Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra fyziky

Tvorba učebního textu z vyšší matematiky s využitím e-learningu

Bakalářská práce

Autor: Alena Nováková

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Kříž, Ph.D.

České Budějovice 2008

Anotace
Učební text obsahující následující kapitoly z vyšší matematiky: komplexní čísla, matice, determinanty, numerické řešení rovnic, diferenciální počet funkcí více proměnných, vektorová analýza, diferenciální rovnice. Text je doplněn o ilustrační příklady se zaměřením především na využití daného matematického aparátu ve fyzice. Součástí tohoto učebního textu je i jeho elektronická podoba „Elektronická učebnice matematiky pro fyziky“.

Klíčová slova
Matematika pro fyziky, komplexní čísla, matice, determinanty, numerické řešení rovnic, diferenciální počet funkcí více proměnných, vektorová analýza, diferenciální rovnice

Abstract
Teaching text containing the following chapters of higher mathematics: complex numbers, matrices, determinants, numerical solution of equations, differential calculus of functions of several variables, vector analysis, differential equations. The text is supported by illustrated examples with the main aim of using the given mathematical concepts and theorems in physics. Part of this teaching text is its electronic form „Electronic textbook of mathematics for physics“.

Keywords
Mathematics for physics, complex numbers, matrices, determinants, numerical solution of equations, differential calculus of functions of several variables, vector analysis, differential equations.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích 20. dubna 2008 ………………………….

Zde bych chtěla poděkovat vedoucímu práce panu RNDr. Pavlu Křížovi, Ph.D. za odbornou pomoc a vedení při vypracování této bakalářské práce a Bc. Ivanu Štanclovi za cenné rady a připomínky.

Obsah

1. Úvod

Tato práce se zabývá úkolem vytvořit učební text pro výuku matematiky v bakalářských studijních oborech zaměřených na fyziku vyučovaných na Pedagogické fakultě JČU.

Cílem práce je shrnout důležité pasáže matematické analýzy a lineární algebry do podoby uceleného studijního materiálu a poskytnout studentům přehlednou formou potřebný matematický aparát pro studium a řešení fyzikálních problémů.

Obsahové zaměření a rozsah témat vychází zejména z potřeb předmětů Matematika pro fyziky II. MPF2 a Aplikovaná matematika AMAB2. Důraz je kladen na srozumitelnost výkladu a ilustrování látky pomocí příkladů s fyzikální tématikou. Vzhledem k rozsahu a účelu textu je látka předkládána formou přehledu klíčových poznatků bez důkazů a odvození.

Pro studium učebního textu jsou předpokládány znalosti matematiky v rozsahu středoškolské matematiky a základního kurzu matematické analýzy.

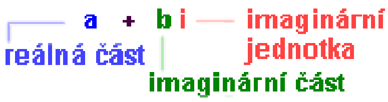
Učební text je členěn do 6 kapitol. První kapitola shrnuje poznatky o komplexních číslech, v kapitole druhé jsou popsány matice a determinanty, třetí kapitola se zabývá numerickým řešením rovnic. Ve čtvrté kapitole jsou vysvětleny důležité pojmy z oblasti vektorové analýzy, potřebné pro studium vektorových a skalárních polí ve fyzice. Kapitola pátá je věnována diferenciálnímu počtu funkcí více reálných proměnných. Kapitola šestá pokrývá téma diferenciálních rovnic.

Součástí této práce je její elektronická podoba – elektronická učebnice v podobě hypertextového dokumentu. Ta pokrývá stejná témata, jako učební text a je navíc rozšířena o další ilustrační příklady a úlohy k procvičování, které vzhledem k rozsahu práce nebylo vhodné zahrnout do učebního textu.

2. Komplexní čísla

2.1. Definice komplexních čísel

Komplexními čísly nazýváme uspořádané dvojice reálných čísel $[a,b]$, kde číslo a představuje ***reálnou část*** komplexního čísla a číslo b ***imaginární část*** komplexního čísla. Pokud je reálná část nulová, jedná se o ***ryze imaginární*** komplexní číslo.
Komplexní čísla zapisujeme pomocí písmene z.
Každé komplexní číslo lze vyjádřit v ***algebraickém tvaru*** $a+b\mathrm{i}$, kde i je ***imaginární jednotka***.



Pro imaginární jednotku platí $\mathrm{i}^2=-1$

Pro přirozené mocniny i platí:

$\mathrm{i}^{4k}=1;\quad \mathrm{i}^{4k+1}=\mathrm{i};\quad \mathrm{i}^{4k+2}=-1;\quad \mathrm{i}^{4k+3}=-\mathrm{i}$

Tato čísla nám umožňují odmocnit záporné číslo:

$\mathrm{i}^2=-1,\ \text{tedy } \sqrt{-1}=\mathrm{i}$

$(3\mathrm{i})^2=-9,\ \text{tedy } \sqrt{-9}=3\mathrm{i}$

$\left(\sqrt{5}\mathrm{i}\right)^2=-5,\ \text{tedy } \sqrt{-5}=\sqrt{5}\mathrm{i}$

a tím i řešit kvadratickou rovnici se záporným diskriminantem.

Příklad 2.1

Řešte rovnici $x^2-6x+13=0$

$a=1,\ b=-6,\ c=13,\ D=b^2-4ac=36-52=-16$

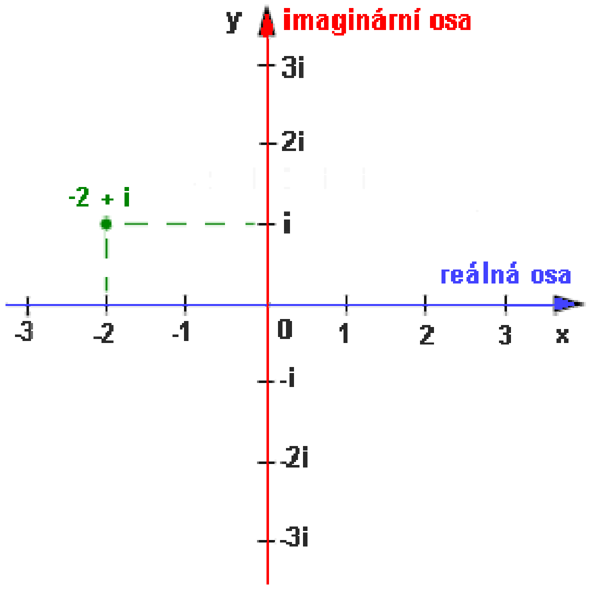
$$x_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{6\pm4\sqrt{-1}}{2}=3\pm2\sqrt{-1}$$

$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

$x_{1,2}=3\pm2\mathrm{i}$

Geometrické znázornění komplexních čísel

Komplexní číslo můžeme chápat také jako uspořádanou dvojici reálných čísel - první je reálná část komplexního čísla a druhá imaginární část komplexního čísla. Protože existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech uspořádaných dvojic reálných čísel a množinou všech bodů v rovině, je zřejmé, že můžeme komplexní čísla znázornit jako body roviny. Rovinu, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel, nazýváme ***Gaussova rovina*** či ***rovina komplexních čísel***.



Obr. 2.1. Znázornění komplexního čísla v Gaussově rovině

2.2. Základní matematické operace v oboru komplexních čísel

Rovnost

Dvě komplexní čísla $z_1 = [a_1, b_1]$, $z_2 = [a_2, b_2]$ jsou si rovna, rovnají-li se jejich části reálné $(a_1 = a_2)$ i jejich části imaginární $(b_1 = b_2)$.

Příklad 2.2

Kdy bude číslo $u = 3 - 2\mathrm{i}$ rovno číslu $v = p + q\mathrm{i}$?

Pokud číslo $u = 3 - 2\mathrm{i}$ má být rovno $v = p + q\mathrm{i}$, musí platit $p = 3$ a současně $q = -2$.

Součet, rozdíl, součin

Komplexní čísla v algebraickém tvaru sčítáme a násobíme obdobně jako reálné dvojčleny:

$$z_1 = [a_1, b_1],\ z_2 = [a_2, b_2]$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathrm{i}$.

Sčítání i násobení komplexních čísel je komutativní:

$a + b = b + a$

a asociativní:

$a + (b + c) = (a + b) + c$.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání:

$a + (b + c) = a \cdot c + b \cdot c$.

Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule aspoň jedno z nich.

Pro mocniny komplexních čísel s přirozeným exponentem platí stejná pravidla jako pro mocniny čísel reálných:

$z^m \cdot z^n = z^{m+n}$

$(x \cdot z)^m = x^m \cdot z^m$

$(z^m)^n = z^{m \cdot n}$

Násobení reálným číslem k:

$k \cdot z = k \cdot a + k \cdot b\mathrm{i}$

Dělení reálným číslem k:

$\frac{z}{k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k}\mathrm{i}$

Příklad 2.3

Vypočtěte $\left[3(2-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})\right]^2$.

$\left[3(2-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})\right]^2 = (6-3\mathrm{i}-1-\mathrm{i})^2 = (5-4\mathrm{i})^2 = 25-40\mathrm{i}+16\mathrm{i}^2 =$

$= 25-40\mathrm{i}-16 = 9-40\mathrm{i}$

Komplexní číslo sdružené

Komplexně sdružené číslo s číslem $z = a + b\mathrm{i}$ je číslo $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

(Je-li tedy $z = 3 - 2\mathrm{i}$, je $\overline{z} = 3 + 2\mathrm{i}$)

$z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2$

Dělení

Máme-li vypočítat podíl $\frac{z_1}{z_2}$ komplexních čísel $z_1=[a_1,b_1]$, $z_2=[a_2,b_2]$ (z_2 nenulové), rozšíříme zlomek číslem sdruženým ke jmenovateli, tím vznikne ve jmenovateli reálné číslo, kterým již bez problémů vydělíme.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})}{(a_2+b_2\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+a_2^2}\mathrm{i}$$

Příklad 2.4

$$\frac{3+4\mathrm{i}}{2-5\mathrm{i}}=\frac{(3+4\mathrm{i})\cdot(2+5\mathrm{i})}{(2-5\mathrm{i})\cdot(2+5\mathrm{i})}=\frac{-14+23\mathrm{i}}{4+25}=\frac{-14}{29}+\frac{23}{29}\mathrm{i}$$

Absolutní hodnota

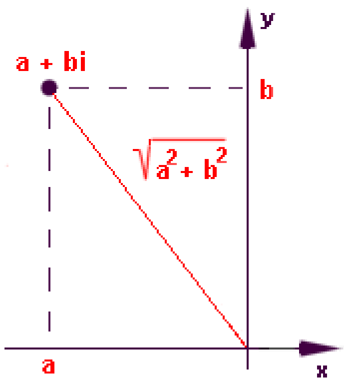
Absolutní hodnota (modul) komplexního čísla $z=a+b\mathrm{i}$ je nezáporné reálné číslo:

$$|z|=\sqrt{z+\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Geometrický význam absolutní hodnoty udává v Gaussově rovině vzdálenost čísla z od čísla 0 (počátku souřadného systému).

Pro počítání s absolutními hodnotami komplexních čísel platí podobná pravidla jako u čísel reálných. Tedy absolutní hodnota součinu, resp. podílu komplexních čísel je rovna součinu, resp. podílu jejich absolutních hodnot.

Komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné, se nazývá komplexní jednotka.



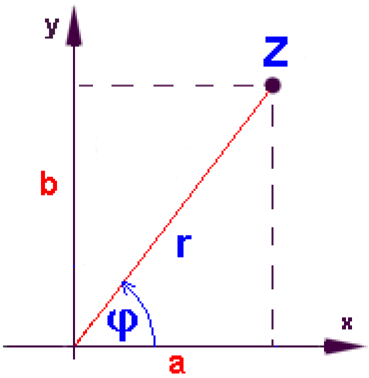
Obr. 2.2. Absolutní hodnota komplexního čísla

Všechna komplexní čísla, která mají stejnou absolutní hodnotu, leží na kružnici se středem v počátku a s poloměrem $|z|$. Komplexní jednotky leží na jednotkové kružnici.

2.3. Vyjádření komplexního čísla v goniometrickém a exponenciálním tvaru

Goniometrický tvar komplexního čísla

Bod Z - obraz komplexního čísla $z = a + bi$ v Gaussově rovině - můžeme určit také pomocí jeho vzdálenosti r od počátku a velikosti orientovaného úhlu φ:



Obr. 2.3. Obraz komplexního čísla

Platí: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ a tedy: $b = r\cdot\sin\varphi$, $a = r\cdot\cos\varphi$.

Číslo z lze tedy zapsat:

$$z = a + bi = r\cdot\cos\varphi + r\cdot\sin\varphi\ \mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi)$$

Reálné číslo φ (určující velikost orientovaného úhlu) nazýváme argument komplexního čísla.

Reálné číslo r je absolutní hodnota komplexního čísla $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Goniometrický tvar komplexního čísla $z \neq 0$ je jeho vyjádření ve tvaru:

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi),$$

kde φ je jeho argument, pro který platí: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Součin libovolných nenulových komplexních čísel $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_2)$ je roven komplexnímu číslu:

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Při násobení tedy absolutní hodnoty vynásobíme a argumenty sečteme.

Podíl libovolných nenulových komplexních čísel $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_1)$ a

$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_2)$ je roven komplexnímu číslu:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Při dělení tedy absolutní hodnoty vydělíme a argumenty odečteme - v příslušném pořadí!

Exponenciální tvar komplexního čísla

Exponenciálním tvarem komplexního čísla rozumíme jeho vyjádření ve tvaru:

$$z = r\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Exponenciální tvar je nejvýhodnější pro vyjádření součinů a podílů komplexních čísel.

$$z_1 = r_1\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1},\ z_2 = r_2\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\cdot e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

2.4. Moivreova věta, odmocnina komplexního čísla

Mocnina komplexního čísla

Vztah pro mocninu komplexního čísla vyjadřuje Moivreova věta pro umocňování:
pro každé celé číslo n a každé komplexní číslo $z = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ platí:

$$z^n = \left[|z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi)\right]^n = |z|^n(\cos n\cdot\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin n\cdot\varphi).$$

Při umocnění tedy absolutní hodnotu umocníme a argument vynásobíme exponentem mocniny.

Pro speciální případ $|z| = 1$ je možné Moivreovu větu formulovat takto:

pro každé přirozené číslo n a libovolné reálné číslo φ platí:

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi)^n = (\cos n\cdot\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin n\cdot\varphi)$$

V exponenciálním tvaru můžeme Moivreovu větu zapsat jako

$$z^m = r^m\cdot e^{\mathrm{i}m\varphi}.$$

Odmocnina komplexního čísla

n-tá odmocnina z komplexního čísla je n-značná, nabývá tedy n různých hodnot. Podle Moivreovy věty pro odmocňování platí:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, pro $k = 0,1,\ldots,n-1$.

2.5. Řešení rovnic v oboru komplexních čísel

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a,b,c nemá v oboru reálných čísel pro záporný diskriminant $(D<0)$ reálné řešení (neexistuje reálná odmocnina ze záporného čísla). V oboru komplexních čísel lze ale dokázat, že platí:

$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1)(-D)} = \mathrm{i}\sqrt{-D}$$

Odmocnina z čísla $-D$ (kladné) již existuje a dostáváme závěr:

kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ s reálnými koeficienty a záporným diskriminantem D má v oboru komplexních čísel právě dva kořeny, a to komplexně sdružená čísla:

$$x_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}$$

Příklad 2.5

V oboru komplexních čísel řešte rovnici $3x^2-4x+2=0$

D=16-24=-8

$$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{-8}}{6} = \frac{4\pm\mathrm{i}\sqrt{8}}{6} = \frac{2\pm\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}$$

Protože je každá kvadratická rovnice s reálnými koeficienty v oboru komplexních čísel řešitelná (existují její kořeny), lze i každý kvadratický trojčlen s reálnými koeficienty rozložit v součin a platí:

každý kvadratický trojčlen $ax^2+bx+c=0$ s reálnými koeficienty lze vyjádřit jako součin:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

kde x_1, x_2 jsou kořeny rovnice $ax^2+bx+c=0$.

Binomické rovnice

Binomickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru $x^n - z = 0$,

kde z je komplexní číslo, x neznámá a n je přirozené číslo větší než 1.

Řešením binomické rovnice $x^n - z = 0$ v $\mathbb{C}$ je komplexní n-tá odmocnina $x = \sqrt[n]{z}$.

Rovnici upravíme na ekvivalentní tvar $x^n = z$ a aplikujeme definici komplexní odmocniny.
Binomická rovnice v komplexním oboru má tedy n jednoduchých kořenů, které, jak víme, tvoří v Gaussově rovině pravidelný n-úhelník. Oproti řešení binomických rovnic v reálném oboru, kdy řešení nemusí být žádné, jedno nebo dvě (podle toho, kolik vrcholů pravidelného n-úhelníka padne na reálnou osu), zde vidíme krásnou symetrii a přesně daný počet řešení. To je jeden z mnoha případů, kdy převedení nějakého problému z oboru reálných čísel do čísel komplexních poskytuje daleko hlubší vhled do jeho podstaty.

2.6. Pojem komplexního vektoru a komplexní funkce

Obrazem komplexního čísla Z v Gaussově rovině je bod. Toto zobrazení je jednoznačné. Vzájemně jednoznačné je i přiřazení orientované úsečky s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic a koncovým bodem v obrazu komplexního čísla Z. Stejný obraz používáme na grafické znázornění vektorů, této analogie využijeme k zavedení ***komplexního vektoru***.

Dvojice $[a,b]$ je komplexní vektor, pro který platí všechny matematické operace platné pro komplexní čísla. Komplexní vektor $\mathbf{Z}$ můžeme zapsat ve tvaru

$\mathbf{Z} = a + b\mathrm{j} = z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi} = z\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)$,

kde z je velikost komplexního vektoru, a,b jsou jeho složky a φ je fáze. Znázorněním komplexního vektoru je orientovaná úsečka.
Poznámka: V souladu s konvencemi používanými v elektrotechnických výpočtech zde budeme používat pro označení komplexní jednotky písmeno j místo písmene i (mohlo by dojít k záměně s označením proudu).

V praxi jsou komplexní vektory často funkcí reálných proměnných, např.
$\mathbf{Z} = a(x,y) + \mathrm{j}b(x,y)$, kde x, y jsou reálná čísla, složky komplexního vektoru $\mathbf{Z}$ jsou funkcí proměnných x, y. Potom hovoříme o funkci $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(x,y)$.

V dalších úvahách se omezíme pouze na funkce času $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(t)$, tzv. ***časový vektor***.

Pro fyzikální praxi jsou důležité časové vektory, jejichž fáze φ je lineární funkcí času $\psi = \psi(t) = \omega t + \varphi$, kde ω a φ jsou konstanty.

Časový vektor potom nabývá tvaru

$$\mathbf{Z} = z \cdot e^{\mathrm{j}\psi t} = z\left(\cos\psi(t) + \mathrm{j}\cdot\sin\psi(t)\right) = z \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_0)} = z\left(\cos(\omega t + \varphi_0) + \mathrm{j}\cdot\sin(\omega t + \varphi_0)\right).$$

Složky časového vektoru $\mathbf{Z}$ jsou dvě nezávislé, reálné, harmonické funkce času

$$\mathrm{Re}(\mathbf{Z}) = z\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\mathrm{Im}(\mathbf{Z}) = z\sin(\omega t + \varphi)$$

Nechť $\mathbf{Z}_0 = z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_0}$ je časový vektor pro $t = 0$, potom časový vektor $\mathbf{Z}_0 = z \cdot e^{\mathrm{j}\omega}$ je vektor v rovině, otáčející se stálou úhlovou rychlostí ω kolem svého počátečního bodu, tj. kolem počátku soustavy souřadnic.

Komplexně sdružený časový vektor $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_0^* \cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}$**,** kde $\mathbf{Z}_0^* = z \cdot e^{-\mathrm{j}\varphi_0}$ je vektor otáčející se v opačném smyslu než vektor $\mathbf{Z}$.

Matematické operace s časovými vektory

Součet a rozdíl časových vektorů $\mathbf{Z}_1$ a $\mathbf{Z}_2$ je časový vektor $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \pm \mathbf{Z}_2 = \left(\mathbf{Z}_{1_0} \pm \mathbf{Z}_{2_0}\right)e^{\mathrm{j}\omega t} = \mathbf{Z}_0 \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}.$$

Vektor $\mathbf{Z}$ se otáčí stejnou úhlovou rychlostí ω, jeho počáteční poloha je dána součtem (rozdílem) počátečních poloh původních vektorů (platí pro libovolný počet vektorů).

Výsledkem násobení komplexních vektorů $\mathbf{Z}_1$ a $\mathbf{Z}_2$ je časový vektor $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = \left(\mathbf{Z}_{1_0} \cdot \mathbf{Z}_{2_0}\right)e^{\mathrm{j}2\omega t} = \mathbf{Z}_0 \cdot e^{\mathrm{j}2\omega t}.$$

Vektor $\mathbf{Z}$ se otáčí úhlovou rychlostí 2ω, jeho počáteční poloha je dána součinem počátečních poloh původních vektorů :

$$\mathbf{Z}_{1_0} \cdot \mathbf{Z}_{2_0} = z_1 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_1} \cdot z_2 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_2} = z_1 z_2 \cdot e^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)} = z_1 z_2 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}.$$

Výsledkem dělení komplexních vektorů $\mathbf{Z}_1$ a $\mathbf{Z}_2$ je časový vektor $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_{1_0}}{\mathbf{Z}_{2_0}} = \frac{\mathbf{Z}_{1_0} \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathbf{Z}_{2_0} \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}} = \frac{z_1 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_1}}{z_2 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_2}} = \frac{\mathbf{Z}_{1_0}}{\mathbf{Z}_{2_0}} e^{\mathrm{j}(\varphi_1 - \varphi_2)} = z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi} = \mathbf{K},$$

kde $\mathbf{K}$ je stálý vektor, jehož velikost je $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}$ a jeho poloha je dána fází $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Derivace časového vektoru $\mathbf{Z}$ je časový vektor $\mathbf{Z}'$

$$\mathbf{Z}' = \frac{d\mathbf{Z}}{dt} = j\omega \cdot \mathbf{Z}_0 \cdot e^{\mathrm{j}\omega t} = j\omega \cdot \mathbf{Z}$$

Vektor $\mathbf{Z}'$, jehož velikost je $z' = \omega z$, je pootočený vzhledem k vektoru $\mathbf{Z}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$,

fáze je $\varphi + \frac{\pi}{2} + \omega t$ a otáčí se úhlovou rychlostí ω.

Pravidla pro derivování součtu, součinu, rozdílu a podílu, která platí pro reálné funkce, platí i pro časové komplexní vektory.

Neurčitý integrál časového vektoru $\mathbf{Z}$ je časový vektor

$$\int \mathbf{Z}dt = \frac{\mathbf{Z}_0}{j\omega} \cdot e^{\mathrm{j}\omega t} + \mathbf{K} = -\mathrm{j}\frac{\mathbf{Z}}{\omega} + \mathbf{K},$$

kde za komplexní vektor $\mathbf{K}$ dosadíme nulový vektor, tj. $\mathbf{K} = 0$ (součet časového a konstantního vektoru znamená jen posunutí v rovině).

Vektor $\int \mathbf{Z}dt$, jehož velikost je $\frac{z}{\omega}$, je pootočený vzhledem k vektoru $\mathbf{Z}$ o úhel $-\frac{\pi}{2}$,

fáze je $\varphi - \frac{\pi}{2} + \omega t$ a otáčí se úhlovou rychlostí ω.

Pravidla integrace časových vektorů jsou stejná jako pravidla integrace reálných funkcí.

2.7. Nahrazování harmonických funkcí časovými vektory

Mnoho fyzikálních veličin, které se vyskytují v praxi, jsou harmonickými funkcemi času. Například elektrické napětí, elektrický proud, okamžitá výchylka při jednoduchém kmitavém pohybu. Jejich funkční závislost na času je analogická s funkční závislostí reálné nebo imaginární části komplexního časového vektoru.

$$u = U\sin(\omega t + \varphi) \qquad \mathrm{Im}(\mathbf{Z}) = z\sin(\omega t + \varphi),$$

kde u je okamžitá hodnota střídavého elektrického napětí, U je amplituda napětí.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \mathrm{Re}(\mathbf{Z}) = z\cos(\omega t + \varphi)$$

kde x je okamžitá výchylka kmitavého pohybu, A je amplituda kmitavého pohybu.

Z uvedených příkladů vyplývá, že časový vektor obsahuje dvě harmonické funkce času, z nichž jedna je analogická funkci pro kmitavý děj. Velikost časového vektoru $\mathbf{Z}$ je rovna je rovna amplitudě příslušné fyzikální veličiny. Čas, za který se změní fáze časového vektoru o 2π, odpovídá periodě T fyzikálního kmitavého děje:

$$\mathbf{Z}_0 \cdot e^{\mathrm{j}\omega(t+T)} = \mathbf{Z}_0 \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t+2\pi)}\text{, z toho } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Můžeme tedy například pro střídavé elektrické napětí psát $u = U\sin(\omega t+\varphi) = \mathrm{Re}(\mathbf{U})$, kde časový vektor napětí $\mathbf{U}$ je $\mathbf{U} = U \cdot e^{\mathrm{j}\omega(t+\varphi)} = \mathbf{U}_0 \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$, $\mathbf{U}_0 = U \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$.

Symbolicko-komplexní metoda je nahrazování harmonických funkcí časovými vektory, tedy např. místo $u = U\sin(\omega t+\varphi)$ píšeme $\mathbf{U}$. Všechny nahrazované funkce musí být stejného typu, tedy $\sin\psi(t)$ nebo $\cos\psi(t)$.

Výhody této metody:

1. Úspora při počítání, psaní a myšlení.
2. Komplexní tvar lze kdykoliv přepsat do reálného tvaru, často se přepisují jen výsledky.
3. V geometrickém zobrazení kreslíme místo sinusoidy jen vektor v rovině.

Náhradou časovými vektory lze přepsat tyto operace s harmonickými funkcemi:

a) součet a rozdíl

$u_1 \pm u_2 \rightarrow \mathbf{U}_1 \pm \mathbf{U}_2$

b) násobení konstantou (respektive dělení konstantou)

$k \cdot u_1 \rightarrow k \cdot \mathbf{U}_1$

c) derivaci

$\frac{du_1}{dt} \rightarrow \frac{d\mathbf{U}_1}{dt}$

d) neurčitý integrál

$\int u_1 dt \rightarrow \int \mathbf{U}_1 dt$

Pro operace součinu a podílu náhrady neplatí, je třeba je nějakým způsobem kompenzovat (lze pro součin) nebo vůbec nenahrazovat (u podílu).

2.8. Použití komplexních čísel na řešení střídavých dějů ve fyzice

Použití časových vektorů v teorii mechanických kmitů

Pokud hmotný bod vykonává současně dva kmitavé pohyby stejného směru

$$s_1 = S_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right) \text{ a } s_2 = S_2 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right),$$

pak skládáním těchto kmitů vznikne výsledný kmitavý pohyb, jehož výchylka s je dána superpozicí výchylek obou pohybů, tj.

$$s = s_1 + s_2$$

V symbolickém komplexním výpočtu můžeme provést náhradu

$$s_1 \to \mathbf{S}_1, s_2 \to \mathbf{S}_2, s \to \mathbf{S}$$

Potom

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_{1_0} e^{\mathrm{j}\omega t} + \mathbf{S}_{2_0} e^{\mathrm{j}\omega t} = \left(\mathbf{S}_{1_0} + \mathbf{S}_{2_0}\right) e^{\mathrm{j}\omega t} = \mathbf{S}_0 \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$$

Platí

$$s = \mathrm{Im}\left(\mathbf{S}\right) = S \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

Výsledný kmitavý pohyb je harmonický s frekvencí ω. Jeho amplituda je

$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} *} = \sqrt{\left(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\right) \cdot \left(\mathbf{S}_1^* + \mathbf{S}_2^*\right)} = \sqrt{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_1^* + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_2^* + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2^* + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1^*} =$$

$$= \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}$$

Fáze φ je dána vztahem

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\mathrm{j}} \frac{\mathbf{S} - \mathbf{S}^*}{\mathbf{S} + \mathbf{S}^*} = \frac{1}{\mathrm{j}} \frac{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1^* - \mathbf{S}_2^*}{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1^* + \mathbf{S}_2^*} = \frac{2\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\left(\mathbf{S}_1\right) + 2\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\left(\mathbf{S}_2\right)}{2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{S}_1\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{S}_2\right)} =$$

$$= \frac{S_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right) + S_2 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right)}{S_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) + S_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2\right)}$$

Počáteční fáze výsledného kmitu je

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{S_1 \sin\varphi_1 + S_2 \sin\varphi_2}{S_1 \cos\varphi_1 + S_2 \cos\varphi_2}$$

Použití časových vektorů v teorii střídavých proudů

Obvod s ideálním rezistorem. Ideální odpor, jehož rezistence je R, je připojený na harmonické napětí u (obr. 2.4.a). Podle 2. Kirchhoffova a podle Ohmova zákona platí

$$u - u_R = 0$$
$$u = u_R = Ri$$

Symbolicky můžeme psát

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_R = 0$$
$$\mathbf{U} = R\mathbf{I}$$

Časový vektor $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{U}}{R}$ je daný podílem časového vektoru $\mathbf{U}$ a konstanty R, tj. vektor $\mathbf{I}$ je stejné frekvence jako vektor $\mathbf{U}$, není mezi nimi fázový posun. Pro amplitudy vektorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{I}$ platí

$$I_m = \frac{U_m}{R}, \text{ tj. } I = \frac{U}{R}$$

Obvod s ideální cívkou indukčnosti L je připojený na harmonické napětí u (obr. 2.4.c). Pro tento obvod platí

$$u - u_L = 0$$
$$u - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Symbolicky můžeme psát

$$\mathbf{U} - L\frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0$$

Integrací a úpravou dostaneme

$$\mathbf{I} = -\mathrm{j}\frac{\mathbf{U}}{\omega L}$$

Uvedená komplexní rovnice charakterizuje elektrické poměry v tomto obvodu: proud má harmonický průběh a stejnou frekvenci jako napětí. Efektivní hodnota proudu je ωL - krát menší než efektivní hodnota napětí ($\mathbf{X}_L = j\omega L$ je tzv. komplexní induktivní reaktance). Proud $\mathbf{I}$ je fázově opožděný za napětím o $\dfrac{\pi}{2}$.

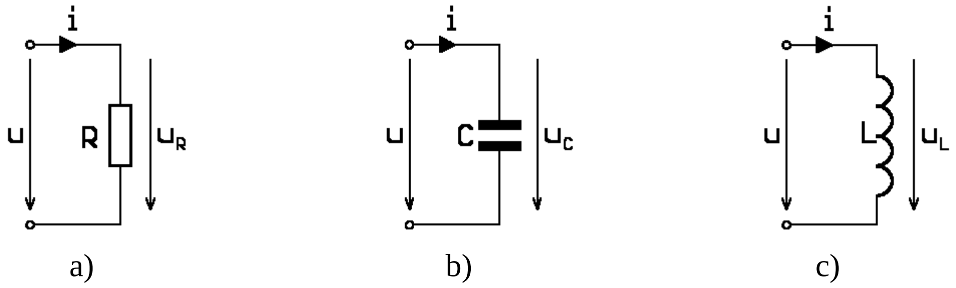
Obvod s ideálním kondenzátorem kapacity C je připojený na harmonické napětí u (obr. 2.4.b). Pro tento obvod platí

$$u - u_C = 0$$
$$u - \frac{1}{C}\int i \cdot dt = 0$$

Po náhradě časovými vektory dostaneme

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\mathbf{I}}{C}, \text{ tj. } \mathrm{j}\omega\mathbf{U} = \frac{\mathbf{I}}{C}, \quad \mathbf{I} = \mathrm{j}\omega C\mathbf{U}$$

Proud má harmonický průběh a frekvenci stejnou s napětím. Efektivní hodnota proudu je ωC - krát větší než efektivní hodnota napětí ($\mathbf{X}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ je tzv. komplexní kapacitní reaktance). Proud $\mathbf{I}$ fázově předbíhá napětí o $\frac{\pi}{2}$.



Obr. 2.4. Obvody s ideálními součástkami

a) s rezistorem b) s cívkou c) s kondenzátorem

Podle předchozích vztahů můžeme psát, že časové vektory napětí na ideálním odporu R, cívce indukčnosti L a kondenzátou kapacity C jsou

$$\mathbf{U}_R = R\mathbf{I}$$
$$\mathbf{U}_L = \mathrm{j}\omega L\mathbf{I} = \mathbf{X}_L\mathbf{I}$$
$$\mathbf{U}_C = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}\mathbf{I} = \mathbf{X}_C\mathbf{I}$$

Obecně pro libovolnou kombinaci R, L, C, připojenou na harmonické napětí (obvodem prochází proud, který má stejnou frekvenci jako připojené napětí), platí

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \frac{\sqrt{Z} \cdot U \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_1)}}{\sqrt{Z} \cdot I \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_2)}} = \frac{U}{I} e^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)} = Z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$$

Komplexní impedance střídavého elektrického obvodu je konstantní komplexní vektor, jehož velikost je dána podílem napětí a proudu.

Pro střídavé elektrické obvody platí tyto zákony v komplexním tvaru:

a) Ohmův zákon $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}$

b) I. Kirchhoffův zákon $\sum_n \mathbf{I}_n = 0$

c) II. Kirchhoffův zákon $\sum_n \mathbf{U}_n = 0$

Převrácená hodnota komplexní impedance $\mathbf{Z}$ je komplexní admitance $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-\mathrm{j}\varphi} = Y \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$$

Velikost admitance je $Y = \dfrac{1}{Z}$ a její fáze je $\psi = -\varphi$.

Komplexní impedanci $\mathbf{Z}$ a admitanci $\mathbf{Y}$ v základním tvaru píšeme takto:

impedance $\mathbf{Z} = R + jX$, kde R je rezistence obvodu a X je reaktance obvodu;

admitance $\mathbf{Y} = G + \mathrm{j}B$, kde G je konduktance (vodivost) obvodu a B je susceptance obvodu.

Příklad 2.6

V obvodu na obr. 2.5 ($R_1 = 100\,\Omega, R_2 = 200\,\Omega, L = 0{,}5\,\mathrm{H}, C = 5\,\mu\mathrm{F}$), který je připojený na střídavé elektrické napětí s efektivní hodnotou $U = 220\,\mathrm{V}$, vypočítejte:

a) komplexní impedanci $\mathbf{Z}$ celého obvodu a její velikost Z , komplexní impedance $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$ částí obvodu R_1, L a R_2, C

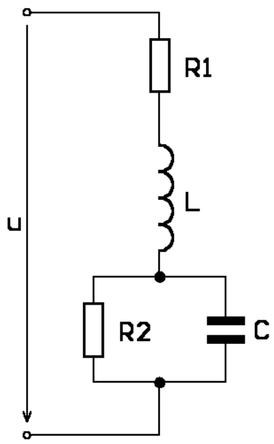
b) časový vektor $\mathbf{I}$ celkového proudu

c) časové vektory napětí $\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L$ na odporu R_1 a indukčnosti L ; časový vektor napětí $\mathbf{U}_2$ na paralelním obvodě R_2, C

d) časové vektory proudů

e) fázový posun φ mezi napětím $\mathbf{U}$ a proudem $\mathbf{I}$

Řešení:



Obr. 2.5. Obvod k příkladu 2.6

a) Celková impedance obvodu je $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$

Kde $\mathbf{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\omega L$

a $\quad \mathbf{Z}_2 = \dfrac{R_2\left(-\dfrac{\mathrm{j}}{\omega C}\right)}{R_2 - \dfrac{\mathrm{j}}{\omega C}} = \dfrac{R_2 - \mathrm{j}\omega R_2^2 C}{1+\omega^2 R_2^2 C^2}$

Tedy $\quad \mathbf{Z} = R_1 + \dfrac{R_2}{1+\omega^2 R_2^2 C^2} + j\omega\left(L - \dfrac{R_2^2 C}{1+\omega^2 R_2^2 C^2}\right)$

Číselně: $\mathbf{Z}_1 = 100 + \mathrm{j}\cdot 157 = 186\cdot e^{\mathrm{j}\cdot 57°30'}\ \Omega$

$\mathbf{Z}_2 = 182 - \mathrm{j}\cdot 57{,}1 = 191\cdot e^{\mathrm{j}(-20°38')}\ \Omega$

$\mathbf{Z} = 282 + \mathrm{j}\cdot 99{,}9 = 299 e^{\mathrm{j}\cdot 19°30'}\ \Omega$

b) Platí

$I = \dfrac{U}{Z}$ a $\mathbf{I} = \sqrt{2}\cdot I\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$, $\mathbf{U} = \sqrt{2}\cdot U\cdot e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$

Číselně $\mathbf{I} = \sqrt{2}\cdot 0{,}736\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$ A

c)

$U_{R_1} = R_1 I = 73{,}6\,\mathrm{V}$ a $\mathbf{U}_{R_1} = \sqrt{2}\cdot 73{,}6\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$ V

Podobně

$U_L = \omega L I = 116\,\mathrm{V}$ a $\mathbf{U}_L = \sqrt{2}\cdot 116\cdot e^{\mathrm{j}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$ V

$U_2 = Z_2 I = 114\,\mathrm{V}$ a $\mathbf{U}_2 = \sqrt{2}\cdot 141 \pm \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t - 20°38')}$ V

d) Pro proudy platí

$I_{R_2} = \dfrac{U_2}{R_2} = 0{,}705\,\mathrm{A}$ a $\mathbf{I}_{R_2} = \sqrt{2}\cdot 0{,}705\cdot e^{\mathrm{j}(\omega t . 20°38')}$ A

$I_C = U_2 \omega C = 0{,}221\,\mathrm{A}$ a $\mathbf{I}_C = \sqrt{2}\cdot 0{,}221\cdot e^{\mathrm{j}(\omega t - 20°38' + 90°)}\ \mathrm{A} = \sqrt{2}\cdot 0{,}221\cdot e^{\mathrm{j}(\omega t - 69°22')}$ A

e) Fázový posun φ mezi celkovým napětím a proudem (tj. $\mathbf{U}$ a $\mathbf{I}$) se rovná fázi impedance $\mathbf{Z}$ tj. $\varphi = 19°30'$.

Poznámka. Výpočet komplexních časových vektorů $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_{R_2}$, $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{U}_{R_1}$, $\mathbf{U}_L$, $\mathbf{U}_2$ není vždy potřebný. Ve výpočtu je důležité určit komplexní impedance, resp. admitance obvodů, jejich velikost a uvědomit si fázové posuny časových vektorů proudů a napětí. Tak se stane výpočet mechanickou záležitostí a je možno ho jednoduše uskutečnit.

3. Matice a determinanty

3.1. Pojem matice a operace s nimi

Matice typu (m,n) je uspořádaná soustava prvků a_{ik} do m řádků a n sloupců. Často používaný zkrácený zápis (pokud víme, o jaký typ matice se jedná) je $\mathbf{A}=(a_{ik})$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prvky a_{ik}, $1 \le k \le n$ pro daný index i tvoří i-tý ***řádek***, prvky a_{ik}, $1 \le i \le n$ pro daný index k tvoří k-tý ***sloupec***. První index v označení prvku a_{ik} nazýváme ***řádkovým***, druhý ***sloupcovým***. Řádky a sloupce se souhrnně nazývají ***řady*** matice**.**

Prvky a_{11}, a_{22}, a_{33} tvoří ***hlavní diagonálu*** a nazývají se ***hlavní prvky***, prvky $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}$ tvoří ***vedlejší diagonálu***.

Matice $\mathbf{A}=(a_{ik})$ se rovná matici $\mathbf{B}=(b_{ik})$ právě tehdy, jsou-li obě matice stejného typu a jejich stejnolehlé prvky se rovnají. Matematicky zapsáno: $\mathbf{A}=\mathbf{B} \Leftrightarrow \forall i,k : a_{ik}=b_{ik}$

Je-li $m=n$, pak se $\mathbf{A}$ nazývá ***čtvercovou maticí*** m-tého stupně (m-tého řádu), jinak hovoříme o matici obdélníkové.

Nulovou maticí nazýváme matici, jejíž všechny prvky se rovnají nule. Značíme obvykle symbolem $\mathbf{0}$ nebo i číslem 0.

Diagonální maticí nazýváme čtvercovou matici, u které prvky na hlavní diagonále jsou různé od nuly a všechny ostatní prvky rovny nule.

Jednotkovou maticí nazýváme takovou diagonální matici, jejíž všechny hlavní prvky jsou rovny 1. Jednotková matice se obvykle značí $\mathbf{E},\mathbf{I}$ nebo i číslem 1.

Horní (pravou) trojúhelníkovou maticí nazýváme čtvercovou matici $\mathbf{A}=(a_{ik})$, jestliže pod hlavní diagonálou jsou všechny prvky nulové, tzn. $\forall i>k : a_{ik}=0$.

Dolní (levou) trojúhelníkovou maticí nazýváme čtvercovou matici $\mathbf{A}=(a_{ik})$, jestliže nad hlavní diagonálou jsou všechny prvky nulové, tzn. $\forall i<k : a_{ik}=0$.

Submaticí nazýváme matici $\mathbf{A}$, která vznikne vynecháním jistého počtu řádků nebo sloupců.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Obr. 3.1. Typy matic: A – čtvercová, N – nulová, D – diagonální, E – jednotková, M – horní trojúhelníková, N – dolní trojúhelníková

Transpozice matic

Transponovanou maticí k matici $\mathbf{A}$ typu (m,n) nazýváme matici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ typu (m,n) takovou, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ záměnou transpozicí řádků a sloupců.

Označíme-li prvek v *i*-tém řádku a *k*-tém sloupci transponované matice a_{ik}^{T}, pak můžeme psát: $a_{ik}^{\mathrm{T}} = a_{ki}$.

Jinak řečeno, transponovaná matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ vznikne „překlopením“ matice $\mathbf{A}$ kolem její hlavní diagonály. Pro transpozici matic platí $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

Pokud pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí rovnost $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, hovoříme o symetrické (souměrné) matici. Pokud pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí rovnost $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$, hovoříme o antisymetrické matici.

Z definice je zřejmé, že pro prvky symetrické matice platí $a_{ik} = a_{ki}$. Obdobně pro prvky antisymetrické matice platí $a_{ik} = -a_{ki}$, odkud dále plyne, že diagonální prvky antisymetrické matice musí být nulové.

Příklad 3.1

Pro matici $\mathbf{A}$ najděte matici transponovanou $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, pak je $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Součet matic

Matice $\mathbf{C}$ je součtem matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ právě tehdy, jsou-li všechny tři matice téhož typu a platí-li, že každý prvek matice $\mathbf{C}$ je součtem stejnolehlých prvků matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Matematický zápis: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow \forall i,k : c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

Pro sčítání matic platí:

$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (asociativnost)

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (komutativnost)

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

Příklad 3.2

Sečtěte matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Násobení matice číslem α

Součinem matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ a čísla α je matice $\mathbf{B} = (b_{ik})$ stejného typu jako matice $\mathbf{A}$, pro jejíž prvky platí $b_{ik} = \alpha \cdot a_{ik}$.

Matematický zápis: $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} \Leftrightarrow \forall i,k : b_{ik} = \alpha \cdot a_{ik}$

Pro násobení matice číslem platí:

$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ (distributivnost)

$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ (distributivnost)

$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha\beta\mathbf{A}$ (asociativnost)

$(\alpha\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Příklad 3.3

Vynásobte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ číslem 6.

$6 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 36 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

Násobení matic

Součinem matice $\mathbf{A}=(a_{ik})$ typu (m,n) a matice $\mathbf{B}=(b_{ik})$ typu (n,p) nazýváme matici $\mathbf{C}=(c_{ik})$ typu (m,p), pro jejíž prvky platí: $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$.

Zapisujeme $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ nebo i s tečkou $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

Součin matic je definován pouze tehdy, je-li počet sloupců první (levé) matice roven počtu řádků druhé (pravé) matice. Prvek c_{ik} součinu $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ je vlastně skalárním součinem i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a k-tého sloupce matice $\mathbf{B}$.

Máme-li součin AB, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ násobí matici **B** zleva nebo také, že matice $\mathbf{B}$ násobí matici $\mathbf{A}$ zprava. Toto rozlišení je nutné, neboť neplatí komutativní zákon**,** tzn. obecně $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

Pro násobení matic platí:

$\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$ (jednotkovým prvkem je jednotková matice)

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$, $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (distributivnost)

$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{ABC}$ (asociativnost)

$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Příklad 3.4

Ukážeme, že součin dvou nenulových matic může být nulová matice.

Je-li $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ je $\mathbf{BC}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Hodnost matice

Hodností matice $\mathbf{A}$ typu (m,n) nazýváme maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$.

Hodností nulové matice (její všechny prvky jsou rovny 0) je nula. Hodností nenulové matice (alespoň jeden její prvek je různý od nuly) je přirozené číslo $h\geq 1$. Protože maximální počet lineárně nezávislých řádků matice je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců, platí $h(\mathbf{A})=h(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ a $1\leq h(\mathbf{A})\leq \min\{m,n\}$ pro každou nenulovou matici $\mathbf{A}$ typu (m,n).

Hodnost matice se nezmění provedením následujících ekvivalentních úprav:

- vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců),
- vynásobením libovolného řádku (sloupce) číslem různým od nuly,
- přičtením číselného násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci),
- vynecháním nulových řádků (sloupců).

O matici $\mathbf{B}$, která je stejného typu jako matice $\mathbf{A}$ a vznikla z matice $\mathbf{A}$ elementárními úpravami, říkáme, že je ***ekvivalentní*** s maticí $\mathbf{A}$. Zapisujeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

Mocniny a inverze čtvercových matic

Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ definujeme $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A}$ pro každé přirozené číslo *k*.
Z vlastnosti násobení matic vyplývá, že $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}$ (*k* – krát).
Obdobně jako pro číselné mocniny platí: $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$, $m, n \in Z$.
Matice $\mathbf{A}$ je čtvercovou maticí typu (m,n) a $\mathbf{E}$ je jednotkovou maticí stejného typu.
Matici $\mathbf{B}$ typu (m,n), která splňuje vlastnost $\mathbf{AB} = \mathbf{E} = \mathbf{BA}$, nazýváme ***inverzní maticí*** k matici $\mathbf{A}$. Inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ označujeme symbolem $\mathbf{A}^{-1}$.
Hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna jejímu řádu, tj. $h(\mathbf{A}) = n$.
Matice $\mathbf{B}$ řádu *n* je ***regulární***, právě když pro její hodnost platí $h(\mathbf{B}) = n$.
Čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu *n*, pro niž je $h(\mathbf{A}) < n$, a tudíž pro ni neexistuje matice inverzní, nazýváme ***singulární maticí.***
Pro regulární matice téhož řádu platí: $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$, $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$,
$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Příklad 3.5

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ stanovte její třetí mocninu.

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

3.2. Řešení soustav lineárních rovnic pomocí matic

Nechť je dána soustava *m* lineárních rovnic o *n* neznámých:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Pak matici

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

typu (m, n) nazýváme ***maticí soustavy***.

Matici

$$\mathbf{A}' = (a_{ik}; b_k) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

typu $(m, n+1)$ nazýváme ***rozšířenou maticí soustavy***.

Sloupcovou matici

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}, \text{ resp., } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$$

nazýváme ***vektorem*** (***sloupcem***) ***neznámých***, resp. ***vektorem*** (***sloupcem***) ***pravých stran***. Soustavu *m* lineárních rovnic o *n* neznámých můžeme zapsat v maticovém tvaru $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

Frobeniova věta

Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, má-li matice $\mathbf{A}$ soustavy a rozšířená matice soustavy $\mathbf{A}'$ stejnou hodnost *h*. Pak pro $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}'), h = n$ existuje právě jedno řešení, pro $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}'), h < n$ existuje řešení nekonečně mnoho. Pokud $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}')$, soustava nemá žádné řešení.

Homogenní soustava rovnic lineárních rovnic, tj. soustava, jejíž vektor pravých stran $\mathbf{b}$ je nulovým vektorem, má vždy aspoň jedno řešení.

Důkaz plyne z Frobeniovy věty, neboť u homogenní soustavy se matice rozšířená od matice soustavy liší pouze přidáním nulového sloupce a tato operace nemění hodnost matice.

Příklad 3.6
Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x+3y+\ \ z&=4\\ x+2y+2z&=6\\ 5x+\ \ y+4z&=21 \end{aligned}$$

Matici soustavy $\mathbf{A}_s$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na trojúhelníkovou a vypočítáme její hodnost. Totéž provedeme s rozšířenou maticí soustavy $\mathbf{A}_r$.

$$\mathbf{A}_s=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&2\\5&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-1&-3\\0&-13&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-1&-3\\0&0&42\end{pmatrix};\ h=3$$

$$\mathbf{A}_r=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&2&2&6\\5&1&4&21\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&1&4\\0&-1&-3&-8\\0&-13&3&22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&1&4\\0&-1&-3&-8\\0&0&42&126\end{pmatrix};\ h'=3$$

$h=h'=3=n$ – soustava má jednoznačné řešení.

Trojúhelníkový tvar matice $\mathbf{A}_r$ je ekvivalentní soustavě:

$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=4\\ -y-3z&=-8\\ 42z&=126 \end{aligned}$$

a z ní je $z=3,\ \text{y}=-1,\ x=2$.

3.3. Pojem determinantů a počítání s nimi

Je-li $\mathbf{A}=(a_{ik})$ matice řádu $n, (h)=(k_1,k_2,\dots,k_n)$ permutace čísel $1,2,\dots,n$, $\operatorname{sgn}(k)$ znaménko permutace (k), pak součin n prvků matice $\mathbf{A}$ tvaru $\operatorname{sgn}(k)\,a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$ nazýváme ***členem determinantu*** $\mathbf{A}$; ***determinantem matice*** $\mathbf{A}$ součet všech $n!$ jeho různých členů. Determinant matice $\mathbf{A}$ značíme $\det\mathbf{A}$, případně $\det(\mathbf{A})$.

Determinant čtvercové matice $\mathbf{A}$ má celkem $n!$ členů, neboť všech permutací čísel $1,2,\dots,n$ je $n!=(n-1)(n-2)\dots3\cdot2$. Znaménko permutace je pak závislé pouze na tom, zda počet transpozic (vzájemných výměn čísel v permutaci) nezbytných k převedení na základní pořadí $1,2,3,\dots,n$ je sudý (znaménko +) či lichý (znaménko -).

Z definice determinantu je zřejmé, že každý člen determinantu $\det \mathbf{A}$ obsahuje součin n prvků matice $\mathbf{A}$, přičemž z každého řádku a sloupce matice $\mathbf{A}$ je vybrán právě jeden prvek.

Matice, jejíž determinant je různý od nuly, se nazývá ***regulární***. V opačném případě hovoříme o matici ***singulární***.

Subdeterminantem (***minorem***) *k*-tého řádu matice $\mathbf{A}$ typu (m,n) nazýváme determinant matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ vypuštěním tolika řádků a sloupců, aby z ní zbyla čtvercová matice *k*-tého řádu.

Vlastnosti determinantů

$\det \mathbf{E} = 1$.

$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ (pro čtvercové matice téhož řádu).

Zaměníme-li v matici navzájem dva řádky nebo dva sloupce, změní determinant znaménko.

Společného nenulového činitele jednoho řádku nebo sloupce lze vytknout před determinant.

Determinant je roven nule právě tehdy, jestliže prvky alespoň jednoho řádku (sloupce) jsou rovny nule nebo jestliže nějaký řádek (sloupec) je lineární kombinací ostatních řádků (sloupců).

Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) jakoukoliv lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).

Výpočet determinantů prvního řádu

Pro matici prvního řádu $\mathbf{A} \equiv (a_{11})$ platí: $\det \mathbf{A} = a_{11}$.

Determinantem matice prvního řádu je tedy hodnota jediného jejího prvku. Není zde vhodný zápis determinantu pomocí svislých čar, neboť ten by sváděl k mylnému dojmu, že se jedná o absolutní hodnotu prvku.

Výpočet determinantů druhého řádu

Determinant matice druhého řádu lze počítat podle vzorce:

$$\det \mathbf{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \,.$$

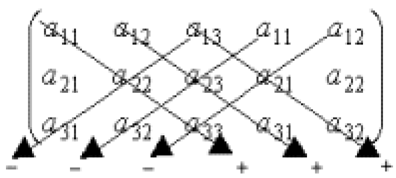
Příklad 3.7

Určete determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 10 - 4 = 6$$

Výpočet determinantů třetího řádu

Pro výpočet determinantu matice třetího řádu se používá schéma zvané ***Sarrusovo pravidlo***: K matici $\mathbf{A}$ připíšeme první dva sloupce (obdobně je možné formulovat toto pravidlo pro řádky) a pak provádíme součiny po přímých čárách tak, jak je naznačeno na obrázku, přičemž ve směru zleva doprava je znaménko kladné, ve směru zprava doleva záporné.



Příklad 3.8

Vypočítejte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 5 =$$

$$= -12 + 40 + 3 + 8 - 4 - 45 = 51 - 61 = -10$$

Výpočet determinantů n-tého řádu

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hodnotu tohoto determinantu určíme podle následující definice:

$\det \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \mathbf{A}_{i1}$

kde prvky a_{i1} jsou prvky prvního sloupce, $\mathbf{A}_{i1}$ je algebraickým doplňkem prvku a_{i1}.

Algebraickým doplňkem prvku a_{ik} matice $\mathbf{A} \equiv (a_{ik})$ nazýváme číslo $\mathrm{A}_{ik} = (-1)^{i+k} \mathrm{M}_{ik}$, kde M_{ik} je subdeterminant (minor) vzniklý z matice $\mathbf{A}$ vynecháním *i*-tého řádku a *k*-tého sloupce.

Každý determinant řádu n se převede na výpočet n determinantů řádu $n-1$, každý determinant řádu $n-1$ na $n-1$ determinantů řádu $n-2$ atd., tedy výpočet determinantu řádu *n*-tého řádu se nakonec převede na výpočet m determinantů řádu 3 (pro ně lze použít Sarrusovo pravidlo), kde platí $m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4$ (pro $n = 10$ je $m = 604800$ - velmi zdlouhavé!)

Uvedená definice je tzv. ***rozvojem determinantu*** podle prvního sloupce, takový rozvoj lze obecně provést podle libovolného řádku nebo sloupce.

Rozvoj determinantu podle prvků vybrané řady

Rozvoj determinantu podle *i*-tého řádku:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \mathbf{A}_{ik} \ .$$

Rozvoj determinantu podle *k*-tého sloupce:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \mathbf{A}_{ik} \ .$$

Symbol $\mathbf{A}_{ik}$ ve vzorcích výše označuje algebraický doplněk prvku a_{ik}.

Další možností výpočtu determinantu je převést matici na trojúhelníkovou, tzn. vynulovat všechny prvky pod nebo nad hlavní diagonálou. Determinant trojúhelníkové (horní nebo dolní) matice je roven součinu jejích hlavních prvků.

Uvažujme např. dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{A} \equiv (a_{ik})$ řádu n. V prvním řádku této matice může být pouze jediný nenulový prvek, diagonální prvek a_{11}. Rozvoj jejího determinantu podle prvního řádku má tedy pouze jeden člen: $\det \mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11}$.

Algebraický doplněk $\mathbf{A}_{11} \equiv (-1)^{1+1} \mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{11}$ je roven determinantu matice vzniklé z matice $\mathbf{A}$ odstraněním prvního řádku a prvního sloupce. Tato matice je řádu o jedna menšího a je rovněž dolní trojúhelníková. Můžeme tudíž provést analogický rozvoj jejího determinantu podle prvního řádku. Opakováním provedených úvah dojdeme až k jednoprvkové matici (a_{nn}), jejíž determinant je roven jejímu jedinému prvku, a odtud k závěrečnému vyjádření $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Příklad 3.9

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Volíme rozvoj podle třetího řádku. Platí:

$$\det \mathbf{A} = 1\cdot\det \mathbf{A}_{31} + 1\cdot\det \mathbf{A}_{32} + 1\cdot\det \mathbf{A}_{33} + 1\cdot\det \mathbf{A}_{34} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 54$$

3.4. Využití determinantů

Cramerovo pravidlo

Každá soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s regulární maticí $\mathbf{A}$ řádu n má právě jedno řešení x_k, které lze psát ve tvaru: $x_k = \dfrac{\det(\mathbf{A}_k)}{\det(\mathbf{A})}$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$, $\det(\mathbf{A})$ je nenulový determinant matice soustavy a $\det(\mathbf{A}_k)$ je determinant matice soustavy, ve které je *k*-tý sloupec nahrazen sloupcem pravých stran $\mathbf{b}$.

Cramerovo pravidlo formuluje obecný vzorec pro analytické vyjádření jednotlivých kořenů soustavy lineárních rovnic (s regulární maticí soustavy).

Příklad 3.10

Stanovte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 45 \text{ , } \det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 45 \text{, } \det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix} = -45 \text{,}$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{45}{2}$$

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{45}{45} = 1, \; x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{-45}{45} = -1, \; x_3 = \frac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\frac{45}{2}}{45} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1, \; x_2 = -1, \; x_3 = \frac{1}{2}$$

3.5. Vlastní čísla a vektory matice

Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n a nenulový vektor (sloupcová matice) $\mathbf{u}$ typu $(n,1)$. Platí-li $\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$, tzn. vynásobení vektoru $\mathbf{u}$ zleva maticí $\mathbf{A}$ je ekvivalentní vynásobení vektoru $\mathbf{u}$ určitým číslem λ, nazýváme vektor $\mathbf{u}$ ***vlastním*** (***charakteristickým***) ***vektorem*** matice $\mathbf{A}$ a číslo λ příslušným ***vlastním*** (***charakteristickým***) ***číslem*** matice $\mathbf{A}$.

Charakteristickou maticí čtvercové matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme matici

$$\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda - a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde veličina λ je reálná nebo komplexní proměnná. Charakteristická matice je zřejmě funkcí proměnné λ.

Polynom $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ n-tého řádu proměnné λ, tj. determinant charakteristické matice k matici $\mathbf{A}$, nazýváme ***charakteristickým polynomem***.

Vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ jsou kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ charakteristického polynomu $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Věta dává jasný návod, jak nalézt vlastní čísla matice. Pokud je však charakteristický polynom stupně vyššího než třetího, nemusí být nalezení jeho kořenů jednoduchou úlohou.

Vlastní čísla trojúhelníkové matice jsou rovna prvkům v hlavní diagonále (hlavním prvkům).

Důkaz je snadný, stačí si připomenout, že determinant trojúhelníkové matice je roven součinu jejích hlavních prvků.

Čtvercové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ téhož řádu nazýváme ***podobnými***, existuje-li taková matice $\mathbf{P}$, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Hovoříme o tzv. ***podobnostní transformaci***.

Podobné matice mají stejný charakteristický mnohočlen, stejná vlastní čísla a stejnou stopu.

Hermitovskou (***hermitovsky symetrickou***) ***maticí*** nazýváme matici, pro niž $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}}$, neboli $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \equiv \mathbf{A}^{+}$ (pruh značí ***komplexní sdružení***, horní index + tzv. ***hermitovské sdružení***, tzn. současnou transpozici matice a její komplexní sdružení).

Ortogonální maticí rozumíme matici, pro kterou platí $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Unitární maticí rozumíme matici, pro kterou platí $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \equiv \mathbf{A}^{+}$.

S uvedenými typy matic se velmi často setkáváme v praxi. Níže uvádíme jejich vybrané vlastnosti, které mají vztah k problematice vlastních čísel.

Vlastní čísla hermitovské matice jsou reálná.

Vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná.

Modul (absolutní hodnota) každého vlastního čísla unitární matice je roven jedné.

Vlastní vektory hermitovské matice příslušné různým vlastním číslům jsou navzájem ortogonální.

Vlastní vektory unitární matice, příslušné různým vlastním číslům, jsou navzájem ortogonální.

Nechť $\mathbf{A}$ je hermitovská matice. Pak existuje unitární matice $\mathbf{U}$ taková, že matice $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ je diagonální (a reálná).

Nechť $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice. Pak existuje reálná ortogonální matice $\mathbf{P}$ taková, že matice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ je diagonální (a samozřejmě také reálná).

4. Numerické řešení rovnic

4.1. Algebraická rovnice *n*-tého stupně o jedné neznámé

Rovnice, jejíž levá strana je polynom $P(x)$ n-tého stupně, má tvar

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0,\; a_n \neq 0$,

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1},\; a_n$ jsou koeficienty.

Je-li $a_0 = 1$ je rovnice ve tvaru ***normovaném***.

Podle Gaussovy věty každá algebraická rovnice má aspoň jeden kořen, jinak každá rovnice n-tého stupně má právě n kořenů (komplexních nebo reálných), počítáme-li každý kořen s jeho násobností.

Při řešení algebraických rovnic n-tého stupně $(n \geq 3)$ máme na zřeteli:

Algebraickými metodami můžeme řešit jen rovnice nejvýše stupně 4., dále rovnice binomické, reciproké.

Je-li α kořenem algebraické rovnice n-tého stupně, je mnohočlenem $P(x)$ - levá strana rovnice – dělitelný kořenovým činitelem $x - \alpha$, tj.

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x),$$

přičemž mnohočlen $Q(x)$ je stupně $(n-1)$.

Má-li rovnice $P(x) = 0$, kořeny $x_1, x_2, \ldots x_n$, platí identicky

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

A mezi koeficienty $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ a kořeny $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ platí:

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -a_{n-1} \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \ldots + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3} \\
\vdots \\
x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = (-1)^n .\, a_0
\end{gathered}$$

(všechny kořeny jsou děliteli absolutního členu)

Když je v rovnici $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0,\; a_n \neq 0$ posledních *k* koeficientů rovno nule, má rovnice *k* kořenů rovných nule. Počet kladných kořenů je nejvýš rovný počtu změn znamének v posloupnosti koeficientů $(1, a_1, a_2, \ldots a_n)$, nebo je rozdílný o sudý počet, a počet záporných kořenů, kolik má znaménkových shod (nebo o sudý počet méně). Rozdíl mezi počtem kořenů kladných a záporných (je vždy sudý) je počet kořenů komplexních. Znaménkovou změnou je + – nebo – +, znaménkovou shodou je + +, – –. Např.

$$x^4 + 2x^3 \quad - 25x^2 \quad - 26x \quad + 120 = 0$$

1.shoda 1.změna 2.shoda 2.změna

2 změny → 2 kořeny kladné: $x_1 = 2,\ x_2 = 4$

2 shody → 2 kořeny záporné: $x_3 = -3,\ x_4 = -5$

$$x^3 \ - 6x^2 \ + 11x \ - 6 = 0$$

1. 2. změna 3.

3 změny: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

Známe-li jeden kořen a dělíme-li levou stranu rovnice $P(x) = 0$ kořenovým činitelem, dostanete rovnici, ze které můžeme určit ostatní kořeny.

Má-li rovnice $P(x) = 0$ některé kořeny stejné (násobné), mají $P(x)$ a $P'(x)$ stejného dělitele. Společného dělitele obou mnohočlenů najdeme, položíme-li jej rovného nule, a takto vzniklá rovnice dává všechny vícenásobné kořeny.

a) Nechť je $P(x)$ normovanou algebraickou rovnicí n-tého stupně

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0$$

a α jejím kořenem. Dělíme-li ji kořenovým činitelem $x - a$, je podílem mnohočlen $Q(x)$, jehož stupeň je $n-1$ a zbytek Z; platí identita

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + Z \ .$$

Bude-li $Z = 0$, označíme-li $b_0, b_1, b_2, ...b_{n-1}$ koeficienty mnohočlenu $Q(x)$, je

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0$$

a můžeme psát, že

$$P(x) = (x-\alpha)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0\right).$$

Koeficienty $Q(x)$ je možné určit podle ***Hornerova schématu***:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	a_1	a_0
α		αb_{n-1}	αb_{n-2}	αb_{n-3}	$\dots$	αb_1	αb_0
	$b_{n-1} = a_n$	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	$\dots$	b_0	Z

Mezi koeficienty $P(x)$ a $Q(x)$ platí:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + \alpha b_{n-2} \\ &\cdots\cdots \\ b_0 &= a_1 + \alpha b_1 \end{aligned}$$

a pro zbytek platí $Z = a_0 + \alpha b_0$.

Použití Hornerova schématu:

- určení hodnoty polynomu pro $x = \alpha$
- dělení mnohočlenu lineárním dvojčlenem $x - a$ (tj. k určení koeficientů podílu)
- určování násobností kořenů polynomu
- určení hodnoty derivace polynomu v bodě a,
- přeměna mnohočlenu $P(x)$ pomocí substituce $y = x - a$

4.2. Separace kořenů algebraických rovnic

Separace kořenů – tj. nalezení systému intervalů, které obsahují právě jeden kořen. Separaci kořenů provádíme zpravidla takto: Stanovíme interval, ve kterém všechny kořeny leží: označíme $A = \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\right)$ u polynomu ve tvaru

$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0$,

potom všechny reálné kořeny leží v intervalu $(-A-1; A+1)$.

Máme-li dva různé kořeny $\alpha_1 \neq \alpha_2$, pro které platí $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = 0$, potom mezi α_1 a α_2 leží alespoň jedno α tak, že $P'(\alpha) = 0$.

V každém intervalu typu (a, b), kde funkce mění znaménko (tj. $P(a) \cdot P(b) < 0$), leží jeden nebo lichý počet kořenů polynomu $P(x)$. V každém intervalu typu (a, b), kde funkce nemění znaménko (tj. $P(a) \cdot P(b) > 0$), neleží žádný nebo leží sudý počet kořenů polynomu $P(x)$.

Nechť $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0$; vytvoříme posloupnost $a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots, a_1,\ a_0$, přičemž vynecháme nulové koeficienty, potom $P(x) = 0$ má tolik kladných kořenů, kolik je v této posloupnosti znaménkových změn nebo o sudý počet méně. U předchozí posloupnosti změníme znaménko u koeficientů s lichým indexem;

potom rovnice $P(x)=0$ má tolik záporných kořenů, kolik je v této nové posloupnosti znaménkových změn nebo o sudý počet méně.

Postup při separaci kořenů algebraických rovnic $P(x)=0$:

- odstraníme násobné kořeny vydělením $D(x)$
- nalezneme interval $(-A-1; A+1)$, v němž leží reálné kořeny
- rozdělíme předchozí interval na dílčí intervaly tak, aby v každém ležel právě jeden kořen (využití monotónnosti).

V některých případech, obzvláště tehdy, když polynom neobsahuje mnoho členů, lze kořeny odseparovat graficky. Převedeme vhodné členy z levé strany algebraické rovnice na pravou, tak abychom dostali rovnici tvaru $p(x)=q(x)$, kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy, jejichž grafy umíme zakreslit. Po nakreslení obrázku vidíme ihned, kolik mají grafy těchto křivek průsečíků a v kterých intervalech leží. Tyto průsečíky jsou kořeny původního polynomu (řešeními původní algebraické rovnice).

Příklad 4.1

Separujte kořeny rovnice $x^3-3x+2=0$.

Řešení:

Derivace $3x^2-3$

určíme $D(x)$

$$\begin{array}{l} \left(x^3-3x+2\right)\div\left(x^2-1\right)=x \\ \underline{-x^3+x} \\ \quad -2x+2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \left(x^2-1\right)\div\left(x-1\right)=x+1 \\ \underline{-x^2+x} \\ \quad x-1 \\ \underline{-x+1} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$D(x)=x-1$,

Odstraníme násobné kořeny $\left(x^3-3x+2\right)\div\left(x-1\right)=x^2+x-2=Q(x)$,

nalezneme interval $(-A-1; A+1)$ $\quad A=2 \Rightarrow (-3;3)$

$1 \quad 1 \quad -2 \Rightarrow 1$ jedna znaménková změna, tedy bude jeden kladný kořen

$1 \quad -1 \quad -2 \Rightarrow 1$ jedna znaménková změna, tedy bude jeden záporný kořen

Z toho plyne: jeden kořen je v intervalu $(0,3)$ a jeden kořen je v intervalu $(-3,0)$

p dělí $a_0 \Rightarrow p \in \{\pm1, \pm2\}$ $\qquad Q(1)=0$

g dělí $a_n \Rightarrow g \in \{1\}$ $\quad$ $Q(-1) = -2$

$$x = 1 \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x = -2 \end{array} \qquad x = 1 \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & ? \end{array}$$

1 je dvojnásobný kořen

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$

$x_1 = x_2 = 1$

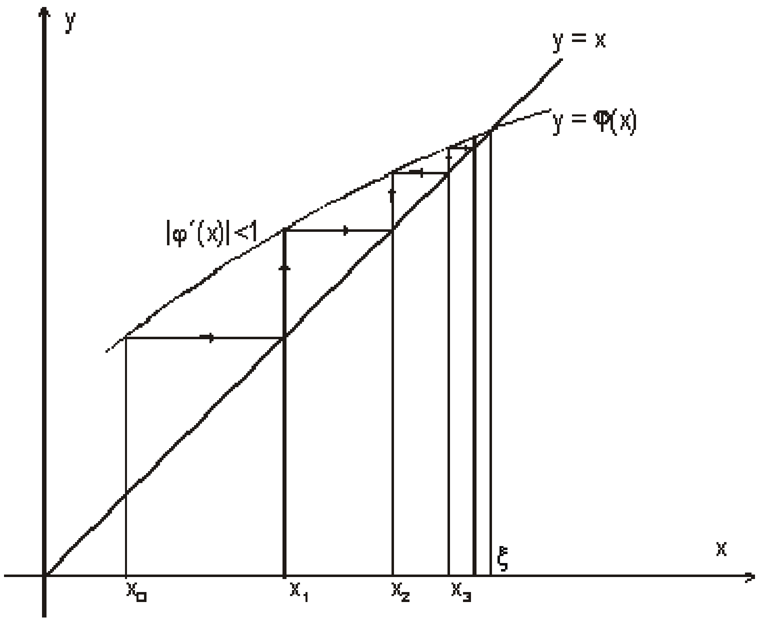
$x_3 = -2$

4.3. Numerické řešení algebraických rovnic

V technické praxi je řešení rovnic vyšších stupňů, které nelze řešit obecnými vzorci, velmi časté a při jejich řešení vystačíme s třemi metodami dávajícími dostatečně přesné kořeny. Jsou to ***metoda iterační, metoda regula falsi a metoda Newtonova***.

Metoda iterační

Metoda iterační převádí rovnici $f(x) = 0$ na tvar $x = \varphi(x)$; při grafickém řešení bychom dostali výsledek jako *x*-ovou souřadnici průsečíku přímky $y = x$ a křivky $y = \varphi(x)$ s poměrně malou přesností a mohlo by nám to posloužit jako první přiblížení. Při numerickém řešení metodu iterační dosadíme do rovnice $x = \varphi(x)$ číslo x_0 (to si odhadem zvolíme), které samozřejmě rovnici nevyhovuje a výsledek (tj. to, co nám vyjde) označíme x_1 a platí tedy $x_1 = \varphi(x)$. Číslo x_1 dosadíme znovu do $\varphi(x)$; výsledek je $x_2 = \varphi(x_1)$ a to opakujeme. Přibližujeme se tak hodnotami $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ k přesné hodnotě kořenu x. Této metody lze použít, je-li splněna podmínka $|\varphi'(x)| < 1$ a potom x_2 je lepší přibližná hodnota (lepší aproximace) kořenu x. V případě, že $\varphi'(x_0) < 0$, jsou dvě po sobě jdoucí přibližné hodnoty na různých stranách hodnoty x a můžeme odhadnout přesnost přiblížení. Vyjde-li $|\varphi'(x)| > 1$, počítáme dál pomocí inverzní funkce.



Obr 4.1. Použití iterační metody

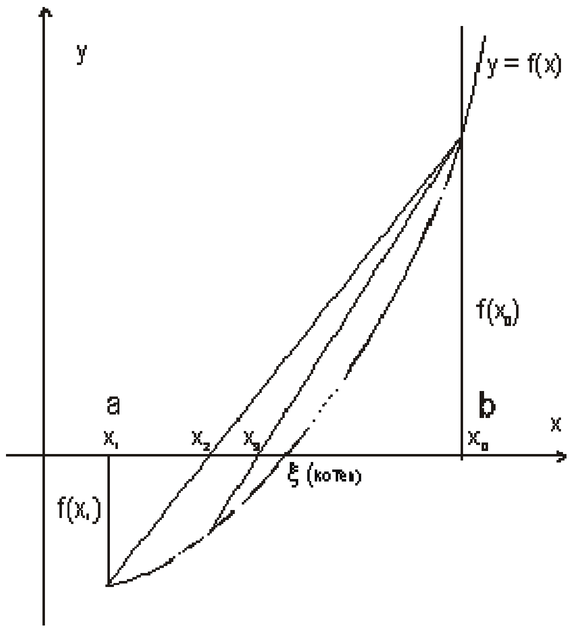
Metoda regula falsi

Metoda regula falsi (metoda sečen, lineární interpolace) je založena na tom, že část křivky $y = f(x)$, kde $f(x)$ je levá strana dané algebraické rovnice vyššího stupně ve tvaru $f(x) = 0$) v intervalu $\langle a,b \rangle, a < b$, v němž leží kořen rovnice $f(x) = 0$, nahradíme sečnou procházející body $A[a; f(a)]$, $B[b; f(b)]$ ležící na křivce $y = f(x)$, přičemž podmínkou je, aby $f(a)$ a $f(b)$ měly opačná znaménka. Sečna protne osu x v bodě c, který rozděluje interval $\langle a,b \rangle$ na intervaly $\langle a,c \rangle$ a $\langle c,d \rangle$, z nichž si vybereme ten, v němž je kořen rovnice a jehož hranice mají opačná znaménka.
V případě, že $f(c) = 0$, je c kořenem rovnice. Interval $\langle a,b \rangle$ hledáme Hornerovým schématem a číslo c vypočítáme ze vzorce

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Zužování intervalu a výpočet lepších aproximací opakujeme, až dostaneme interval, v němž všechny čísla mají počet prvních desetinných míst stejný (na které kořen určujeme). Jiný způsob provedení metody sečen předpokládá, že v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je aspoň jeden reálný kořen a že $f(x_1)$ a $f(x_2)$ mají opačná znaménka. Potom vzhledem k x_1 a x_2 je lepší aproximací výraz x_3:

$$x_3 = x_1 + \frac{(x_2 - x_1) \cdot f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}$$



Obr. 4.2. Použití metody regula falsi

Metoda Newtonova

Metoda Newtonova (metoda tečen) nahrazuje část křivky $y = f(x)$, kde $f(x) = 0$ je daná rovnice, v intervalu $\langle a,b \rangle$, $a < b$ tečnou, jejíž průsečík s osou x hledáme. Je zřejmé, že metoda má význam tehdy, padne-li průsečík tečny s osou x dovnitř intervalu $\langle a,b \rangle$ a nemá-li křivka $y = f(x)$ v tomto intervalu ani minimum, ani maximum, ani inflexní bod, tj. $f'(x) \neq 0$ a $f''(x) \neq 0$ v celém intervalu $\langle a,b \rangle$. Bude tedy nutné najít první i druhou derivaci, neboť v intervalu, v němž leží kořen x a všechny přibližné hodnoty, musí být

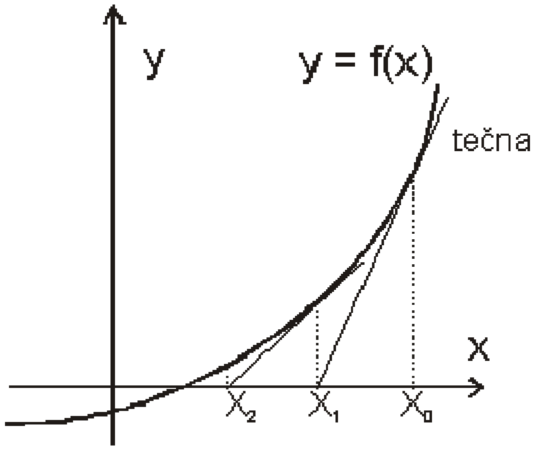
$$\frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \leq m < 1.$$

Označíme-li první přibližnou hodnotu kořene x_1 (je to průsečík tečny t_1 s osou x), je lepší aproximace x_2 dána vztahem

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Bod x_2 dělí interval $\langle a,b \rangle$ na $\langle a,x_2 \rangle$ a $\langle x_2,b \rangle$. Platí-li $x_1 = a$, leží kořen v $\langle x_2,b \rangle$, je-li $x_1 = b$, je kořen v $\langle a,x_2 \rangle$.

Pro určení výchozího bodu, v němž máme vést tečnu t_1, je nutné, aby to byl bod, v němž $f(x_1)$ a $f''(x_1)$ mají stejná znaménka.



Obr. 4.3. Použití Newtonovy metody

Metoda půlení intervalu

Jestliže funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí-li $f(a)\cdot f(b)<0$, pak v otevřeném intervalu (a,b) leží alespoň jeden kořen rovnice $f(x)=0$.

Metoda půlení intervalu je založena na opakovaném použití této věty. Je použitelná za předpokladu, že jsou dány malé číslo $\varepsilon>0$ a interval (a_0,b_0) tak, že f je spojitá na intervalu $\langle a_0,b_0\rangle$ a $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$..

Metoda vytváří posloupnost intervalů

$(a_0,b_0)\supset(a_1,b_1)\supset\ldots\supset(a_n,b_n)\supset\ldots$ tak, aby vždy $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$,

n-tý krok metody najde střed $s_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ intervalu (a_{n-1},b_{n-1}). Jestliže $s_n-a_{n-1}<\varepsilon$, výpočet skončí. Je-li $s_n-a_{n-1}\ge\varepsilon$, pak z předpokladu $f(a_{n-1})\cdot f(b_{n-1})<0$ plyne, že platí právě jedna z podmínek

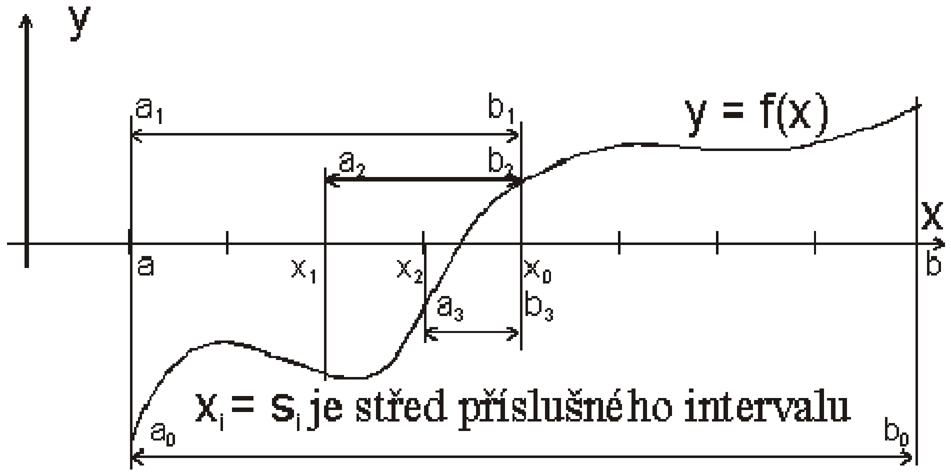
1. $f(a_{n-1})\cdot f(s_n)<0\ldots$ položí se $a_n=a_{n-1},\ b_n=s_n$
2. $f(s_n)\cdot f(b_{n-1})<0\ldots$ položí se $a_n=s_n,\ b_n=b_{n-1}$
3. $f(s_n)=0\ldots$ výpočet skončí.

Výslednou aproximací kořene je číslo s_n.

Pro metodu půlení intervalu lze velmi snadno posoudit rychlost konvergence. Na začátku výpočtu splňuje kořen x podmínku $x=s_1\pm d_0$, kde odhad chyby po n krocích je

$$\varepsilon = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Tedy v každém kroku se odhad chyby zmenší dvakrát.



Obr. 4.4. Použití metody půlení intervalu

Příklad 4.2

Kolik kroků metody půlení intervalu je třeba k tomu, aby se odhad chyby zmenšil desetkrát?

Řešení:

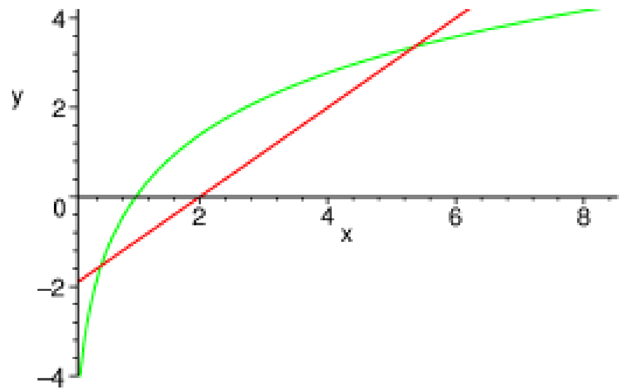
Protože po n krocích se odhad chyby zmenší 2^n krát, hledáme nejmenší hodnotu n tak, aby $10 < 2^n$. Protože $10 \doteq 2^{3,3}$, je pro zmenšení chyby desetkrát třeba provést čtyři kroky metody půlení intervalu.

Příklad 4.3

Určete přibližně všechny kořeny rovnice $f(x) \equiv x - 2\ln x - 2 = 0$ z intervalu $(0,1;7)$.

Řešení:

Představu o počtu a přibližný odhad hodnot kořenů poskytne *grafická metoda*, založená na vyjádření dané funkce $f(x)$ ve tvaru rozdílu funkcí, jejichž grafy lze snadno schematicky znázornit. Například $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 2\ln x$

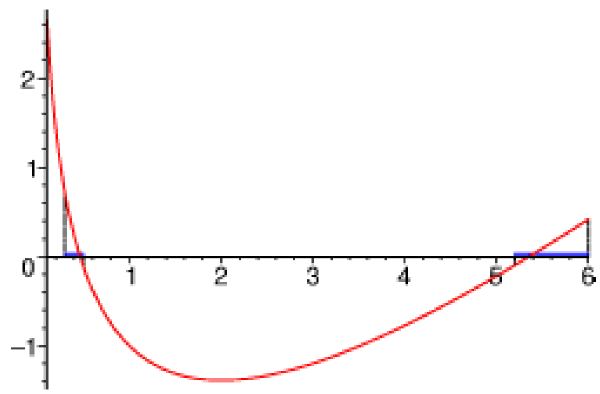


Obr. 4.5. Grafy funkcí $y = x - 2$ a $y = 2\ln(x)$

Z grafického znázornění na obr. 4.5. lze odhadnout, že rovnice má dva kořeny $x_1 \doteq 0{,}5$ a $x_2 \doteq 5{,}2$. Přesnější informaci poskytne tato zkouška:

x	***f(x)***
0,5	-0,1137
0,3	0,7079
5,2	-0,0973
6	0,4165

Protože hodnoty funkce f mají v bodech $0{,}5$ a $0{,}3$ opačná znaménka, leží kořen x_1 v intervalu $(0{,}3; 0{,}5)$. Zbývající dva řádky vedou k závěru, že kořen x_2 leží v intervalu $(5{,}2; 6)$. Viz obr. 4.6. V úvaze bylo využito této základní vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu



Obr. 4.6. Intervaly obsahující kořen rovnice $x - 2\ln(x) - 2 = 0$

5. Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných

5.1. Funkce dvou a více proměnných

Je-li dána množina M bodů *n*- rozměrného prostoru E_n a je-li každému bodu $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathrm{M}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo *y*, říkáme, že je na množině M definována ***funkce n proměnných***. Píšeme $y = f(\mathbf{x})$ nebo $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ .Množinu M nazýváme ***definičním oborem funkce*** *f*; píšeme $\mathrm{M} = D(f)$ nebo $\mathrm{M}{=}D_f$, $\mathrm{M}{=}D$, $\mathrm{M}{=}\{[x, y]\}$.

Číslo *y*, které je funkcí f přiřazeno bodu $\mathbf{x}$, nazýváme ***funkční hodnotou***. Množina všech hodnot funkce f se nazývá ***obor hodnot funkce*** f nebo ***obor funkčních hodnot*** funkce f , značíme $y \in H(f)$, $H(f) = H_f$.

Pro reálnou funkci n - proměnných je $D_f \subset \mathrm{R}^n, H_f \subset \mathrm{R}$

Grafem funkce $f(x, y)$ nazýváme množinu bodů $[x, y, z] \in \mathrm{E}_3$, kde $[x, z] \in D$ a $z = f(x, y)$.

Graf funkce n proměnných $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je množina bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_n, y]$ eukleidovského prostoru E_{n+1} (graf nelze geometricky znázornit).

Vrstevnicí funkce $z = f(x, y)$ nazýváme křivku, na níž je tato funkce konstantní.

Pro funkce více proměnných zavádíme pojem ***hladina funkce*** – plocha, na níž je tato funkce konstantní.

Limita a spojitost funkce n proměnných

***Okolím bodu* a** s poloměrem δ rozumíme množinu bodů z E_n , jejichž vzdálenost od bodu **a** je menší než δ .

Např. pro $n = 1$ jde o otevřený interval, pro $n = 2$ o vnitřek kruhu, pro $n = 3$ o vnitřek koule (vždy se středem v bodě $\mathbf{a}$ a poloměrem δ).

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na okolí bodu $\mathbf{a}$. Řekneme, že je tato funkce ***spojitá*** v bodě $\mathbf{a}$, právě když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in \mathrm{D}_f$ platí $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

(kde symbolem $\| \;\|$ označujeme eukleidovskou normu vepsaného vektoru).

Příklad 5.1

Pro která x a y je funkce spojitá: $f(x,y)=\dfrac{y}{\sin^2 \pi x}$

Řešení: Tato funkce je spojitá pro ta x, pro něž $\sin^2 \pi x \neq 0$, neboť tento výraz se nalézá ve jmenovateli dané funkce:

$\sin^2 \pi x \neq 0,\ \ \sin \pi x \neq 0$, odtud $x \neq k$, k je celé číslo; y je libovolné. Daná funkce je tedy spojitá ve všech bodech roviny (x,y), které neleží na přímkách $x=k$, k je celé číslo (přímky rovnoběžné s osou y).

Pod ***redukovaným*** Δ ***-okolím*** bodu $\mathbf{a}=[a_1,\ldots,a_n]$ rozumíme množinu

$K_\Delta(\mathbf{a})=\left\{\mathbf{x}\in R^n : 0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\Delta\right\}$

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na nějakém redukovaném okolí bodu $\mathbf{a}$. Řekneme, že tato funkce má v uvedeném bodě ***vlastní limitu*** *A*, právě když $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall \mathbf{x}\in \mathrm{D}_f$ platí $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-A|<\varepsilon$.

Používáme stručný zápis $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=A$.

Pro funkci více reálných proměnných, podobně jako pro funkci jedné reálné proměnné, platí zřejmě, že je spojitá v bodě, právě když je její limita v tomto bodě rovna její funkční hodnotě $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})$.

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ definována na nějakém redukovaném okolí bodu $\mathbf{a}$. Řekneme, že tato funkce má v uvedeném bodě ***nevlastní limitu*** $+\infty$, právě když $\forall K>0\ \exists \delta>0 : \forall \mathbf{x}\in \mathrm{D}_f$ platí $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow f(\mathbf{x})>K$.

Dále řekneme, že funkce *f* má v bodě **a** ***nevlastní limitu*** $-\infty$, právě když $\forall K<0\ \exists \delta>0 : \forall \mathbf{x}\in \mathrm{D}_f$ platí $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow f(\mathbf{x})<K$.

V případě nevlastních limit používáme stručný zápis $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=\pm\infty$.

Limity v nevlastních bodech ani ***jednostranné limity*** nejsou pro funkce více reálných proměnných definovány.

Algebra limit

Pro limity reálných funkcí více reálných proměnných platí stejná tvrzení o algebře limit, jaká platí pro funkce jedné reálné proměnné:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\left(f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})\right)=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})+\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\left(f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})\right)=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})-\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\left(f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})\right)=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})\cdot\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\left(f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})\right)=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})/\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}),$$

pokud ovšem mají pravé strany uvedených rovností smysl.

Příklad 5.2

Vypočtěte limitu

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left[\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{1}{2}\right)\cdot\cos xy\right].$$

Řešení: Dosazením souřadnice bodu, v němž počítáme limitu, do výrazu dané funkce, dostaneme:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left[\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{1}{2}\right)\cdot\cos xy\right]=\left(\frac{1-2}{2\cdot 1}+\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2=0\cdot\cos 2=0$$

5.2. Parciální derivace

Parciální derivací funkce $f(x,y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme limitu (existuje-li)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \text{ a značíme ji } \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \text{ nebo } f'_x(x_0,y_0).$$

Podobně derivace funkce $f(x,y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$ je

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}= f'_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Obdobně se definují parciální derivace v daném bodě pro funkci více než dvou poměných. Parciální derivace funkce $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ v bodě $\mathbf{a}=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ podle x_i je tedy definována jako obyčejná derivace funkce $y=g(x_i)=f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$. Funkci, která každému bodu

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ přiřadí hodnotu $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, nazýváme parciální derivací funkce f podle i-té proměnné a značíme ji $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_i} f$ nebo f'_{x_i}.

Parciální derivace podle x má geometrický význam směrnice tečny k ploše v daném bodě ve směru konstantního *y* a parciální derivace podle *y* je směrnice tečny k ploše v daném bodě ve směru konstantního x.

Při výpočtu parciální derivace podle x_i postupujeme stejně jako při výpočtu derivace funkce jedné proměnné. x_i považujeme za proměnnou a ostatní proměnné si představíme jako konstanty. Při výpočtu parciálních derivací platí stejné věty jako pro funkce jedné proměnné, výjimku tvoří pouze věta o derivování složené funkce.

Příklad 5.3

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = 3xy^3 + 1$ v bodě $[1, 2]$ podle obou proměnných.

Řešení:

Považujeme y za konstantu a derivováním podle x: $f'_x(1,2) = (3y^3)_{[1,2]} = 24$.

Derivace podle y, kde považujeme x za konstantu: $f'_y(1,2) = (9xy^2)_{[1,2]} = 36$.

Algebra derivací

Pokud mají pravé strany rovností smysl, platí

$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial (f-g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) - \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial (k \cdot f)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial (f \div g)}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}.$$

Opakovaným parciálním derivováním, pokud je to možné, získáme ***vyšší parciální derivace*** zadané funkce více reálných proměnných.

Opakované derivování můžeme provést podle stejné nezávislé proměnné. Získáme tak ***druhou, třetí atd. parciální derivaci*** funkce f podle této proměnné. Používáme označení

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^3} \quad \text{atd.}$$

Pokud opakované derivování provádíme podle různých proměnných, dostáváme tzv. ***smíšené vyšší derivace*** zadané funkce. Pro smíšenou vyšší derivaci pak používáme označení

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_2}}\left(\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k_m}}\right)\right)\right) \equiv \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_m}}.$$

Index m u symbolu parciálního derivování v čitateli označuje ***řád parciální derivace***.

Pokud má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ spojité obě smíšené druhé derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a})$ i

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k ; \partial x_j}(\mathbf{a})$, pak jsou si tyto derivace rovny.

Příklad 5.4

Vypočtěme všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 + 1$.

Řešení: Nejdříve vypočteme derivace prvního řádu, odtud pak derivace druhého řádu.

$f'_x(x,y) = 4x^3 + y,\ f'_y(x,y) = x + 2y$

$f''_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f''_{xy}(x,y) = 1,\ f''_{yx}(x,y) = 1,\ f''_{yy}(x,y) = 2$.

Definičním oborem dané funkce i jejich derivací je celá rovina E_2.

Derivování složených funkcí (více reálných proměnných)

I funkce více proměnných můžeme různými způsoby skládat. Níže si ukážeme, jak několik základních typů složených funkcí více reálných proměnných derivovat.

Nechť $f(x_1,\ldots,x_n)$ je reálná funkce n reálných proměnných a dále nechť $g_j(t)$ jsou reálné funkce jedné reálné proměnné, $j = 1,\ldots,n$. Pak pro funkci

$h(t) = f(g_1(t),\ldots,g_n(t))$ platí

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(t_0),\ldots,g_n(t_0)) \cdot \frac{dg_j}{dt}(t_0).$$

Nechť $f(y)$ je reálná funkce jedné reálné proměnné a $g(x_1,\dots,x_n)$ je reálná funkce n reálných proměnných. Pak pro funkci $h(x_1,\dots,x_n) = f(g(x_1,\dots,x_n))$ a pro každé $j = 1,\dots,n$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_n) = \frac{df}{dy}(g(a_1,\dots,a_n)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,\dots,a_n).$$

Nechť $f(y_1,\dots,y_n)$ je reálná funkce n reálných proměnných a $g_j(x_1,\dots,x_n)$, $j = 1,\dots,n$ jsou reálné funkce m reálných proměnných. Pak pro funkci $h(x_1,\dots,x_m) = f(g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m))$ a pro každé $k = 1,\dots,m$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(b_1,\dots,b_m) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial xy_i}(g_1(b_1,\dots,b_m),\dots,g_n(b_1,\dots,b_m)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(b_1,\dots,b_m).$$

Vzorce uvedené v předcházejících třech větách je možno psát i ve stručnější a přehlednější formě

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{g}(t_0)) \cdot \frac{dg_j}{dt}(t_0),$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{df}{dy}(g(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}),$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathrm{g}(\mathbf{b})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\mathbf{b}).$$

Obecný návod, který pro derivování složených funkcí více reálných proměnných uvedené věty poskytují, je možno formulovat následujícím způsobem:

- nejdříve derivujeme vnější funkci podle každé proměnné, která závisí na proměnné vnitřní funkce, podle níž derivaci složené funkce počítáme,
- pak tuto derivaci vynásobíme odpovídající derivací vnitřní funkce,
- nakonec všechny takto získané součiny sečteme.

Derivace ve směru

Parciální derivace $\partial f(\mathbf{a})/\partial x_n$ popisuje, jak se v zadaném bodě mění funkce *f* podél *k*-té souřadnicové osy. V této kapitole si ukážeme, jak popsat změnu dané funkce podél libovolné přímky procházející bodem **a**.

Nechť $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ je jednotkový vektor, tj. platí $\|\mathbf{n}\| = 1$. Pak limitu

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+tn)-f(\mathbf{a})}{t}$$

nazveme ***derivací funkce f v bodě*** **a** ***ve směru*** **n**. Budeme pro ni používat symbol

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a}).$$

Pro speciální volbu $\mathbf{n}^{(k)}=[0,\dots,1,\dots,0]$, kde jednička stojí na *k*-té pozici a vektor **n** míří ve směru *k*-té souřadnicové osy, přechází derivace v zadaném směru na prostou parciální derivaci: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}^{(k)}}(\mathbf{a})=\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$.

Nechť funkce *f* má na nějakém okolí bodu **a** všechny první parciální derivace, které jsou navíc v bodě **a** spojité. Pak platí $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a})=\sum_{k-1}^{n} n_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$, kde n_k jsou složky vektoru **n**.

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$ nazýváme ***gradientem*** funkce *f* v bodě **a**. Obvykle pro něj používáme označení $\nabla f(\mathbf{a})$.

Pomocí gradientu můžeme vzorec pro výpočet ***derivace ve směru*** **n** přepsat do stručnějšího a přehlednějšího tvaru $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a})=\mathrm{n}\cdot\nabla f(\mathbf{a})$.

Současně však můžeme zapsat skalární součin dvou vektorů jako součin jejich velikostí a kosinu úhlu, který svírají. Platí tedy $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a})=\left\|\nabla f(\mathbf{a})\right\|\cos\alpha$, kde α je úhel sevřený vektorem gradientu $\nabla f(\mathbf{a})$ a jednotkovým vektorem **n**, $\alpha\in\langle 0,\pi\rangle$. Derivace $\partial f(\mathbf{a})/\partial\mathbf{n}$ bude proto nabývat své maximální hodnoty pro $\alpha=0$. Můžeme tedy říci, že *gradient funkce udává směr jejího maximálního růstu*.

5.3. Totální diferenciál

Funkce $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ se nazývá ***diferencovatelná v oblasti*** $\Omega\in D(f)$**,** jsou-li všechny její parciální derivace f'_{x_i} (pro $i=1,2,\dots,n$) v oblasti Ω ohraničené, tzn. pro vhodné číslo $0<m<\infty$ a pro každý bod $\mathbf{x}\in\Omega$ platí $\left|f'_{x_i}(\mathbf{x})\right|<m$.

Mezi diferencovatelností a spojitostí funkce platí následující vztah:

je-li funkce $f(\mathbf{x})$ diferencovatelná v okolí U bodu $\mathbf{a}$, pak je spojitá.

POZOR! Věta neplatí obráceně. To znamená, že ze spojitosti funkce ještě neplyne její diferencovatelnost. Platí však tato postačující podmínka pro diferencovatelnost funkce v daném bodě:
má-li funkce f v bodě $\mathbf{a}$ spojité parciální derivace podle všech proměnných, pak je funkce f diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$.

Má-li funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y v okolí U bodu $\mathbf{a}$, nazýváme ***úplným*** (nebo ***totálním***) ***diferenciálem*** funkce $f(x,y)$ v bodě $\mathbf{a}=[a_1,a_2]$ výraz $df(\mathbf{a}) = f'_x(\mathbf{a})\cdot h_1 + f'_y(\mathbf{a})\cdot h_2$, kde $h_1 = x-a_1, h_2 = y-a_2$, jsou libovolné přírůstky argumentů x, y, pokud bod $X=[x,y]$ patří do okolí U bodu $\mathbf{a}$.

Obdobně se definuje úplný diferenciál v daném bodě pro funkci více než dvou proměnných. Pro funkci $f(X) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a bod $\mathbf{a}=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ je $df(\mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})\cdot(x_1-a_1) + f'_{x_2}(\mathbf{a})\cdot(x_2-a_2)+\ldots+f'_{x_n}(\mathbf{a})\cdot(x_n-a_n)$.

Někdy se rozdíly $x_k - a_k$ značí h_k nebo $\mathrm{d}x_k$. Potom píšeme $df(\mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})\cdot h_1 + f'_{x_2}(\mathbf{a})\cdot h_2 + \ldots + f'_{x_n}(\mathbf{a})\cdot h_n = f'_{x_1}(\mathbf{a})\cdot \mathrm{d}x_1 + f'_{x_2}(\mathbf{a})\cdot dx_2 + \ldots + f'_{x_n}(\mathbf{a})\cdot dx_n$.

Příklad 5.5

Vypočtěte diferenciál $df(\mathbf{a})$,je-li $f(x,y) = x^2+xy+y^2$, $\mathbf{a}=[1,2]$.

Řešení: Vypočteme parciální derivace v bodě $\mathbf{a}$:

$f'_x(\mathbf{a}) = (2x+y)_A = 4,\ f'_y(\mathbf{a}) = (x+2y)_A = 5$.

Hledaný diferenciál má proto tvar $df(\mathbf{a}) = 4(x-1)+5(y-2)$.

5.4. Dvojný a trojný integrál

Dvojný resp. ***trojný integrál*** je zobecněním určitého integrálu funkce jedné proměnné na funkci dvou resp. tří proměnných.

Dvojný integrál funkce $f(x,y)$ přes oblast O představuje objem vymezený souřadnicovými plochami, které omezují oblast O a plochou tvořenou danou funkcí $f(x,y)$

V=$\iint_O f(x,y)\,dxdy$.

Trojný integrál funkce $f(x,y,z)$ přes objem V představuje hmotnost daného objemu, když funkce $f(x,y,z)$ představuje proměnnou hustotu daného objemu

$$m=\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

Výpočet dvojného integrálu

Fubiniova věta

Nechť je funkce $f(x,y)$ integrovatelná na intervalu $I=\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Pak platí

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy\,.$$

Podle Fubiniovy věty můžeme tedy dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu počítat jako dvojici integrálů jednoduchých, přičemž na pořadí integrace nezáleží. Musíme ovšem zaručit, že hledaný dvojný integrál existuje. Integrály na pravé straně rovnosti nazýváme zpravidla ***dvojnásobnými***.

Je-li jedna proměnná závislá na druhé, integrujeme nejdříve podle závislé proměnné a teprve potom podle nezávislé.

Je-li oblastí M obdélník $\{a\le x\le b\},\{c\le y\le d\}$, pak platí

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

(proměnné x a y jsou nezávislé, proto nezáleží na pořadí integrálů).

Mějme množinu M=$\{a\le x\le b\},\{\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ pak platí:

$$\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

(proměnné jsou zde závislé, závislá proměnná tvoří vnitřní funkci dvojného integrálu)

Příklad 5.6

Určete dvojný integrál

$$\int\int\limits_D (6xy^2-12x^2y)dxdy \qquad D:\ x\in<0;1>,\ y\in<2;3>$$

Řešení:

$$\int\limits_{(D)}\int (6xy^2-12x^2y)dxdy=\int\limits_2^3\left[\int\limits_0^1(6xy^2-12x^2y)dx\right]dy=$$

$$=\int\limits_2^3\left[6x^2y^2-\frac{12}{3}x^3y\right]_0^1dy=\int\limits_2^3\left[3x^2y^2-4x^3y\right]_0^1dy=\int\limits_2^3\left(3y^2-4y\right)dy=$$

$$=\left[\frac{3}{3}y^3-\frac{4}{2}y^2\right]_2^3=\left[y^3-2y^2\right]_2^3=27-18-8+8=9$$

Výpočet trojného integrálu

Je analogií výpočtu dvojného integrálu.

Dvojný integrál v polárních souřadnicích

Polární souřadnice užíváme v případě plošných útvarů, které jsou kruhové nebo tvoří část kruhu. Platí vztah:

$$\iint\limits_O f(x,y)dxdy=\iint\limits_O f(\rho\cdot\cos\varphi;\rho\cdot\sin\varphi)\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\,,$$

kde $dxdy$ představuje plošný element dS v kartézských souřadnicích a $\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi$ představuje plošný element dS v polárních souřadnicích, přičemž musíme příslušně transformovat meze vymezující oblast O.

Trojný integrál v cylindrických souřadnicích

Cylindrické souřadnice užíváme v případě prostorových útvarů vykazujících symetrii kolem osy rotace, nebo v případě rotujících těles, např. při výpočtu momentu setrvačnosti. Platí vztah:

$$\iiint\limits_{\mathrm{V}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\mathrm{V}} f(\rho\cdot\cos\varphi;\rho\cdot\sin\varphi;z)\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot dz\,,$$

kde $dxdydz$ představuje objemový element dV v kartézských souřadnicích a $\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot dz$ představuje objemový element dV v cylindrických souřadnicích, přičemž musíme příslušně transformovat meze vymezující objem V.

Příklad 5.7

Určete vztah pro objem válce v cylindrických souřadnicích.

Řešení:

$$\int\int\limits_{(\mathrm{V})}\int dxdydz=\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^v r\cdot dr\cdot d\varphi\cdot dz=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\cdot[z]_0^v=$$

$$=\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi\cdot v=\pi R^2\cdot v$$

Trojný integrál ve sférických souřadnicích

Sférické souřadnice užíváme v případě prostorových útvarů, které jsou symetrické kolem středu rotace, tj. při kulové symetrii (např. kulové výseče apod.). Platí vztah:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_V f(r\sin\vartheta\cdot\cos\varphi; r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi; r\cdot\cos\vartheta)r^2\cdot\sin\vartheta\cdot dr\cdot d\vartheta\cdot d\varphi$$

kde $dxdydz$ představuje objemový element dV v kartézských souřadnicích

$r^2\cdot\sin\vartheta\cdot dr\cdot d\vartheta\cdot d\varphi$ představuje objemový element dV ve sférických souřadnicích,

přičemž musíme příslušně transformovat meze vymezující objem V.

Pro výpočet geometrických a fyzikálních vztahů v polárních, cylindrických a sférických souřadnicích platí analogické vzorce jako při výpočtech s určitým integrálem funkce jedné proměnné.

Příklad. 4.8

Určete vztah pro objem koule (pomocí sférických souřadnic).

Řešení:

$$V = \int\int_{(V)}\int r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\vartheta\;\mathrm{d}\varphi = \int_0^R r^2\;\mathrm{d}r\cdot\int_0^\pi \sin\vartheta\;\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\cdot\left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi\cdot\left[\vartheta\right]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\cdot(1+1)\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

6. Vektorová analýza

6.1. Vektorová funkce jedné skalární proměnné

Mějme nezávisle proměnnou t. Jestliže každému t z určitého definičního oboru přiřadíme vektor $\mathbf{a}$, mluvíme o ***vektorové funkci*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

Např. v mechanice při pohybu hmotného bodu přiřazujeme každému časovému okamžiku polohový vektor pohybujícího se bodu $\mathbf{r}(t)$. Je-li vektor $\mathbf{a}$ umístěn v trojrozměrném prostoru, je určen třemi souřadnicemi a vektorovou funkci můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}$$

Velikostí vektorové funkce $\mathbf{a}(t)$ nazýváme funkci $\mathbf{f}(t)$, pro kterou platí

$$\mathbf{f}(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$$

pro všechna t z oboru vektorové funkce.

Součinem skalární funkce $\varphi(t)$ a vektorové funkce $\mathbf{a}(t)$ je vektorová funkce

$$\mathbf{b}(t) = \varphi(t) \times \mathbf{a}(t) .$$

Skalárním součinem funkcí $\mathbf{a}(t)$ a $\mathbf{b}(t)$ je skalární funkce

$$g(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) .$$

Vektorovým součinem funkcí $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$ je vektorová funkce

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t) ,$$

kde rovnosti jsou splněny pro všechna t, která leží v průniku oborů obou funkcí. Podobně jako u skalární funkce jedné proměnné zavádíme i u vektorové funkce pojem limity funkce, spojitosti funkce, derivace a diferenciálu funkce. V dalším se budeme zabývat jen spojitými vektorovými funkcemi.

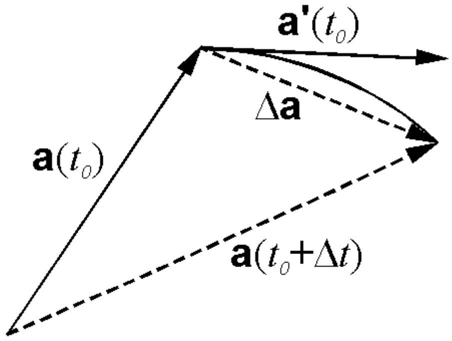
Derivací vektorové funkce $\mathbf{a}(t)$ rozumíme vektorovou funkci

$$\mathbf{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}$$

viz obr. 6.1, kde je znázorněna derivace v bodě t_0. Je třeba si uvědomit, že rozdíl

$$\mathbf{a}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{a}(t_0) = \Delta \mathbf{a}$$

je rozdílem vektorů, který v obecném případě při $\Delta t \to 0$ mění směr.



Obr. 6.1. Derivace v bodě t_0

Pravidla pro derivování funkce jedné proměnné zůstávají v platnosti i pro vektorovou funkci.

Jestliže tedy $\mathbf{a}(t)$ a $\mathbf{b}(t)$ jsou vektorové funkce a $\varphi(t)$ je skalární funkce, přičemž všechny tři funkce mají derivace, je možno psát

$$[\varphi(t)\cdot\mathbf{a}(t)]' = \varphi'(t)\cdot\mathbf{a}(t)+\varphi(t)\cdot\mathbf{a}(t),$$
$$[\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)]' = \mathbf{a}'(t)+\mathbf{b}'(t),$$
$$[\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)]' = \mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}'(t),$$
$$[\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)]' = \mathbf{a}'(t)\times\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}'(t).$$

Jestliže zapíšeme vektorovou funkci v trojrozměrném prostoru pomocí tří složek

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i}+a_y(t)\mathbf{j}+a_z(t)\mathbf{k}\,,$$

je zřejmě derivace dána vztahem

$$\mathbf{a}'(t) = a_x'(t)\mathbf{i}+a_y'(t)\mathbf{j}+a_z'(t)\mathbf{k}\,.$$

Fyzikální smysl derivace vektorové funkce můžeme ukázat na příkladu z mechaniky. Jestliže proměnná t je čas a vektorová funkce $\mathbf{r}(t)$ je polohový vektor pohybujícího se bodu, pak $\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)=\Delta\mathbf{r}$ je vektorová změna polohy bodu za čas Δt, $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ je vektor střední rychlosti a $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ je vektor okamžité rychlosti, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}$.

Druhá derivace $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{a}$ je vektor zrychlení.

Příklad 6.1

Jaký směr má zrychlení pohybujícího se hmotného bodu, jehož rychlost má stále konstantní velikost?

Řešení: Platí

$$\|\mathbf{v}\| = \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \mathbf{c}$$

Tedy $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}^2$$

Zderivujeme obě strany předcházející rovnosti podle času a dostaneme

$$2\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

Protože však $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}$, platí pro skalární součin rychlosti a zrychlení $\mathbf{av} = 0$

a tedy vektor zrychlení je buď nulový (např. rovnoměrný přímočarý pohyb) nebo je kolmý k vektoru rychlosti (např. rovnoměrný kruhový apod.).

6.2. Skalární pole

Uvažujme body v trojrozměrném prostoru, z nichž každý je určen polohovým vektorem $\mathbf{r}(x, y, z)$ .Jestliže v určité části prostoru je definována skalární funkce, mluvíme o skalárním poli.

Např. zavedeme-li souřadnicovou soustavu v atmosféře, dostaneme skalární pole tlaku, neboť pro každý bod v prostoru můžeme stanovit odpovídající tlak vzduchu. V okolí elektrických nábojů je zase určeno skalární pole potenciálu.

Skalární funkci proměnného vektoru $\mathbf{r}(x, y, z)$

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$$

můžeme chápat jako funkci tří proměnných x, y, z.

Např. pole potenciálu v okolí bodového náboje Q umístěno v počátku souřadnicové soustavy je dáno funkcí

$$\varphi = k\frac{Q}{\|\mathbf{r}\|} = k\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Závisí-li skalární pole také na čase, nazýváme skalární pole nestacionárním a dostáváme funkci čtyř proměnných

$$f(\mathbf{r}, t) = f(x, y, z, t).$$

Pole je stacionární, jestliže se nemění s časem. V dalším se budeme zabývat převážně stacionárními poli.

Množiny bodů ve skalárním poli, pro něž jsou funkční hodnoty dané skalární funkce f konstantní, se nazývají hladiny. Jejich rovnice jsou

$$f(x, y, z) = \textbf{konst.}$$

Např. ve skalárním poli tlaku vzduchu určujeme tzv. izobary, tj. plochy určené body o stejném tlaku, v elektrickém poli máme hladiny stejného potenciálu neboli ekvipotenciální plochy.

6.3. Vektorové pole

Mějme množinu bodů trojrozměrného prostoru. Jestliže každému bodu $\mathbf{A}(x, y, z)$ z této množiny přiřadíme vektor $\mathbf{a}$, dostáváme vektorovou funkci $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$.

Tato funkce určuje tzv. ***vektorové pole***.

Ve fyzice nacházíme časté příklady vektorových polí, např. elektrické pole, magnetické pole nebo gravitační pole.

Funkce $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ určující vektorové pole představuje vlastně tři skalární funkce

$$a_x = a_x(x, y, z), \; a_y = a_y(x, y, z), \; a_z = a_z(x, y, z),$$

kde a_x, a_y, a_z jsou složky vektoru $\mathbf{a}$ a jsou funkcemi tří proměnných x, y, z.

Spojité vektorové pole popisujeme čarami, jejichž tečny v každém bodu určují směr příslušného vektoru. Tyto čáry nazýváme vektorovými čarami daného vektorového pole.

Např. u vektorového pole daného funkcí $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$ jsou vektorovými čarami polopřímky vycházející z počátku a u pole popsaného funkcí $\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$, kde $\mathbf{c}$ je konstantní vektor, jsou to kružnice, které mají středy na přímce procházející počátkem ve směru $\mathbf{c}$ a leží v rovinách kolmých k této přímce.

Počet vektorových čar ve vektorovém poli volíme podle velikosti vektoru $\|\mathbf{a}\|$. Malou ploškou proloženou bodem vektorového pole kolmo k čarám, prochází tolik vektorových čar, aby jejich počet připadající na jednotkovou plochu byl roven velikosti vektoru $\mathbf{a}$ v daném bodě. Tedy v místech, kde má vektorová funkce větší velikost, jsou vektorové čáry hustější.

6.4. Gradient skalárního pole

Mějme nyní skalární pole dané funkcí $f(x, y, z)$, která je definována na okolí bodu $\mathbf{A}(x, y, z)$ a má zde parciální derivace. Nechť $\mathbf{s}$ je nenulový vektor daného směru a $\mathbf{s_0}$ je jednotkový vektor téhož směru. Pak můžeme najít limitu

$$\lim_{\|\mathbf{s}\| \to 0} \frac{f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) - f(\mathbf{r})}{\|\mathbf{s}\|},$$

kterou budeme nazývat ***derivací funkce*** $f(\mathbf{r})$ ***ve směru*** $\mathbf{s_0}$ a značit $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s_0}}$.Souřadnice

vektoru $\mathbf{s}$ můžeme vyjádřit pomocí směrových kosinů

$$\mathbf{s_x} = \|\mathbf{s}\| \cos\alpha_x = \mathbf{s}\cos\alpha_x,$$
$$\mathbf{s}_y = \|\mathbf{s}\| \cos\alpha_y = \mathbf{s}\cos\alpha_y,$$
$$\mathbf{s}_z = \|\mathbf{s}\| \cos\alpha_z = \mathbf{s}\cos\alpha_z.$$

Vztah $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s_0}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\ \alpha_\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\ \alpha_\mathrm{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\ \alpha_\mathbf{z}$ je skalárním součinem vektorů

$$\mathbf{s_0}(\cos\ \alpha_\mathbf{x}, \cos\ \alpha_\mathbf{y}, \cos\ \alpha_\mathbf{z}) \text{ a } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Tento druhý vektor se nazývá gradientem funkce f. Značíme jej

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Kdy $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_0} = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{s_0}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_0} = \|\operatorname{grad} f\| \cdot \|\mathbf{s_0}\| \cdot \cos\ \varphi = \|\operatorname{grad} f\|\ \cos\ \varphi$

a φ je úhel mezi vektory $\mathbf{s_0}$ a $\operatorname{grad} f$.

Protože pro $\varphi = 0$ je $\cos\varphi = 1$, je zřejmé, že derivace ve směru gradientu je největší z derivací ve všech jiných směrech a je rovna velikosti gradientu

$$\|\operatorname{grad} f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Potenciálové pole

Pole vektorové veličiny $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, ke které existuje taková skalární funkce V, že pro každý bod pole platí $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} V$, se nazývá ***potenciálové pole***. Skalární funkce V je potenciál veličiny $\mathbf{a}(x, y, z)$.

Např. intenzita elektrického pole $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\ \varphi$ v závislosti na souřadnicích bodů trojrozměrného prostoru určuje vektorové elektrické pole.

Příklad 6.2

Intenzita elektrického pole je dána vztahem $\mathrm{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, kde φ je potenciál. Určete intenzitu v bodě $\mathrm{B}(3, 0, -4)$ v poli vytvořeném dvěma kladnými náboji Q_1, Q_2, z nichž první je umístěn v počátku a druhý v bodě $\mathrm{A}(3, 0, 0)$.

Řešení: Kolem bodového náboje Q vzniká skalární pole potenciálu dané funkcí

$\varphi = c\dfrac{Q}{\|\mathbf{r}\|}$, kde c je konstanta úměrnosti.

V našem případě tedy

$$\varphi_1 = c\frac{Q_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \varphi_2 = c\frac{Q_2}{\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}},$$

$$\mathbf{E}_1 = -\mathrm{grad}\varphi_1,\ \mathbf{E}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2,$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2 = -\mathrm{grad}(\varphi_1+\varphi_2)$$

Souřadnice vektoru $\mathbf{E}$ jsou:

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x} = \frac{cQ_1 x}{(x^2+y^2+z^2)\frac{3}{2}} + \frac{cQ_2(x-3)}{\left[\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)\frac{3}{2}\right]},$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial y} = \frac{cQ_1 y}{(x^2+y^2+z^2)\frac{3}{2}} + \frac{cQ_2 y}{\left[\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)\frac{3}{2}\right]},$$

$$\mathbf{E}_z = -\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial z} = \frac{cQ_1 y}{(x^2+y^2+z^2)\frac{3}{2}} + \frac{cQ_2 y}{\left[\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)\frac{3}{2}\right]}.$$

V bodě B je tedy intenzita

$$\mathbf{E} = \frac{3cQ_1}{125}\mathbf{i} - \left(\frac{4cQ_1}{125} + \frac{cQ_2}{16}\right)\mathbf{k}$$

Příklad 6.3

Potenciál ϕ elektrického dipólu je určen rovnicí $\phi = \beta r^{-2}\cos\vartheta$, kde ϑ je úhel mezi směrem dipólu a osou Z .Určete ekvipotenciální plochy a rovnici elektrických siločar.

Řešení: Podmínka $\phi = \phi_0$ vede k rovnici ekvipotenciálních ploch $r^2 = \mathrm{konst}\cdot\cos\vartheta$.

Jelikož $R = -\nabla\phi$, jsou složky intenzity elektrického pole

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = 2\beta r^{-3}\cos\vartheta, \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = \beta r^{-3}\sin\vartheta.$$

Ve sférických souřadnicích je $\rho_1 = r$, $\rho_2 = \vartheta$, $h_1 = 1$, $h_2 = r$ (dipól je orientován ve směru osy Z), takže z toho plyne

$$\frac{\mathrm{d}r}{r}2\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta.$$

Tj.

$$\mathrm{d}(\ln r - 2\ln\sin\vartheta) = 0,$$

Resp.

$$r = C\sin^2\vartheta,$$

Kde C je integrační konstanta. Změnou této konstanty dostáváme svazek křivek.

6.5. Divergence vektorového pole

Vezměme ve vektorovém poli plošku o obsahu $d\mathrm{S}$, jejíž normála v daném bodě $\mathbf{A}(x, y, z)$ svírá se směrem čar popisujících pole úhel φ. Průmět plošky do polohy kolmé k poli má obsah $d\mathrm{S}\cdot\cos\varphi$ a tedy počet čar procházejících danou ploškou bude

$$\|\mathbf{a}\|\cdot d\mathrm{S}\cdot\cos\varphi.$$

Tento výraz můžeme zapsat pomocí skalárního součinu

$$\|\mathbf{a}\|\cdot d\mathrm{S}\cdot\cos\varphi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\cdot d\mathrm{S},$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor ve směru normály k plošce. Podle orientace normály mluvíme o čarách vycházejících z plochy ($0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$, výraz $\|\mathbf{a}\|\cdot d\mathrm{S}\cdot\cos\varphi$ je kladný) nebo vcházející do plochy ($\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$, výraz $\|\mathbf{a}\|\cdot d\mathrm{S}\cdot\cos\varphi$ je záporný).

Zvolme ve vektorovém poli určeném vektorovou funkcí $\mathbf{a}(x, y, z)$ bod $\mathbf{A}(x, y, z)$ a utvořme kvádr $\mathrm{ABCDA'B'C'D'}$, jehož hrany mají směr souřadnicových os a velikosti $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Zkoumejme, jak se změní počet čar popisujících pole při průchodu tímto kvádrem. Podle $\|\mathbf{a}\|\cdot d\mathrm{S}\cdot\cos\varphi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\cdot d\mathrm{S}$ spočteme počet křivek procházejících jednotlivými stěnami, přičemž normály orientujeme ven z kvádru.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}(x, y, z)\cdot(\mathbf{-i})\cdot\Delta y\cdot\Delta z + \mathbf{a}(x+\Delta x, y, z)\mathbf{i}\cdot\Delta y\cdot\Delta z + \mathbf{a}(x, y, z)\cdot(\mathbf{-j})\cdot\Delta x\cdot\Delta z + \\
&+\mathbf{a}(x, y+\Delta y, z)\mathbf{j}\cdot\Delta x\cdot\Delta z + \mathbf{a}(x, y, z)\cdot(\mathbf{-k})\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \mathbf{a}(x, y, z+\Delta z)\mathbf{k}\cdot\Delta x\cdot\Delta y = \\
&= \mathbf{i}\cdot\Delta y\cdot\Delta z\left[\mathbf{a}\left(x+\Delta x, y, z\right) - \mathbf{a}(x, y, z)\right] + \mathbf{j}\cdot\Delta x\cdot\Delta z\left[\mathbf{a}\left(x, y+\Delta y, z\right) - \mathbf{a}(x, y, z)\right] + \\
&+\mathbf{k}\cdot\Delta x\cdot\Delta y\left[\mathbf{a}\left(x, y, z+\Delta z\right) - \mathbf{a}(x, y, z)\right] = \Delta y\cdot\Delta z\left[a_x\left(x+\Delta x, y, z\right) - a_x(x, y, z)\right] + \\
&+\Delta x\cdot\Delta z\left[a_y\left(x, y+\Delta y, z\right) - a_y(x, y, z)\right] + \Delta x\cdot\Delta y\left[a_z\left(x, y, z+\Delta z\right) - a_z(x, y, z)\right]
\end{aligned}$$

Výrazy v hranatých závorkách jsou přírůstky funkcí $a_x(x, y, z),\ a_y(x, y, z),\ a_x(x, y, z)$ vždy pro jednu proměnnou, které můžeme nahradit diferenciály, aniž by to ovlivnilo výsledek. Tedy

$$a_x(x+\Delta x, y, z) - a_x(x, y, z) \doteq \frac{\partial a_x}{\partial x} \cdot \Delta x,$$
$$a_y(x, y+\Delta y, z) - a_y(x, y, z) \doteq \frac{\partial a_y}{\partial y} \cdot \Delta y,$$
$$a_z(x, y, z+\Delta z) - a_z(x, y, z) \doteq \frac{\partial a_z}{\partial z} \cdot \Delta z,$$

Změna počtu čar při průchodu daným kvádrem je tedy

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \frac{\partial a_y}{\partial y} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \frac{\partial a_z}{\partial z} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z =$$
$$= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right).$$

Protože $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ je objem uvažovaného kvádru, udává výraz

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

změnu počtu čar při protékání jednotkového objemu.

Skalární funkci, danou výrazem $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, jehož význam jsme odvodili

v předcházející kapitole, nazýváme divergencí vektorového pole a značíme

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Divergence vektorového pole $\mathbf{a}(x, y, z)$ je definována v oboru, ve kterém mají složky $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ parciální derivace. Má-li některé vektorové pole $\mathbf{a}$ ve všech bodech $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, nazývá se ***pole solenoidální*** (nezřídlové). Podle odvození v minulé kapitole z toho vyplývá, že v solenoidálním poli vychází z jednotkového objemu tolik čar, kolik do něho vchází.

6.6. Rotace vektorového pole

Je známo, že pro skalární funkci $f(x, y, z)$, která má parciální derivace všech řádů spojité, platí

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Zkoumejme nyní vektorové pole $\mathbf{a}(x, y, z)$. Je-li toto pole potenciálové, to znamená, že je gradientem skalární funkce, pak je

$$a_x = \frac{\partial f}{\partial x},\ a_y = \frac{\partial f}{\partial y},\ a_z = \frac{\partial f}{\partial z}\ .$$

Podle předchozího musí platit:

$$\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x = 0,\ \frac{\partial}{\partial y} a_x - \frac{\partial}{\partial z} a_y = 0,\ \frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z = 0,$$

Je-li alespoň jeden z výrazů

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

různý od nuly, není vektorové pole $\mathbf{a}(x, y, z)$ potenciálové.

K obecnému vektorovému poli $\mathbf{a}(x, y, z)$ zavedeme nové vektorové pole, jehož souřadnice jsou určeny výrazy $\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$ a nazveme je ***rotací vektorového pole*** $\mathbf{a}$ a označíme $\operatorname{rot} \mathbf{a}(x, y, z)$.

Platí tedy vzorec

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(x, y, z) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\mathbf{k}\ ,$$

což můžeme zapsat ve tvaru determinantu

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Je-li $\mathbf{a} = \operatorname{grad} f$, je zřejmě $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ rovna identicky nule. Dá se ukázat, že tato věta platí v podstatě i obráceně.

6.7. Hamiltonův operátor a Laplaceův operátor

Gradient, divergence a rotace se dají zjednodušeně zapsat pomocí tzv. ***Hamiltonova operátoru*** neboli ***operátoru nabla***

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\ .$$

Tento výraz je jen symbol, který dostává smysl ve spojení se skalární nebo vektorovou funkcí, jak ukážeme dále.

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla f = grad\ f,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{a}(x,y,z)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\nabla\mathbf{a}=\operatorname{div}\mathbf{a},$$

$$\nabla x\,\mathbf{a}(x,y,z)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

$$\nabla x\,\mathbf{a}(x,y,z)=\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Uvážíme-li dále, že složky operátoru ∇ vyjadřují parciální derivování, a použijme-li pravidel pro derivaci součtu a součinu, dostáváme pro vektorové funkce $\mathbf{a}(x,y,z)$ a $\mathbf{b}(x,y,z)$ a pro skalární funkce $f(x,y,z)$ a $g(x,y,z)$ další rovnosti:

$$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g,$$

$$\nabla(f\cdot g)=f\cdot\nabla g+g\cdot\nabla f,$$

$$\nabla(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\nabla\mathbf{a}+\nabla\mathbf{b},$$

$$\nabla(f\cdot\mathbf{a})=f\cdot\nabla\mathbf{a}+\nabla\mathbf{b}.$$

Najdeme ještě divergenci vektorového součinu $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Výraz můžeme chápat jako smíšený součin tří vektorů:

$$\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)=$$

$$=a_y\frac{\partial b_z}{\partial x}+b_z\frac{\partial a_y}{\partial x}-a_z\frac{\partial b_y}{\partial x}-b_y\frac{\partial a_z}{\partial y}+a_z\frac{\partial b_x}{\partial y}+b_x\frac{\partial a_z}{\partial y}=$$

$$=a_x\frac{\partial b_z}{\partial y}-b_z\frac{\partial a_x}{\partial y}+a_x\frac{\partial b_y}{\partial z}+b_y\frac{\partial a_x}{\partial z}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial z}-b_x\frac{\partial a_y}{\partial z}=$$

$$=b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-$$

$$-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial y}\right)-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}.$$

Tedy

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}$$

Tento výsledek můžeme pomocí Hamiltonova operátoru přepsat ve tvaru

$$\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})\,.$$

Protože $\operatorname{div}\mathbf{a}$ je skalární funkce a $\operatorname{grad} f$ a $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ jsou funkce vektorové, můžeme najít pět jejich kombinací, tzv. operací druhého řádu. Jsou to:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}\,,\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f\,,\ \operatorname{rot}\operatorname{grad} f\,,\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}\,,\ \operatorname{rot}\operatorname{div}\mathbf{a}\,.$$

Z úvah v předcházející kapitole vyplývá, že $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \vec{0}$.

Snadno též dokážeme, že $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$.

Spočteme $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Tento výsledek zapisujeme zkrácenou formou

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,$$

kde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je ***Laplaceův operátor***. Jeho souvislost s Hamiltonovým operátorem ∇ vidíme z formálního součinu $\Delta = \nabla\cdot\nabla$.

Příklad 6.4

Rovnice kontinuity pohybu tekutiny je dána ve tvaru $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, kde $\rho(\mathrm{x,y,z,t})$ je hustota tekutiny, vektorová funkce $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$ udává rychlost tekutiny.

Najděte rovnici kontinuity, je-li kapalina nestlačitelná a existuje-li funkce f taková, že $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$.

Řešení:

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\rho + \rho\cdot\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, úpravou druhého členu dostaneme.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\cdot\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \rho\cdot div\,\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$$

Je-li kapalina nestlačitelná, je hustota nezávislá na čase.

$\frac{d\rho}{dt} = 0$ a tedy $\rho \cdot \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$. Dosadíme $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\, f$ a dostaneme

$\mathrm{div\,grad}\, f = 0$, $\Delta f = 0$.

Daná funkce $f\left(\mathrm{x,y,z}\right)$ vyhovuje tedy tzv. Laplaceově rovnici.

6.8. Fyzikální pole jako skalární a vektorové pole

Jak již bylo definováno v kapitole 5.4. pole vektorové veličiny $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, ke které existuje taková skalární funkce V, že pro každý bod pole platí $\mathbf{a} = -\mathrm{grad}\, V$, se nazývá potenciálové pole. Skalární funkce V je potenciál veličiny $\mathbf{a}(x, y, z)$.

Integrál $\int_{\mathbf{r_A}}^{\mathbf{r_B}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ má význam měrné veličiny pro práci pole po dráze $\mathbf{r}(t)$ mezi body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

V potenciálovém poli platí: $\int_{\mathbf{r_A}}^{\mathbf{r_B}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \left(-\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}d\mathrm{y} - \frac{\partial V}{\partial z}dz \right) = -\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} dV = V_{\mathbf{A}} - V_{\mathbf{B}}$,

tedy tento integrál nezávisí na integrační cestě, ale pouze na poloze počátečního bodu $\mathbf{A}$ a koncového bodu $\mathbf{B}$ této dráhy.

Musí tedy platit $\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Potenciálová pole jsou například elektrostatické a gravitační pole. Práce vykonaná v těchto polích po uzavřené dráze je nulová.

Mějme vektorové pole, jehož vektorové čáry jsou uzavřené křivky. Integrujeme v takovém poli podél křivky, která je totožná s vektorovou čarou. Potom všechny elementy $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ jsou buď kladné, nebo záporné; v takovém poli vždy platí $\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$.

Pole, které se vyznačuje touto vlastností, se nazývá ***vírové pole*** (např. magnetické pole). V takových polích jsou vektorové čáry uzavřené křivky (pole rychlosti $\mathbf{v}$ bodů rotujícího tělesa, vírové proudění tekutin, magnetická indukce $\mathbf{B}$ apod.).

7. Diferenciální rovnice

7.1. Základní pojmy

Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme rovnici

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

nebo, je-li takzvaně ***rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci***, rovnici tvaru

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Slovně řečeno, jedná se o vztah mezi funkcí $y(x)$ jedné proměnné a jejími derivacemi. Řád diferenciální rovnice je dán nejvyšší derivací, která se v rovnici vyskytuje. Diferenciální rovnic *n*-tého řádu nemusí obsahovat všechny derivace nižších řádů nebo proměnné x a y, ale vždy musí osahovat alespoň jednu derivaci funkce $y = f(x)$. Například rovnice $y'' - xy'^2 + \cos x = 0$ je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu pro neznámou funkci y nezávislé proměnné x.

Řešením neboli ***integrálem*** (také ***partikulárním řešením, partikulárním integrálem*** nebo ***integrální křivkou***) rovnice $F\left(x, y, y'\right) = 0$ nazýváme každou funkci $y = g(x)$, která v uvažovaném oboru této rovnici identicky vyhovuje.

Uvažovaným oborem je nejčastěji otevřený interval I, speciálně např. okolí nějakého bodu nebo celá množina $\mathbb{R}$ reálných čísel. Formulace „vyhovuje identicky“ znamená, že po dosazení řešení $g(x)$ za y do diferenciální rovnice dostaneme vztah, který je splněn ve všech bodech x uvažovaného oboru. Řešení může být dáno také jako implicitní funkce, tzn. rovnicí $h(x, y) = 0$, kdy y chápeme jako veličinu závislou na nezávislé proměnné x. Řešení diferenciální rovnice prvního řádu $y' = f(x, y)$ má geometrický význam. Uvedenou rovnicí je dáno tzv. směrové pole, které každému bodu $[x, y]$ z uvažovaného oboru přiřazuje směrový element (krátkou úsečku) se směrnicí $\tan\alpha = y'$. Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít takové křivky, které se v každém svém bodě dotýkají směrového elementu.

Nechť je dána diferenciální rovnice *n*-tého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci, tj. ve tvaru $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$, a bod $P[a, b_1, b_2, \dots, b_n]$.

Nechť funkce $f, \dfrac{df}{dy}, \dfrac{df}{dy'}, \dots, \dfrac{df}{dy^{(n-1)}}$ jsou spojité (jako funkce $n+1$ proměnných) v okolí bodu P. Pak v určitém okolí bodu a ***existuje právě jedno řešení*** $y = g(x)$, které splňuje tzv. ***počáteční podmínky*** $y(a) = b_1,\ y'(a) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_n$

Počáteční podmínky předepisují hodnotu hledaného řešení a jeho $(n-1)$ derivací ve vybraném bodě a. Volbou počátečních podmínek si vlastně vybíráme z mnoha přípustných řešení pouze jediné.
Věta má lokální charakter (pojednává o řešení v okolí bodu *a*). Silnější větu, která by zaručovala existenci a jednoznačnost řešení v celém uvažovaném intervalu I, je možné formulovat např. pro tzv. lineární diferenciální rovnice (budou uvedeny dále). Obecně nalezneme-li řešení určité diferenciální rovnice s danými počátečními podmínkami v nějakém okolí bodu a, musíme vyšetřit, zda je možné toto řešení rozšířit i mimo toto okolí (např. na celý interval) a zda je toto rozšíření jednoznačné.
Obecnější tvar diferenciální rovnice, tj. $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$, použít nelze, protože ani za uvedených poměrně přísných podmínek pro funkci *F* není zaručena jednoznačnost řešení.

Nalezené řešení (v okolí zvoleného bodu *a*) je dáno volbou počátečních podmínek, tzn. n-ticí hodnot $[b_1, b_2, \dots, b_n]$. Je tedy funkcí n volných parametrů. Nabízí se otázka, zda je možné formulovat takové řešení dané diferenciální rovnice, ve kterém by vystupovalo n nezávislých parametrů (konstant nezávislých na proměnné *x*), jejichž vhodnou volbou by toto řešení přešlo v řešení vyhovující konkrétní počáteční podmínce.

Nechť Ω je $(n+1)$-rozměrná oblast složená z takových bodů $P[a, b_1, b_2, \dots, b_n]$, pro které má rovnice $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ právě jedno řešení. ***Obecným řešením*** (***obecným integrálem***) diferenciální rovnice $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ vzhledem k

oblasti Ω rozumíme takovou funkci $g\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ proměnné x a konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$, že pro každý bod $P \in \Omega$ lze těmto konstantám přiřadit (a to jednoznačně) takové číselné hodnoty, že vzniklá funkce proměnné x, tj. $y(x) = g\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, je řešením dané diferenciální rovnice s počátečními podmínkami
$y(a) = b_1,\ y'(a) = b_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = b_n$.

Řečeno jinak, obecné řešení (vzhledem k oblasti Ω) v sobě obsahuje všechna partikulární řešení (odpovídající počátečním podmínkám $P \in \Omega$) a tato partikulární řešení z něj dostaneme vhodnou volbou konstant.
Žádná z konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$ v obecném řešení není zbytečná, tzn. nelze ji vypustit ani spojit s jinou konstantou. Pokud by bylo možné snížit počet konstant např. ekvivalentní úpravou a zavedením konstant nových, nemohlo by jít o obecné řešení.
Obecné řešení bylo výše exaktně definováno pouze pro diferenciální rovnici rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci. Běžně se termín „obecné řešení“ (v určité oblasti Ω) používá volněji pro takovou funkci $g\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, kde vhodnou (ale ne nutně jednoznačnou) volbou konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$ lze splnit libovolné počáteční podmínky z oblasti Ω. Počáteční podmínka, daná např. bodem $P\left[a, b_1, b_2, \ldots, b_n\right] \in \Omega$, tedy může být splněna dvěma či více různými volbami konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$, kterým odpovídají různá partikulární řešení. V tomto smyslu lze hovořit i o obecném řešení diferenciální rovnice nerozřešené vzhledem k nejvyšší derivaci.

Příklad 7.1
Obecným integrálem diferenciální rovnice $y'' - y' - 2y = 0$ vzhledem k oblasti $\Omega = \mathbb{R}^3$ je funkce $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Pro libovolné počáteční podmínky $y(a) = b_1,\ y'(a) = b_2$, kde $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ (neboli bod $P\left[a, b_1, b_2, \ldots, b_n\right] \in \Omega$), stačí vzít
$C_1 = \frac{1}{3}\left(b_1 + b_2\right) e^{-2a}, C_2 = \frac{1}{3}\left(2b_1 - b_2\right) e^{a}$. Dosazením těchto hodnot do obecného integrálu obdržíme partikulární integrál $y = \frac{1}{3}\left[\left(b_1 + b_2\right) e^{2(x-a)} + \left(2b_1 - b_2\right) e^{a-x}\right]$,
který splňuje původní diferenciální rovnici v celém reálném oboru a vyhovuje zvolené počáteční podmínce.

V praxi se poměrně často objevuje případ, kdy kromě obecného řešení nějaké diferenciální rovnice (vzhledem k nějaké oblasti Ω) existuje i řešení, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant, ale které splňuje danou diferenciální rovnici pro určité počáteční podmínky.

Singulárním řešením (***singulárním integrálem***) diferenciální rovnice rozřešené vzhledem k nejvyšší derivaci nazýváme takové řešení (integrální křivku) této rovnice, v jehož každém bodě je porušena jednoznačnost, tzn. každým bodem $[x, y]$ tohoto řešení prochází ještě jiné řešení (integrální křivka).
Singulárním řešením je např. ***obálka parametrického systému křivek*** tvořeného obecným řešením (pokud existuje).
Věta o jednoznačnosti řešení není narušena, pouze v bodech, kterými singulární řešení prochází, nejsou splněny předpoklady její platnosti.
V praxi identifikujeme singulární řešení nejčastěji tak, že je (v protikladu k běžnému partikulárnímu řešení) nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant.
Zobecnění na všechny diferenciální rovnice je možné požadavkem, aby každým bodem singulárního řešení procházelo jiné řešení (integrální křivka) se stejnou tečnou.

7.2. Diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnice typu $y' = f(x)$

Za předpokladu, že funkce $f(x)$ je ve vyšetřovaném oboru spojitá, má uvedená rovnice obecný integrál $y = \int f(x)\,dx$.

Integrační konstanta je zahrnuta v neurčitém integrálu. Partikulární integrál vyhovující počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ je $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Na pravé straně poslední rovnice se jedná o integrál jako funkci horní meze.

Rovnice typu $y' = f(y)$

Za předpokladu, že funkce $f(x)$ je ve vyšetřovaném oboru spojitá a různá od nuly, řešíme rovnici přepsáním na tvar $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(y)}$, čímž uvedenou rovnici převedeme na rovnici předchozího typu pro funkci $x(y)$. Obecným integrálem je tudíž $x=\int \frac{dy}{f(y)}$ a partikulárním integrálem $x=y_0+\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{f(t)}$.

Rovnice separovatelná $y'=\frac{f(x)}{g(y)}$

Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$ a funkce $g(y)$ spojitá a různá od nuly v intervalu $\langle c,d\rangle$, pak uvedená rovnice má v oblasti $\Omega=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$ obecný integrál $\int f(x)dx=\int g(y)dy$. Partikulární integrál procházející bodem $[x_0,y_0]\in\Omega$ je dán rovnicí $\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\int_{y_0}^{y} g(s)ds$.

Tento typ diferenciální rovnice v sobě zahrnuje oba dva předchozí typy jako speciální případy.
Název této rovnice souvisí s tím, že ji řešíme tzv. ***separací proměnných***, tj. jejich oddělením na jednotlivé strany rovnice.

Rovnice homogenní $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$

Předpokládá se $x\neq 0$ ve vyšetřovaném oboru. Řešíme zavedením nové funkce $z(x)=\frac{y(x)}{x}$ neboli $x\cdot z(x)=y(x)$. Derivováním poslední rovnice podle x dostaneme vztah $y'=z+x\cdot z'$. Dosadíme-li uvedené výrazy za y a y' do původní rovnice, dostaneme diferenciální rovnici $z+x\cdot z'=f(z)$, kterou jednoduše upravíme na rovnici se separovanými proměnnými $z'=\frac{f(z)-z}{x}$. Najdeme-li její řešení $z(x)$, je řešením původní rovnice funkce $y(x)=x\cdot z(x)$.

Termín homogenní v názvu rovnice znamená, že na pravé straně se jedná o tzv. homogenní funkci (nultého stupně). Připomeňme, že funkce $f(x,y)$ se nazývá homogenní *s*-tého stupně, platí-li $f(tx,ty)=t^s f(x,y)$.

Na homogenní rovnici lze převést rovnici $y'=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ tak, že se vhodnou substitucí $x=u+A,\ y=v+B$, zbavíme absolutních členů c_1,c_2.

Rovnice lineární $y'+a(x)y=b(x)$

Jsou-li funkce $a(x),b(x)$ spojité v určitém intervalu, existuje v tomto intervalu právě jedno řešení uvedené rovnice splňující danou počáteční podmínku.

Postup nalezení řešení je následující. Nejprve řešíme ***rovnici bez pravé strany***, tzv. ***homogenní*** rovnici (nezaměňovat s názvem předchozí diferenciální rovnice!) $y'+a(x)y=0$. Tato rovnice se řeší separací proměnných:

$$\begin{aligned}&\int\frac{dy}{y}=-\int a(x)dx\Rightarrow\ln(Ky)=-\int a(x)dx\Rightarrow Ky=e^{-\int a(x)dx}\Rightarrow\\&\Rightarrow y=Ce^{-\int a(x)dx}\quad C=\frac{1}{K}\end{aligned}.$$

Obecný integrál původní rovnice (***nehomogenní***, ***s pravou stranou***) dostaneme tzv. ***metodou variace konstanty***. Předpokládáme, že řešení nehomogenní rovnice má stejný tvar jako řešení homogenní rovnice, avšak integrační konstantu považujeme za funkci proměnné *x*:

$$y=C(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Tento výraz derivujeme podle *x* a dosadíme do původní rovnice:

$$C'(x)e^{-\int a(x)dx}-C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}+a(x)C(x)e^{-\int a(x)dx}=b(x)\Rightarrow C'(x)e^{-\int a(x)dx}=b(x).$$

Dostaneme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro funkci $C(x)$, jejímž řešením je $C(x)=\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$.

Dosazením do předpokládaného řešení nehomogenní rovnice obdržíme nakonec obecný integrál ve tvaru $y=e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$.

Rovnice exaktní

Je dána rovnice $y' + \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = 0$, kde funkce $f(x,y)$, $g(x,y)$, mají v určité oblasti Ω spojité derivace prvního řádu. Rovnici lze snadno převést na diferenciální formu $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$. Pokud je levá strana poslední rovnice v Ω ***totálním diferenciálem*** nějaké funkce $F(x,y)$, jedná se o tzv. ***exaktní rovnici***.

Obecný integrál exaktní rovnice je dán rovnicí $F(x,y) = C$ (význam symbolů viz v předchozí definici).

Aby výraz $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ byl totálním diferenciálem, musí v Ω platit rovnost

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Vlastní řešení probíhá tak, že nejprve ověříme, zda platí rovnost

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x},$$

a pokud ano, nalezneme funkci $F(x,y)$. Tato funkce je s funkcemi $f(x,y)$ a $g(x,y)$ svázána vztahy

$$f(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \quad \text{a} \quad g(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y},$$

odkud

$$F(x,y) = \int f(x,y)dx + C(y) \quad \text{a} \quad F(x,y) = \int g(x,y)dy + C(x).$$

Pokud rovnice není exaktní, můžeme se pokusit najít takovou funkci $m(x,y)$, zvanou ***integrační faktor***, aby rovnice $m(x,y)f(x,y)dx + m(x,y)g(x,y)dy = 0$ byla exaktní. Najít integrační faktor není obecně snadné, protože musíme řešit parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial(mf)}{\partial y} = \frac{\partial(mg)}{\partial x}.$$

Dá se však snadno ukázat, že pokud je výraz

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{g}, \text{ resp. } \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{f},$$

funkcí pouze proměnné x, resp. y, je také integrační faktor funkcí pouze x, resp. y, a nalezneme jej řešením rovnice

$$\frac{d\ln m}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}}{g}\text{, resp. }\frac{d\ln m}{dy}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}}{-f}.$$

Rovnice typu $y=f\left(x,y'\right)$

Rovnici přepíšeme na tvar $y=f\left(x.p\right)$, kde jsme zavedli parametr $p=y'$. Derivací podle x a opětným dosazením parametru p za y' obdržíme rovnici

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

a po úpravě

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-\frac{\partial f\left(x,p\right)}{\partial x}}{\frac{\partial f\left(x,p\right)}{\partial p}}.$$

Toto je rovnice prvního řádu pro neznámou funkci $p\left(x\right)$ rozřešená vzhledem k derivaci. Nalezneme-li její obecný integrál $p=g\left(x,C\right)$, dosazením do původní rovnice obdržíme její obecné řešení $y=f\left(x,g\left(x,C\right)\right)$.

Jedná se o rovnici nerozřešenou vzhledem k první derivaci.
Lze také nejprve derivovat výchozí rovnici podle x, čímž dostaneme rovnici druhého řádu

$$y'=\frac{\partial f\left(x,y'\right)}{\partial x}+\frac{\partial f\left(x,y'\right)}{\partial y'}y'',$$

ve které nevystupuje y, a teprve do této rovnice dosadit p za y', čímž dosáhneme snížení jejího řádu.
Zajímavý moment nastává v okamžiku, kdy již máme řešení $p=g\left(x,C\right)$. Místo dosazení do původní rovnice se nabízí také možnost vrátit se k y' a řešit úlohu $y'=g\left(x,C\right)$. Tím bychom však dostali řešení rovnice druhého řádu uvedené v předchozím bodě této poznámky (se dvěma integračními konstantami), což není naším úkolem.

Speciálním případem je rovnice $y = xy' + \varphi(y')$ zvaná ***Clairautova*** (čteme „klerotova“). Výše uvedeným postupem snadno zjistíme, že její obecné řešení má tvar $y = Cx + \varphi(C)$,

a navíc objevíme, že existuje i další, singulární řešení, které vyhovuje rovnici

$$x + \frac{d\varphi}{dy'} = 0 .$$

Rovnice typu $x = f(y, y')$

Tuto rovnici řešíme obdobně jako předchozí typ. Zavedením parametru $p = y'$ a derivací rovnice podle y (pozor, ne podle x) obdržíme rovnici prvního řádu

$$\frac{1}{p}\left(=\frac{dx}{dy}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

pro neznámou funkci $p(y)$, kterou opět můžeme jednoduše převést na rovnici

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}}{\frac{\partial f(y,p)}{\partial p}}$$

rozřešenou vzhledem k první derivaci. Obecný integrál této rovnice $p = g(y, C)$ dosadíme do výchozí rovnice a obdržíme její obecný integrál v implicitním tvaru $x = f(y, g(y, C))$.

Jedná se o rovnici nerozřešenou vzhledem k první derivaci.
Stejným způsobem je možné řešit rovnice $y = f(y')$, resp. $x = f(y')$, které jsou speciálními případy obou předchozích typů.

Bernoulliho rovnice

Diferenciální rovnice typu $y' + F_1(x)y = F_2(x)y^n$, ve které $n \neq 0,\ n \neq 1$, se nazývá ***Bernoulliho rovnice***. Ukážeme si jeden ze způsobů řešení této rovnice. Neznámou funkci položíme rovnu součinu dvou neznámých funkcí $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Dosazením do rovnice $y' + F_1(x)y = F_2(x)y^n$ dostaneme

$$u'v + v'u + F_1(x)uv = F_2(x)u^n v^n$$
$$u'v + u\left[v' + F_1(x)v\right] = F_2(x)u^n v^n$$

Poněvadž jednu funkci ze součinu $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ můžeme volit podle potřeby, je vhodné pro zjednodušení předcházejícího vztahu určit $v(x)$ z podmínky $v'+F_1(x)v=0$.
Separací proměnných dostaneme

$$\frac{dv}{v}=-F_1(x)dx$$

$$\ln v=-\int F_1(x)dx$$

$$v=e^{-\int F_1(x)dx}$$

Integrační konstantu můžeme zde volit rovnu nule, neboť stačí uvést pouze jedno řešení $v(x)$.

Funkci $u(x)$ můžeme nyní najít následujícím způsobem:

$$u'v=F_2(x)u^n v^n,$$

$$\frac{u'}{u^n}=F_2(x)v^{n-1},$$

$$\frac{du}{u^n}=F_2(x)v^{n-1}dx.$$

Integrací dostaneme

$$\frac{1}{-n+1}u^{-n+1}=\int F_2(x)v^{n-1}dx+C,$$

Odkud vypočteme u. Obecné řešení pak určíme podle vztahu $y(x)=u(x)\cdot v(x)$.

Příklad 7.2

Řešte metodou separace proměnných rovnici $y'-2\sqrt{y}=0$
(poč. podm : $y(1)=0$)
Řešení:

$$y'-2\sqrt{y}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=2dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy=2\int dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}}=2x+C$$

$$\sqrt{y}=x+C$$

$y=(x+C)^2$ obecné řešení

$$0=(1+C)^2$$

$$C=-1$$

$y=(x-1)^2$ part. řešení

Příklad 7.3

Určete závislost počtu nerozpadlých atomů radioaktivní látky na čase, jestliže platí $dn = -\frac{\ln 2}{T} n dt$, kde n je počet nerozpadlých atomů v čase t, T je poločas rozpadu.

Řešení: Danou diferenciální rovnici můžeme řešit separací proměnných.

$$\frac{dn}{n} = -\frac{\ln 2}{T} dt$$

$$\int \frac{dn}{n} = -\frac{\ln 2}{T} \int dt$$

$$\ln n = -\frac{\ln 2}{T} t + C$$

Předpokládáme-li, že pro čas $t = 0$ je počet nerozpadlých atomů roven počáteční hodnotě n_0, dostaneme

$$\ln n_0 = 0 + C$$

$$\ln n - \ln n_0 = -\frac{\ln 2}{T} t$$

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Počet atomů klesá podle exponenciální křivky.

7.3. Diferenciální rovnice vyšších řádů

Rovnice řešitelné přímou integrací

Jedná se o rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$. Řešíme *n*-násobnou ***přímou integrací*** podle x.

Například první integrací rovnice druhého řádu $y'' = f(x)$ obdržíme rovnici $y' = \int f(x)dx$, její integrací pak obecné řešení $y = \int y'(x)dx = \int \left(\int f(x)dx \right) dx$.

Rovnice řešitelné snížením řádu

Jedná se o rovnice typu $F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, kde $m \geq 1$. Rovnici substitucí $y^{(n)} = z$ převedeme na rovnici $(n-m)$-tého řádu pro funkci $z(x)$

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-m)}) = 0 \;.$$

Uvedený postup nazýváme ***snížením řádu diferenciální rovnice***. Nalezneme-li řešení *z(x)* nové rovnice, pak jeho přímou *m*-násobnou integrací (viz předchozí typ rovnice) obdržíme $y(x)$.

Speciální tvar $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$, resp. $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, můžeme převést dokonce na rovnici prvého řádu.

Rovnice typu $y'' = f(y)$

Rovnici převedeme na rovnici prvního řádu vynásobením y', čímž dostaneme rovnici

$$y'y'' = f(y)y',$$

a její integrací podle y obdržíme rovnici prvního řádu

$$\frac{1}{2}y'^2 = \int f(y)dy .$$

O platnosti úpravy se můžeme přesvědčit derivací poslední rovnice podle x.

Obecná lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnicí n***-tého řádu*** rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y(^{n-1}) + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

kde tzv. ***koeficienty*** $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ a ***pravá strana*** $f(x)$ jsou funkcemi proměnné x.

Název je dán skutečností, že se na levé straně rovnice vyskytuje lineární výraz pro neznámou funkci y a pro její derivace.

Obecná lineární diferenciální rovnice je v obecném případě obtížně řešitelná. Níže jsou uvedeny základní teoretické poznatky, které budou užitečné v následující kapitole pro řešení speciálního typu této rovnice, tzv. lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Jestliže funkce $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x),\ \ f(x)$ jsou spojité v intervalu *I*, pak *existuje právě jedno řešení* uvedené rovnice definované v celém intervalu *I*, které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, kde $x_0 \in I$ a $y_0, y_1, \ldots, y_{(n-1)}$, jsou libovolná reálná čísla.

Homogenní lineární diferenciální rovnicí příslušnou k původní rovnici, nazýváme rovnici

$$y^n + a_{(n-1)}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

tj. rovnici ***bez pravé strany***.

Libovolná lineární kombinace řešení homogenní lineární rovnice je také jejím řešením.

Přímým dosazením lineární kombinace řešení do rovnice a využitím linearity její levé strany a linearity operace derivace.

Systém $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ v intervalu I lineárně nezávislých řešení homogenní lineární rovnice se nazývá ***fundamentální systém*** této rovnice.
Tvoří-li funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fundamentální systém homogenní lineární rovnice, pak obecný integrál této rovnice má tvar $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou libovolné konstanty.

Známe-li fundamentální systém $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ homogenní rovnice, pak obecný integrál nehomogenní rovnice má tvar $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_p$,
kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou libovolné konstanty a y_p je jakékoliv řešení (partikulární integrál) nehomogenní rovnice.

Stačí dosadit uvedené řešení do nehomogenní rovnice a opět využít její linearity.
Slovně řečeno, obecný integrál nehomogenní rovnice je součtem obecného integrálu rovnice homogenní a libovolného partikulárního integrálu rovnice nehomogenní.
O tom, jak najít partikulární integrál nehomogenní rovnice, hovoří následující věta.

Partikulární integrál $y_p(x)$ nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x),$$

tj. ve tvaru obecného řešení homogenní rovnice, kde však veličiny $c_1, c_2, \dots, c_n$ nepovažujeme za konstanty, ale za neznámé funkce proměnné *x* (tzv. ***metoda variace konstant***). Dá se dokázat, že funkce $y_p(x)$ je hledaným řešením právě tehdy, vyhovují-li neznámé funkce $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ soustavě diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned}$$

Tuto soustavu řešíme obdobným postupem jako algebraické soustavy lineárních rovnic (eliminační metodou, Cramerovým pravidlem apod.). Integrací získaných prvních derivací $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ nakonec dostaneme hledané funkce $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ a následně partikulární řešení $y_p(x)$.

Příklad 7.4

Řešte rovnici $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U}{L}$ pro střídavé napětí $U = U_0 \sin \omega t$.

Řešení. Potřebujeme řešit rovnici

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin \omega t .$$

Homogenní rovnice má řešení $I = C \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$. Partikulární řešení homogenní rovnice najdeme takto: Jelikož na pravé straně je $\sin \omega t$ (derivace $\omega \cos \omega t$), pokusíme se najít řešení ve tvaru $I = A \sin \omega t + B \cos \omega t$.

Po dosazení do $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin \omega t$ dostaneme

$$\left(\omega A + \frac{BR}{L}\right) \cos \omega t + \left(-\omega B + \frac{RA}{L}\right) \sin \omega t = \left(\frac{U_0}{L}\right) \sin \omega t$$

Porovnáním koeficientů u $\cos \omega t$ a $\sin \omega t$ získáme pro A a B rovnice

$\omega A + \frac{RB}{L} = 0, -\omega B + \frac{RA}{L} = \frac{U_0}{L}$, jejichž řešením je

$$A = \frac{RU_0}{Z},\ B = \frac{-U_0 L \omega}{Z},\ Z \equiv \left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Substitucemi $A = D \cos \delta,\ B = -D \sin \delta$, tj. $D(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{U_0}{Z}, \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega L}{R}$,

se $A \sin \omega t + B \cos \omega t$ převede na tvar $D = \sin(\omega t - \delta)$.

Obecné řešení rovnice $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin \omega t$ tedy je

$I = C \exp\left(\frac{-Rt}{L} / L\right) + U_0 Z^{-1} \sin\left(\omega t - \delta\right)$, kde C je libovolná integrační konstanta.

7.4. Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Homogenní lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\,,$$

kde ***koeficienty*** $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ***jsou konstanty*** nezávislé na proměnné x.

Předpokládáme řešení ve tvaru $y = e^{\alpha x}$. Po dosazení do homogenní rovnice a vydělení rovnice výrazem $e^{\alpha x}$ obdržíme tzv. ***charakteristickou rovnici***

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0\,,$$

což je algebraická rovnice n-tého stupně pro neznámou α. Tato rovnice má právě n kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Mohou nastat dva případy:

Všechny kořeny jsou navzájem různé; pak fundamentální systém homogenní rovnice je tvořen n funkcemi $y_1 = e^{\alpha_1 x}, y_2 = e^{\alpha_2 x}, \ldots, y_n = e^{\alpha_n x}$.

Je-li některý kořen α_k r-násobný, pak mu ve fundamentálním systému odpovídá r (lineárně nezávislých) funkcí $y_1 = e^{\alpha_k x}, y_2 = e^{\alpha_k x}, \ldots, y_r = x^{r-1} e^{\alpha_k x}$.

Předchozí větou je nalezení fundamentálního systému vyřešeno až na jeden detail. Kořeny charakteristické rovnice mohou totiž být obecně komplexní, a pak jsou komplexní také příslušné funkce fundamentálního systému. Pokud pracujeme v reálném oboru (a to je náš případ), zajímají nás přednostně reálná řešení. Ukazuje se, že je možné nežádoucí komplexní řešení nahradit reálnými.

Nalezení reálného fundamentálního systému

Jsou-li konstanty $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ reálné, musí (jak plyne z teorie algebraických rovnic) ke každému komplexnímu kořenu $a + \mathrm{i}b$ charakteristické rovnice existovat také kořen komplexně sdružený $a - \mathrm{i}b$, a to stejné násobnosti. Místo abychom do fundamentálního systému vzali komplexní funkce $e^{(a+\mathrm{i}b)x}, e^{(a-\mathrm{i}b)x}$, použijeme jejich vhodné lineární kombinace, a to takové, aby výsledné funkce byly opět nezávislé a přitom reálné. Na základě Eulerova vzorce z teorie komplexních čísel

$$e^{a\pm \mathrm{i}b} = e^a\left(\cos b \pm \mathrm{i}\sin b\right)$$

je zřejmé, že nejjednodušší je vzít lineární kombinace

$$\frac{1}{2}(e^{(a+\mathrm{i}b)x}+e^{(a-\mathrm{i}b)x})=e^{ax}\cos bx \ \text{ a } \ \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{(a+\mathrm{i}b)x}-e^{(a-\mathrm{i}b)x})=e^{ax}\sin bx,$$

tzn. reálnou a imaginární část.

Pokud jsou kořeny $a+\mathrm{i}b$, $a-\mathrm{i}b$ r-násobné, vezmeme dále do fundamentálního systému reálné funkce

$$xe^{ax}\cos bx, xe^{ax}\sin bx,\ldots, x^{r-1}e^{ax}\cos bx, x^{r-1}e^{ax}\sin bx$$

Tím je problém nalezení ***reálného fundamentálního systému*** úspěšně uzavřen.

Příklad 7.5

Hmotný bod vykonává netlumený harmonický pohyb. Určete závislost výchylky s na čase, je-li pohyb popsán diferenciální rovnicí $\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2=0$ a počátečními podmínkami $s(0)=A\sin\varphi,\ s'(0)=A\omega\cos\varphi$, kde A a φ jsou dané konstanty.

Řešení. Charakteristická rovnice $z^2+\omega^2=0$ má kořeny $z_{1,2}=\pm i\omega$.

Obecné řešení je tedy $s=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$.

Spočítáme první derivaci a najdeme C_1 a C_2 z počátečních podmínek.

$s'=\omega(C_1\cos\omega t-C_2\sin\omega t)$,

$A\sin\varphi=C_2,\ A\omega\cos\varphi=\omega C_1$,

$A\cos\varphi=C_1$.

Tedy

$s=A\cos\varphi\sin\omega t+A\sin\varphi\cos\omega t$,

$s=A\sin(\omega t+\varphi)$.

Příklad 7.6

Jednorozměrný pohyb hmotného bodu (s hmotností m) pod vlivem síly $F(x)\equiv\frac{-dU}{dx}$ je popsán rovnicí $mx''=\frac{-dU}{dx}$.

Najděte obecné řešení této pohybové rovnice.

Řešení: Rovnici $mx'' = \frac{-dU}{dx}$ vynásobíme x' užijeme identity $xx' \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ a vztah

$\left(\frac{dU}{dx}\right)x' = \left(\frac{dU}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dU}{dt}$, což dá

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mx'^2 + U\right) = 0$$

Odtud plyne

$$\frac{1}{2}mx'^2 + U = \text{konst} \equiv W .$$

Integrační konstanta W je rovna součtu kinetické $(mx'/2)$ a potenciální energie U .

Z $\frac{1}{2}mx'^2 + U = \text{konst} \equiv W$ plyne

$$\frac{dx}{dt} = \pm\left[\frac{2}{m}(W-U)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Odkud integrací získáme obecné řešení $t - t_0 \pm (m/2)^{\frac{1}{2}} \int \left[W - U(x)\right]^{-\frac{1}{2}} dx$.

7.5. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Nehomogenní lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{(n-1)}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jsou konstanty. Na pravé straně vystupuje funkce $f(x)$ různá od funkce nulové.

Z teorie obecné lineární diferenciální rovnice víme, že obecný integrál nehomogenní rovnice můžeme psát ve tvaru

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_p$$

kde $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ tvoří ***fundamentální systém homogenní rovnice***, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou libovolné konstanty a y_p je jakékoliv ***řešení (partikulární integrál) nehomogenní rovnice***. Určit fundamentální systém homogenní rovnice již umíme stejně jako vypočítat partikulární integrál metodou variace konstant. Metoda variace konstant ale není vždy tou nejrychlejší a nejsnazší cestou. Pro některé funkce

$f(x)$ (tzv. ***speciální pravé strany***) můžeme totiž tvar partikulárního integrálu y_p předem určit a následně jednoduše dopočítat.

Nechť pravá strana lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty má tvar

$$f(x) = e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right]$$

Kde $P(x), Q(x)$ jsou mnohočleny obecně různého, nejvýše však s-tého stupně s reálnými koeficienty a a, b jsou libovolná reálná čísla.

Jestliže není $a + \mathrm{i}b$ (a tedy ani $a - \mathrm{i}b$) kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$y_p = e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right]$$

kde $R(x), S(x)$ jsou (zatím neznámé) mnohočleny nejvýše s-tého stupně.

Obecněji, je-li $a + \mathrm{i}b$ (a tedy i $a - \mathrm{i}b$) *r*-násobným kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$y_p = x^r e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right]$$

kde $R(x), S(x)$ jsou mnohočleny nejvýše s-tého stupně.

Funkci $f(x) = e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right]$ nazýváme v této souvislosti ***speciální pravou stranou***.

Uvedená speciální pravá strana zahrnuje širokou třídu funkcí, se kterou v praxi obvykle vystačíme. Tak např. pro $a = 0$, $b = 0$, přechází pravá strana v polynom $P(x)$, pro $a \neq 0$, $b = 0$ a $P(x) = 1$ dostáváme na pravé straně exponenciální funkci e^{ax}, pro $a = 0$, $b \neq 0$, $P(x) = 1$ a $Q(x) = 0$ (resp. $P(x) = 0$ a $Q(x) = 1$) dostaneme $\cos bx$ (resp. $\sin bx$) apod. Z předchozí poznámky a poslední věty plyne, že je-li pravá strana ve tvaru polynomu, je třeba při hledání partikulárního integrálu vyšetřit, zda charakteristická rovnice nemá kořen $0 \ (= 0 + \mathrm{i}0)$. Pokud je na pravé straně exponenciála e^{ax}, je nutné vyšetřit existenci kořene $a \ (= a + \mathrm{i}0)$, a pokud je na pravé straně funkce $\cos bx$ nebo $\sin bx$, je třeba učinit totéž pro hodnotu $\mathrm{i}b \ (= 0 + \mathrm{i}b)$.

Pozor na případ, kdy je na pravé straně pouze jedna z funkcí $\cos bx$, $\sin bx$. Partikulární integrál y_p musíme hledat (v souladu s poslední větou) ve tvaru, obsahujícím obě tyto goniometrické funkce.

Provedeme-li správně určení tvaru partikulárního řešení y_p, pak jediné, co zbývá, je dopočítat zatím neznámé koeficienty polynomů $R(x)$ a $S(x)$. To provedeme následovně: Nejprve dosadíme předpokládaný tvar partikulárního integrálu y_p a jeho potřebné derivace do původní (nehomogenní) rovnice za neznámou y a její derivace. Obdržíme tak jednu rovnici pro neznámé koeficienty polynomů $R(x)$ a $S(x)$, kterou řešíme tzv. ***metodou neurčitých koeficientů***. Tato z algebry známá metoda spočívá v porovnání koeficientů u jednotlivých lineárně nezávislých funkcí na obou stranách rovnice. Z provedeného porovnání obdržíme potřebný počet rovnic pro jednoznačné určení hledaných koeficientů polynomů $R(x)$ a $S(x)$. Výsledný partikulární integrál y_p je možné ověřit přímým dosazením do původní (nehomogenní) rovnice.

Jestliže má pravá strana tvar ***součtu funkcí*** uvedeného speciálního tvaru (které se od sebe liší různou hodnotou čísel a, resp. b), je také partikulární integrál součtem příslušných partikulárních integrálů. Tyto partikulární integrály, příslušné jednotlivým sčítancům na pravé straně, lze hledat každý zvlášť metodou popsanou výše a výsledky sečíst.

8. Závěr

Tato práce shrnuje důležité poznatky v oblasti maticového počtu, komplexních čísel, numerického řešení rovnic, diferenciálního počtu, vektorové analýzy a řešení diferenciálních rovnic.

Učební text byl zpracován ve dvojí podobě: jako skriptum a jako elektronická učebnice v podobě hypertextového dokumentu. Obě podoby pokrývají stejná témata, elektronická podoba učebního textu je navíc rozšířena o další ilustrační příklady a některé rozšiřující pasáže, které vzhledem k rozsahovému omezení nebylo vhodné zahrnout do skripta.

Elektronická podoba učebnice je koncipována jako sada vzájemně provázaných statických HTML dokumentů. Tento formát byl zvolen s ohledem na snadné publikování v rámci e-learningového systému eAMOS či na jiných WWW serverech.

Při přípravě elektronické učebnice bylo třeba uspokojivě vyřešit zejména problém sazby velkého množství matematických výrazů a jejich převodu do podoby vhodné pro publikování. Pro řešení tohoto úkolu byl použit volně dostupný programový balík Latex2HTML.

Důvodem této volby byla zejména propracované možnosti sazby ve formátu Latex a možnost hromadného zpracování připravených zdrojových dokumentů s automatickým generováním vzájemných odkazů, což umožnilo při ladění podoby textu jednoduchou aktualizaci elektronické učebnice. To by při ručním kódování představovalo velmi obtížný úkol s možností vzniku chyb.

S pomocí konverzního programu byly dokumenty ve formátu Latex obsahující zdrojový kód matematické sazby, vlastní text a formátovací informace konvertovány do podoby dokumentů ve formátu HTML 3.2. Matematické výrazy byly během konverze automaticky převedeny na obrazové soubory ve formátu GIF a vloženy do HTML dokumentů.

Další možnosti budoucího vývoje elektronické učebnice spočívají např. v možném začlenění interaktivních dynamických prvků na straně prohlížeče či serveru (interaktivní příklady s možností zadání vstupních hodnot, java aplety), tyto vlastnosti však již s ohledem na náročnost zpracování přesahují rámec této práce.

9. Literatura

1. GREGA, A., KLUVANEC, D., RAJČAN, E. *Matematika pre fyzikov*. Bratislava, 1975.
2. KVASNICA, J. *Matematický aparát fyziky*. Praha: Academia, 2004, 2. vydání. ISBN 80-200-0603-6.
3. UNGERMANN, Z., ZACHARIÁŠOVÁ, L. *Matematika pro posluchače na pedagogických fakultách*. Praha: SPN, 1973.
4. POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prométheus, 1991, 6. vydání. ISBN 80-85849-78-X.
5. DOLANSKÝ, P. a kol. *Matematika 1. – vysokoškolská učebnice pro distanční studium*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2000, 1. vydání. ISBN 80-7082-643-6.
6. DOLANSKÝ, P. a kol. *Matematika 2. – vysokoškolská učebnice pro distanční studium*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002, 1. vydání. ISBN 80-7082-840-4.
7. HLAVÁČEK, A. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, 1. díl*. Praha: SPN, 1971, 2. změněné vydání. ISBN 97-65-21.
8. HLAVÁČEK, A. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, 2. díl*. Praha: SPN, 1971, 2. změněné vydání. ISBN 07-0-31.
9. KALUS, R., HRIVŇÁK, D. *Breviář vyšší matematiky*. Ostrava: Ostravská univerzita, 2001. ISBN 80-7042-819-8.
10. ŠKRÁŠEK, J. *Základy vyšší matematiky 1.A*. Praha: SNTL, 1977, 8. vydání.
11. ŠKRÁŠEK, J. *Základy vyšší matematiky 1.B*. Praha: SNTL, 1972, 5. vydání.
12. ŠKRÁŠEK, J. *Základy vyšší matematiky 2.A*. Praha: SNTL, 1974, 6. vydání.
13. ŠKRÁŠEK, J. *Základy vyšší matematiky 2.B*. Praha: SNTL, 1975, 6. vydání.
14. TESAŘ, J. *Sbírka úloh z matematiky pro fyziky.* Č. Budějovice: Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích, 1. vydání. ISBN 80-7040-133-8.
15. MIKULČÁK, J., KLIMEŠ, B., ET AL. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Praha: SPN, 1988, 1. vydání. ISBN 54-09-12/1.
16. OLŠÁK, P. *Lineární algebra* [online]. Praha: ČVUT [cit. 21. 2. 2008]. Dostupné z <`http://math.feld.cvut.cz/olsak/linal.html`>.
17. MAŘÍK, R. *Matematika (nejen) pro krajináře a nábytkáře* [online]. Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita [cit. 17. 3. 2008]. Dostupné z <`http://www.mendelu.cz/user/marik`>.

18. KOS, V. *Moje škola – škola hrou pro každého a nonstop* [online]. [cit. 7. 1. 2008]. Dostupné z <http://www.mojeskola.cz>.
19. NAVRÁTIL, O. *Matematická analýza 1, Materiály ke stažení PDF*. [online], Praha: ČVUT [cit. 16. 2. 2008]. Dostupné z <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/mta1/K611MA1_soubory/ma1_materialy.html>.
20. PŘIBYLOVÁ, L., MAŘÍK, R. *Matematika 1 a 2* [online]. Praha: Katedra aplikované matematiky PřF MU [cit. 26. 3. 2008]. Dostupné z <http://www.math.muni.cz/ ~pribylova/>.
21. *WIKIPEDIA – The Free Encyclopedia* [online]. Dostupné z <http://en.wikipedia.org>
22. DALÍK, J., PEŠL, J. *Iterační metody pro řešení algebraických rovnic* [online]. Brno: Fakulta stavební Vysokého učení technického v Brně [cit. 20. 2. 2008]. Dostupné z <http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/numericke_metody/>.