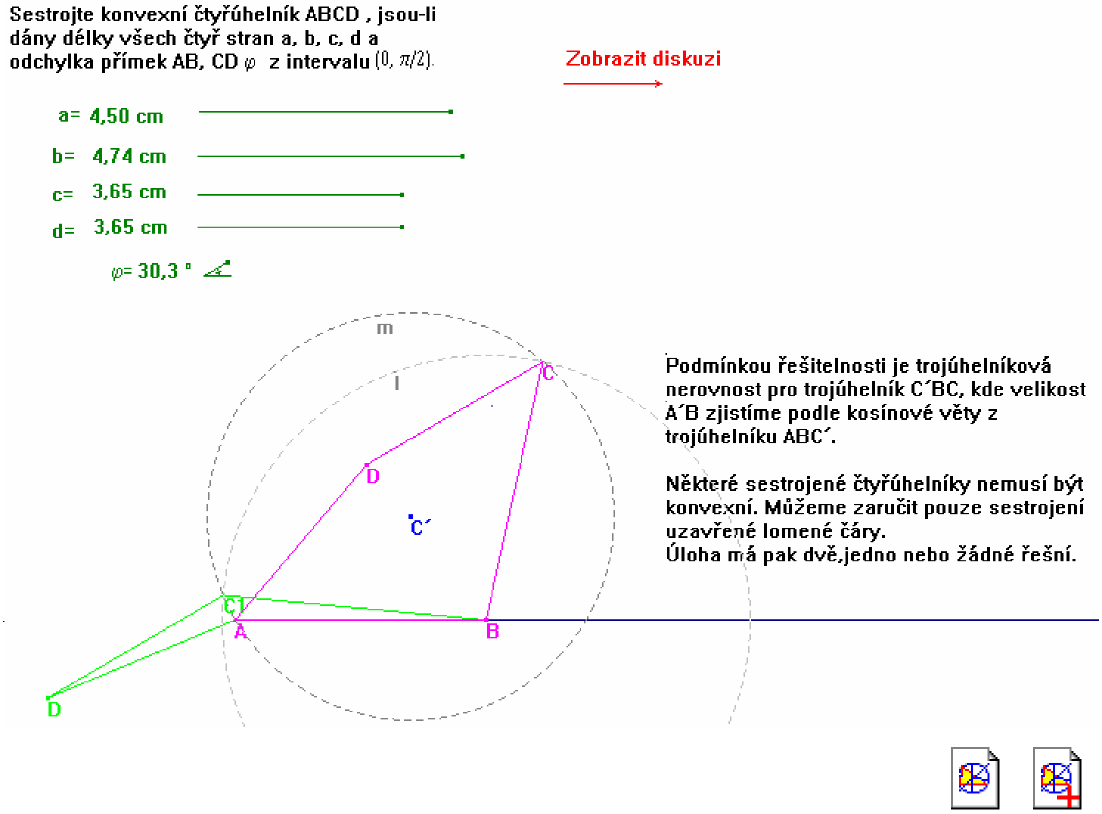
Stejně jako při sestrojování lichoběžníku, tak i při konstrukci libovolného konvexního čtyřúhelníku můžeme využít posunutí. V této úloze je však úkol trochu těžší, neboť neplatí, že základny jsou rovnoběžné a o čtyřúhelníku víme jen to, že je konvexní. Máme sestrojit čtyřúhelník, jsou-li dány délky všech čtyř stran *a*, *b*, *c*, *d* a odchylka přímek *AB*, *CD* z intervalu (0, π/2).

V náčrtku vyznačíme známé prvky. Posune-li žák stranu *c* v posunutí s orientovanou úsečkou *DA* vidí, že dokáže sestrojit trojúhelník *ABC´*, jelikož zná dvě strany a úhel který svírají (obr. *Pos_p6_0*). Dále dokážeme sestrojit trojúhelník *BCC´* (sss) a na rovnoběžník již snadno doplníme, např. zobrazením úsečky *AC´* v posunutí $T_{\overrightarrow{AD}}$.



Obr. Pos_p6_0

Diskutujeme-li počet řešení, zaměříme se na trojúhelník *C´BC* (obr. *Pos_p6_d_0*). Z postupu konstrukce víme, že bod *C* hledáme jako průsečík kružnice *l* a kružnice *m*. Kružnice se mohou protínat ve dvou bodech, lze sestrojit dva čtyřúhelníky. Ne vždy však sestrojený čtyřúhelník bude konvexní. Počet řešení tedy závisí nejen na průniku kružnic *l* a *m*, ale na tom, zda sestrojený čtyřúhelník je konvexní, jak je dáno v zadání příkladu.



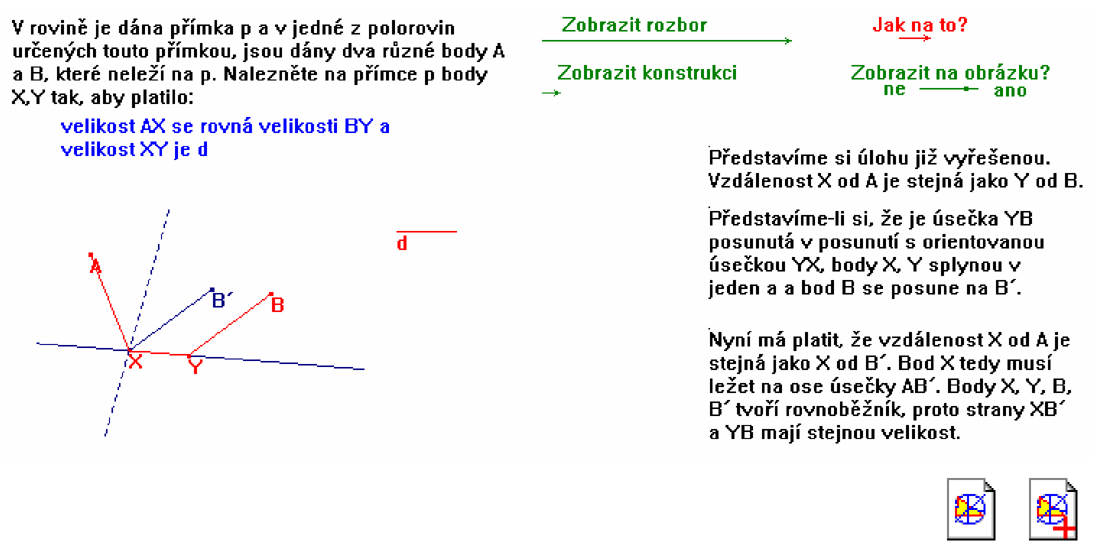
Obr. Pos_p6_d_0

Daný postup nám zaručuje pouze sestrojení uzavřené lomené čáry. Úloha má pak dvě, jedno nebo žádné řešení.

Příklad pos_p7a

V příkladu mají žáci za úkol nalézt body *X*, *Y* na přímce tak, aby platilo, že vzdálenost bodu *X* od *A* je stejná jako bodu *Y* od *B*. A navíc velikost úsečky *XY* musí být *d*. Ač úloha vypadá složitě, ve skutečnosti příliš obtížná není.

Představíme si úlohu již vyřešenou (obr. *Pos_p7a_0*). Jediné co nám v úloze vadí je délka úsečky *XY*. Pokud bychom měli dány jen body *A*, *B* a stačilo by naleznout bod *X* na přímce *p* tak, aby velikost *AX* byla stejná jako *AY*. Úlohu bychom snadno vyřešili pomocí osové souměrnosti. Ale takovou pro nás již řešitelnou úlohu můžeme dostat pomocí posunutí. Víme, že body *X*, *Y* leží na přímce *p* (směr posunutí) a jejich vzdálenost je *d* (velikost posunutí). Bod *B* posuneme v posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{XY}$.

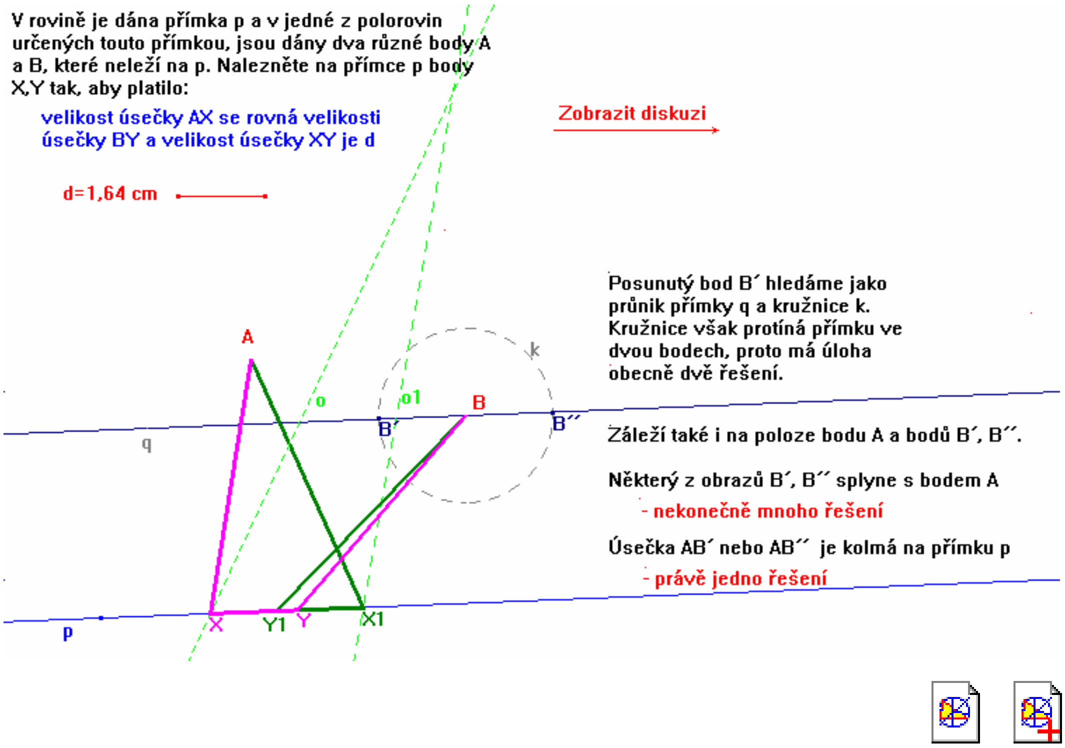


Obr. Pos_p7a_0

Nyní hledáme bod *X* na přímce *p* tak, že je stejně vzdálen od bodu *A* i od bodu *B´*. Bod *X* musí ležet na ose úsečky *AB´*.

Když hledáme bod *B´* jako obraz bodu *B* v posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{XY}$, body *XY* neznáme. Vedeme rovnoběžku *q* bodem *B* s přímkou *p* a pomocnou kružnici *k* o poloměru *d* se středem v *B*. Bod *B´* je pak průnik kružnice *k* a přímky *q*. Je zřejmé, že směr i velikost posunutí jsou zachovány.

Počet řešení úlohy rozebíráme v diskuzi (obr. *Pos_p7a_d_0*). Bod *B´* nalezneme jako obraz *B* v posunutí $T_{\overrightarrow{YX}}$, ale stejně tak můžeme najít bod *B´´* v posunutí $T_{\overrightarrow{XY}}$. Na obrázku vidíme, že kružnice *k* protíná přímku *q* ve dvou bodech, úloha má obecně dvě řešení.



Obr. pos_p7a_d_0

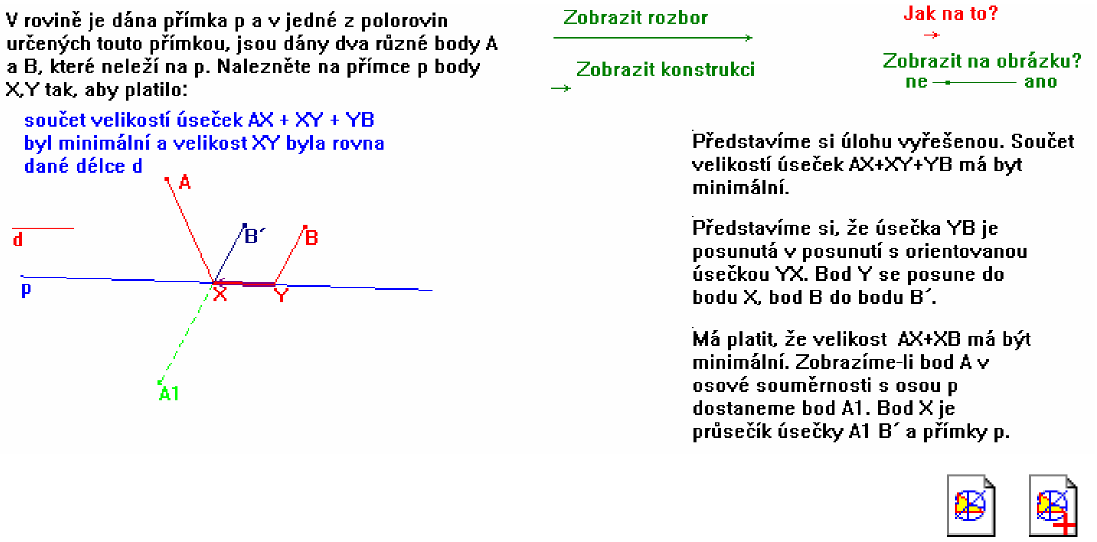
Záleží také na poloze bodů *A*, *B´* a *B´´*.

Pokud však některý z bodů *B´*, *B´´* splyne s bodem *A*, pak má úloha nekonečně mnoho řešení. „Úsečka *AB´* (*AB´´*)“ má nekonečně mnoho os, tedy i nekonečně mnoho průniků s přímkou *p*.

Pokud je úsečka *AB´* nebo *AB´´* kolmá na přímku *p*, pak osa této úsečky je rovnoběžná s *p*, úloha má tedy jedno řešení.

Příklad pos_p7b

V tomto příkladě se úkol liší od předchozího tím, že máme nalézt body *X*, *Y* na přímce *p* tak, aby součet velikostí úseček *AX*, *XY* a *YB* byl minimální. Využitím posunutí (obr. *Pos_p7b_0*) se úloha zjednoduší na úkol nalézt bod *X* na přímce *p* tak, aby součet úseček *AX* a *XB´* byl minimální. Díky osové souměrnosti bod *X* snadno najdeme.



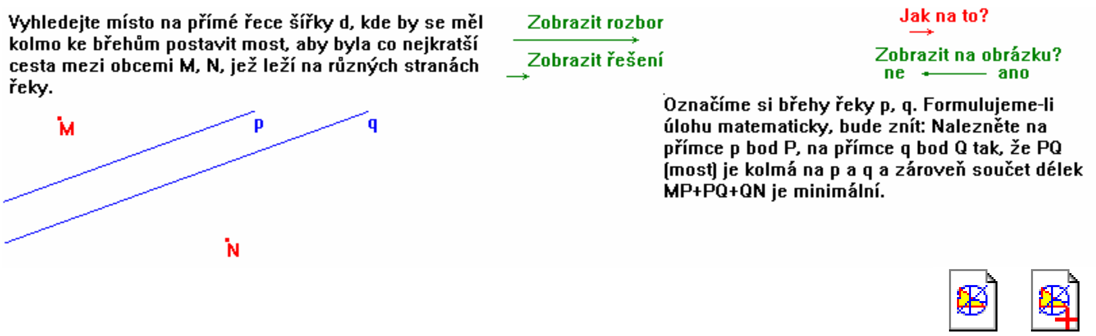
Obr. Pos_p7b_0

Postupujeme tedy obdobným způsobem jako v předešlém příkladu pos_p7a. V předchozím příkladě jsme posouvali bod *B* v posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{XY}$ i $\overrightarrow{YX}$. Tady však hledáme minimální cestu. Nejkratší cesta je pouze v případě, posunujeme-li směrem k bodu *A*. Součet úseček je skutečně minimální, jelikož pro libovolný bod *Z* různý od bodu *X*, ležící na přímce *p*, platí trojúhelníková nerovnost:

$$|A1\,B'| < |A1\,Z| + |Z\,B'|$$

Příklad pos_p8a

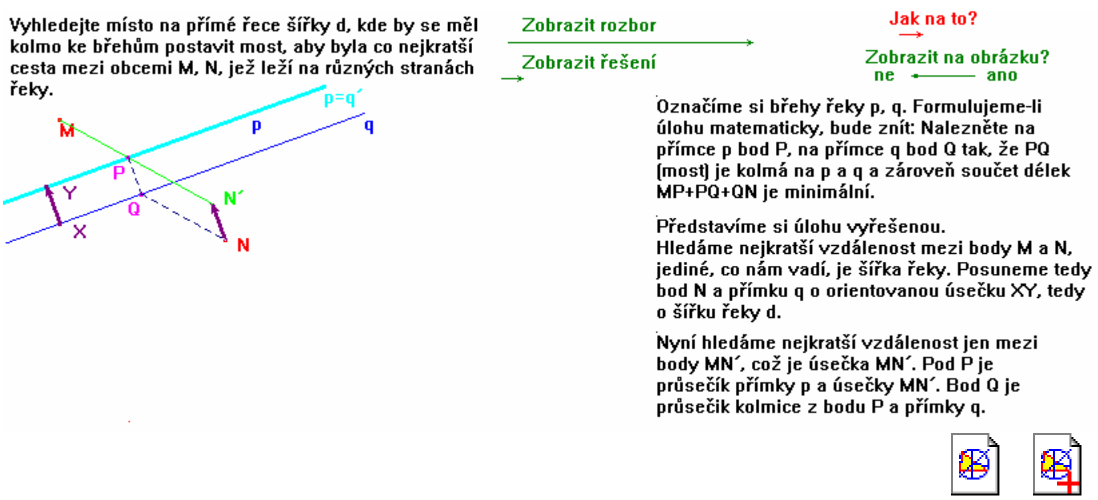
Matematická formulace zadání následující úlohy má tvar: nalezněte na přímce *p* bod *P* a na přímce *q* bod *Q* tak, že úsečka *PQ* je kolmá na přímky *p*, *q* a zároveň součet délek *MP*, *PQ*, *QN* je minimální (obr. *Pos_p8a_0*).



Obr. Pos_p8a_0

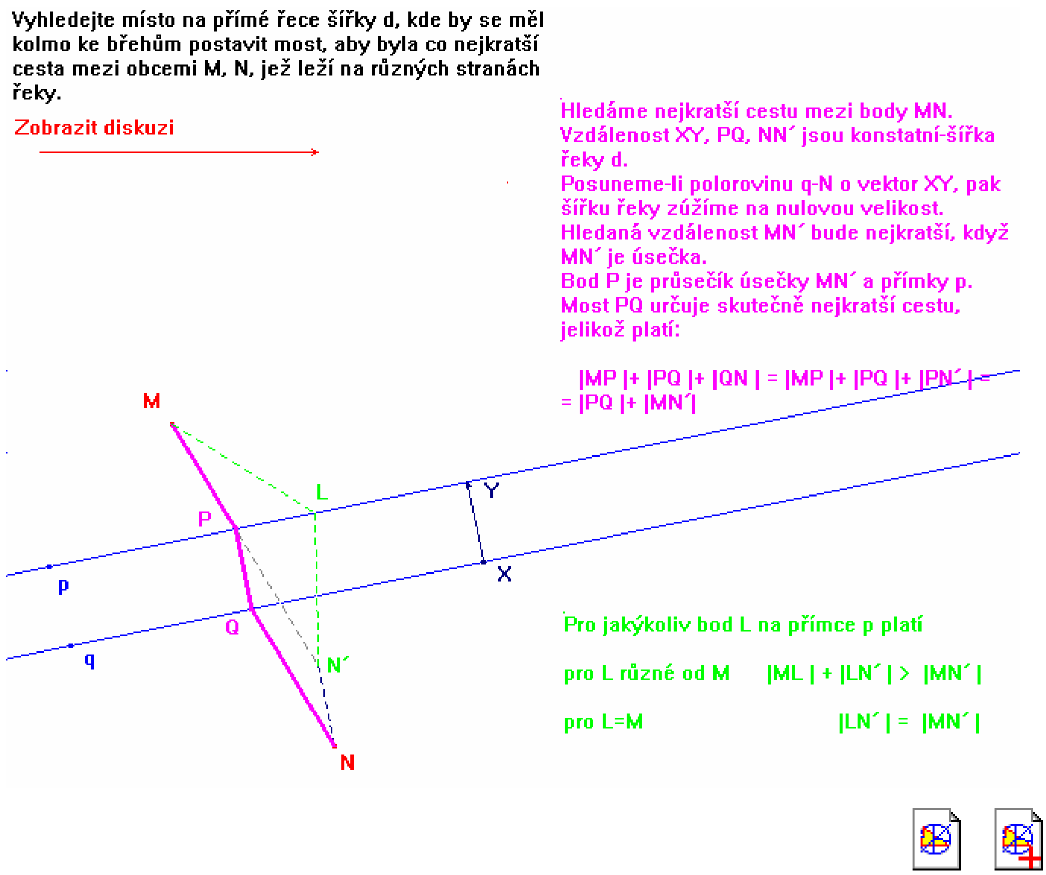
Pokud bychom měli hledat nejkratší cestu mezi body *M*, *N* a mezi body by byla pouze jedna přímka a ne dvojice přímek *p*, *q* byla by úloha jasná – nejkratší cesta je úsečka *MN*. Jak tedy jednu přímku posunout? Na obrázku *Pos_p8a_1* vidíme, že jsme využili posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{XY}$. Posuneme celou polorovinu *Nq*, bod *N* se zobrazí do bodu *N´* a přímka *q* do *q´*, která splyne s *p*.

Velikost úsečky *XY* je stejná jako šířka řeky – vzdálenost přímek *p*, *q*. Úsečka *XY* je kolmá na přímky *p*, *q*. Nejkratší vzdálenost mezi body *M* a *N´* nastane, když *MN´* bude úsečka. Přímku *p* -břeh - protíná tato úsečka v bodě *P* a bod *Q* nalezneme jako průnik kolmice na přímku *p* z *P* a přímky *q*.



Obr. Pos_p8a_1

Je však přes bod *P* cesta skutečně nekratší? O tom se přesvědčíme v diskuzi. Po otevření souboru se nám zobrazí obrázek *Pos_p8a_d_0*.



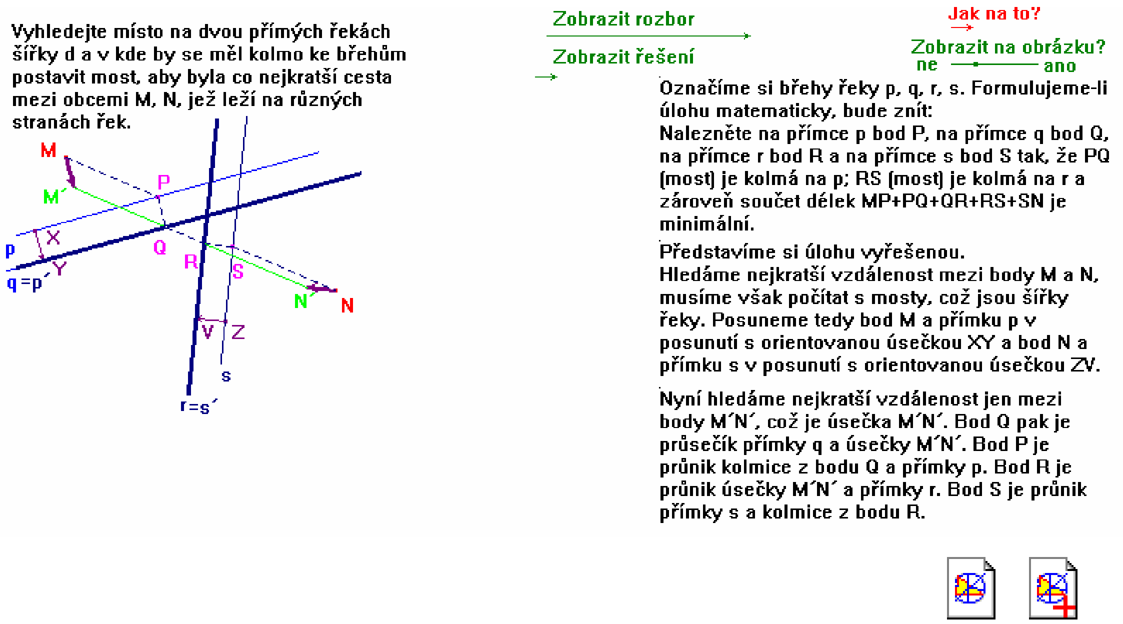
Obr. Pos_p8a_d_0

Vidíme, že cesta přes bod *P* je skutečně nejkratší, neboť když zvolíme libovolný bod *L* různý od *P*, platí „zelená“ nerovnost na obrázku Pos_p8a_d_0. Nejkratší cesta nastává, když body *MN´* spojuje úsečka a právě tato úsečka protíná přímku *p* v bodě *P*.

Pokud využijeme nabídky Cabri „*Vzdálenost a délka*“ můžeme si změřit jednotlivé úseky „růžové“ a „zelené“ cesty a přesvědčit se, že skutečně „růžová“ cesta přes bod *P* je nejkratší. Žáci mohou libovolně pohybovat s body *M*, *N* a *L* a sledovat měnící se vzdálenosti.

Příklad pos_p8b

Následující příklad je podobný předchozí úloze, je však obtížnější o to, že stavíme most ne přes jednu, ale přes dvě řeky. Ale úkol je stejný, a to nalézt nejkratší cestu. Opět nám překáží šířka řek. Úlohu jsme si pomocí posunutí šikovně zjednodušili, můžeme tento trik provést i zde. Jelikož ale máme dvě řeky různých šířek, musíme posunutí provést dvakrát (obr. *Pos_p8b_0*).



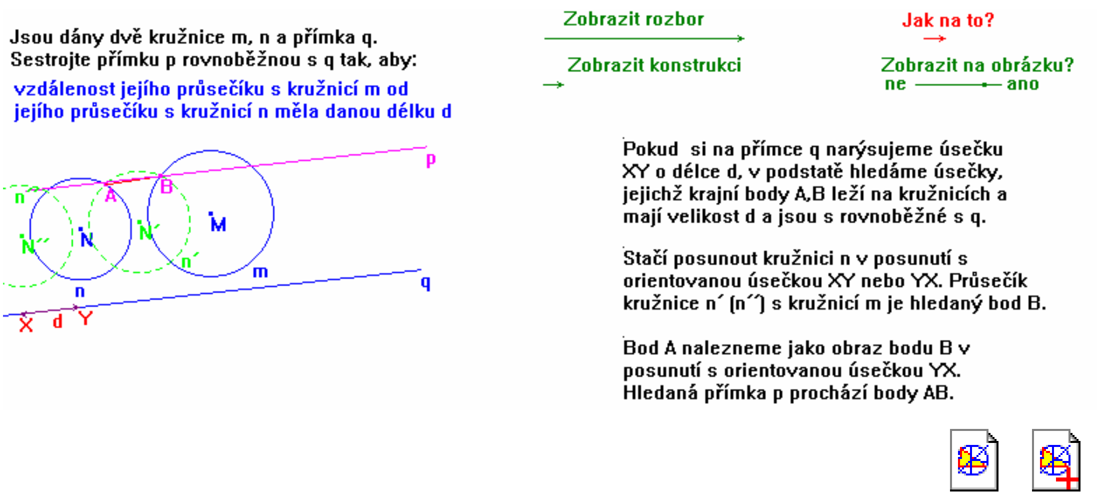
Obr. Pos_p8b_0

Polorovinu *Mp* posuneme v posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{XY}$, polorovinu *Ns* posuneme v posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{ZV}$. Nejkratší vzdálenost mezi body *M´* a *N´* nastane, když *M´N´* bude úsečka.

Příklad pos_p9a

V příkladu máme za úkol narýsovat rovnoběžku s danou přímkou tak, aby vzdálenost průsečíku rovnoběžky s jednou kružnicí a průsečíku s druhou kružnicí měla danou velikost.

Na obrázku *Pos_p9a_0* v rozboru vidíme, jak vypadá úloha vyřešená. Pokud si na přímce *p* narýsujeme pomocnou úsečku *XY* o velikosti *d*, pak máme za úkol najít úsečku *AB* shodnou a rovnoběžnou s *XY*, tak aby krajní body *A*, *B* ležely po řadě na kružnicích *m*, *n*. Což nám vlastně přímo říká, jak a o kolik posunout jednu z kružnic.



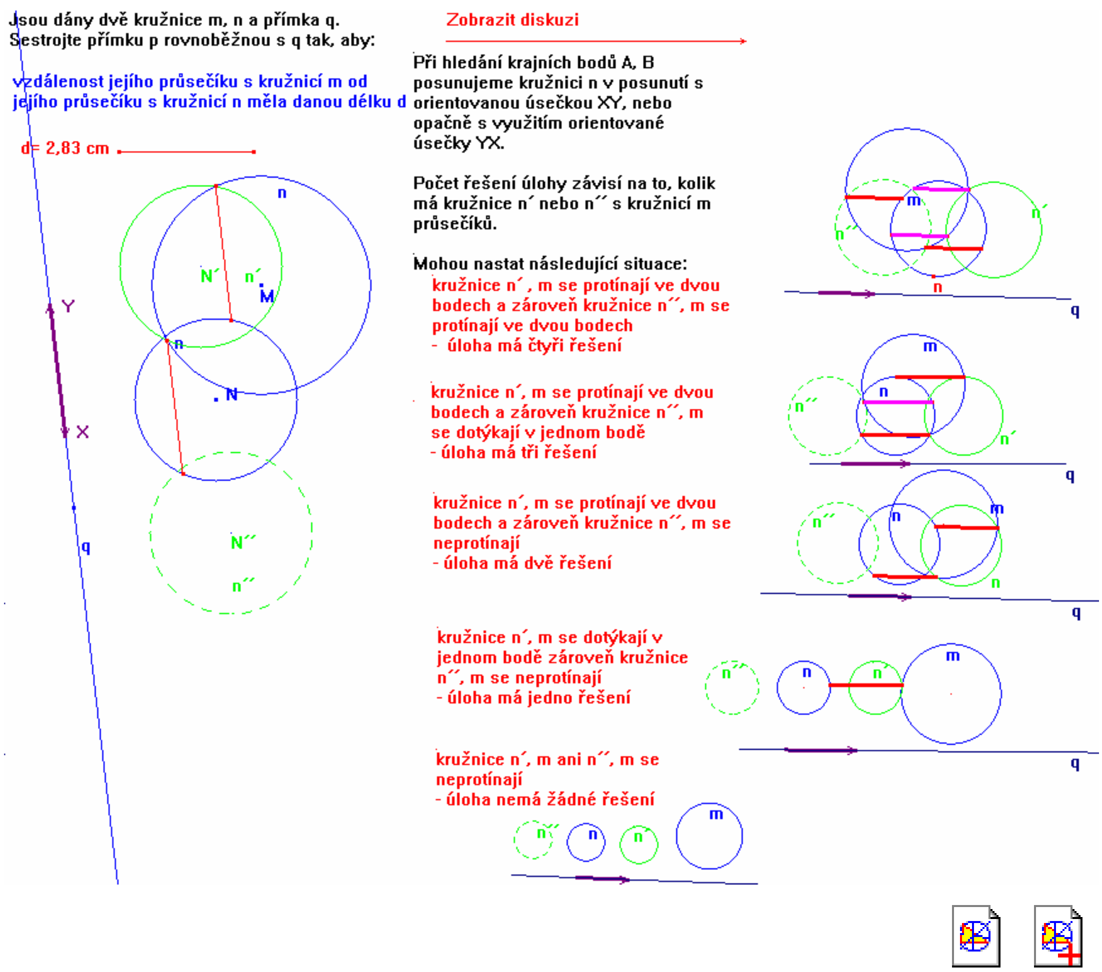
Obr. Pos_p9a_0

Posuneme-li tedy například kružnici *n* v posunutí $T_{\overrightarrow{XY}}$, jeden krajní bod *B* hledané úsečky získáme jako průnik posunuté kružnice *n´* a kružnice *m*. Bod *A* nalezneme jako obraz bodu *B* v posunutí $T_{\overrightarrow{YX}}$. Přímka *p* pak prochází body *A*, *B* nebo ji můžeme narýsovat jako rovnoběžku s přímkou *q*, která prochází bodem *B* a bod *A* nemusíme hledat.

Při hledání průsečíku posunuté kružnice *n´* s kružnicí *m* žáky napadne, že úloha bude mít jistě víc řešení. Zároveň si žáci uvědomí, že délka *d* nám určuje velikost posunutí, ale orientace na přímce *p* může být dvojí. Kružnici *n* lze posunout nejen pomocí orientované úsečky $\overrightarrow{XY}$, ale i pomocí orientované úsečky $\overrightarrow{YX}$. Podle obrázku *Pos_p9a_d_0* vidíme, že počet řešení skutečně závisí na počtu průsečíků posunuté kružnice *n´*a *n´´* s kružnici *m*.

Malý obrázek vpravo se vztahuje ke konkrétní situaci a velký obrázek vlevo je interaktivní, žáci mohou měnit poloměr kružnic a velikost parametru *d* a pozorovat, jak se za daných podmínek mění počet řešení.

Mohou tedy obecně nastat situace vyobrazené na obrázku *Pos_p9a_d_0*.



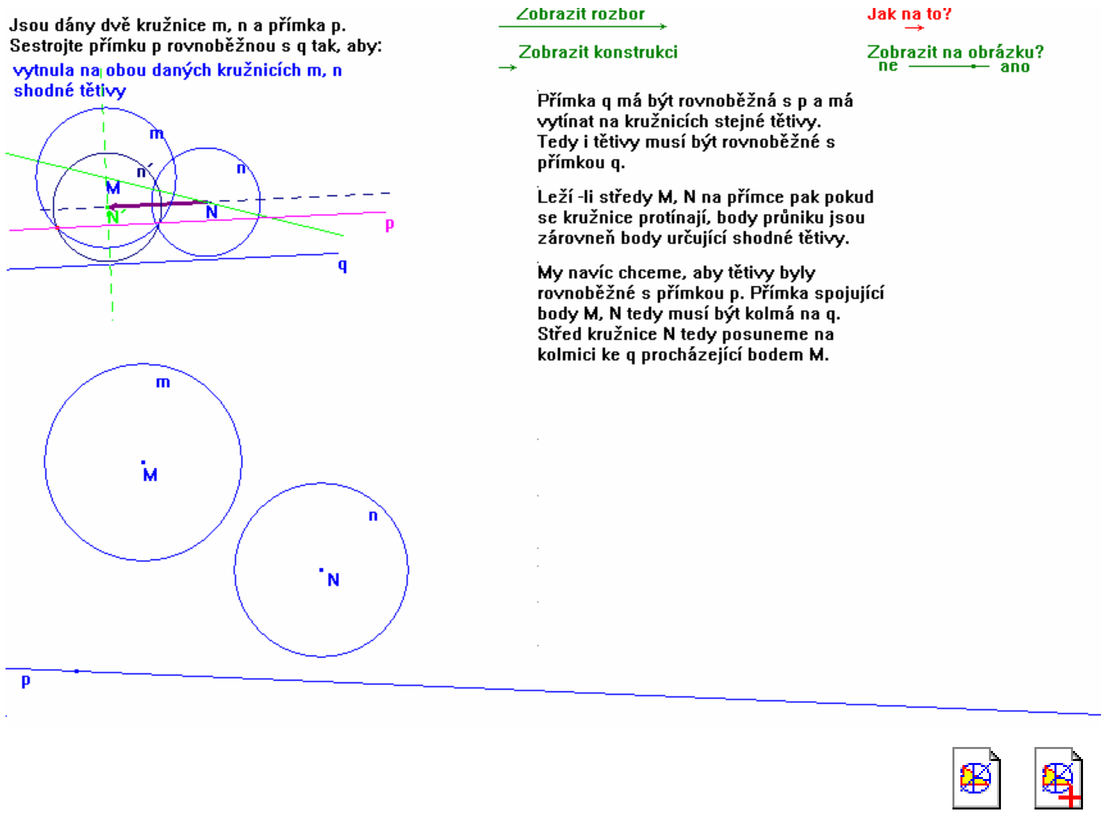
Obr. Pos_p9a_d_0

Z obrázku vidíme, že úloha může mít čtyři, tři, dvě, jedno nebo žádné řesení.

Příklad pos_p9b

Následující příklad je podobný předchozímu, ale tentokrát je za úkol vést rovnoběžku tak, aby vytnula na obou kružnicích tětivy stejné délky. Kdy jsou tětivy na dvou kružnicích stejné? Pokud se dvě kružnice protínají, tak body průniku určitě určují stejné tětivy. Proto budeme hledat takové posunutí, aby se nám kružnice protinaly. Navíc chceme aby tětivy byly rovnoběžné se zadanou přímkou *q*.

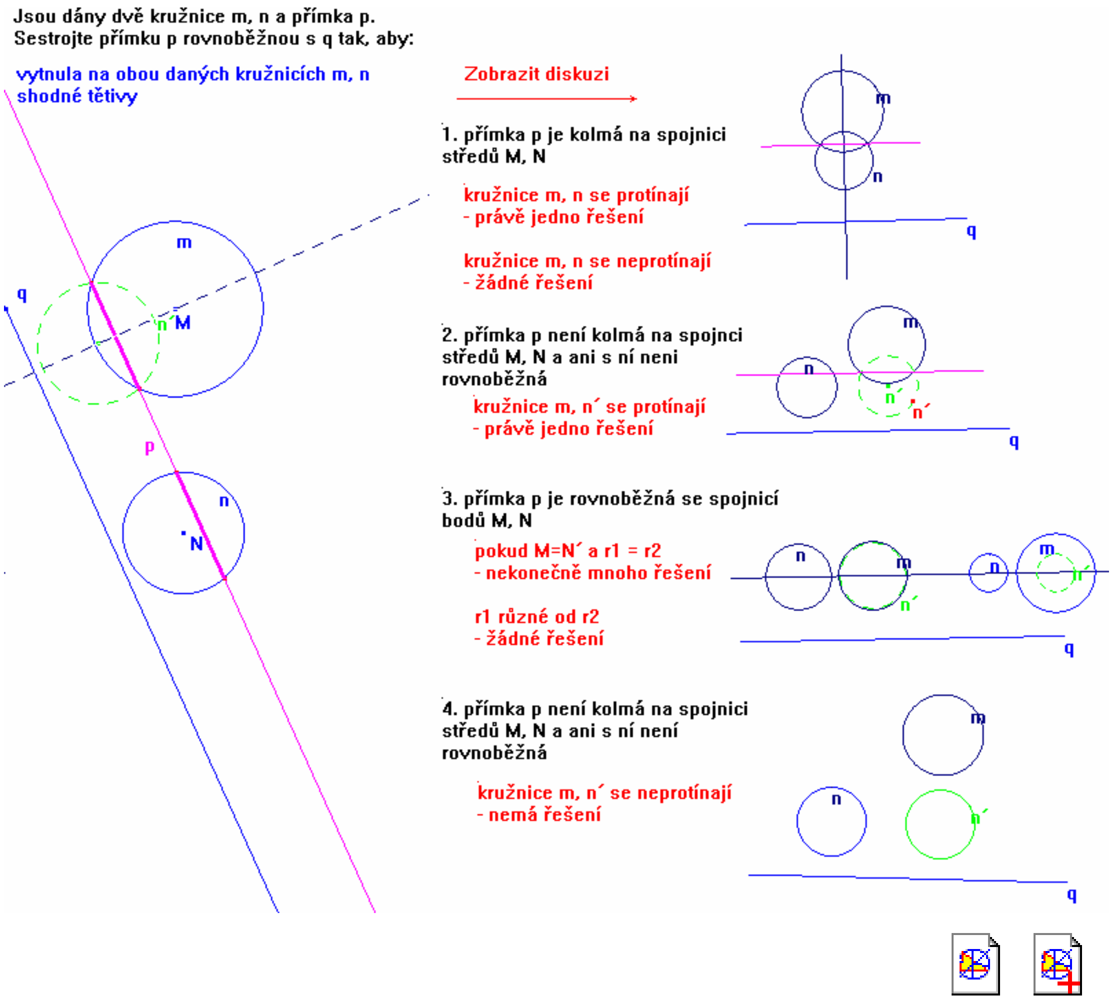
Po zobrazení rozboru na obrázku *Pos_p9b_0* prostudujeme jak příklad řešit. Vidíme že pokud posuneme střed jedné kružnice tak, aby spojnice středů obou kružnic ležela na kolmici k přímce *q*, pak všechny tětivy kolmé na spojnici středů budou rovnoběžné s přímkou *q*. Nyní nám zbývá určit, které dvě tětivy jsou shodné – což jak vidíme z obrázku jsou tětivy s krajními body v průsečících kružnic *m*, *n´*. Těmito body vedeme přímku *p*.



Obr. Pos_p9b_0

V souboru diskuze jsou opět malé názorné obrázky vpravo od textu, které se vztahují k jednotlivým částem diskuze. Velký obrázek vlevo je interaktivní a slouží pro experimentování. Lze měnit poloměry a umístění kružnic *m*, *n* i přímky *q*.

Na obrázku *Pos_p9b_d_0* vidíme, že mohou nastat čtyři situace. Úloha nemá žádné řešení, nebo má právě jedno řešení, nebo nekonečně mnoho řešení.



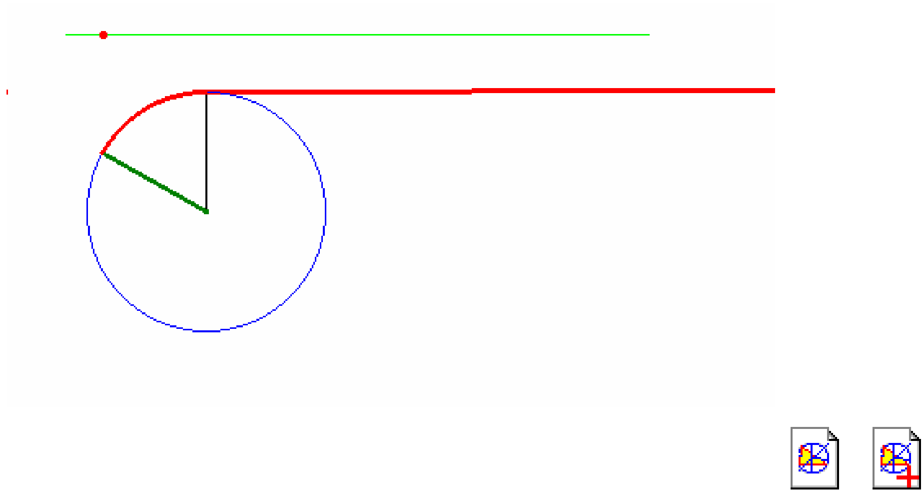
Obr. Pos_p9b_d_0

4. Otočení

4. 1 Základní poznatky

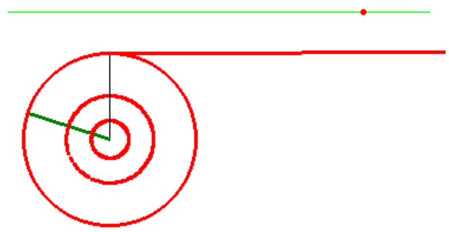
S otočením se žáci poměrně běžně setkají v praxi. Z hodin fyziky i z běžného života mají určitou představu, co znamená otočení a otáčivý pohyb. Na obrázku *Otočení 1.0* je model cívky, na kterou navíjíme niť pomocí zelené tyče. Navíjení ovládáme pohybem červeného bodu po zelené úsečce nad obrázkem.

Úloha otočení 1*: Jaký úhel svírá navíjecí tyčka s kolmým směrem?*



Obr. Otočení 1.0

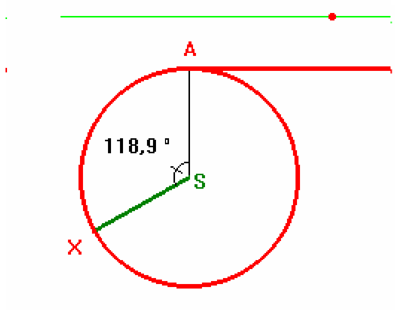
Položíme žákům otázky: „Co můžeme říci o tom, jak se otáčí koncový bod navíjecí tyče? Jaký úhel navíjecí tyč svírá s kolmou tyčí?“ Očekáváme odpověď, že koncový bod se pohybuje po kružnici – přímo to vidíme na obrázku. Otáčí se celá navíjecí tyčka, i kdybychom vybrali libovolný bod na tyči a zvolili nabídku „*Stopu ano/ne*“, při otáčení bude tento bod vykreslovat kružnici (obr. *Otočení 1.1*). Existuje nějaký bod na zelené tyči, který se při otáčení nepohybuje a zůstane na místě? Žákům tak napovídáme, aby objevili střed otáčení.



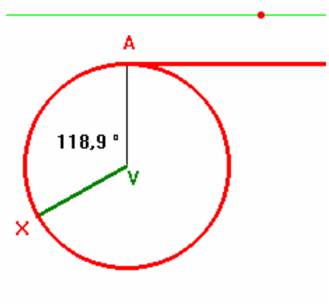
Obr. otočení 1.1

Pro lepší názornost si označíme střed cívky *S*, konec navíjecího ramene *X*, a koncový bod svislé tyče *A*.

Úhel mezi tyčemi změří žáci snadno. Buď si úhel nejprve vyznačí pomocí „*Vyznačit úhel*“ – ten vykreslí oblouček a vybráním nabídky „*Úhel*“ a aktivováním značky obloučku se úhel vyjádří ve stupních (obr. *Otočení 1.2*). Nebo změří úhel rovnou pomocí nabídky „*Úhel*“ (obr. *Otočení 1.3*). Cabri označí vždy menší ze dvou úhlů.

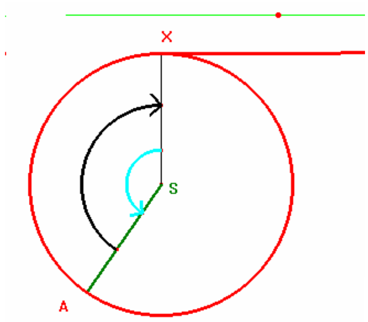


Obr. Otočení 1.2



Obr. Otočení 1.3

Pokud pohybujeme červeným bodem na zelené úsečce doprava – nit se na cívku navíjí, pokud doleva, nit se zase z cívky naopak odvíjí. Na obrázku Otočení 1.4 nastává situace, kdy už jsme nějakou nit navinuli, ale pohyboval předtím se bod *A* od *X* (navíjení) nebo *A* k *X* (odvíjení)?



Obr. Otočení 1.4

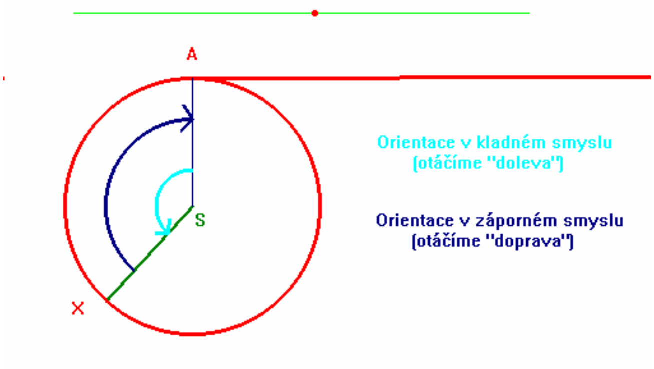
Jedno z ramen určíme za „počáteční“ a druhé za „koncové“ a tím určíme orientaci. Zavedeme ***orientovaný úhel***.

Definice

Uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem V se nazývá ***orientovaný úhel*** *AVB. Tento úhel zapisujeme AVB.*

Polopřímka VA se nazývá ***počáteční rameno****, polopřímka VB* ***koncové rameno*** *orientovaného úhlu AVB, bod V* **vrchol** *orientovaného úhlu AVB.* [3]

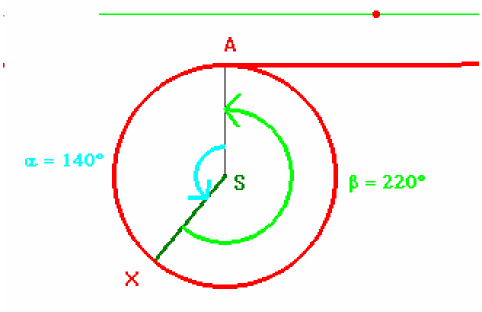
Na našem obrázku *Otočení 1.5* je rameno *AS* počáteční a ramenem *XS* můžeme otáčet. Otáčet můžeme proti směru hodinových ručiček - **v kladném smyslu** nebo po směru hodinových ručiček - **v záporném smyslu**.

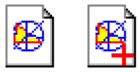


Obr. Otočení 1.5

Vkladném smyslu označujeme úhly se znaménkem kladným + a v záporném smyslu se záporným znamínkem –.

U uvedených obrázků jsme se zatím nezajímali podrobněji o velikost úhlu. Na obrázku *Otočení 1.6* vidíme, že velikost úhlu *ASX* je 140° ale i 220 Který výsledek je správný? Označíme si úhel 140° jako α a 220° jako β. I když se bod *X* pohybuje je zřejmé, že vždy platí β = 360°- α. Polopřímka *SX* při svém otočení z počátečního ramene *SA* koncového ramene *SX* opíše právě jeden z úhlů α , β.





Obr. Otočení 1.6

Definice:

Velikost toho z úhlů α, β, který opíše polopřímka při otočení z počátečního ramene SA do koncového ramene SX v ***kladném smyslu****, se nazývá* ***základní velikost orientovaného úhlu*** *ASX.* [3]

Tedy na obrázku *Otočení 1.6* základní velikost orientovaného úhlu *ASX* je α a základní velikost orientovaného úhlu *XSA* je β.

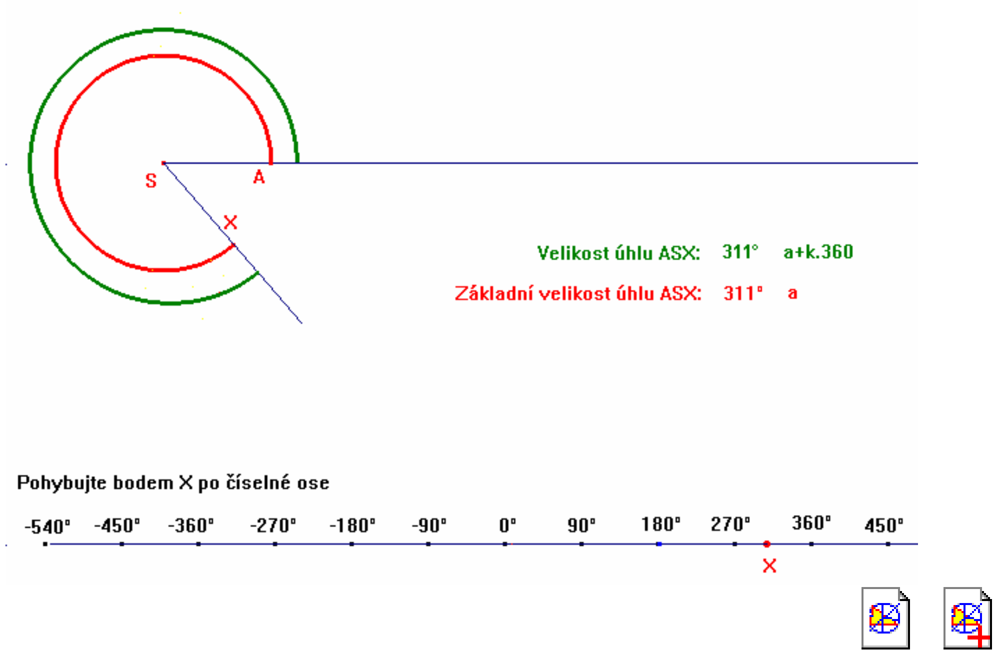
Pro základní velikost α každého orientovaného úhlu je $0 \leq \alpha < 2\pi$ respektive $0° \leq \alpha < 360°$.

Ale my už jsme niť natočili, bod *X* oběhl jednou celou cívku od bodu *A* k bodu *A*, a pak ještě oblouk odpovídající úhlu 140°, tedy velikost orientovaného úhlu *AXS* by měla být 140°+360° což je 500°. A pokud otočíme bod *X* ještě o jednu otočku bude to dokonce 140°+360°+360° což je 860°. Jsou to také velikosti orientovaného úhlu *AXS*? Tuhle situaci si podrobně vysvětlíme na jiném obrázku *Otočení 2.0*.

Na následujícím obrázku pohybujeme červeným bodem *X* po ose. Na kružnici se ukazuje obloučkem velikost úhlu. Červeným obloučkem je vykreslena velikost úhlu *ASX* jen od 0° do 360°, zelené obloučky vykreslují velikost úhlu podle osy.

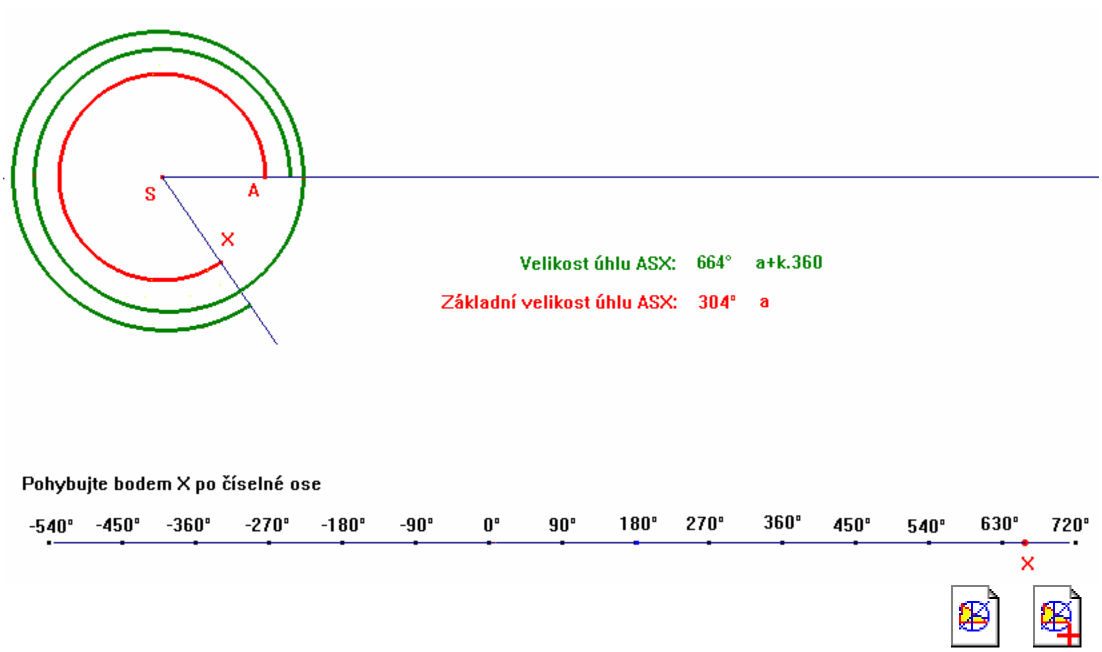
Do 360° je vidět, že oblouky jsou stejné.

Úloha otočení 2: *Základní velikost úhlu*



Obr. Otočení 2.0

Od 360° je vidět, že zelený oblouk vykreslil již jednu celou kružnici (360°) navíc oproti červenému (obr. *Otočení 2.1*).



Obr. Otočení 2.1

Stejně tak se úhly vyznačují, zajede-li žák do záporné části osy.

Definice:

***Velikostí** orientovaného úhlu ASX, jehož základní velikost je v stupňové míře α, se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 360°$, kde k je libovolné celé číslo.* [3]

Podle definice přísluší každému orientovanému úhlu nekonečně mnoho velikostí. Každé dvě velikosti se liší o celistvý násobek 360° nebo 2π. Tedy náš orientovaný úhel *ASX* na obrázku *Otočení 1.6* má velikost 140° i 500° i 860°.

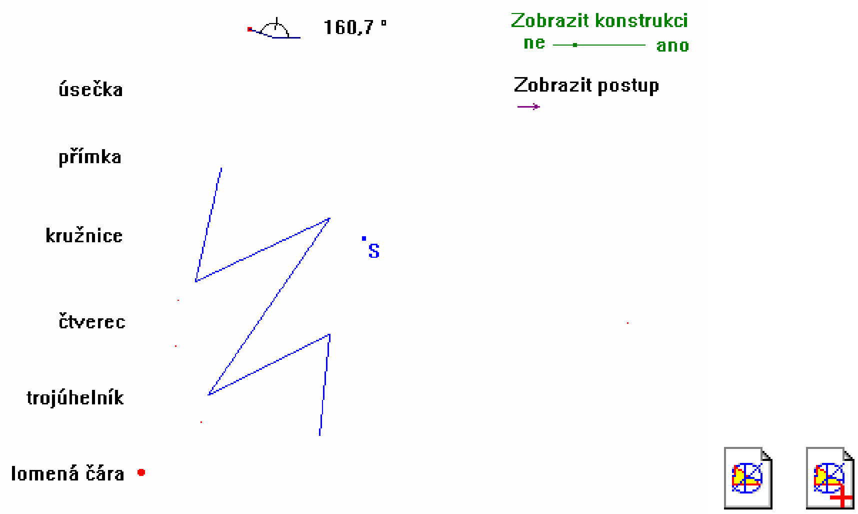
Odpověď na otázku z úlohy 1 - *Jaký úhel svírá navíjecí tyčka s kolmým směrem?* je, že tyčka svírá s kolmým směrem úhel 140° (úhel se samozřejmě může měnit pohybem červeného bodu po zelené úsečce).

Vrátíme-li se k původnímu obrázku cívky (obr. *Otočení 1.0*), v podstatě jsme otáčeli bod *X* kolem středu *S* a pátrali jsme, jak správně určit úhel otočení.

Můžeme si s žáky shrnout, co je zapotřebí mít dáno, abychom mohli nějaký objekt zobrazit v otočení. Úhel, orientaci otáčení a pevně zvolený bod – střed kružnic, po kterých se objekty otáčí. Otočení je dáno **středem otáčení** a jednou z velikostí **orientovaného úhlu otáčení** (obvykle základní velikostí nebo největší zápornou velikostí).

Následující obrázek umožňuje žákům objevovat, jak se v otočení zobrazují různé objekty. Příklad je ilustrační, takže využívá nabídky Cabri objekt zobrazit v otočení. Střed otáčení a velikost orientovaného úhlu je dána.

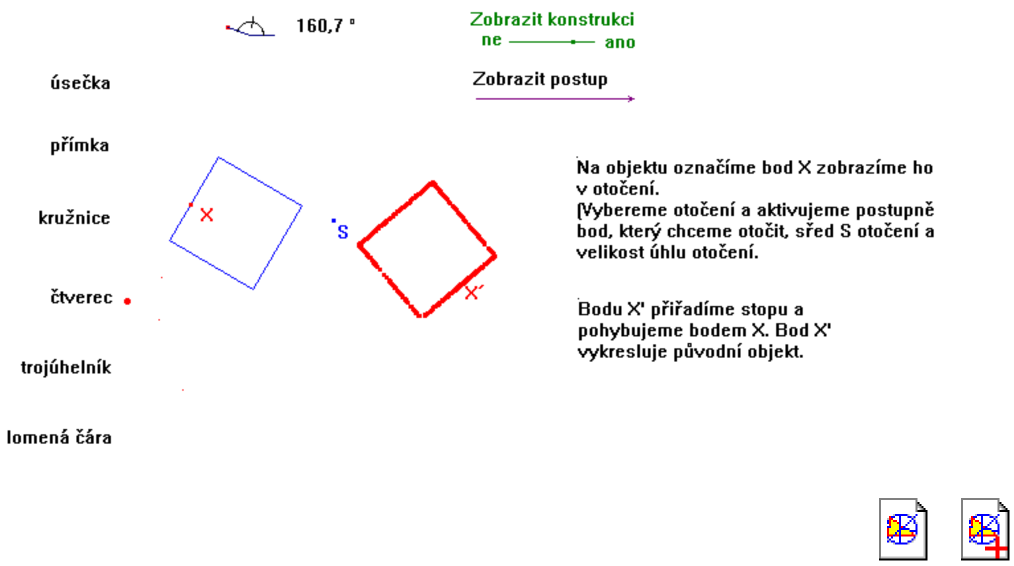
Úloha otočení 3: *Pomocí stopy bodu nalezněte obraz objektu v daném otočení (obr. Otočení 3.0).*



Obr. Otočení 3.0

Ovladačem v levé části obrázku volíme různé objekty – úsečku, kružnici, čtverec, trojúhelník a lomenou čáru. Žáci mají za úkol pomocí stopy objektu nalézt obraz v otočení (obr. *Otočení 3.1*). Postup řešení je stejný jak v kapitole Posunutí – základní poznatky, kde je i podrobný návod (viz str. 17)

Lze měnit velikost úhlu pomocí schematického obrázku úhlu a polohu středu otáčení. Zde již uvažujeme pouze základní velikost úhlu.



Obr. Otočení 3.1

Experimentováním s velikostí úhlu a umístěním středu žáci rychle pochopí, že obraz je vždy stejný jako vzor. Posunutí patří mezi shodné zobrazení. Při nastavení velikosti úhlu na 0° se objekt zobrazí sám na sebe.

Společně s žáky vyslovíme definici otočení.

<u>*Definice:*</u>

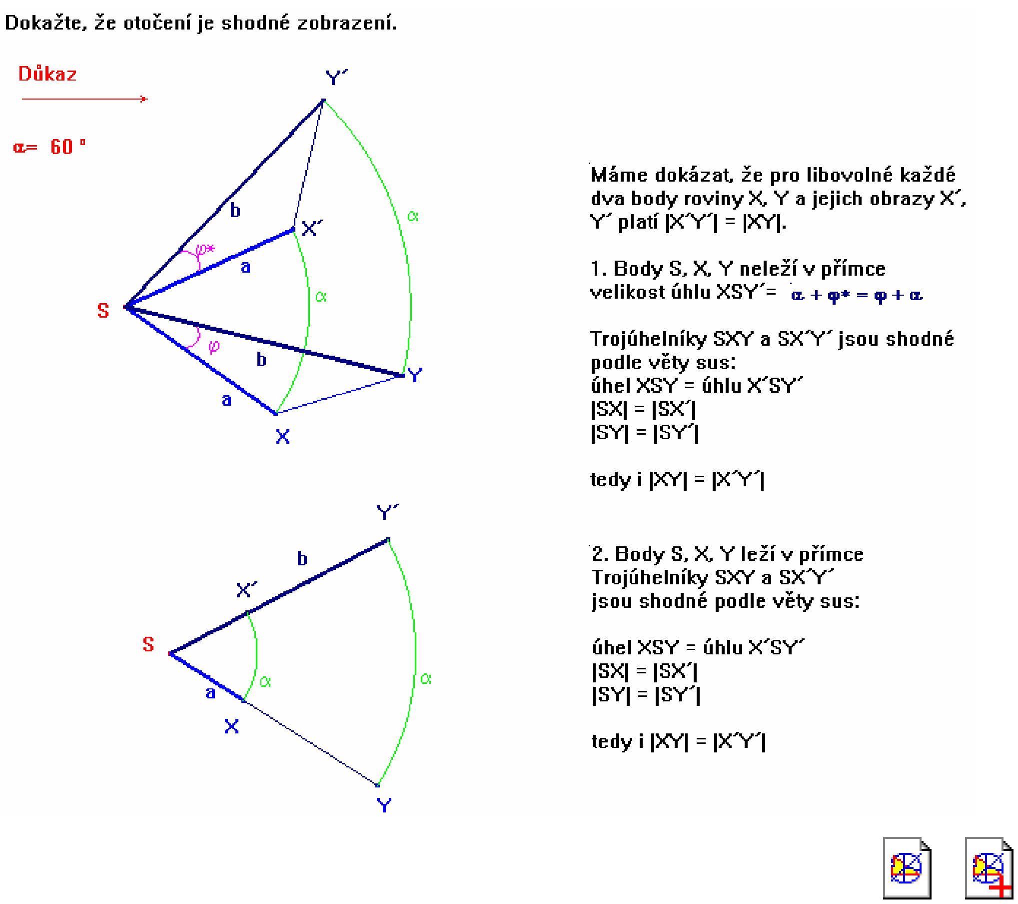
Je dán orientovaný úhel, jehož jedna velikost je φ a bod S. Otočení neboli rotace je shodné zobrazení $R_{(S,\varphi)}$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ

2. bodu S bod $S' = S$. [8]

Věta 2: *Dokažte, že otočení je shodné zobrazení.*

Z definice shodných zobrazení chceme dokázat, že pro libovolné každé dva body roviny X, Y a jejich obrazy X', Y' v otočení se středem S a orientovaným úhlem α platí $|X'Y'| = |XY|$.



Obr. Otočení jako shodnost

Na obrázku *Otočení jako shodnost* vidíme provedení důkazu pro případy kdy body X, Y, S neleží v přímce a kdy body X, Y, S leží v přímce. Zbývá dokázat platnost vztahu $|X'Y'| = |XY|$ pro situaci, kdy bod S leží mezi X, Y. Důkaz je analogický jak v předchozích případech.

Ukázali jsme, že posunutí je shodné zobrazení. Platí tedy pro ně všechny základní vlastnosti shodných zobrazení (viz kapitola Shodné zobrazení – str.9).

V následující řadě úloh si žáci procvičí zobrazování různých objektů podle definice. Úlohy by měli řešit stejnou metodou jako pomocí pravítka a kružítka na papíře, ne využitím nabídky Cabri „*otočení*“. Cabri ale bohužel neumí nanést úhel dané velikosti. Místo nanést úhel tedy zadáme nanést oblouk příslušející danému úhlu. Velikost oblouku snadno vypočítáme pomocí vzorce:

$$\ell = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180}$$

kde α je velikost daného úhlu ve stupních, *r* poloměr kružnice, se středem ve středu otáčení a procházející otáčeným bodem. Je-li α v radiánech, platí:

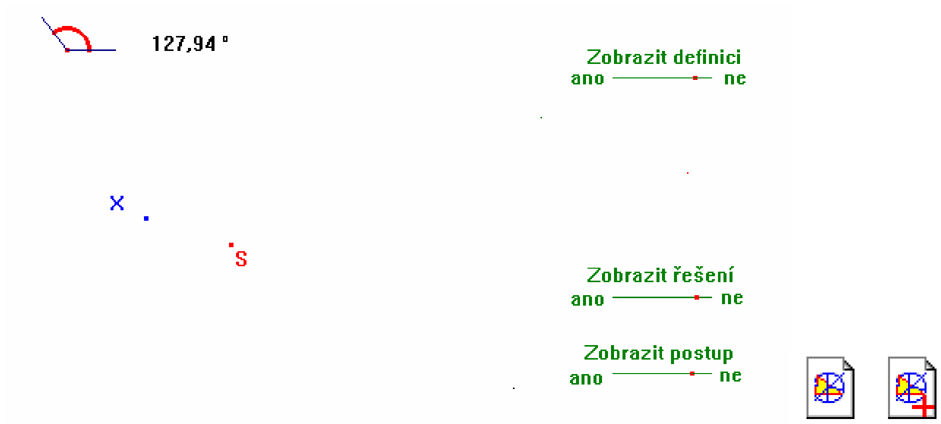
$$\ell = \alpha \cdot r$$

Při otáčení bodu je možné postup vyzkoušet, ale pro jeho složitost v rozsáhlejších příkladech nebo v konstrukčních úlohách raději využijeme nabídku Cabri „*otočení*“.

Stejně jako v kapitole 3.1 Posunutí má žák k dispozici v každém souboru ovladače. Má možnost samostatně úlohu vypracovat a správnost zkontrolovat pomocí ovladače „Zobrazit řešení“. Pokud si ještě neosvojil definici, opět se nabízí možnost „Zobrazit definici“. Ovladač „Zobrazit postup“ je návod jak při konstrukci postupovat v Cabri.

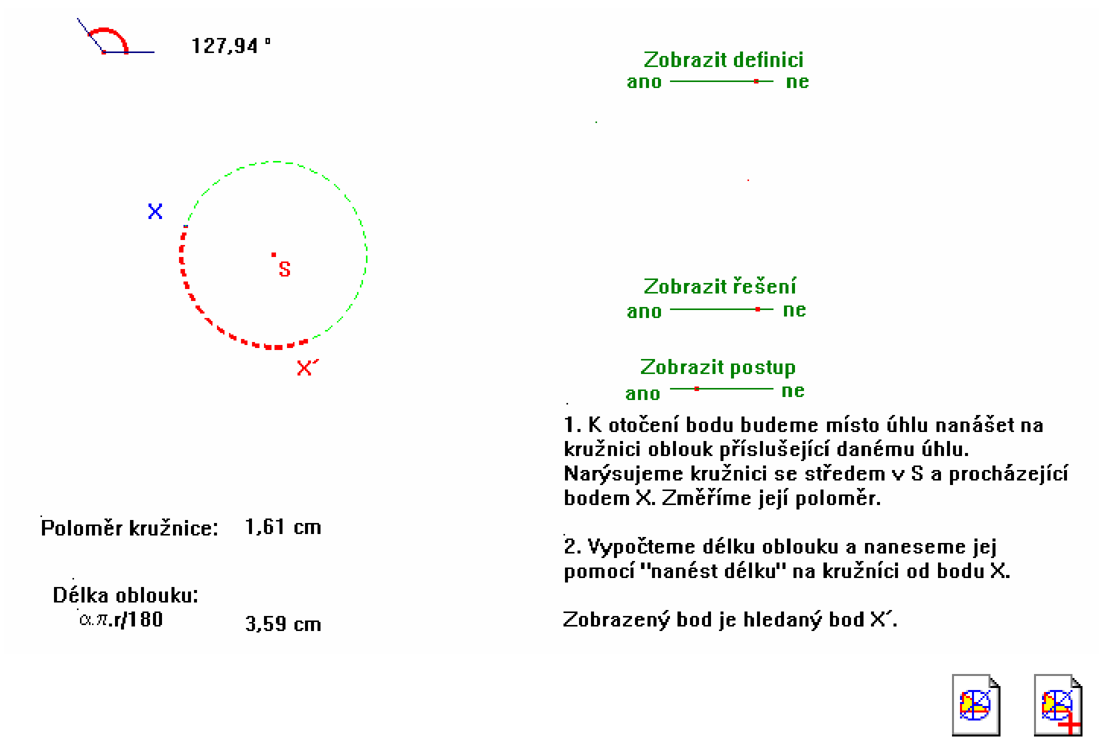
První nejjednodušší úloha je nalezení obrazu bodu v daném otočení.

Úloha otočení 4: *Pomocí definice otočení nalezněte obraz bodu v daném otočení (obr. Otočení 4.0).*



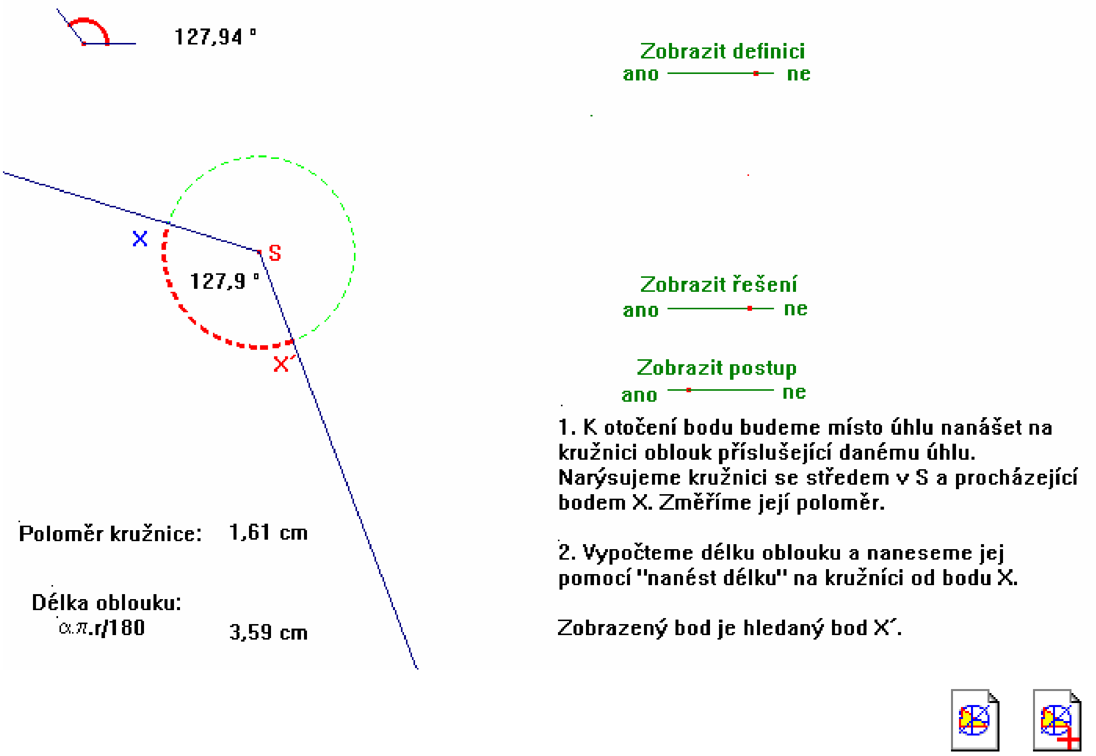
Obr. Otočení 4.0

Příklad řešíme pomocí nanášení délky oblouku na kružnici. Postup nám krok za krokem popisuje, jak narýsovat kružnici a nanést délku oblouku pomocí nabídky Cabri „*Nanést délku*“ (obr. *Otočení 4.1*). Úhel je kladný – nanášíme směrem doprava proti směru hodinových ručiček – v kladném slova smyslu.



Obr. Otočení 4.1

Nabídka programu „*Úhel*“ změří velikost úhlu daného třemi body. Aktivujeme-li postupně bod *X*, *S* a *X´* program mám ukáže, že velikost úhlu *XSX´* je skutečně stejná jako zadaného úhlu α (obr. *Otočení 4.2*). Pro větší názornost si ramena úhlu zvýrazníme tak, že dorýsujeme polopřímky.



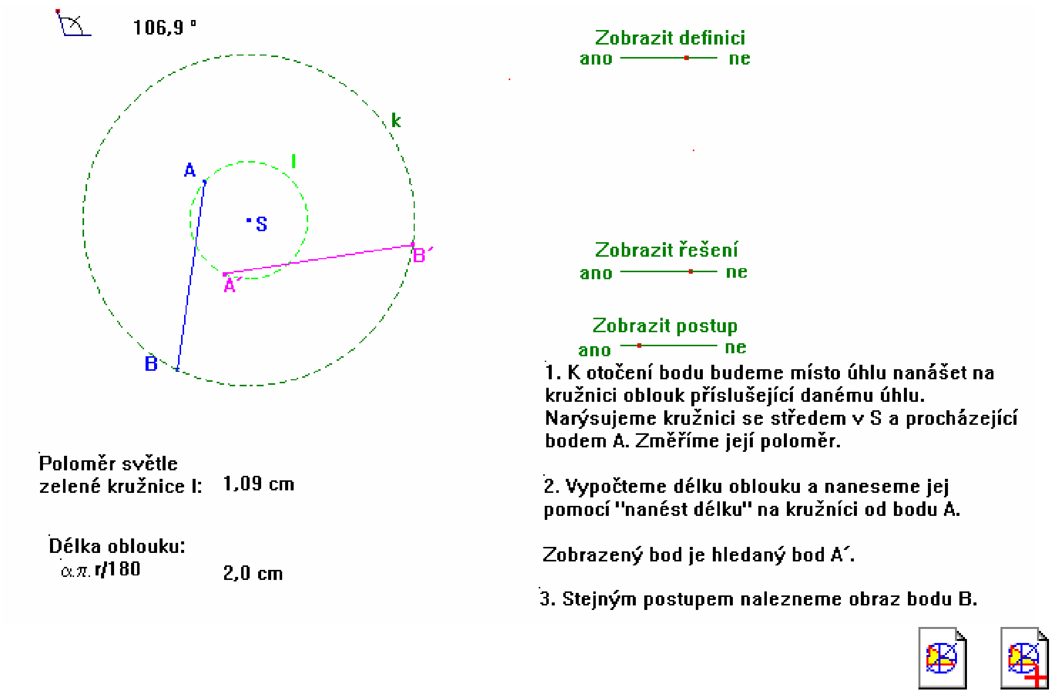
Obr. Otočení 4.2

Žáci mohou libovolně měnit zadaný úhel otočení α tak, že pohybují koncovým ramenem úhlu u obrázku vlevo nahoře. Změnou úhlu, polohy bodů X a S a pozorují, jak se mění poloha bodu X'.

Další úloha je zobrazit úsečku v otočení. Po zvládnutí otočení bodu by to neměl být větší problém. Žáci vědí, že úsečka je jednoznačně určena svými dvěma krajními body, tedy úloha je převedena na úkol otočit dva různé body.

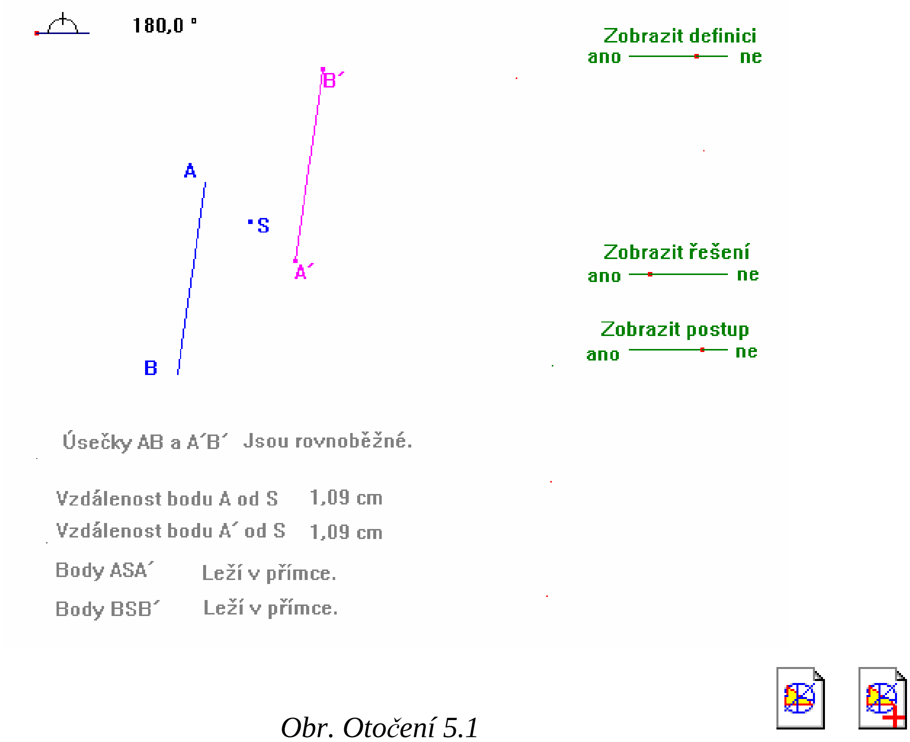
Úloha otočení 5: *Pomocí definice otočení nalezněte obraz úsečky v daném otočení.*

Otáčení vytváříme opět nanášením délky odpovídajícího oblouku. Nejprve otočíme bod A, poté bod B. Na obrázku *Otočení 5.0* jsou naznačeny kružnice, na které jsme nanášeli oblouk.



Obr. Otočení 5.0

Experimentováním s velikostí úhlu otočení mohou žáci přijít na zajímavou věc, a to že při úhlu 180° se z otočení stala středová souměrnost. V Cabri lze ověřit např., že body *ASA´* leží v přímce, vzdálenost bodu *A* od *S* je stejná jako vzdálenost bodu *A´* od *S*, bod *S* je tedy středem úsečky *AA´*, úsečky *AB* a *A´B´* jsou rovnoběžné, což jsou vlastnosti středové souměrnosti (obr. *Otočení 5.1*).

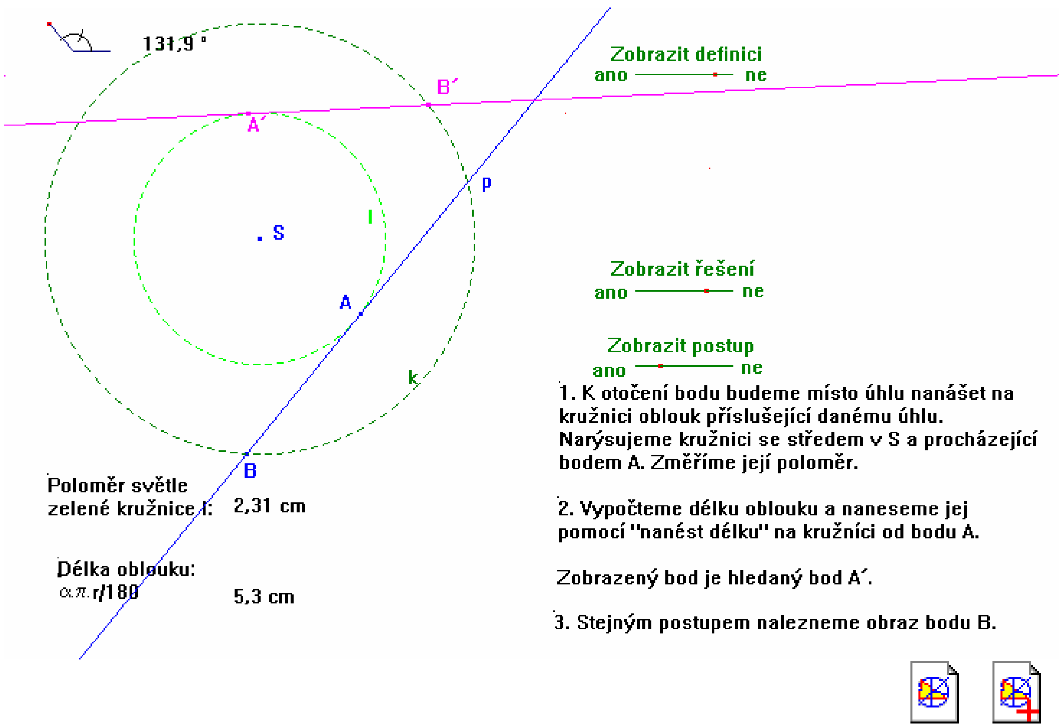


Obr. Otočení 5.1

Hledání obrazu přímky v otočení převedeme na úlohu nalézt obrazy dvou různých bodů. Zvolíme dva libovolné různé body na zadané přímce a ty zobrazíme v otočení. Obrazy těchto bodů pak určí přímku.

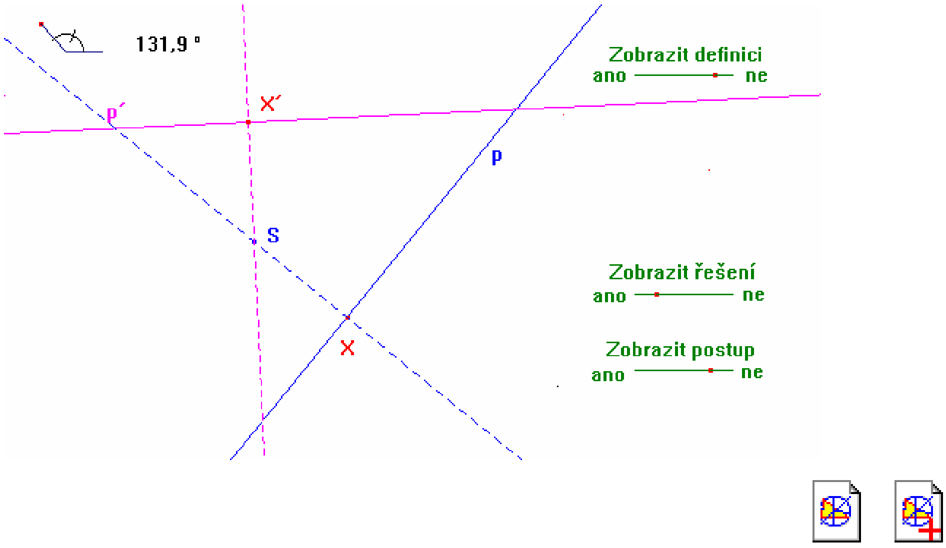
Úloha otočení 6: *Pomocí definice otočení nalezněte obraz přímky v daném otočení.*

Soubor opět nabízí možnosti „Zobrazit definici“, „Zobrazit řešení“ a „Zobrazit postup“. Žák může samostatně pracovat, zobrazit si nápovědu nebo ověřit správnost řešení. Na obrázku *Otočení 6.0* je zobrazený postup a výsledné řešení.



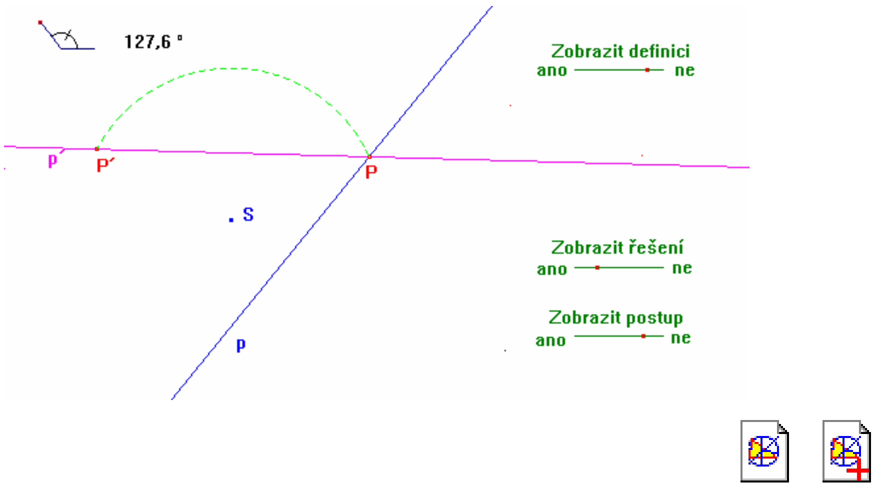
Obr. Otočení 6.0

Při otáčení přímky si můžeme řešení úlohy zjednodušit tím, že otočíme pouze patu kolmice - bod *X* - vedené z bodu *S* k přímce *p*. Přímku *p*‘ nalezneme jako kolmici na *SX*‘ v bodě *X*‘. Obrazem přímky *SX* je přímka *SX*‘ a otočení je shodné zobrazení, proto je úhel přímek *SX* a *p* shodný s úhlem přímek *SX*‘ a *p*‘ (obr. *Otočení 6.1*).



Obr. Otočení 6.1

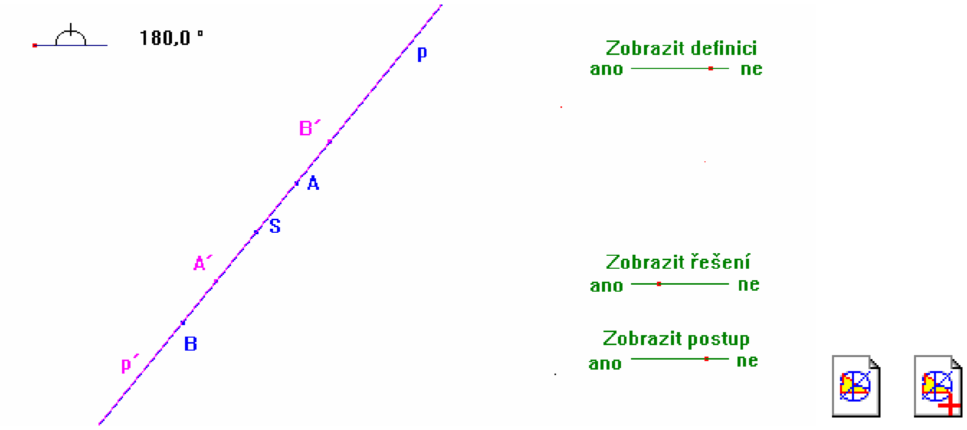
Při řešení úlohy jsme využili střed otáčení bod *S*. Jak se bod *S* vždy zobrazí? Nazýváme nějak takové body? Z definice víme, že střed otáčení *S* se zobrazí sám na sebe - *S*=*S*´, a takový bod nazýváme **samodružný bod** (viz kapitola 3.1 Shodná zobrazení). Má otočení nějaké další samodružné body? Co například bod *P* na obrázku *Otočení 6.2*? Bod *P* samodružný bod není, jelikož jeho obraz není shodný se vzorem - *P*≠*P*´.



Obr. Otočení 6.2

Prochází-li přímka středem otočení, pak i její obraz samozřejmě prochází středem otočení .

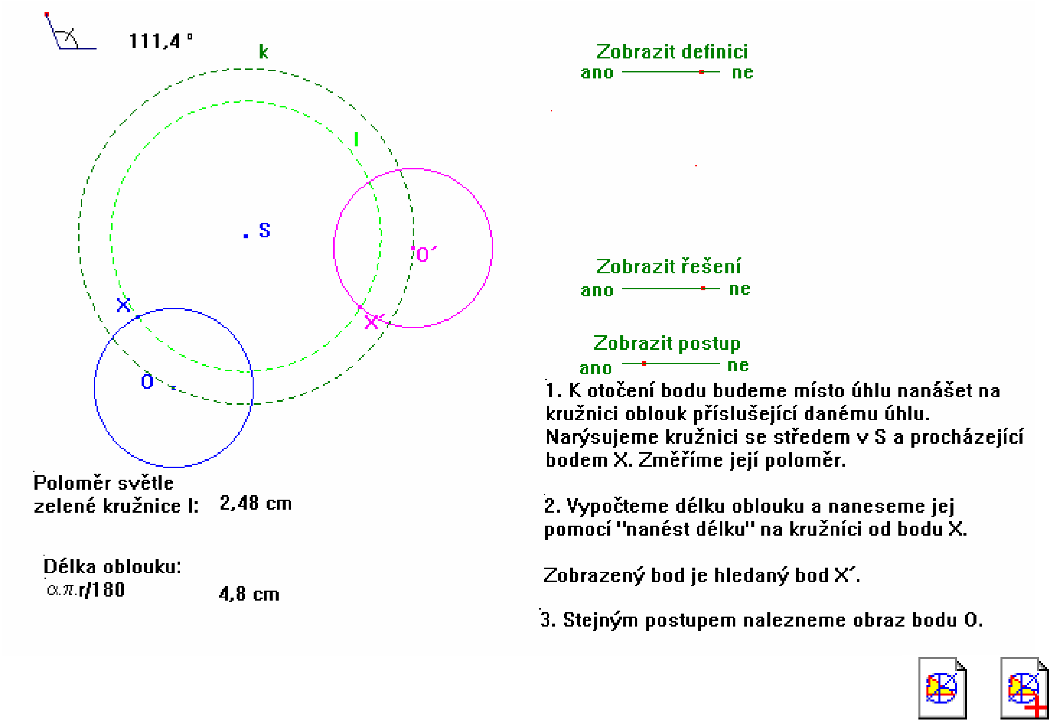
Pokud přímka prochází středem otočení a nastavíme úhel otočení na 180°, přímka se zobrazí sama na sebe (obr. *Otočení 6.3*). Je to tedy **samodružná přímka** (viz kapitola 2.1 Shodná zobrazení).



Obr. Otočení 6.3

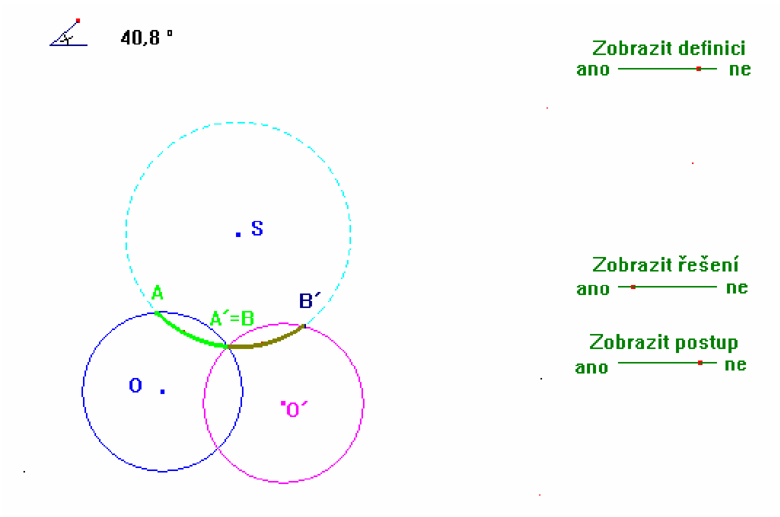
Úlohy typu „nalezněte obraz objektu v daném otočení“ v podstatě převádíme na nalezení obrazu skupiny bodů, které daný objekt jednoznačně určí. Z dalších úloh vyberme např. kružnici – je určena středem a bodem, který na ní leží. Stačí tedy zobrazit střed *S* a libovolný bod *X* ležící na kružnici. Obraz dané kružnice pak sestrojíme jako kružnici se středem *S´* procházející bodem *X´* (obr. *Otočení 7.0*) .

Úloha otočení 7: *Pomocí definice otočení nalezněte obraz kružnice v daném otočení*



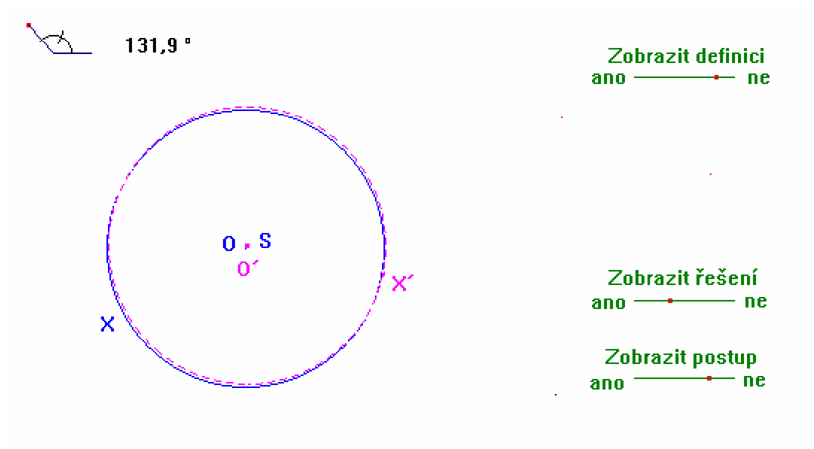
Obr. Otočení 7.0

Pří experimentování s kružnicí může nastat situace, kdy se její obraz a vzor protnou ve dvou bodech. Průsečík však není samodružný bod! Žáci si musí uvědomit, kde se nachází obraz a vzor jednotlivých bodů. Na *obrázku 7.1* v průniku leží obraz bodu *A* – bod *A´* a vzor bod *B*.



Obr. Otočení 7.1

Po prostudování předchozích úloh by žáci měli již umět zobrazovat různé objekty v otočení. Existují v otočení nějaké samodružné útvary (kromě přímek, o kterých jsme již hovořili)? Může nastat následující situace - obrázek *Otočení 7.2*.



Obr. Otočení 7.2

Kružnice se zobrazí sama na sebe pokud střed kružnice je shodný se středem otáčení. Nabízí se řada problémových úkolů. Může být samodružným útvarem trojúhelník? Nebo čtverec? A je důležitý úhel otočení? Problémové úlohy lze řešit v úloze otočení 8 změnou polohy středu otáčení *S* a změnou velikosti úhlu otočení.

Úlohy typu „nalezněte obraz objektu v daném otočení“ jsou důležité pro pochopení daného zobrazení. Postupujeme od jednodušších útvarů – bod, úsečka – k zobrazování složitějších – kružnice, trojúhelník, mnohoúhelník, …Žáci by si měli vytvořit správné a přesné představy o zobrazení v otočení a jasně definovat všechny související pojmy a správně jim porozumět.

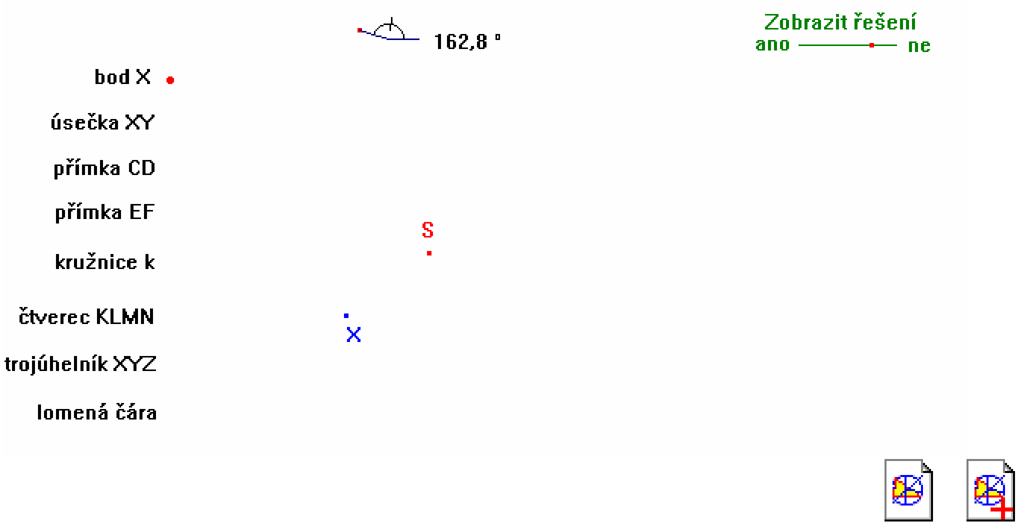
Pro vyvození jednotlivých vlastností klademe žákům otázky typu: „Co určuje jak a kam se objekt zobrazí? Co můžeme říci o obrazu a vzoru? Jsou shodné nebo se něčím liší? Zobrazují se některé body nebo útvary někdy samy na sebe?“ Z předchozích příkladů a po dostatečném experimentování s nimi žáci snadno odpoví.

Závěrem shrneme základní vlastnosti:

- otočení je jednoznačně určeno **středem otočení *S***, velikostí **úhlu otočení** α a daným (kladným nebo záporným) **smyslem otočení**. Úhel otočení je orientovaný úhel α.
- obraz je shodný se svým vzorem, otočení je **shodné zobrazení**
- otáčíme-li obraz tak, aby se překrýval se svým vzorem (např. nastavíme úhel otáčení na 360°) nemusíme obraz nějak překlápět, aby překryl vzor, jde o **přímou shodnost**
- pokud se nejedná úhel otočení se základní velikostí 0° otočení má pouze jeden **samodružný bod** a to střed otáčení
- všechny kružnice, jejichž střed leží ve středu otáčení jsou **samodružné**
- samodružné přímky existují pokud úhel otáčení α je roven $k \cdot 180°$. Pro k sudé jsou všechny **přímky samodružné**, pro k liché jsou samodružné všechny přímky procházející středem
- otočení s úhlem otáčení 180° je **středová souměrnost** se středem souměrnosti shodným se středem otočení

Pro procvičení a ověření že žák zvládl zobrazování v daném otočení, slouží následující příklad (obr. *Otočení 8.0*). Žáci samostatně řeší úlohu, správnost si zkontrolují pomocí ovladače „Zobrazit řešení“.

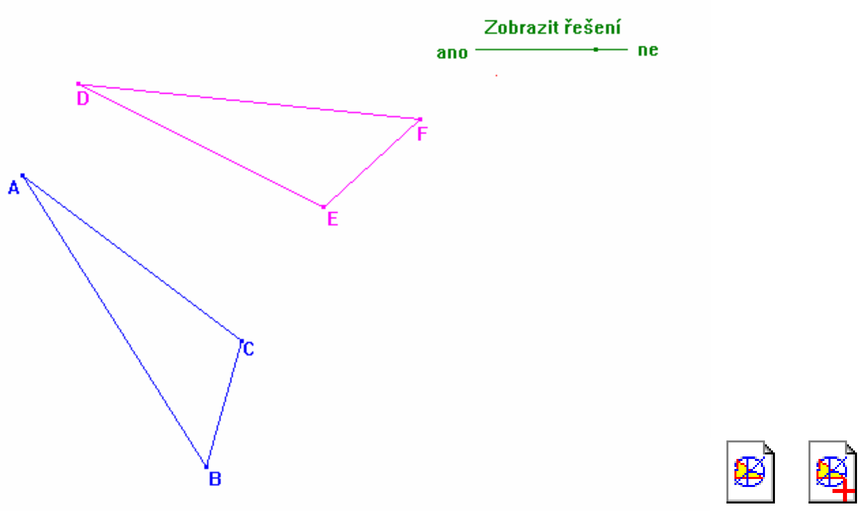
Úloha otočení 8: *Pomocí definice otočení nalezněte obraz objektu v daném otočení*



Obr. Otočení 8.0

V předcházejících úlohách je vždy úkolem nalézt obraz k danému vzoru. Lze též hledat střed a úhel otočení, je-li dán obraz a vzor. Takovou problematikou se zabývá následující úloha.

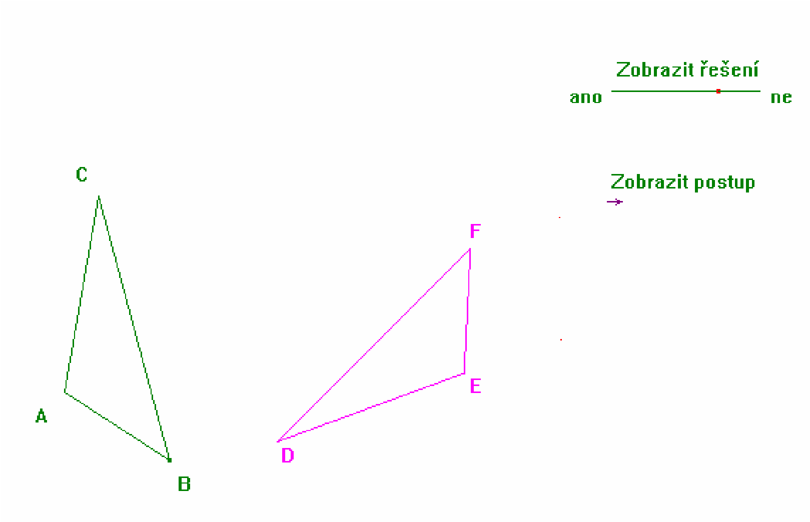
Úloha otočení 9: *Jsou dány shodné trojúhelníky ABC a DEF. Nalezněte otočení, které zobrazí jeden trojúhelník na druhý (obr. Otočení 9.0).*



Obr. Otočení 9.0

Trojúhelníky jsou podle zadání shodné, nejedná se však o shodnost přímou, tedy nemohou být navzájem zobrazeny v otočení.

Úloha otočení 10: *Jsou dány shodné trojúhelníky ABC a DEF. Nalezněte otočení, které zobrazí jeden trojúhelník na druhý (obr. Otočení 10.0).*

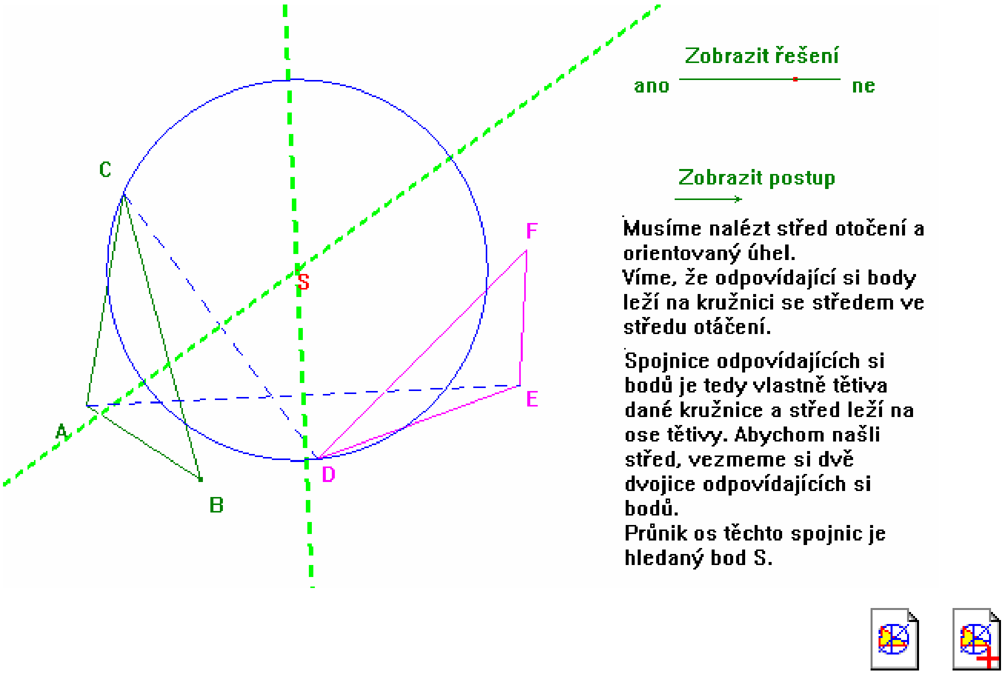


Obr. Otočení 10.0

Trojúhelníky jsou zobrazené v přímé shodnosti, mohou být zobrazeny tedy pomocí otočení.

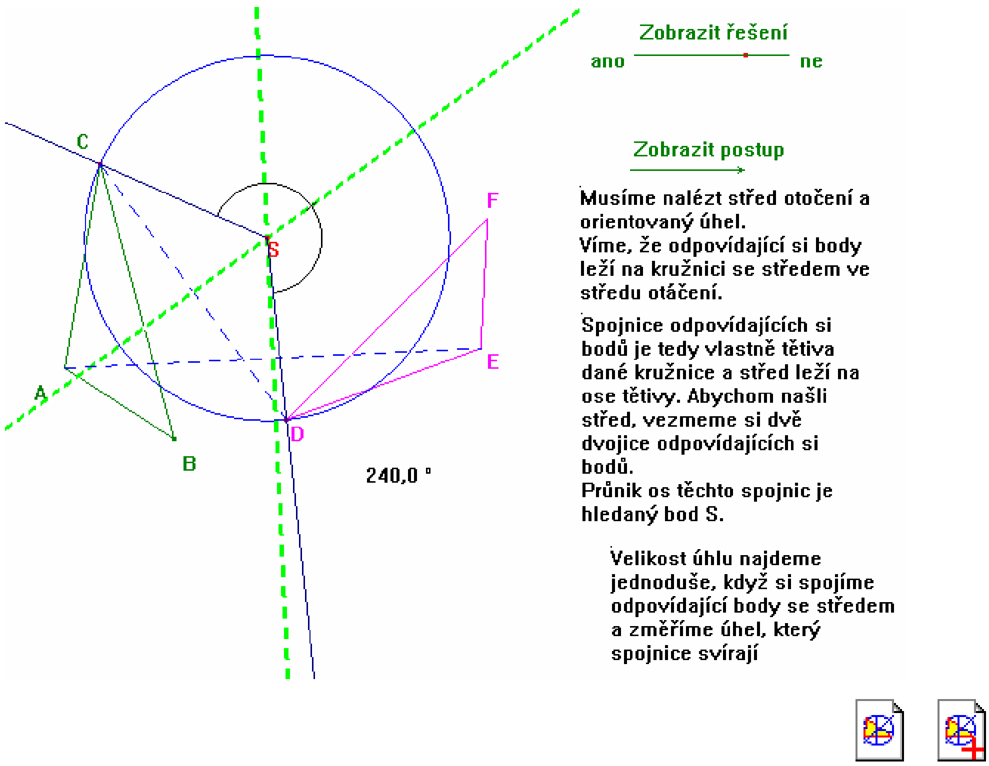
Úkolem je naleznout střed a úhel otočení. Víme, že odpovídající si body leží na kružnici se středem ve středu otáčení. Kružnici lze jednoduše nalézt uvědomí-li si žáci, že spojnice odpovídajících si bodů obraz-vzor jsou tětivy této kružnice. Je třeba ale vybrat správnou dvojici odpovídajících si bodů, např. *C a D* a *A a E*. Bystrý žák si práci pomocí Cabri práci ulehčí, jelikož hýbeme-li jedním vrcholem např. *A* – pohybuje se vrchol *E*, tedy žáci vidí, že *E* bude zřejmě obrazem *A* neboť se mění pouze v závislosti na *A*.

Střed otáčení *S* je průnik os úseček, kdy krajní body úsečky jsou odpovídající si dvojice bodů, např. úsečka *CD* a *AE* (obr. *Otočení 10.1*).



Obr. Otočení 10.1

Velikost úhlu nalezneme jednoduše pomocí nabídky „*Úhel*“. Zaktivujeme postupně jeden bod (*C*), střed *S* a druhý bod (*D*) a Cabri nám změří velikost úhlu (obr. *Otočení 10.2*).



Obr. Otočení 10.2

Našli jsme tedy otočení se středem *S* a úhlem otáčení 120° kdy trojúhelník *ABC* je vzor a trojúhelník DEF je obraz. Stejně tak ale může být *AEF* vzor a *ABC* obraz v otáčení s úhlem -120°.

Uvažujeme-li úhel 240° (360°- 120°) trojúhelník *DEF* je vzor a *ABC* obraz. A opačně v otočení s úhlem – 240°.

Střed otáčení je jednoznačný, ale i při 4 různých případech velikostí úhlu otáčení dostaneme stejný výsledný obrázek.

Otáčení se stejným středem o stejnou hodnotu úhlu v kladném smyslu (doprava) a v záporném smyslu (doleva) často využíváme při řešení konstrukčních úloh.

4. Otočení

4.2 Konstrukční úlohy

Následující příklady ukazují, jak využít program Cabri geometrie při řešení konstrukčních úloh. Ke každému příkladu jsou dva soubory, jeden s rozborem a konstrukcí, v druhém je samostatně řešena diskuze. V příkladech je řešen pouze ten postup, který využívá otočení.

Při otáčení jednotlivých bodů nebo útvarů je již využíváno nabídky Cabri „*Otočení*“. Úhel otočení je buď konkrétně nebo obecně zadán, nebo jej představuje námi napsané číslo, např. 90, -90 – tyto čísla jsou pro přehlednost skryta.

Stejně jako v příkladech v kapitole „Posunutí – konstrukční úlohy“ jsou u každého příkladu ovladače „Zobrazit rozbor“, „Zobrazit konstrukci“, „Zobrazit na obrázku“ a „Jak na to?“. Využití jednotlivých ovladačů je analogické (viz str. 32).

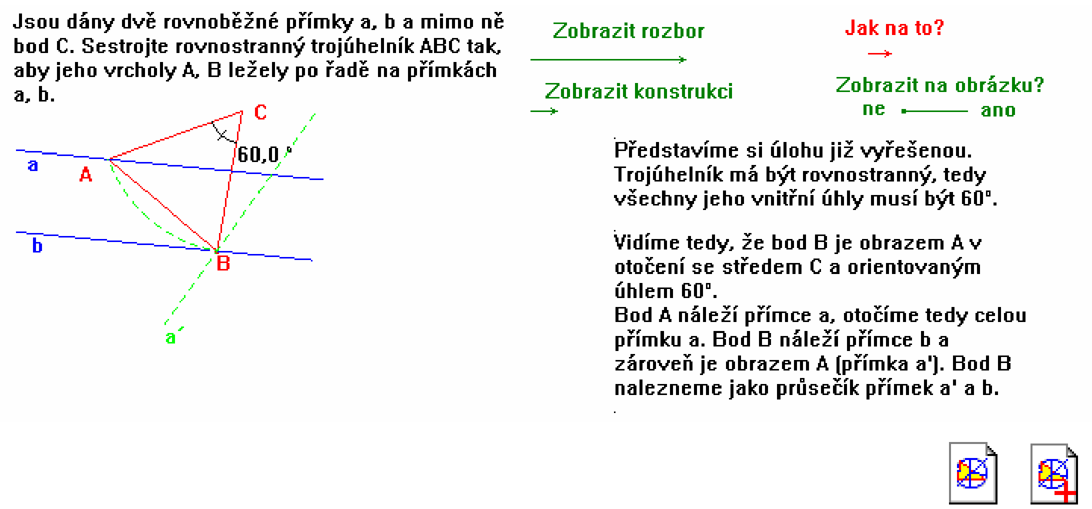
V komentáři příkladů je věnována pozornost rozboru řešení, diskuzi a využití nabídky Cabri ke zjednodušení postupu konstrukce nebo k ověření podmínek zadání.

U příkladů kde je řešení analogické jako u příkladů již dříve řešených a podrobně vysvětlených je uvedeno pouze zadání a odkaz na příslušný soubor v Cabri.

Příklad otoc_p1

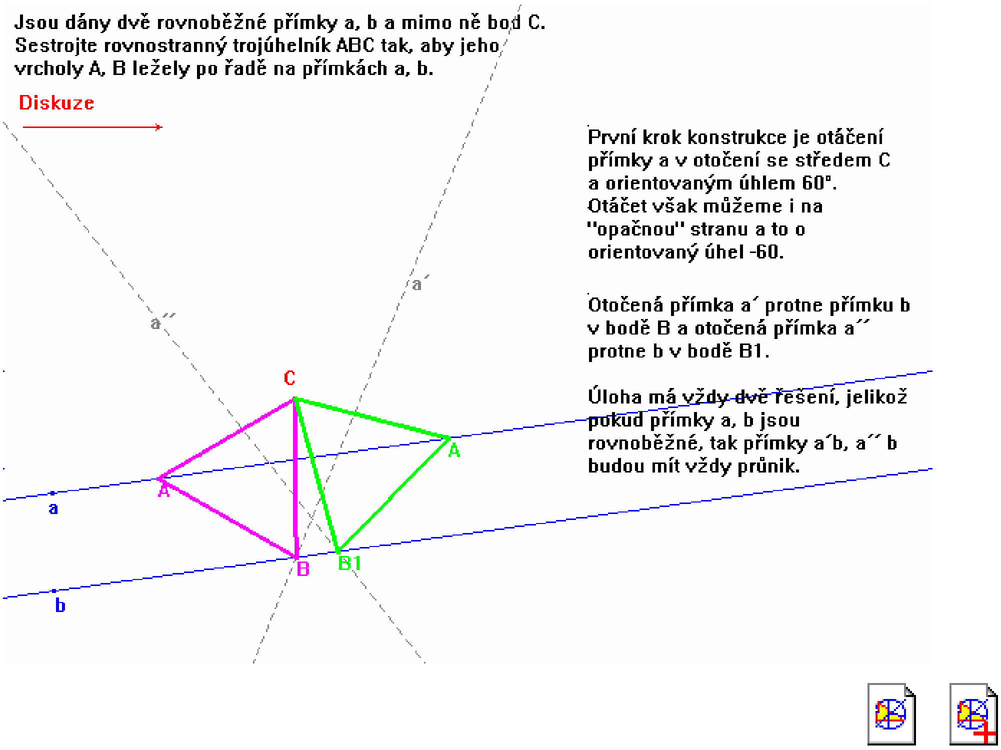
V příkladech řešitelných pomocí otočení máme často za úkol sestrojit čtverec nebo rovnostranný trojúhelník. Můžeme totiž využít toho, že čtverec a rovnostranný trojúhelník jsou samodružné ve vhodném otočení kolem svého vrcholu nebo středu.V následujícím příkladu máme za úkol sestrojit rovnostranný trojúhelník *ABC* s daným vrcholem *C* tak, aby vrcholy *A*, *B* ležely na zadaných rovnoběžkách.

Na obrázku *Otoc_p1_0* vidíme, že bod *B* je obrazem bodu *A* v otočení $R_{(C,60°)}$.
Bod *A* náleží přímce *a*, otočíme tedy celou přímku *a*. Bod *B* leží přímce *b* a zároveň je obrazem *A* (přímka *a'*). Bod *B* tedy je průsečík přímek *a'* a *b*. Bod *A* nalezneme když otočíme bod *B* o úhel -60°. Můžeme tedy narýsovat celý trojúhelník *ABC*.



Obr. Otoc_p1_0

Existuje pouze jediné řešení? Co kdybychom přímku *a* otočili na „opačnou“ stranu, tedy v otočení se středem *C* a orientovaným úhlem -60°? Přímka *a´* protne přímku *b* v bodě *B*, přímka *a´´* protne *b* v bodě *B1* (obr. *Otoc_p1_d_0*).



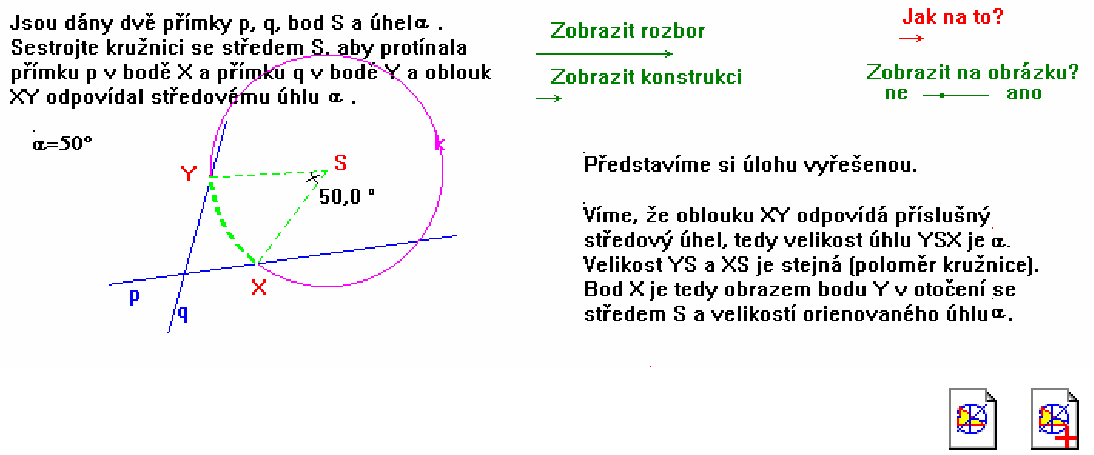
Obr. Otoc_p1_d_0

Úloha má vždy dvě řešení. Vzhledem k tomu, že přímky *a*, *b* jsou rovnoběžné, budou mít přímky *a´*,*b* (resp. *a´´*, *b*) vždy průsečík.

Příklad otoc_p2

Máme sestrojit kružnici s daným středem *S*, aby protínala danou přímku *p* v bodě *X* a přímku *q* v bodě *Y* a oblouk *XY* odpovídal středovému úhlu α.

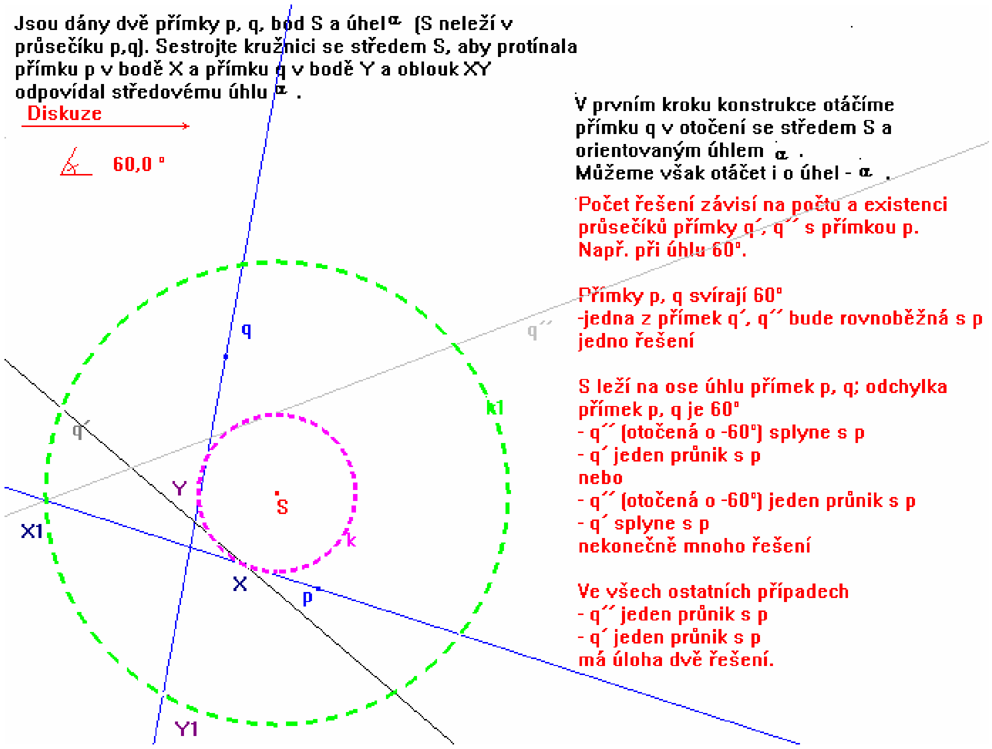
Pokud si prohlédneme obrázek Otoc_p2_0 vidíme, že v podstatě máme za úkol sestrojit rovnoramenný trojúhelník *XSY*, kde úhel *XSY* je *α* (obr. *Otoc_p2_0*). Úkol je podobný jak předchozím příkladu, budeme otáčet přímku *q* v otočení se středem *S* a orientovaným úhlem *α*.



Obr. Otoc_p2_0

Přímku *q* však lze otočit nejen v otočení se středem *S* a orientovaným úhlem *α*, ale i -*α*. Počet řešení pak závisí na počtu průsečíků otočených přímek *q´* a *q´´* s přímkou *p* (obr. *Otoc_p2_d_0*).

Obecně lze říci, že záleží na vztahu velikosti úhlu, který přímky svírají a velikosti úhlu otočení, a na umístění bodu *S* – středu otáčení. Jednotlivé případy jsou rozebrány v diskuzi, na interaktivním obrázku v Cabri lze možnosti vyzkoušet.



Obr. Otoc_p2_d_0

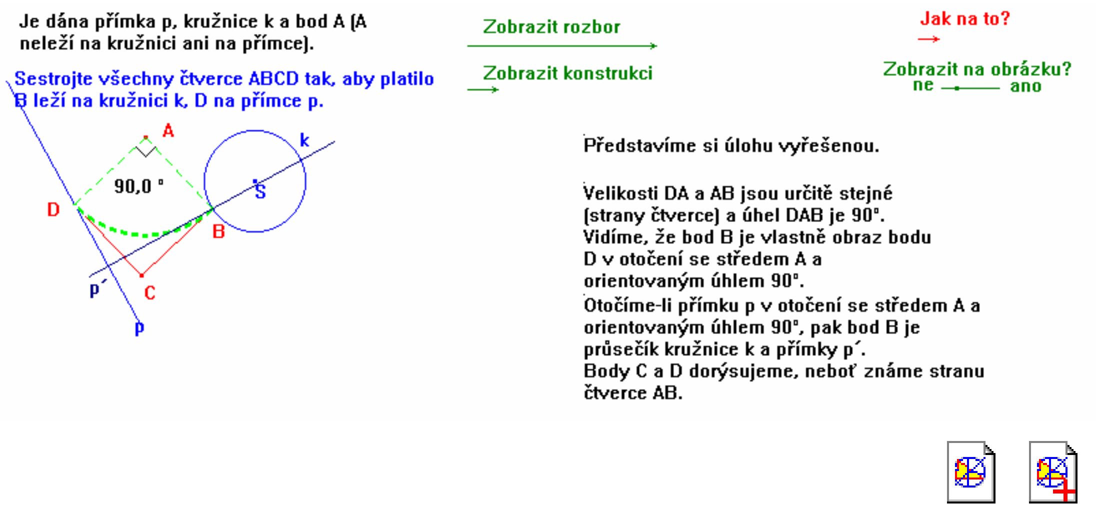
Může se stát, že některá z přímek *q´* a *q´´* je rovnoběžná s přímkou *p*. Pokud je s touto přímkou totožná, úloha má nekonečně mnoho řešení. Pokud je od ní různá, má úloha dvě řešení. Řešení jsou dané průnikem přímek *q´* a *q´´* s přímkou *p*.

Příklad otoc_p3a

Máme sestrojit všechny čtverce *ABCD* tak, aby platilo, že bod *B* leží na dané kružnici *k*, *D* na dané přímce *p* a bod *A* je daný bod, který neleží ani na *k*, ani na *p*.

Hledáme vhodný bod kolem kterého otáčet a úhel otočení. Podíváme-li se na obrázek *Otoc_p3a_0* je zřejmé, že využijeme poznatku, že všechny úhly které svírají dvě sousední strany ve čtverci jsou 90°.

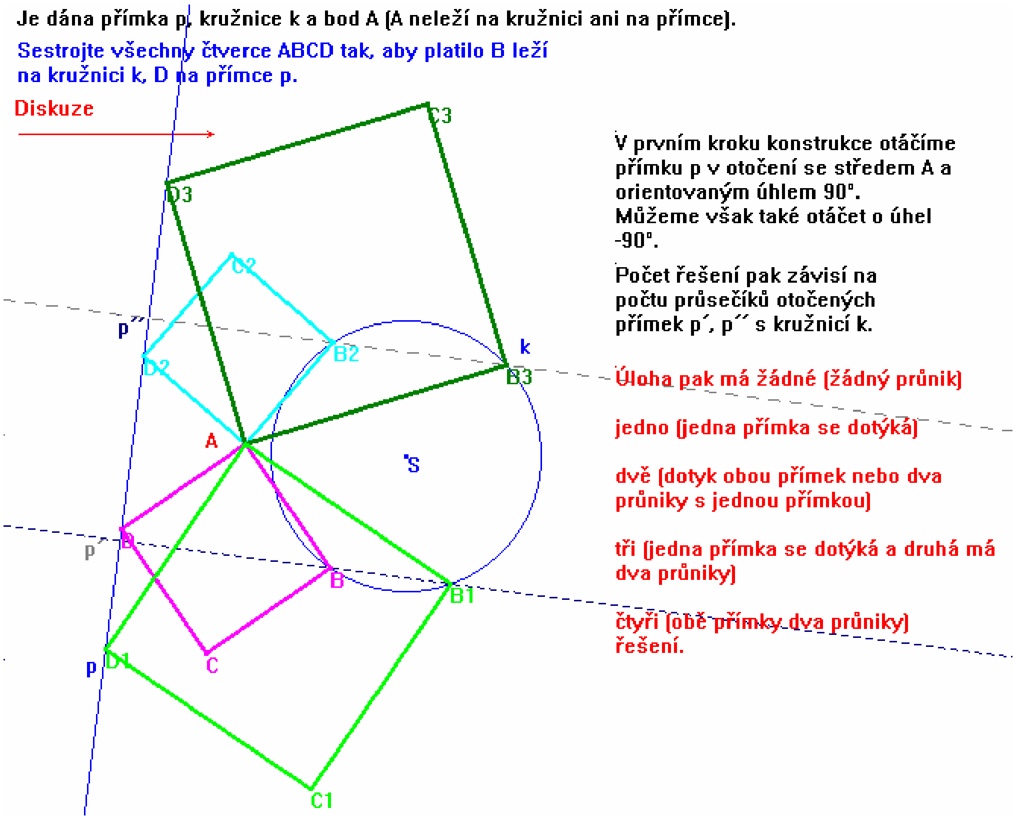
Otáčíme tedy přímku *p* v otočení $R_{(A,90°)}$.



Obr. Otoc_p3a_0

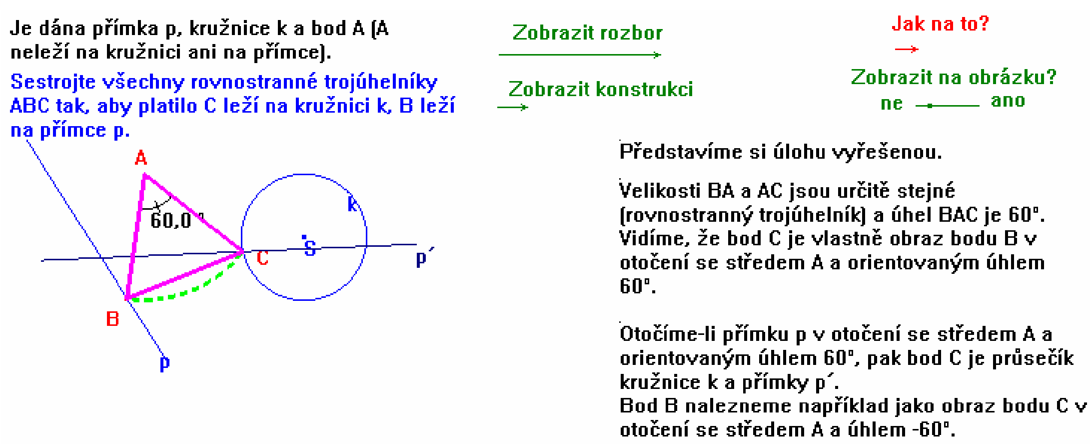
Stejně jako v předchozích příkladech můžeme otáčet i ve smyslu opačné orientace, tedy o úhel -90°. Kolik má úloha řešení? Počet řešení závisí na počtu průsečíků otočených přímek *p´* a *p´´* s kružnicí *k*. Po otevření příslušného souboru s diskuzí (obr. *Otoc_p3a_d_0*) můžeme měnit polohu bodu *A*, kružnice *k* a přímky *p*.

Úloha má žádné, jedno, dvě, tři, nebo čtyři řešení.



Obr. Otoc_p3a_d_0

Stejným způsobem řešíme i ***příklad otoc_p3b***, kdy využijeme otočení $R_{(A,60°)}$ (obr. *Otoc_p3b_0*).

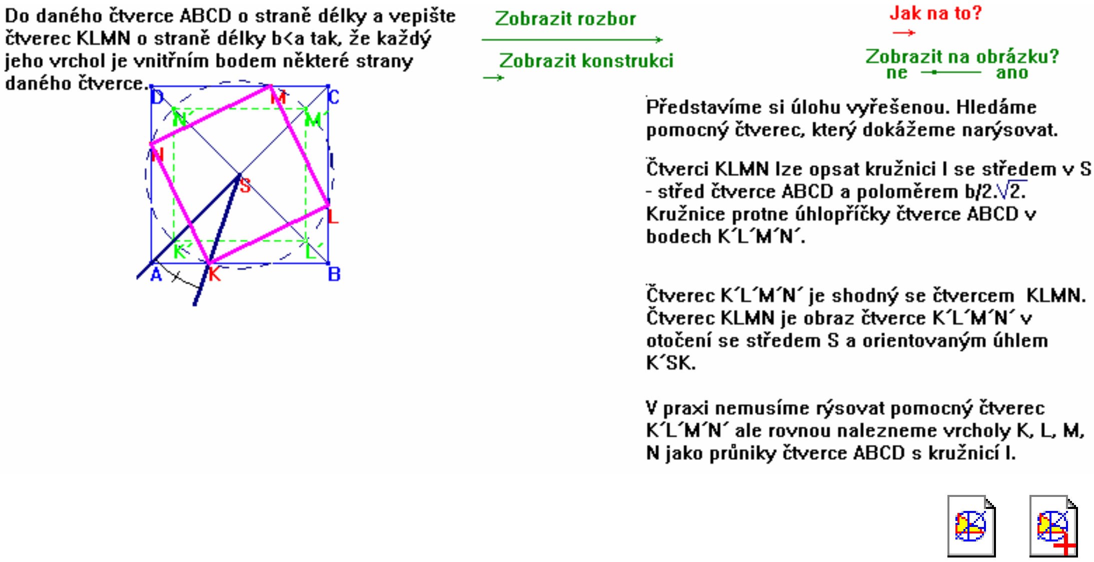


Obr. Otoc_p3b_0

Příklad otoc_4a

Do daného čtverce *ABCD* o straně délky *a* máme vepsat čtverec *KLMN* o straně dané délky $b<a$ tak, že každý jeho vrchol je vnitřním bodem některé strany daného čtverce.

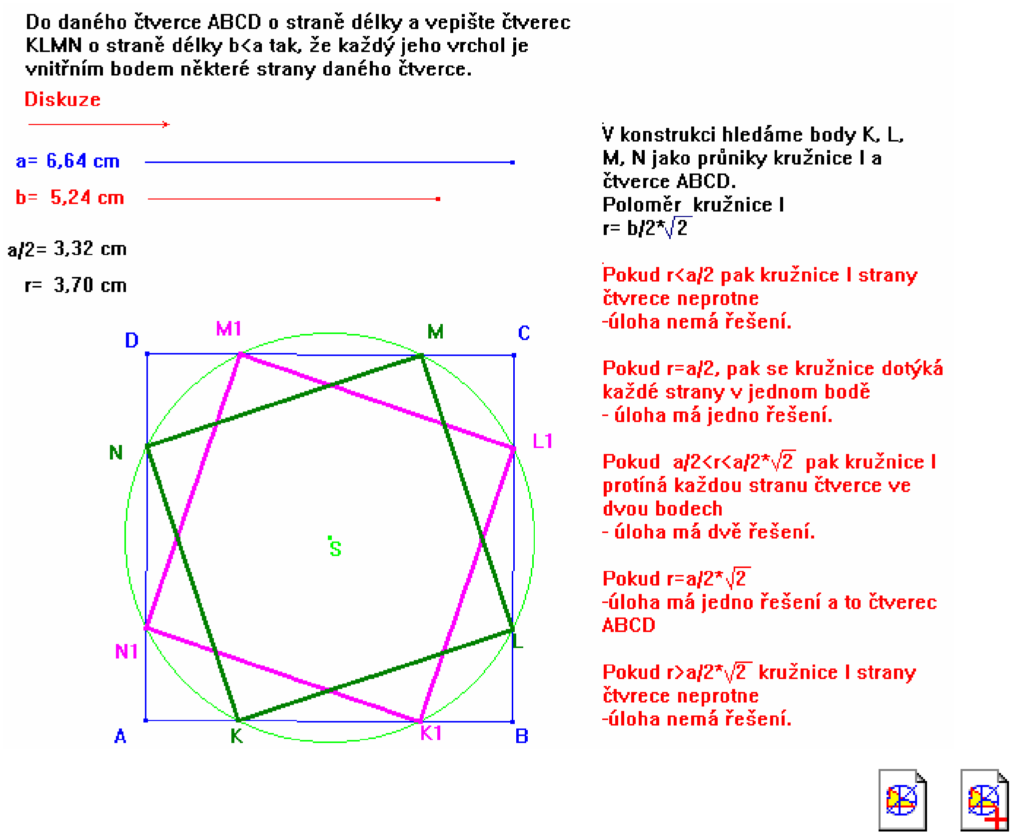
Hledáme nějaký pomocný čtverec *K´L´M´N´*, který dokážeme narýsovat a ten pak vhodně otočíme. Z obrázku *Otoc_p4a_0* vidíme, že čtverci *ABCD* můžeme opsat kružnici se středem *S* a poloměrem $\frac{b}{2}\cdot\sqrt{2}$. Poloměr je vlastně polovina úhlopříčky čtverce *K´L´M´N´* a vypočítáme ji podle Pythagorovy věty.



Obr. Otoc_p4a_0

Otočení na hledaný čtverec *KLNM* je dáno středem *S* a orientovaným úhlem *KSK´*. Při rýsování však nemusíme sestrojovat pomocný čtverec *K´L´M´N´*, ale rovnou nalezneme body *K, L, M, N* jako průsečíky kružnice *l* se čtvercem *ABCD* (obr. *Otoc_p4a_0*).

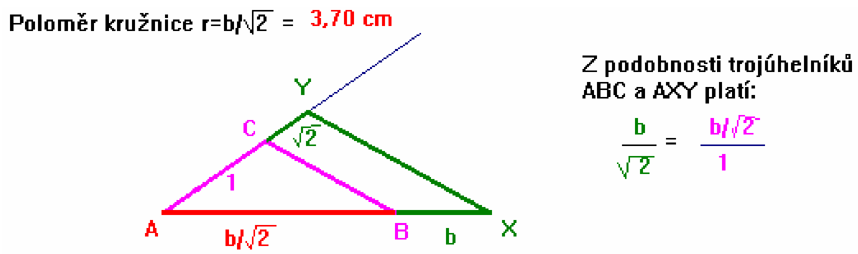
Počet řešení je zřejmý z rozboru. V podstatě je počet dán průniky kružnice *l* a čtverce *ABCD*. V souboru s diskuzí je možné měnit velikost úseček *a, b* a v závislosti na poměru jejich délek se mění počet řešení (obr. *Otoc_p4a_d_0*).



Obr. Otoc_p4a_d_0

Kružnici *l* s poloměrem $\frac{b}{2}\cdot\sqrt{2}$ jsme narýsovali tak, že daný poloměr jsme si vypočítali pomocí nabídky „*Výpočty*“.

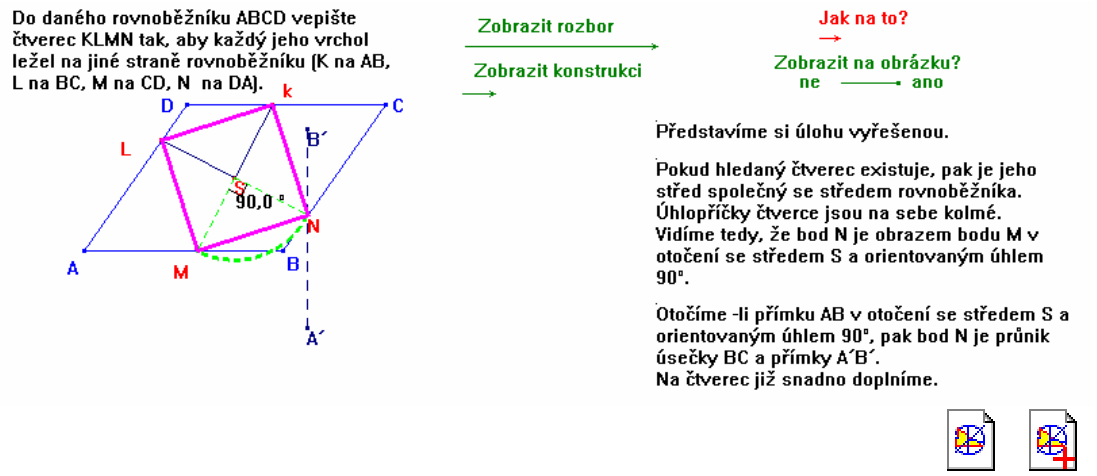
Délku $(b/2)\cdot\sqrt{2}=b/\sqrt{2}$ narýsujeme pomocnou konstrukcí jako polovinu úhlopříčky ve čtverci o straně *b*. Nebo geometrickou metodou pomocí podobnosti trojúhelníků. Narýsujeme si trojúhelník *AXY*, kde |*AX*|=*b*. |*AY*|= $\sqrt{2}$ cm [*], úhel *XAY* je libovolný. Pak sestrojíme bod *C*, tak, že |*AC*|=1 cm, a bodem *C* vedeme rovnoběžku s úsečkou *YX*. Bod *B* je pak průsečík rovnoběžky a úsečkou *AX* (obr. *Podobnost*).



Obr. Podobnost

[*] $\sqrt{2}$ sestojíme pomocí Pythagorovy věty jako přeponu v trojúhelníku *ABC* s odvěsnami *a*, *b* = 1 cm.

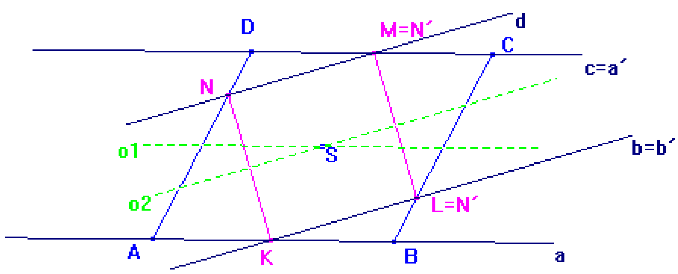
V ***příkladu otoc_4b*** máme vepsat čtverec *KLMN* do rovnoběžníku. Zde není dána velikost strany čtverce, takže pokud využijeme poznatku, že úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, pak střed otáčení *S* bude střed rovnoběžníku *ABCD* a úhel otáčení bude 90° (obr. *Otoc_p4b_0*).



Obr. Otoc_p4b_0

Při řešení vycházíme z předpokladu, že střed rovnoběžníku je stejný jako střed čtverce. To lze zdůvodnit takto: Předpokládejme, že čtvrerec *KLMN* je vepsán do rovnoběžníku *ABCD*, tak že *K* leží na *AB*, *L* leží na *BC*, *M* leží na *CD* a *N* leží na *DA*. Bod *K* se zobrazí podle středu *S* do bodu *M* a zároveň přímka *a* se zobrazí podle středu *S* na přímku *c*. *S* tedy musí ležet na ose rovnoběžek *a*, *a´*, tedy na ose *a*, *c*. Analogicky bod *N* se zobrazí podle středu *S* do bodu *L*. *S* leží na ose rovnoběžek *b*, *d*. Bod *S* je průsečík os *o1*, *o2* (obr. *Střed rovnoběžníku*).

Rovnoběžník *ABCD* a čtverec *KLMN* mají společný střed *S*.

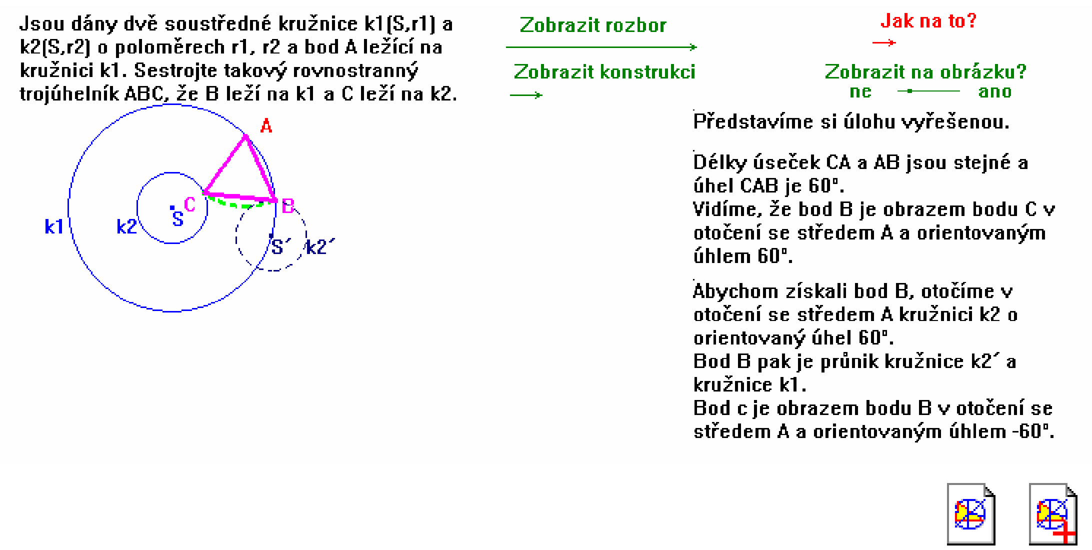


Obr. Střed rovnoběžníku

Počet řešení úlohy závisí na tom, zda rovnoběžník je kosodélník nebo kosočtverec - jedno řešení, čtverec - nekonečně mnoho řešení nebo obdélník – žádné řešení.

Příklad otoc_p5a

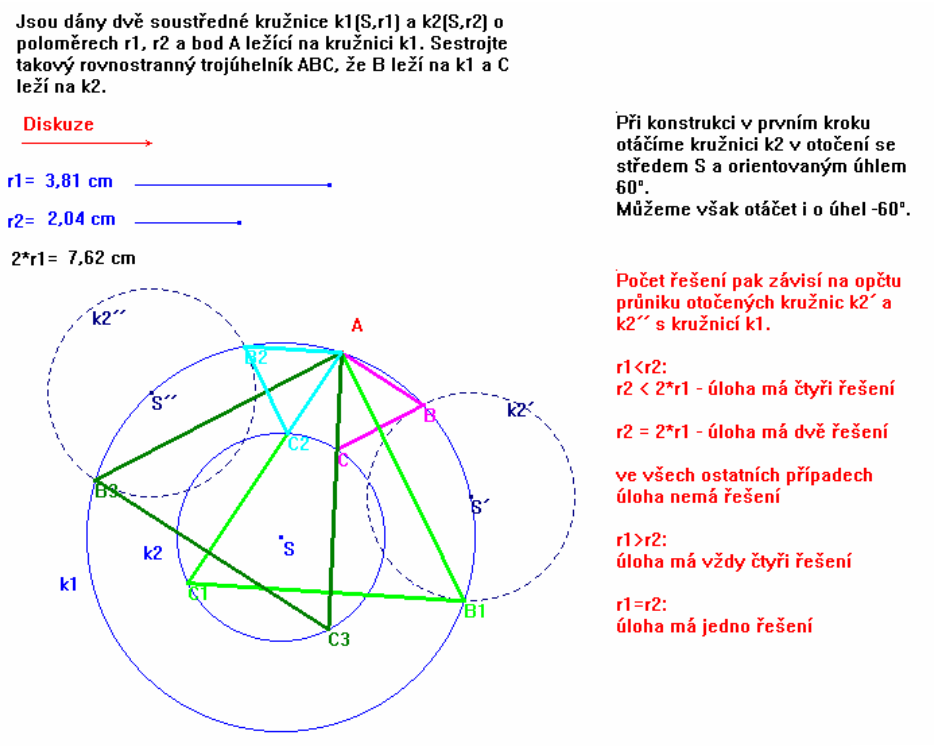
Máme sestrojit rovnostranný trojúhelník *ABC* tak, že vrcholy trojúhelníku leží na zadaných soustředných kružnicích *k1*, *k2*. Úhel otáčení bude 60° (strany rovnostranného trojúhelníku svírají úhel 60°) a z obrázku *Otoc_p5a_0* je jasné, že za střed otáčení zvolíme zadaný bod *A*. Abychom získali bod *B*, otočíme kružnici *k2* v otočení $R_{(A,60°)}$. Bod *B* je pak průnik kružnice *k2´* a kružnice *k1*.



Obr. Otoc_p5a_0

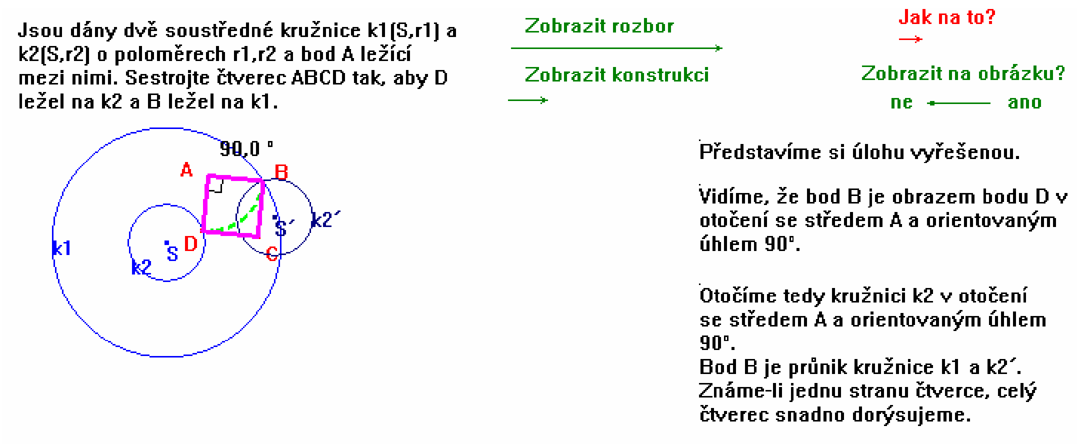
V diskuzi rozlišujeme tři případy: poloměr *r1* kružnice *k1* je větší jak poloměr *r2* kružnice *k2*; naopak *r1<r2* a nebo se poloměry rovnají *r1=r2*.

Počet řešení opět závisí na počtu průsečíků otočené kružnice *k2´* a kružnice *k1* (obr. *Otoc_p5a_d_0*).



Obr. Otoc_p5a_d_0

Příklad otoc_p5b je velmi podobný předcházejícímu. Máme za úkol sestrojit čtverec *ABCD* a bod *A* leží uvnitř pásu vymezeného kružnicemi *k1* a *k2* (obr. *Otoc_p5b_0*). Otáčíme tedy o 90° a počet řešení opět závisí na počtu průsečíků otočené *k2´* s *k1*.

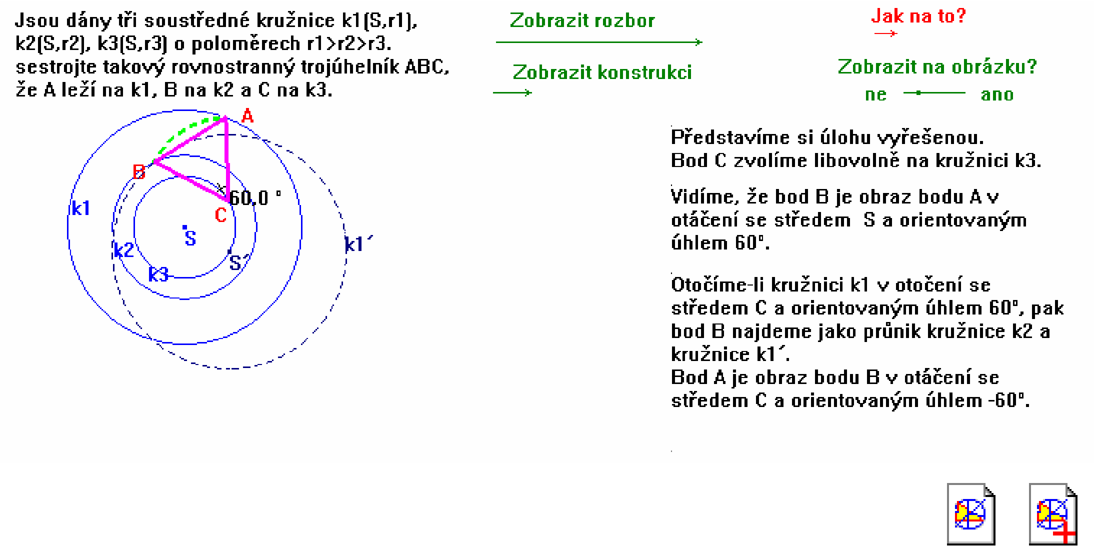


Obr. Otoc_p5b_0

Příklad otoc_p6

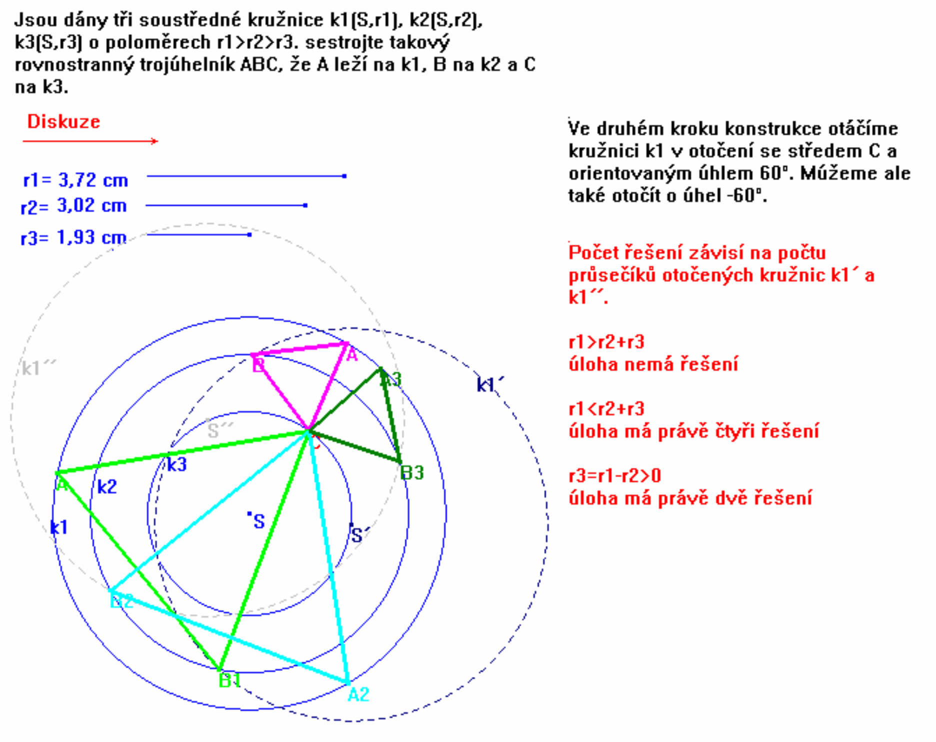
Na rozdíl od předchozího příkladu máme dány tři soustředné kružnice a úkolem je sestrojit rovnostranný trojúhelník *ABC* tak, aby každý z vrcholů ležel na jedné kružnici. Uhel otáčení je tedy zřejmě 60°, ale hledáme střed otočení. Zvolíme pevně bod *C* na kružnici *k3*. V otočení se středem *C* a orientovaným úhlem 60°otočíme kružnici *k2*.

Bod *A* je průsečík kružnice *k2´* a *k1* (obr. *Otoc_p6_0*).



Obr. Otoc_p6_0

V zadání je dáno, že platí *r1>r2>r3*. Kružnici *k1* můžeme otáčet v otočení se středem v *C* nejen o úhel 60°, ale i o úhel –60°. Počet řešení úlohy závisí na počtu průsečíků otočené kružnice *k1´* (respektive *k1´´*) s kružnicí *k2* (obr. *Otoc_p6_d_0*).



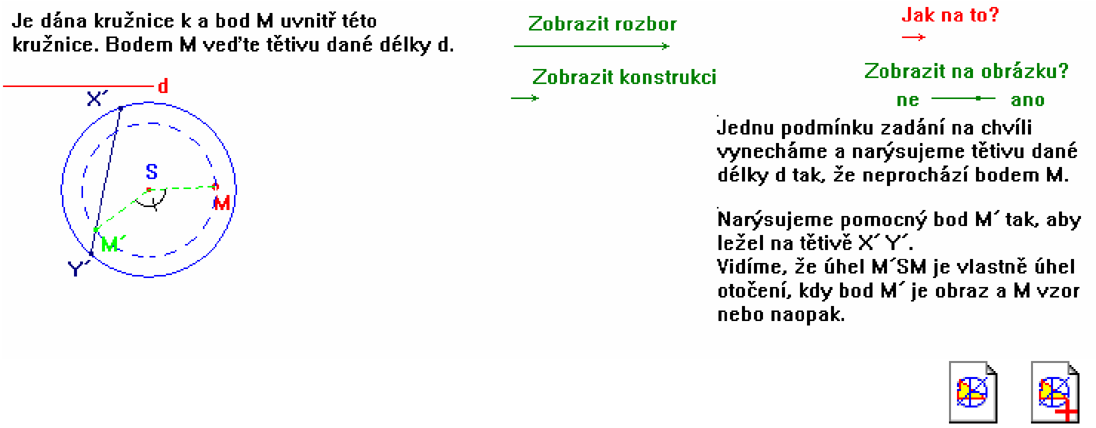
Obr. Otoc_p6_d_0

Pokud platí *r1* > *r2* + *r3*, pak úloha nemá řešení. Pro *r1* < *r2* + *r3* má úloha právě čtyři řešení. A platí-li *r3* = *r1* - *r2*>0, úloha má právě dvě řešení.

Příklad otoc_p7

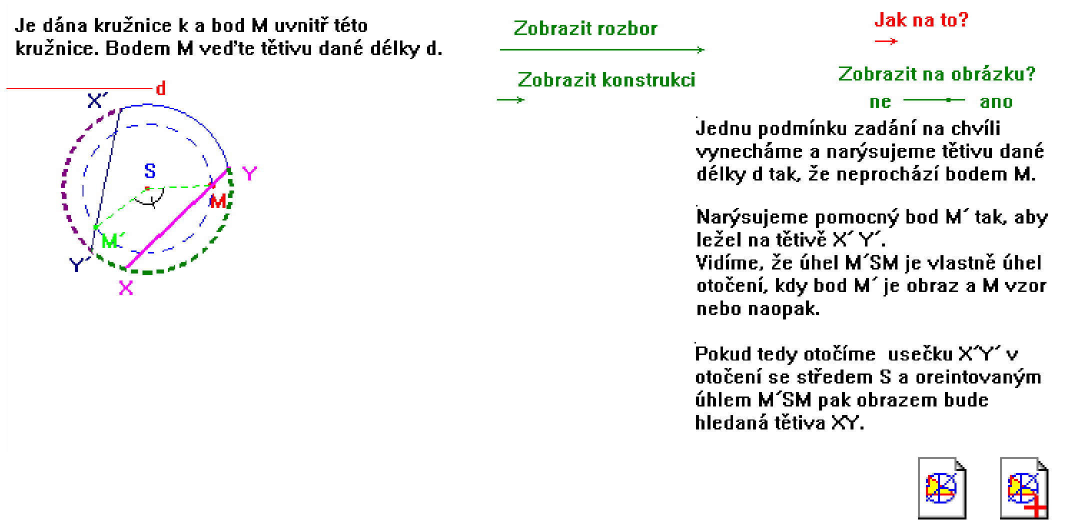
Je dána kružnice *k* a bod *M* uvnitř této kružnice. Bodem *M* máme vést tětivu dané délky *d.* V úloze není na první pohled jasný střed ani orientovaný úhel jako např. v úlohách a rovnostranným trojúhelníkem nebo čtvercem.

Představíme si úlohu vyřešenou (obr. *Otoc_p7_0*). Jednu podmínku zadání na chvíli vynecháme a narýsujeme pomocnou tětivu dané délky *d* tak, že neprochází bodem *M*. Bod *M* otočíme kolem středu *S* tak, aby ležel na pomocné tětivě *X´Y´*.



Obr. Otoc_p7_0

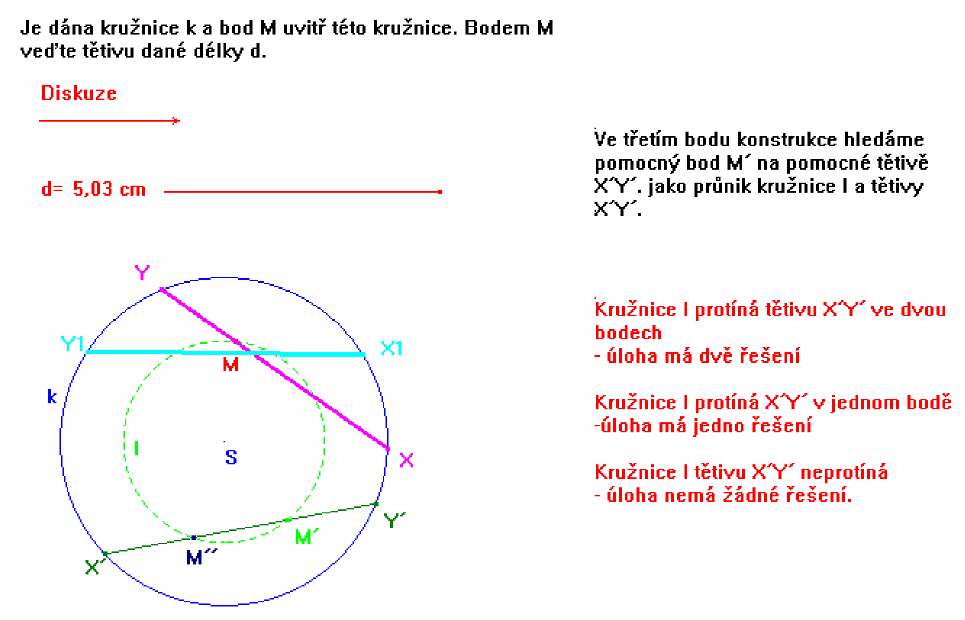
Z obrázku *Otoc_p7_1* je zřejmé, že hledané body *X*, *Y*, jsou obrazy bodů *X´*, *Y´* v otočení se středem *S* a orientovaným úhlem *M´S M*.



Obr. Otoc_p7_1

Pomocný bod *M´* na tětivě *X´Y´* hledáme jako průnik kružnice *l* a tětivy *X´Y´*. Podle počtu průniků určíme počet řešení.

Úloha může mít jedno, dvě nebo žádné řešení (obr. *Otoc_p7_d_0*).

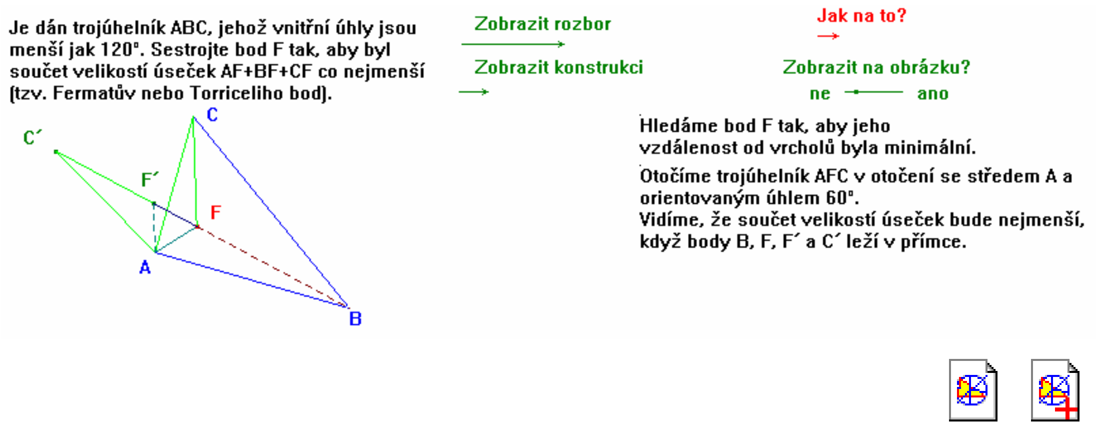


Obr. Otoc_p7_d_0

Příklad otoc_p8

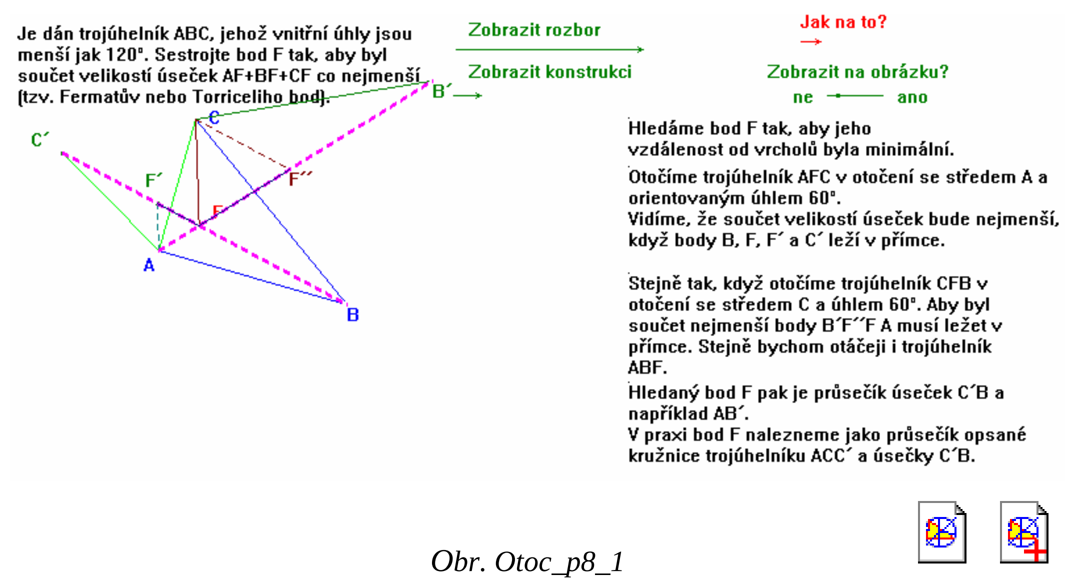
Máme za úkol najít tzv. Fermatův nebo Torriceliho bod *F* v trojúhelníku *ABC*, jehož vnitřní úhly jsou menší jak 120°. Je to bod, pro který platí, že součet velikostí úseček |*AF*| + |*BF*| + |*CF*| je nejmenší.

Otočíme-li trojúhelník *AFC* v otočení se středem *A* a orientovaným úhlem 60° vidíme, že díky otočení platí |*AF*|=|*AF´*|=|*FF´*| a |*CF*|=|*C´F´*|. Součet velikostí úseček bude nejmenší, pokud body *C´*, *F*, *´F*, *B* leží v přímce (obr. *Otoc_p8_0*).



Obr. Otoc_p8_0

Stejně tak můžeme otočit trojúhelník *BFC* v otočení se středem *C* a orientovaným úhlem 60°. Vzdálenosti jsou minimální, pokud body *A*, *F*, *F´*, *B´* leží v přímce. Bod *F* je tedy průsečík úseček *C´B* a *AB´* (obr. *Otoc_p8_1*).



Obr. Otoc_p8_1

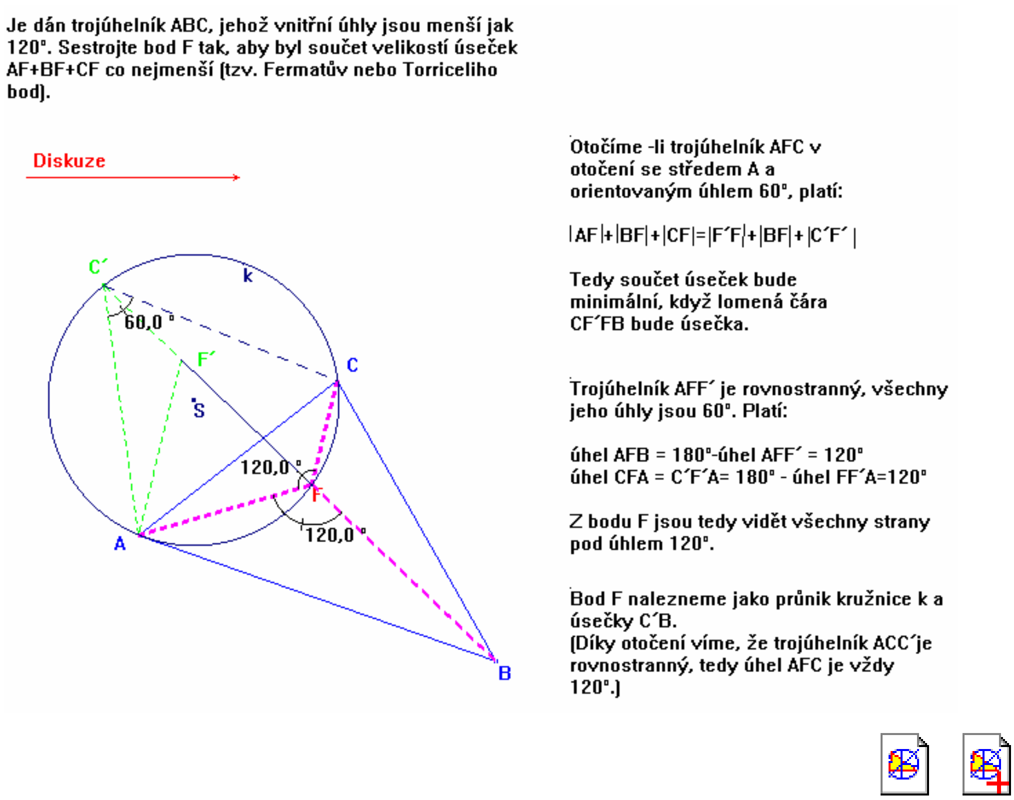
Body *C´F´F B* leží v přímce. Trojúhelník *AF´F* je rovnostranný. Pro úhly *AFB*, *AFC* a *CFB* pak platí (obr. *Otoc_p8_d_0*):

$$\angle AFB = 180° - \angle AFF´ = 180° - 60° = 120°$$

$$\angle CFA = \angle CF´A´ = 180° - \angle FF´A = 180° - 60° = 120°$$

$$\angle BFC = 360° - \angle AFB - \angle AFC = 360° - 120° - 120° = 120°$$

Z bodu *F* jsou jednotlivé strany trojúhelníku *ABC* vidět pod úhlem 120°.



Obr. Otoc_p8_d_0

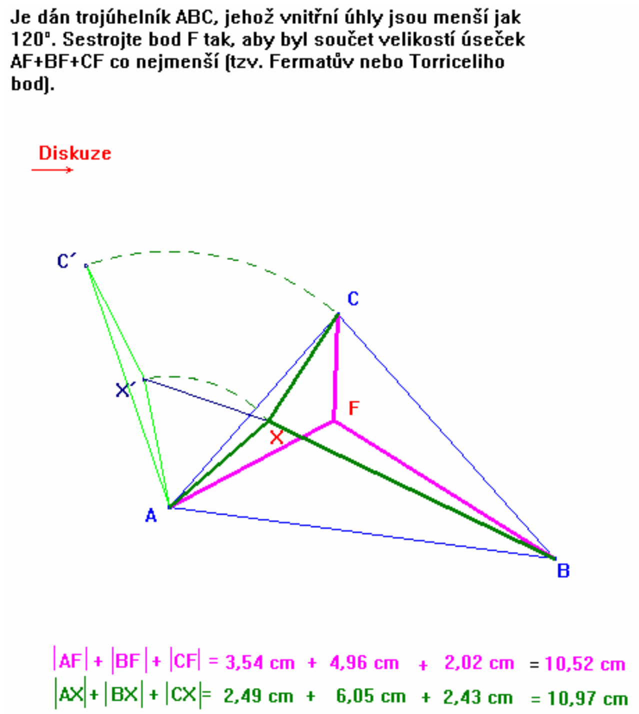
Bod *F* nalezneme jako průsečík kružnice *k* opsané trojúhelníku *ACC´* a úsečky *BC´* a to díky následujícím dvěma faktům:

1. Součet úseček je minimální, pokud je lomená čára *C´F´F B* úsečka – bod *F* tedy musí ležet na úsečce *C´B.*

2. Protože jsme otáčeli bod *C* v otočení se středem *A* a orientovaným úhlem 60°, trojúhelník *ACC´* je rovnostranný. Pokud opíšeme trojúhelníku *ACC´* kružnici, pak obvodové úhly příslušející delšímu oblouku *AC* kružnice *k* budou vždy 60°

a obvodový úhel příslušný doplňkovému oblouku *AC* vždy 120°. Bod *F* tedy leží na doplňkovém oblouku kružnice *k*.

Že je součet úseček |*AF*| + |*BF*| + |*CF*| skutečně minimální se můžeme snadno přesvědčit na obrázku *Otoc_p8_d_1* pomocí nabídky Cabri „*Vzdálenost a délka*“. Zvolíme libovolný bod *X* v trojúhelníku *ABC* a změříme délky úseček od bodu *X* a od Fermatova bodu *F* k vrcholům.



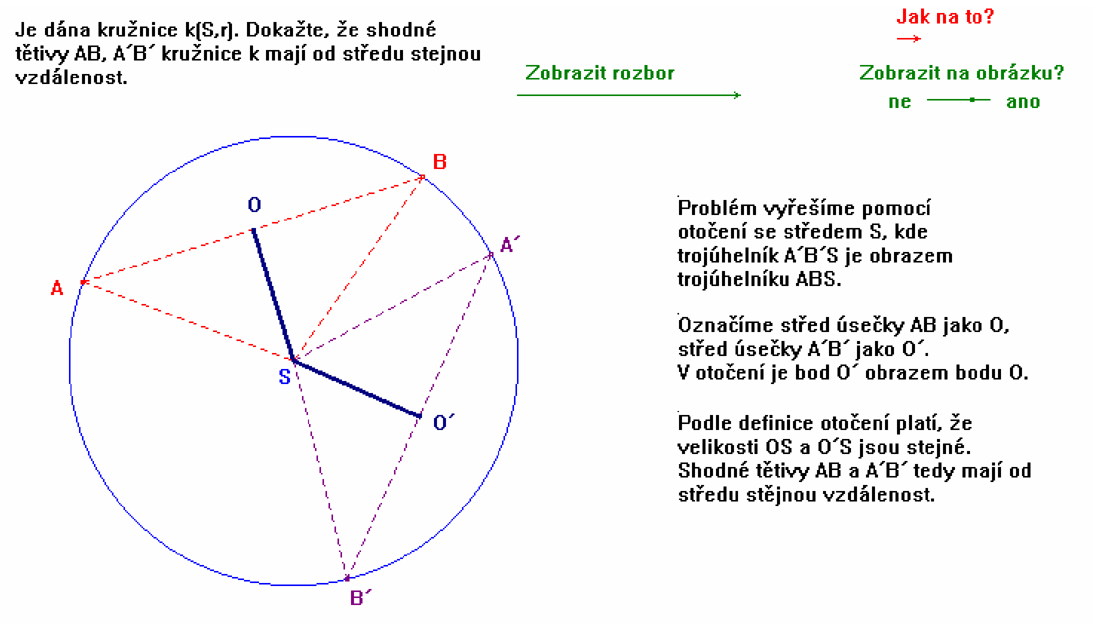
Obr. Otoc_p8_d_1

Pohybujeme-li bodem *X* vidíme, že součet „růžových“ úseček vedoucích k bodu *F* je vždy menší jak součet „zelených“ vedoucích k bodu *X*.

Příklad otoc_p9

Otočení je často využíváno i při důkazových úlohách. V následujícím příkladu je dána kružnice $k(S,r)$. Máme dokázat, že shodné tětivy AB, $A'B'$ kružnice k mají od středu S stejnou vzdálenost.

Problém vyřešíme pomocí otočení se středem S, kde trojúhelník $A'B'S$ je obrazem trojúhelníku ABS (obr. *Otoc_p9_0*). Střed úsečky AB označíme jako O, střed úsečky $A'B'$ jako O'. V daném otočení je bod O' obrazem bodu O.



Obr. otoc_p9_0

Přímo podle definice otočení platí, že velikost úsečky $|O'S|$ je stejná jako velikost úsečky $|OS|$. Shodné tětivy AB a $A'B'$ tedy mají od středu stejnou vzdálenost.

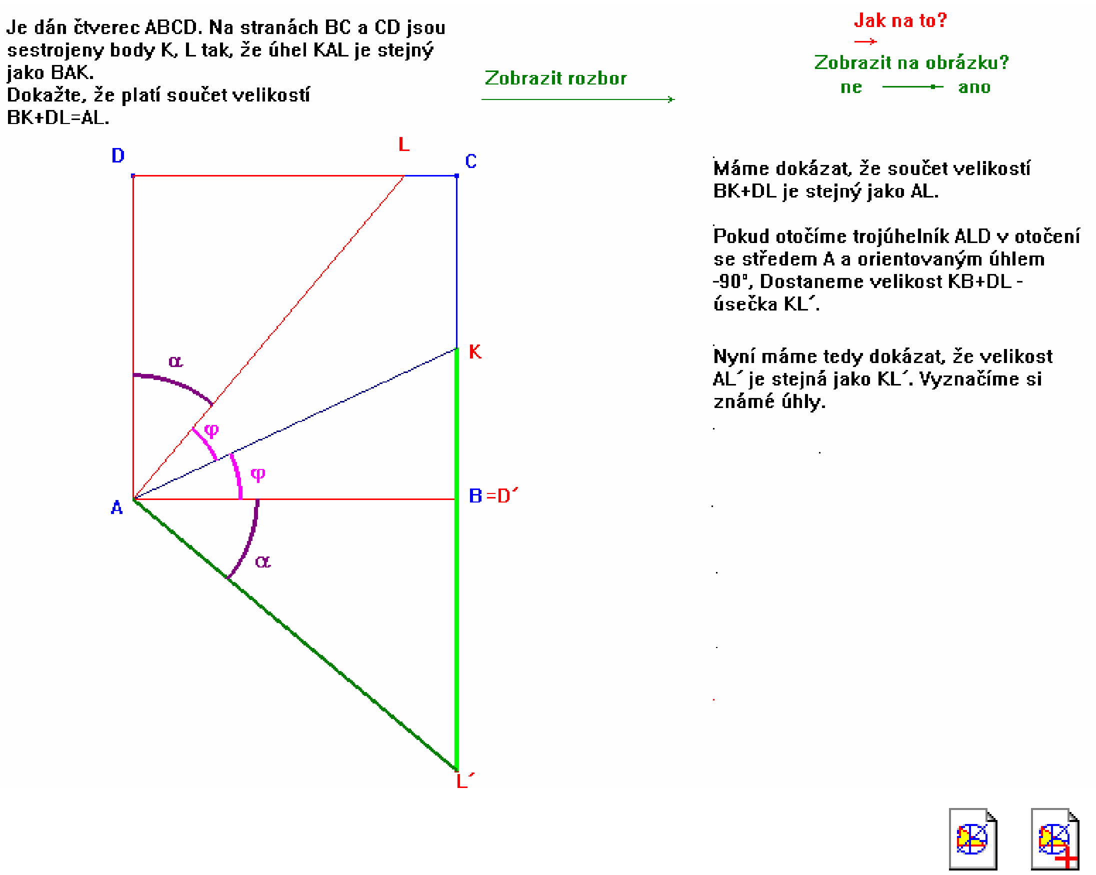
Stejnou vzdálenost úseček lze také dokázat použitím Pythagorovy věty.

Příklad otoc_10

Je dán čtverec *ABCD*. Na stranách *BC* a *CD* jsou sestrojeny body *K*, *L* tak, že úhel $\angle KAL$ je stejný jako $\angle BAK$. Máme dokázat, že platí součet

$$|BK| + |DL| = |AL| .$$

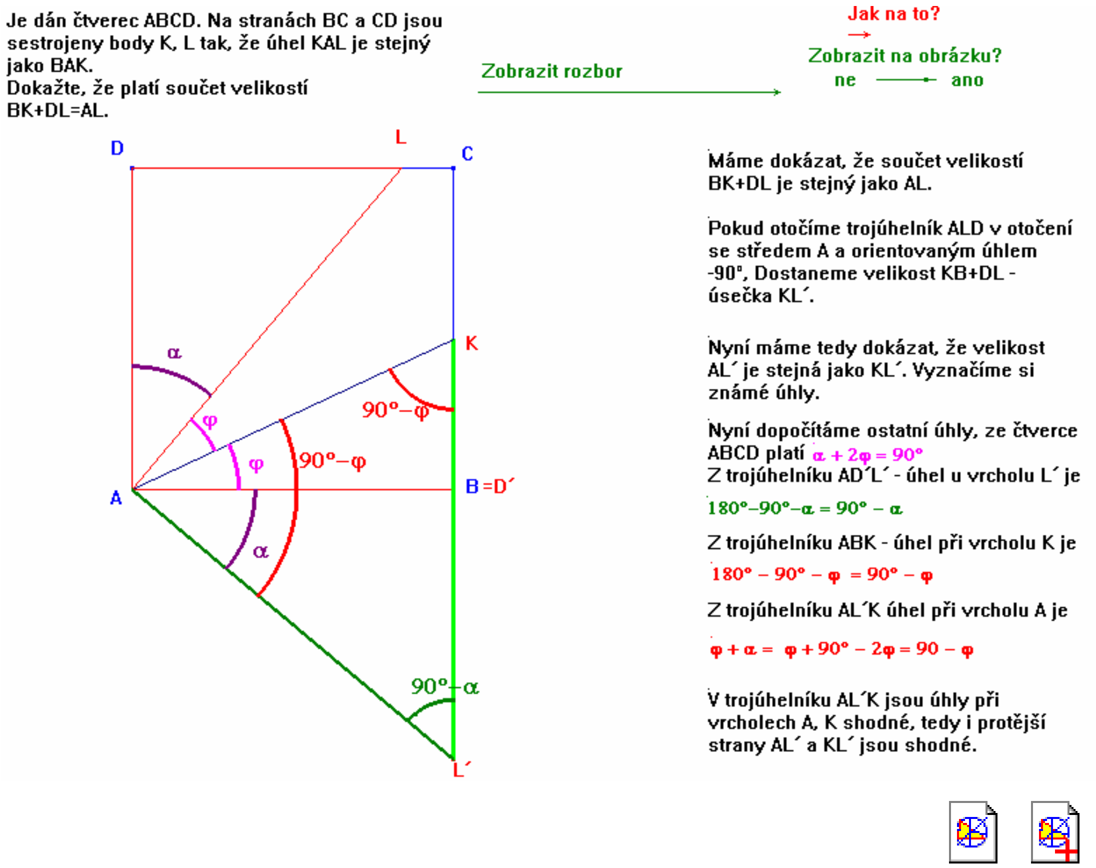
Pokud při označení podle obrázku *Otoc_p10_0* otočíme trojúhelník *ALD* v otočení se středem *A* a orientovaným úhlem - 90°, Dostaneme velikost *KB+DL* - úsečka *KL´*. Nyní máme dokázat, že v trojúhelníku *AL´K* jsou strany *AL´* a *KL´* shodné.



Obr. Otoc_p10_0

Vyznačíme si známé úhly a ostatní úhly vyjádříme pomocí těch známých. Vycházíme z toho, že pro úhly *α*, *φ* platí: $\alpha + 2 \cdot \varphi = 90°$.

Na obrázku *Otoc_p10_1* vidíme, že v trojúhelníku *AL´K* je úhel při vrcholu *A* a úhel při vrcholu *K* shodný, tedy i strany naproti shodným úhlům musejí být shodné.



Obr. Otoc_p10_1

Platnost vztahu $|BK| + |DL| = |AL|$ je dokázána.

5. Shodná zobrazení

5.1 Skládání shodných zobrazení

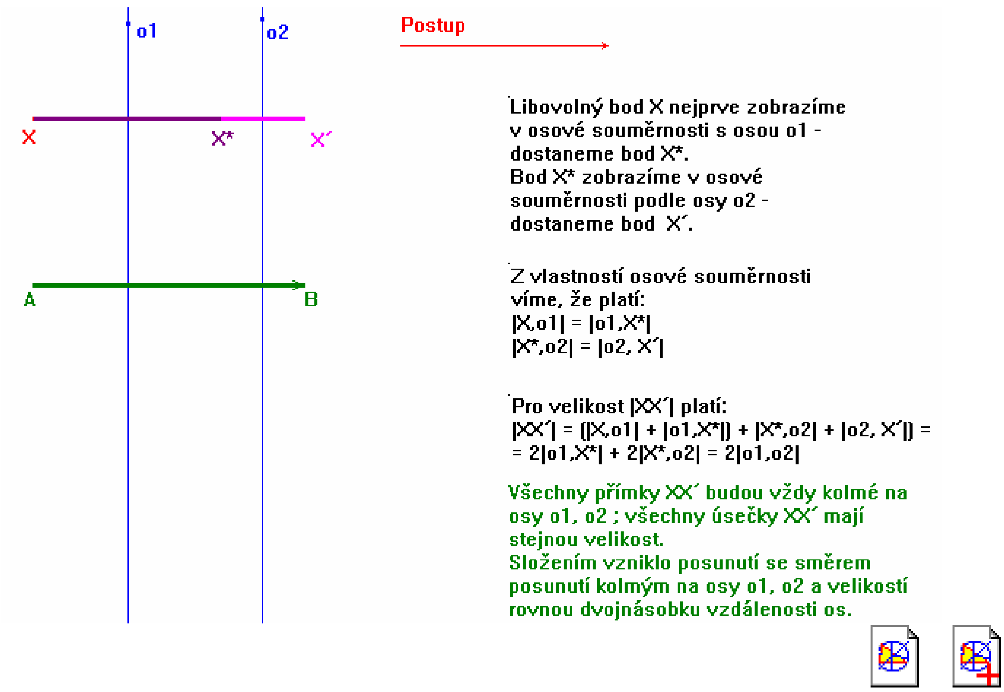
Shodná zobrazení spolu vzájemně souvisí. Některá shodná zobrazení se dají složit a naopak rozložit v jiné shodné zobrazení. Obecně pro skládání platí následující dvě věty:

1. *Složením dvou přímých shodností nebo dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost. Složením přímé a nepřímé shodnosti vznikne nepřímá shodnost.*
2. *Každou přímou shodnost lze složit ze dvou osových souměrností. Každou nepřímou shodnost lze složit ze středové souměrnosti a osové souměrnosti*

[5]

Podrobněji si rozebereme příklady týkající se posunutí a otočení.

Úloha 1: *Jaké shodné zobrazení vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami?*



Obr. Translace

Pří hledání shodného zobrazení nejprve nalezneme obrazy bodu X v osové souměrnosti s osou *o1* a poté s osou *o2* (obr. *Translace*). Jaký je vztah úsečky XX' vzhledem k osám *o1*, *o2*? Jak lze velikost $|XX'|$ rozepsat ?

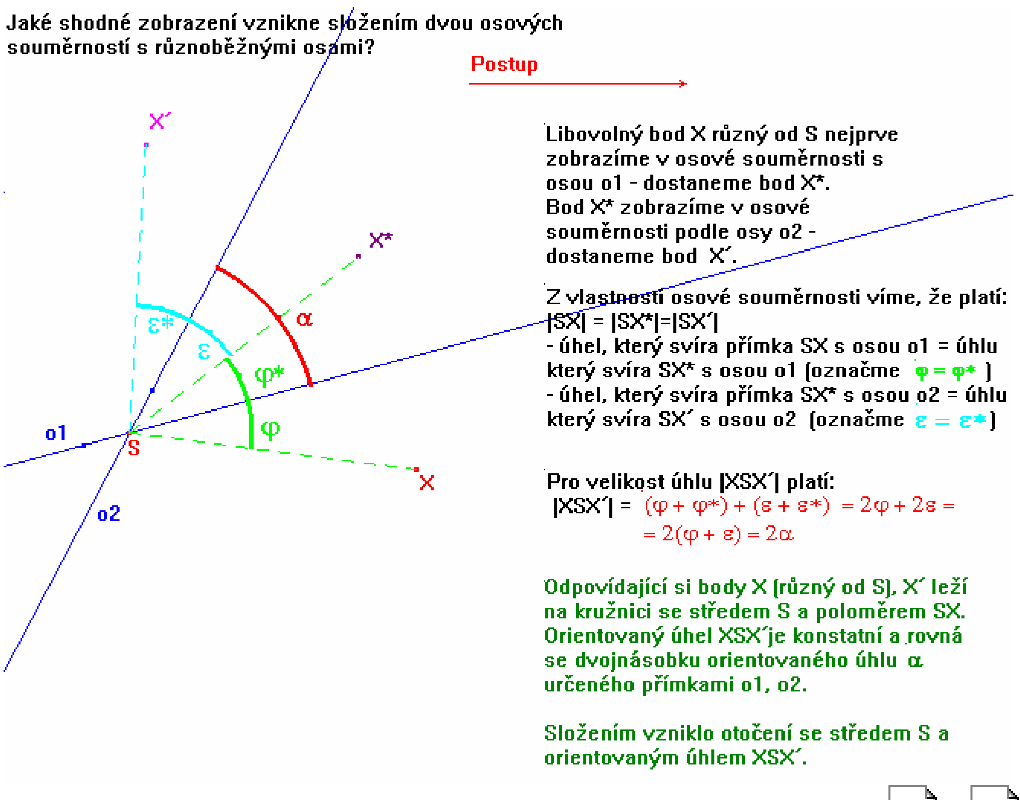
Využijeme-li ovladače „Postup“, zobrazí se nám jednotlivé kroky. Rozborem situace zjistíme, že hledané shodné zobrazení je posunutí neboli translace. V podstatě sčítáme orientované úsečky (jako vektory) $\overrightarrow{XX^*} + \overrightarrow{X^*X'}$.

Platí následující věta i věta k ní obrácená:

*Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami vzniká **translace**. Velikost translace je rovna dvojnásobku vzdálenosti os a směr translace je kolmý na osy obou souměrností. Smysl translace je jednoznačně určen pořadím os.*

*Každou **translaci** lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou rovnoběžné. Za jednu osu lze volit libovolnou přímku kolmou k přímkám směru translace, druhá osa je jednoznačně určena.* [2]

Úloha 1: *Jaké shodné zobrazení vznikne složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami?*



Obr. Rotace

Pří hledání shodného zobrazení stejně jako u předchozího příkladu nejprve nalezneme obrazy bodu X v osové souměrnosti s osou *o1* a poté s osou *o2* (obr. *Rotace*). Jak lze rozepsat velikost úhlu $|\angle XSX'|$?

Rozborem situace zjistíme, že hledané shodné zobrazení je otočení neboli rotace. V podstatě sčítáme velikosti orientovaných úhlů XSX^* a X^*SX'.

Platí následující věta i věta k ní obrácená:

Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami je rotace, jejímž středem je průsečík obou různoběžných os. Velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají osy obou osových souměrností, smysl otáčení je dán pořadím os.

Každou rotaci lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem souměrnosti. Za jednu osu lze volit libovolnou přímku procházející středem souměrnosti, druhá je pak určena jednoznačně. [2]

6. Závěr

Ve své práci jsem navrhla metodiku výuky témat otočení a posunutí na střední škole za pomocí dynamické geometrie. Čtenář nemusí chápat pokyny v práci jako definitivní a závazné a samozřejmě si je může upravit tak, aby to vyhovovalo jeho přístupu a metodám práce. Chtěla jsem jen ukázat některé možnosti využití dynamické geometrie. Součástí práce je i sada příkladů na procvičení shodných zobrazení otočení a posunutí. Příklady jsou řešeny s použitím programu Cabri geometrie. Snažila jsem se věnovat všem poznatkům, od těch nejzákladnějších až po těžší aplikace probíraných zobrazení, při řešení konstrukčních úloh na gymnáziích, či v matematických kroužcích.

V dnešní době, díky obrovskému rozvoji výpočetní techniky je užívání interaktivních pomůcek ve výuce na školách čím dál běžnější. Pro žáky je způsob výuky s využitím počítače velmi oblíbený. Zvlášť v geometrii je užití interaktivních pomůcek vhodné. Žáci si mohou sami vyzkoušet různé postupy vedoucí k řešení problému, hlavní poznávací metodou je experimentování.

Jednoduchost a dynamika konstrukce může pomoci žákům, kteří nemají příliš velkou představivost, odhalit zákonitosti, které přispějí k lepšímu pochopení celého učiva. Příklady mohou řešit vlastním tempem, případně využívat možnosti ovladačů s nápovědou. Řešené příklady mohou být využity i během domácího samostudia.

Ve vyučování rozhodně využíváme i klasickou metodu rýsování na papír pomocí pravítka a kružítka. Rozvíjíme tak v žácích cit pro přesnost a estetiku.

Program Cabri geometrie má i své nedostatky například při numerických výpočtech se stupni nebo při rýsování orientovaného úhlu. Nabízí však interaktivnost, možnost experimentování a je tak vítaným zpestřením každé hodiny výuky geometrie.

Ať již s využitím programu Cabri geometrie nebo klasickým rýsováním na papír, pokud jsou jednotlivé věty a poznatky v geometrii předkládány formou hotových a neměnných skutečností, poznatky žáka budou povrchní a lehce je zapomene. Pokud si však pojmy a věty v geometrii osvojí vlastní aktivitou, hledáním souvislosti, tvorbou a prověřováním hypotéz, pak bude kvalita poznání hlubší, plnější a trvalejší.

7. Vysvětlivky

p .... přímka p (značíme písmeny z konce abecedy)

AB .... úsečka s krajními body A a B

$|AB|$ .... velikost úsečky AB (délka)

$\overrightarrow{AB}$ .... orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B

$T_{\overrightarrow{AB}}$ .... posunutí s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$

$R_{(S,\varphi)}$ .... otočení se středem S a orinetovaným úhlem φ

pA .... polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem A

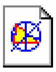
$k\,(S;\,r\,)$ .... kružnice k se středem S a poloměrem velikosti r

$\angle ACB$ .... úhel ACB (s vrcholem C)

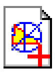
$|\angle ACB|$ .... velikost úhlu ACB (s vrcholem C)

$Z\!: A \rightarrow B$ .... bod B je obrazem bodu A v zobrazení Z

$Z \circ Z'$ .... složení zobrazení Z a Z'



.... pod obrázkem; po kliknutí na tuto ikonu se příslušný obrázek otevře v programu Cabri geometrie.



.... pod obrázkem; po kliknutí na tuto ikonu se příslušný obrázek otevře v programu Cabri geometrie plus.

8. Seznam použité literatury

[1] *Hejný, M.*: Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1990

[2] *Lávička, M.:* GEOMETRIE 1 Základy geometrie v rovině, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 2002

[3] *Odvárko, O.:* Matematika pro gymnázia- Goniometrie, Prométheus, Praha 2002

[4] *Petáková, J.:* MATEMATIKA - Příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, Praha 2003

[5] *Polák, J.*: PŘEHLED středoškolské matematiky, Prométheus, Praha 1997

[6] *Polák, J.*: Středoškolská matematika v úlohách 2, Prometheus, Praha 1999

[8] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia – Planimetrie, Prometheus, Praha 1998

[9] *Řeháček, J.*: Využití Cabri geometrie při řešení konstrukčních úloh na střední škole, diplomová práce PF JU, České Budějovice 2001

[10] *Schwarzbach, M.:* Shodná zobrazení a dynamické geometrie, diplomová práce PF JU, České Budějovice 2005