Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

# PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELY KOLEM NÁS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Radka Glücksmannová

České Budějovice, prosinec 2007

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu bakalářské práce, RNDr. Tomáši Mrkvičkovi, Ph.D. za jeho trpělivost, pomoc při hledání vhodné literatury a cenné rady a připomínky. Můj dík patří také Zdeňku Klučinovi za jeho psychickou podporu a všem, kteří mi při psaní práce jakkoliv pomohli.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích 19. prosince 2007 Radka Glücksmannová

## Anotace

Úkolem této práce je vypracování sbírky příkladů, vztahujících se k jednotlivým pravděpodobnostním modelům. Zahrnuty by měly být: základní diskrétní rozdělení, spojitá rozdělení, použití CLV a aproximace binomického rozdělení Poissonovým. Ke každému modelu by mělo být uvedeno několik příkladů, které dokládají použití daného modelu v praxi, tak aby byl čtenář motivován k hlubšímu studiu pravděpodobnostních modelů.

## Annotation

The objective of this work is to build a collection of examples related to the particular probability models. It should include basic discrete distributions, continuous distributions, using of CLT and approximation of binomic distribution by Poisson. Every model should be accompanied by several examples showing the use of given model in praxis, so that the reader is motivated for deeper study of probability models.

# OBSAH

# 1. Úvod

Práce *Pravděpodobnostní modely kolem nás*, která se vám dostává do rukou, podává přehled o základních rozděleních pravděpodobnosti. Měla by čtenářům ukázat, že pravděpodobnostní modely nejsou jen teoretické věty, vzorečky a důkazy, ale že se s nimi všichni setkáváme v běžném každodenním životě. Převážná většina příkladů je koncipována tak, aby ukázala použití pravděpodobnostních modelů v situacích, do kterých se může dostat každý z nás. Je určena studentům při studiu pravděpodobnosti, doplňuje teoretické přednášky řadou řešených i neřešených příkladů.

Práce je rozdělena na několik částí. V úvodu je krátké nahlédnutí do historie teorie pravděpodobnosti. Za ním následuje teoretická část, kde jsou zavedeny základní pojmy z teorie pravděpodobnosti, které jsou nutné dále při použití jednotlivých pravděpodobnostních modelů.

Vlastní pravděpodobnostní modely jsou rozděleny na diskrétní a spojité, u každého rozdělení pravděpodobnosti je uvedena základní teorie, několik řešených příkladů vztahujících se k danému rozdělení a neřešené příklady určené k procvičování. Zařazení příkladů k teorii v podstatě dává návod, který model na daný příklad aplikovat. Proto je za přehledem jednotlivých rozdělení pravděpodobnosti kapitola věnovaná pouze příkladům. Tyto příklady jsou různě zpřeházeny a čtenář musí sám přijít na to, kterým modelem lze danou situaci popsat.

V konci práce jsou uvedeny výsledky všech neřešených příkladů, u mnohých společně s náznakem řešení. V samotném závěru je uvedena literatura, ze které jsem čerpala, a jako příloha tabulka hodnot distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Snažila jsem se vytvořit práci, která by svým obsahem studenty zaujala a ve který by našli možnosti aplikace pravděpodobnostních modelů v praxi. Doufám, že se mi to podařilo.

# 2. Úvod do pravděpodobnosti

## 2.1 Nahlédnutí do historie

Teorie pravděpodobnosti stejně jako matematická statistika spadají do vědního oboru zvaného stochastika. První zmínku o ní nacházíme už v díle Platona „Philebos“. Také indičtí a čínští matematikové se řešením kombinatorických úloh zabývali již ve starověku. Základy vlastní teorie pravděpodobnosti můžeme v Evropě položit do 16. a 17. století v souvislosti se snahou vybudovat teorii hazardních her.

Důvodem tak pozdního zájmu matematiků o náhodu může být fakt, že do té doby matematické zkoumání náhodných jevů nikdo nepotřeboval a nutnost jejich přesného popisu se objevila až v souvislosti s rozvojem obchodu, demografie, astronomie a moderní fyziky.

První úlohy vznikaly již na počátku novověku v souvislosti s úlohami na motivy hry v kostky. Zabývali se jimi slavní matematici a přírodovědci jako Luca Paciolli (1445 – 1514), Niccolo Tartaglia (1500 – 1557), Gerolamo (Hieronymus) Cardano (1501 – 1576) a Galileo Galilei (1565 – 1642), který se pokusil použít pravděpodobnostních úvah k odhadu chyb při pozorování hvězd. Kombinatorickými problémy a úlohami teorie pravděpodobnosti se také zabýval Johannes Keller (1571 –1630).

Za vlastní počátek teorie pravděpodobnosti je považována korespondence francouzských matematiků Blaise Pascala (1623 – 1662) a Pierra de Fermata (1601 – 1665), kterou vedli v roce 1654 o problémech, se kterými se na Pascala obrátil rytíř de Méré. Šlo o otázku, kolik hodů jednou či dvěma kostkami je třeba udělat, aby šance, že padne alespoň jednou šestka, respektive dvě šestky, byla nadpoloviční. Na jejich myšlenky navázal Christian Huygens (1629 – 1695), který v roce 1657 napsal první knihu o počtu pravděpodobnosti „De rationis in ludo aleae“ [O výpočtech při hře v kostky]. Myšlenky svých předchůdců zde posunul od řešení konkrétních úloh k obecným pojmům a postupům.

Velkou zásluhu o rozvoj počtu pravděpodobnosti si získal švýcarský matematik Jacob Bernoulli (1654 – 1705), který v díle „Tractatus de arte coniectandi“ [Pojednání o umění předvídat] odvodil důležitou větu, zvanou „zákon velkých čísel“. Dalšími významnými poznatky přispěli anglický matematik francouzského původu Abraham de Moivre (1667 – 1754) a francouzský matematik Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). Moivre ve svém díle „Miscellanea analytica“ [Různé problémy z analýzy] vyslovil proslulý limitní teorém nazývaný nyní Moivrova-Laplaceova věta.

Teorií chyb a metodou nejmenších čtverců se na rozvoji počtu pravděpodobnosti podílel německý matematik a fyzik Carl Friedrich Gaus (1777 – 1855). Z dalších stojí jistě za zmínku Augustin Louise Cauchy (1789 – 1957) a Siméon Denise Poisson (1781 – 1840), po němž je nazváno jedno z nejdůležitějších rozložení pravděpodobnosti. V tomto období nachází teorie pravděpodobnosti velmi aktuální uplatnění v přírodních a technických vědách.

U nás se počtem pravděpodobnosti v minulém období zabýval zvláště Bohuslav Hostinský (1884 – 1951), který dosáhl významných výsledků v teorii markovských řetězců.

Počet pravděpodobnosti patří v současné době k významným matematickým oborům s rozsáhlými možnostmi použití v matematice samé, v přírodních vědách (ve fyzice, kvantové mechanice, chemii, biologii nebo medicíně) i ve vědách společenských (v ekonomii, teorii řízení, kontrole jakosti nebo lingvistice).

## 2.2 Základní pojmy

Dříve než se dostaneme k vlastním pravděpodobnostním modelům, je třeba zavést základní pojmy, které budou dále používány. V této kapitole budou uvedeny pouze základní definice pojmů, věty o vlastnostech a jejich důkazy lze najít např. v *Škrášek 1990*

Teorie pravděpodobnosti zkoumá matematické modely náhodných pokusů. Náhodným pokusem zde nazýváme jakoukoliv činnost, která se uskutečňuje za určitých jednoznačně stanovených podmínek a jejíž realizaci za těchto podmínek lze neomezeně mnohokrát opakovat. Při tomto opakování nedosáhneme stejných výsledků, výsledek pokusu není stanovenými podmínkami určen jednoznačně, avšak systém podmínek určuje rozložení pravděpodobnosti na množině všech možných výsledků.

Klasickým příkladem náhodných pokusů jsou hazardní hry (hod kostkou, hod mincí, tah sportky apod.), ale i významnější pokusy jako výnosnost pěstování plodin, podání léku pacientovi, spotřeba energie a další.

Kromě náhodných pokusů existují ještě pokusy deterministické, které při opakování za stanovených podmínek vedou vždy ke stejnému výsledku. S těmito pokusy se často setkáváme v přírodních vědách; při chemických reakcích (při dodržení stejného tlaku, teploty, množství látek) nebo při fyzikálních pokusech. Z hlediska teorie pravděpodobnosti však nejsou deterministické pokusy zajímavé.

Každému náhodnému jevu můžeme přiřadit číslo, které nazýváme pravděpodobností. Intuitivně každý z nás tuší, co si pod pojmem pravděpodobnost představit. Při hodu pravidelnou kostkou padne jedno z čísel 1 až 6. Pravděpodobnost padnutí každého z nich je $\frac{1}{6}$. Stejně tak tušíme, že při narození dítěte je pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že to bude chlapec, a $\frac{1}{2}$, že to bude děvče (ve skutečnosti je narození chlapce o něco málo pravděpodobnější, asi 0,515). Tato tvrzení plynou z našich zkušeností, aniž bychom věděli, co vlastně pravděpodobnost je.

### 2.2.1 Náhodné veličiny

Mějme nějaký výsledek náhodného pokusu. Mnohdy nám nejde přímo o samotný výsledek pokusu, ale chceme tento výsledek ohodnotit číslem. Existuje tedy reálná funkce $X$, která tomuto výsledku pokusu $\omega$ přiřazuje hodnotu $X(\omega)$. Tato funkce definovaná na množině všech možných výsledků pokusu se nazývá náhodná veličina. Pokud mají výsledky náhodného pokusu kvantitativní charakter (např. hod kostkou, počet telefonních hovorů za jednotku času, měření hmotnosti pacientů, počet vadných výrobků), hodnotou náhodné veličiny je přímo vlastní výsledek pokusu. Výsledky některých náhodných pokusů však mají kvalitativní charakter (pohlaví narozeného dítěte, barva očí, hod mincí). V tomto případě definujme náhodnou veličinu tak, že každý možný výsledek náhodného pokusu ohodnotíme určitým reálným číslem.

Náhodné veličiny budeme značit velkými písmeny od konce abecedy $(X, Y, Z, \ldots)$, hodnoty, kterých budou nabývat, příslušnými malými písmeny $(x, y, z, \ldots)$.

Náhodné veličiny, se kterými se setkáváme, mohou být, podle hodnot, kterých nabývají, dvojího typu:

a) diskrétní náhodná veličina: je náhodná veličina, která může nabývat hodnot pouze z nějaké konečné nebo spočetné množiny. Příkladem je počet bodů při hodu 3 kostkami, počet dopravních nehod za rok, počet bodů z testu, …

b) absolutně spojitá náhodná veličina: tato náhodná veličina může nabývat všech hodnot z určitého intervalu. Např. doba čekání na autobus, životnost přístroje, výška člověka, …

K přesným definicím těchto dvou typů náhodných veličin potřebujeme nejdříve definovat pojem distribuční funkce.

Kromě uvedených dvou základních typů náhodných veličin se mohou vyskytovat i složitější typy náhodných veličin, jako např. náhodné veličiny, které se v některých částech intervalu chovají jako diskrétní, kdežto v jiných jeho částech se chovají jako spojité náhodné veličiny. Takovými náhodnými veličinami se však zabývat nebudeme.

### 2.2.2 Distribuční funkce náhodných veličin

K popisu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny zavádíme distribuční funkci náhodné veličiny, která plně charakterizuje její pravděpodobnostní chování.

*Definice:* Nechť $X$ je náhodná veličina. Distribuční funkcí $F(x)$ náhodné veličiny $X$ nazýváme funkci, která je definována vztahem

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega : X(\omega) < x\}) \qquad \text{pro } \forall x \in R$$

Hodnota distribuční funkce v bodě $x$ tedy udává pravděpodobnost toho, že náhodná veličina $X$ nabývá hodnoty menší než $x$.

*Věta:* Nechť $F(x)$ je distribuční funkcí náhodné veličiny $X$. Pak pro $F(x)$ platí:

1) je neklesající; tedy pro libovolné $a, b \in R$, $a \leq b$ platí

$$F(a) \leq F(b)$$

2) je zleva spojitá v libovolném bodě $x \in (-\infty; \infty)$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

4) $0 \le F(x) \le 1$ pro $\forall\, x \in R$

5) má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti

6) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

### 2.2.3 Diskrétní náhodná veličina

Definice: Náhodná veličina $X$ se nazývá diskrétní (má rozdělení diskrétního typu), jestliže existuje nejvýše spočetná množina reálných čísel $\{x_1, x_2, \ldots\}$ taková, že pro každé $x_i$ z této množiny je pravděpodobnost $P(X = x_i) > 0$ a

$$\sum_i P(X = x_i) = 1$$

Definice: Nechť $X$ je diskrétní náhodná veličina. Pak funkci $p : (-\infty; \infty) \to \langle 0;1 \rangle$ danou předpisem

$$p(x) = P(X = x)$$

nazýváme pravděpodobnostní funkcí diskrétní náhodné veličiny $X$.

Pravděpodobnostní funkce přiřazuje každému reálnému číslu $x$ pravděpodobnost, že náhodná veličina $X$ nabude této hodnoty.

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny $X$ je dána vztahem

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i: x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{i: x_i < x} p(x_i)$$

Distribuční funkce náhodné veličiny diskrétního typu je schodovitá funkce se skoky v bodech $x_1, x_2, \dots$ a je konstantní na intervalech $\left(x_n ; x_{n+1}\right)$. Velikost skoku v bodě $x_n$ je

$$p(x_n) = P(X = x_n)$$

### 2.2.4 Absolutně spojitá náhodná veličina

*<u>Definice:</u>* Náhodná veličina $X$ se nazývá absolutně spojitá (má rozdělení absolutně spojitého typu), jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce $f(x)$ taková, že platí

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad x \in \left(-\infty; \infty\right)$$

Funkce $f(x)$ se nazývá hustotou rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $X$ nebo stručněji hustotou náhodné veličiny $X$.

Obsah plochy mezi křivkou $f(x)$ a osou $x$ v jakémkoliv intervalu je pravděpodobnost, že $X$ nabude hodnoty z tohoto intervalu.

*<u>Věta:</u>* (vlastnosti hustoty)

Nechť $X$ je náhodná veličina absolutně spojitého typu a $f(x)$ její hustota. Pak platí:

1) $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in \left(-\infty; \infty\right)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3) $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ skoro jistě

4) $P(a \le X < b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

pro libovolná reálná čísla $a, b$, kde $a \le b$.

### 2.2.5 Charakteristiky náhodných veličin

Chování náhodné veličiny je jednoznačně popsáno jejím rozdělením. Tato informace o náhodné veličině je sice úplná, ale často značně nepřehledná. Pro řešení pravděpodobnostních úloh je proto výhodné shrnout informaci o rozdělení náhodné veličiny do několika vhodných číselných charakteristik, které dostatečně výstižně popisují základní vlastnosti tohoto rozdělení. Navíc v případě, že rozdělení náhodné veličiny neznáme, můžeme pomocí těchto charakteristik určit alespoň základní vlastnosti náhodné veličiny.

Podle vlastnosti, kterou popisují, můžeme charakteristiky rozdělit do následujících skupin:

1) charakteristiky polohy: střední hodnota, modus, medián, kvantity

2) charakteristiky variability: rozptyl, směrodatná odchylka, průměrná odchylka

3) charakteristiky šikmosti a špičatosti: koeficienty šikmosti a špičatosti

Nyní si podrobněji definujeme pouze nejčastěji používané charakteristiky, kterých budeme dále využívat při popisu jednotlivých typů rozdělení pravděpodobnosti.

*Definice:* Nechť $X$ je náhodná veličina. Střední hodnotou $EX$ náhodné veličiny $X$ nazýváme integrál

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} X \, dF(x)$$

pokud tento integrál existuje. Pokud uvedený integrál není konečný nebo neexistuje, říkáme, že střední hodnota náhodné veličiny $X$ neexistuje.

<u>Poznámka:</u> Definici můžeme uvést ve dvou různých tvarech v závislosti na tom, zda se jedná o diskrétní nebo o absolutně spojitou náhodnou veličinu.

a) Nechť $X$ je diskrétní náhodná veličina nabývající reálných hodnot $x_1, x_2, \ldots$, tedy

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 .$$

Pak střední hodnota $EX$ náhodné veličiny $X$ je tvaru

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p(x_i)$$

pokud tato řada konverguje.

b) Nechť $X$ je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou $f(x)$. Pak střední hodnota náhodné veličiny $X$ je

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

pokud tento integrál existuje.

*<u>Věta:</u>* (vlastnosti střední hodnoty)

Nechť $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny, $a, b$ jsou reálné konstanty. Pak platí:

1) $EX$ existuje $\Leftrightarrow$ existuje $|x|$

2) Jestliže $P(X = a) = 1 \Rightarrow EX = a$

3) $E(aX + bY) = aEX + bEY$

4) pokud $X \leq Y$ (tj. pro $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)$) $\Rightarrow EX \leq EY$

5) Nechť $|X| \leq Y$ a $EY$ existuje $\Rightarrow$ existuje $EX$

6) Nechť $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow EX \geq 0$

7) $E\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

8) $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$, pokud jsou náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé

Rozptyl je charakteristikou odchylek hodnot náhodné veličiny od její střední hodnoty.

<u>*Definice:*</u> Nechť $X$ je náhodná veličina. Potom číslo

$\mu_n' = EX^n$ nazýváme $n$-tým obecným momentem náhodné veličiny $X$

$\mu_n = E(X - EX)^n$ nazýváme $n$-tým centrálním momentem náhodné veličiny $X$

$\overline{\mu_n} = E|X|^n$ nazýváme $n$-tým absolutním momentem náhodné veličiny $X$

<u>*Definice:*</u> Druhý centrální moment $\mu_2$ náhodné veličiny $X$ nazýváme rozptylem a značíme $DX = \operatorname{var} X = \sigma^2(X) = E(X - EX)^2$. Číslo $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{\operatorname{var} X}$ nazýváme směrodatnou odchylkou náhodné veličiny $X$.

<u>Poznámka:</u> Střední hodnota je první obecný moment. První centrální moment je vždy

roven nule, neboť

$$E(X - EX) = EX - E(EX) = EX - EX = 0$$

Poznámka: Rozptyl udává variabilitu náhodné veličiny ve čtvercích jejích jednotek, proto se často používá směrodatná odchylka, která měří variabilitu v původních jednotkách uvažované náhodné veličiny.

*Věta:* (vlastnosti rozptylu)

Nechť $X, Y$ jsou náhodné veličiny s konečnými druhými momenty; $a, b$ nechť jsou dané reálné konstanty. Pak

1) $DX > 0$

2) $DX = EX^2 - (EX)^2$; pomocí tohoto vzorce se rozptyl nejčastěji počítá

3) Jestliže $P(X = a) = 1$, pak $DX = 0$

4) $D(a + bX) = b^2 DX$

5) Nechť $X, Y$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak $D(X + Y) = DX + DY$.

# 3. Rozdělení diskrétních náhodných veličin

## 3.1 Alternativní (nula – jedničkové) rozdělení

Alternativním rozdělením náhodné veličiny $X$ nazýváme takové rozdělení, které nabývá pouze dvou hodnot: 1 (úspěch) a 0 (neúspěch). Pravděpodobnost úspěchu, tedy hodnoty $X = 1$ je rovna $p$, pravděpodobnost neúspěchu, hodnoty $X = 0$ je $q = 1 - p$.

Pravděpodobnost úspěchu $p$, $0 < p < 1$, nazýváme parametrem alternativního rozdělení. Pokud má náhodná veličina $X$ alternativní rozdělení pravděpodobností s parametrem $p$, píšeme $X \sim A(p)$.

Nechť $X \sim A(p)$.

$$X = \begin{cases} 0 & p(0) = P(X = 0) = 1 - p = q \\ \\ 1 & p(1) = P(X = 1) = p \end{cases}$$

Distribuční funkce alternativního rozdělení náhodné veličiny $X$ je dána výrazem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \le 0 \\ 1 - p & pro\ 0 < x \le 1 \\ p & pro\ x > 1 \end{cases}$$

<u>*Věta:*</u> Střední hodnota alternativně rozdělené náhodné veličiny $X$ je

$$EX = p,$$

rozptyl je dán vztahem

$$DX = p \cdot (1 - p).$$

Důkaz:

$$EX = 1 \cdot p + 0 \cdot q = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

$$EX^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p)$$

Příkladem náhodné veličiny s alternativním rozdělením pravděpodobností je počet šestek, které padnou při jednom hodu kostkou, počet zmetků při náhodném výběru jednoho výrobku, vybavení či nevybavení náhodně zvolené domácnosti myčkou, atd.

*Př. 3.1 :* Ve třídě je 27 žáků. Označme je náhodně písmeny A až Z.

a) Jaká je pravděpodobnost, že při první hodině si vyučující pozve k tabuli žáka s písmenem A?

b) Pokud byl žák A zkoušen v první hodině, jaká je pravděpodobnost, že v dalším předmětu jiný vyučující opět vyvolá žáka s písmenem A?

c) Pokud může být každý žák zkoušen v jedné hodině maximálně jedenkrát, jaká je pravděpodobnost, že žák A zkoušený jako první, bude zkoušený i jako druhý?

*Řešení:* náhodná veličina $X$ ~ žák bude zkoušený. $X \sim A\left(\frac{1}{27}\right)$

a) $p = \frac{1}{27}$

b) $p = \frac{1}{27}$

c) $p = \frac{0}{26} = 0$

*Př. 3.2:* Určete, které z následujících možností jsou alternativní pokusy:

a) házení mincí – úspěchem je padnutí líce

b) náhodný výběr bez vracení – úspěchem je vybrání prvku zvoleného druhu

c) náhodný výběr s vracením – úspěchem je vybrání prvku zvoleného druhu

d) pohlaví narozeného dítěte v rodině, kde již jsou 3 chlapci – úspěchem je narození dívky

e) každodenní sledování počasí během určitého období – úspěchem je počasí beze srážek

*Př. 3.3:* Při hodu mincí označme $\Omega = \{L, R\}$ a platí $P(\omega) = \frac{1}{2}$ pro $\forall \omega \in \Omega$. Funkce $X, Y$ nechť zobrazují množinu $\Omega$ do $R$ takto:

$X(L) = 1$, $X(R) = 0$, $Y(L) = 0$, $Y(R) = 1$.

Co můžeme říci o rozděleních náhodných veličin $X$ a $Y$? Nakreslete distribuční funkci, určete střední hodnoty a rozptyly.

## 3.2 Binomické rozdělení

Předpokládejme, že provedeme $n$ opakování nezávislého alternativního pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém jednotlivém pokusu je konstantní a rovna $p$, $0 < p < 1$. Rozdělení, které udává celkový počet úspěchů (nezávisle na pořadí) v posloupnosti $n$ nezávislých alternativních pokusů, se nazývá binomické rozdělení.

Binomické rozdělení náhodné veličiny $X$ nabývá hodnot $k = 0,1,2,\dots,n$ s pravděpodobnostmi

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{kde } q = 1-p,$$

$$0 \le k \le n$$

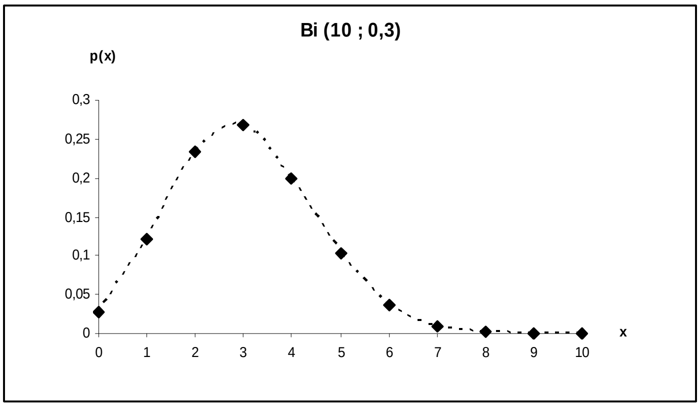
Binomické rozdělení má dva parametry $n$ a $p$ a značíme ho $Bi(n,p)$.

Náhodná veličina $X$, $X \sim Bi(n,p)$. Tedy

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

kde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud v } i-\text{tém pokusu nastal úspěch} \\ 0 & \text{pokud úspěch nenastal} \end{cases}$$




*Obrázek 1:* Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení Bi (10 ; 0,3).

Distribuční funkce $F(x)$ binomického rozdělení je ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sum\limits_{0 \leq k \leq x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & 0 < x \leq n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

<u>*Věta:*</u> Nechť $X$ je náhodná veličina $X \sim Bi(n, p)$. Střední hodnota náhodné veličiny $X$ je rovna

$$EX = n \cdot p$$

a rozptyl této náhodné veličiny je

$$DX = n \cdot p \cdot (1-p).$$

Důkaz: $X$ je součtem $n$ nezávislých veličin $X_1, \dots, X_n$, které mají alternativní rozdělení. Tedy

$$EX_i = p \qquad\qquad DX_i = p \cdot (1-p)$$

Pak

$$EX = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{í=1}^{n}\left(EX_i\right) = n \cdot p$$

$$DX = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{í=1}^{n}\left(DX_i\right) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Typickým příkladem náhodné veličiny s binomickým rozdělením je počet prvků určité vlastnosti vybraných z nějakého základního souboru, když provedeme $n$ tahů a vybraný prvek vždy vracíme zpět.

<u>*Př. 3.4:*</u> Koupíme si 5 losů, šance na výhru je u každého losu 50%. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že alespoň 2 budou vyhrávající.

<u>*Řešení:*</u> Náhodná veličina $X$ udává počet vyhrávajících losů mezi pěti koupenými, tedy $X \sim Bi\left(5; \frac{1}{2}\right)$.

Potom

$$p = P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - F(1) = 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] =$$

$$= 1 - \frac{\left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1}\right]}{2^5} = 1 - \frac{6}{32} = \frac{13}{16} = 0{,}8125$$

<u>*Př. 3.5:*</u> Kolika kostkami je třeba házet, aby průměrný počet dvojek na 1 hod byl šest?

*Řešení:* Počet dvojek má $Bi\left(n\,;\frac{1}{6}\right)$,

tedy $6 = n \cdot \frac{1}{6}$ tj. $n = 36$

*Př. 3.6:* Četnost výskytu rokoviny prsu u žen je asi 1 z 10. Vybereme náhodně 3 ženy. Určete rozdělení pravděpodobnosti rozvoje rakoviny prsu u těchto vybraných žen (n=3).

*Řešení:* $X \sim Bi(3\,;\,0{,}1)$.

Označme $p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3$ pravděpodobnosti, že z vybraných žen žádná, právě jedna, právě dvě, všechny tři onemocní rakovinou prsu.

$$p_0 = P[X = 0] = \binom{3}{0} \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^3 = 0{,}729$$

$$p_1 = P[X = 1] = \binom{3}{1} \cdot (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}81 = 0{,}243$$

$$p_2 = P[X = 2] = \binom{3}{2} \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^1 = 3 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$$

$$p_3 = P[X = 3] = \binom{3}{3} \cdot (0{,}1)^3 \cdot (0{,}9)^0 = 0{,}001$$

*Př. 3.7:* Pokud by se u všech 3 žen ze 3 vybraných rozvinula rakovina prsu, čím by bylo možné tuto situaci vysvětlit?

*Řešení:*

a) jeden případ z tisíce

b) model předpokládá $p = 0{,}1$. Výskyt onemocnění může být četnější

c) nenáhodný výběr

*Př. 3.8:* Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Určete takový počet dětí, aby pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň jeden chlapec, byla větší než 0,95.

*Řešení:* Označme $X$ veličinu udávající počet chlapců mezi $n$ dětmi. Rozdělení veličiny $X$ je $X \sim Bi(n;0{,}515)$. Hledáme takové $n$, aby $P(X > 0) > 0{,}95$.

Použitím pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení

$$P(X > 0) = 1 - P(X \le 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left[\binom{n}{0} \cdot (0{,}515)^0 \cdot (1 - 0{,}515)^{n-0}\right] = 1 - 0{,}485^n$$

Z podmínky

$$P(X > 0) > 0{,}95$$

dostáváme

$$1 - 0{,}485^n > 0{,}95$$

$$0{,}05 > 0{,}485^n$$

$$\ln 0{,}05 > \ln 0{,}485^n$$

$$\ln 0{,}05 > n \cdot \ln 0{,}485$$

$$n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}485} = 4{,}14$$

Je potřeba mít alespoň 5 dětí.

*Př. 3.9:* Dva basketbalisti mají po třech hodech na koš. První zasáhne koš při každém hodu s pravděpodobností 0,6, druhý s pravděpodobností 0,7. Určete pravděpodobnost, že po všech šesti hodech

a) budou mít oba stejný počet zásahů

b) první zasáhne vícekrát než druhý.

*Př. 3.10:* Pravděpodobnost, že mandelinka po postřiku zahyne je $3/4$. Kolik mandelinek v průměru zahyne z deseti postříkaných?

*Př. 3.11:* Předpokládejme, že 68% dospělé populace chodí na pravidelné preventivní prohlídky k zubnímu lékaři. Oslovíme v průzkumu náhodně 15 osob. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň 13 z nich chodí na pravidelné preventivní zubní prohlídky?

*Př. 3.12:* Vítěz závodu ve střelbě má pravděpodobnost zásahu 0,98. Určete pravděpodobnost $p$, že ze 100 ran alespoň jedenkrát mine terč.

*Př. 3.13:* Cukrovka se vyskytuje u přibližně 10% seniorů. Vybereme náhodně 15 seniorů. Veličina $X$ nechť udává počet diabetiků mezi vybranými.

a) Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými nebude žádný diabetik?

b) Bude překvapující, když mezi vybranými budou právě 2 diabetici?

*Př. 3.14:* Pravděpodobnost toho, že jev nastane alespoň jednou ve čtyřech nezávislých pokusech, je rovna 0,59. Jaká je pravděpodobnost výskytu jevu při jednom pokusu, jestliže je tato pravděpodobnost při každém pokusu stejná?

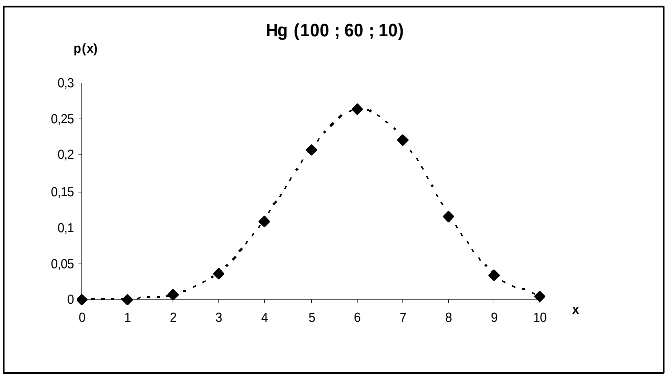
## 3.3 Hypergeometrické rozdělení

S předchozím binomickým rozdělením úzce souvisí rozdělení hypergeometrické. Mějme konečný soubor $N$ jednotek, z nichž $M$ jednotek má sledovanou vlastnost a zbývajících $N-M$ jednotek tuto vlastnost nemá. Z tohoto souboru vybereme najednou nebo postupně $n$ jednotek, přičemž žádný vybraný prvek nevracíme zpět. Ptáme se, jaká je pravděpodobnost, že mezi $n$ vybranými je určitý počet jednotek se zmíněnou vlastností. Náhodná veličina $X$, která označuje počet jednotek se sledovanou vlastností mezi $n$ vybranými při výběru bez vracení, má hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti; $X \sim Hg(N, M, n)$.

Náhodná veličina $X$ mající hypergeometrické rozdělení nabývá hodnot $k = 0,1,2,\ldots M$ s pravděpodobnostmi

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

pro $\max(0\,;\, M - N + n) \le k \le \min(M\,;\, n)$, $1 \le n < N$, $1 \le M < N$.




*Obrázek 2:* Pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení Hg (100 ; 60 ; 10).

Distribuční funkce $F(x)$ hypergeometrického rozdělení má potom tvar

$$F(x)=\begin{cases} 0 & pro\ x \le \max\cdot(0; M-N+n) \\ \sum\limits_{0\le k\le x} \dfrac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & pro\ \max(0\,; M-N+n) \le x \le \min(M\ ; n) \\ 1 & pro\ x > \min(M\ ; n) \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny $X$, $X \sim Hg(N,M,n)$ jsou

$$EX = n\cdot\frac{M}{N}, \qquad DX = n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

Střední hodnota je zřejmě totožná se střední hodnotou pro rozdělení $Bi(n,p)$, kde $p=\frac{M}{N}$. Rozptyl je roven součinu rozptylu pro zmíněné binomické rozdělení a zlomku $\frac{N-n}{N-1}$.

Protože $\frac{N-n}{N-1} \le 1$, je rozptyl v případě hypergeometrického rozdělení zpravidla menší než rozptyl pro odpovídající binomické rozdělení. Tato skutečnost má význam pro matematickou statistiku, neboť z ní plyne, že úsudky vytvořené na základě výběru bez vracení jsou přesnější než ty, které jsou založeny na výběru s vracením.

Hypergeometrické rozdělení se uplatňuje především ve statistické kontrole jakosti. Když ze série $N$ výrobků, mezi nimiž je $M$ zmetků, vybereme náhodně $n$ kusů, udává toto rozdělení pravděpodobnost toho, že mezi vybranými kusy bude právě $k$ zmetků. Setkáme se s ním také u Sportky a podobných her.

*Př. 3.15:* Zahradník si koupil v obchodě semena okurky. V balíčku je jich 8, všechna vypadají stejně, ale 3 z nich jsou už stará a nevyklíčí. Zahradník zasadil 3 semena. Najděte rozdělení a střední hodnotu počtu rostlinek, které vyrostou z vybraných semen.

*Řešení:* Počet kvalitních semen mezi 3 vybranými má $Hg(8;5;3)$.

Pravděpodobnost $p_o$, že mezi žádná rostlina nevyroste

$$p_0 = P[X = 0] = \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{8-5}{3-0}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$$

Pravděpodobnost $p_1$, že mezi vybranými semeny je právě jedno kvalitní

$$p_1 = P[X = 1] = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{8-5}{3-1}}{\binom{8}{3}} = \frac{5\cdot\binom{3}{2}}{56} = \frac{15}{56}$$

Pravděpodobnost $p_2$, že mezi vybranými semeny budou 2 kvalitní

$$p_2 = P[X = 2] = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{8-5}{3-2}}{\binom{8}{3}} = \frac{10\cdot 3}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

Pravděpodobnost $p_3$, že ze všech 3 vybraných semen vyroste rostlina

$$p_3 = P[X = 3] = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{8-5}{3-3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10\cdot 1}{56} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

Střední hodnota počtu rostlin, které vyrostou z vybraných semen, je

$$EX = n\cdot\frac{M}{N} = 3\cdot\frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

*Př. 3.16:* V supermarketu je vyskládáno celkem 37 konzerv s jahodovým kompotem, mezi nimiž je 10 s prošlou dobou minimální trvanlivosti. Nevědomý zákazník nakoupí 4 kompotové konzervy. Jakou má šanci, že si nevybere žádnou s prošlou trvanlivostí?

*Řešení:* $Hg(37;10;4)$

$$P[X=0]=\frac{\binom{10}{0}\cdot\binom{27}{4}}{\binom{37}{4}}=\frac{17\,550}{66\,045}=0{,}2657$$

*Př. 3.17:* V kanceláři pracuje 5 mužů a 8 žen. Z nich se mají vybrat 3 zástupci, kteří pojedou na víkendové školení. Výběr je proveden losem. Jaká je pravděpodobnost, že na školení pojedou

a) samí muži

b) samé ženy

c) nejvýše jeden muž

d) alespoň 2 ženy

*Př. 3.18:* Na volejbalový turnaj se přihlásilo 18 družstev, z toho 5 profesionálních. Družstva jsou rozlosována do dvou skupin po devíti družstvech. Jaká je pravděpodobnost, že všechna profesionální družstva budou hrát v jedné skupině?

*Př. 3.19:* Ve hře Mates bylo označeno 5 z 35 čísel a vylosováno 5 čísel. Určete pravděpodobnost výhry 1. pořadí.

## 3.4 Poissonovo rozdělení

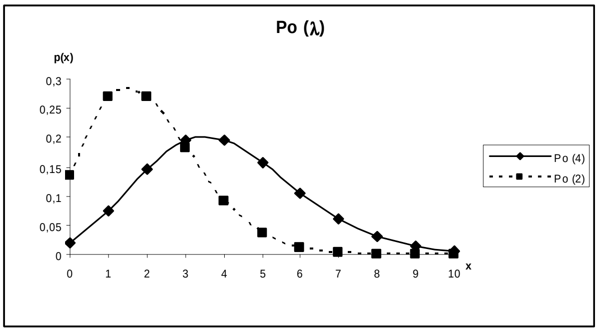
Poissonovo rozdělení je takové rozdělení náhodné veličiny $X$, která nabývá hodnot $k = 0,1,2,\ldots$ s pravděpodobnostmi

$$p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Číslo $\lambda > 0$ je parametrem Poissonova rozdělení, proto pro náhodnou veličinu $X$ mající Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti používáme označení $X \sim Po(\lambda)$.

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \leq 0 \\ \sum\limits_{0 \leq j \leq x} e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^j}{j!} & pro\ 0 < x < \infty \end{cases}$$




*Obrázek 3:* Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení.

*<u>Věta:</u>* Nechť $X$ je náhodná veličina, $X \sim Po(\lambda)$. Střední hodnota $EX$ náhodné veličiny $X$ je rovna parametru $\lambda$, stejně tak rozptyl náhodné veličiny $X$ je roven parametru $\lambda$.

Důkaz:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda$$

Analogicky odvodíme $EX^2 = \lambda^2 + \lambda$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Poissonovým rozdělením se řídí náhodná veličina, která udává počet výskytů sledovaného jevu v určitém časovém intervalu délky $t$, jestliže uvažovaný jev splňuje následující podmínky:

a) jev může nastat v kterémkoliv časovém okamžiku

b) počet výskytů jevu během časového intervalu závisí jen na jeho délce a ne na jeho počátku ani na tom, kolikrát jev nastal před jeho počátkem

c) pravděpodobnost, že jev nastal více než jednou v intervalu délky $t$, konverguje k nule rychleji než $t$

d) střední hodnota počtu výskytů jevu za časovou jednotku je rovna $\lambda$.

Podobně, je-li pravděpodobnost výskytu jevu na malé ploše s obsahem $\Delta x$ úměrná obsahu této plošky a vyskytují-li se jednotlivé jevy nezávisle jeden na druhém, pak počet $X$ výskytů jevu na dané ploše má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti.

Příkladem náhodné veličiny, která má Poissonovo rozdělení je počet telefonních volání, počet zákazníků v prodejně, počet dopravních nehod během určitých časových intervalů, počet vadných výrobků ve velké sérii (je-li pravděpodobnost vadného výrobku velmi malá), počet poruch přístroje za směnu, počet organismů v jednotce půdy, počet krvinek v zorném poli mikroskopu apod.

*Př. 3.20:* Určitou prodejnu navštíví v průměru 20 zákazníků za hodinu. Prodavačka si potřebuje na 5 minut odskočit z obchodu. Jakou má pravděpodobnost, že během této doby nepřijde žádný zákazník?

*Řešení:* Počet zákazníků během 5 minut: $X \sim Po(\lambda)$; $\lambda = \frac{20}{60} \cdot 5 = \frac{5}{3}$

$$p_0 = P[X = 0] = e^{-\lambda} = e^{-\frac{5}{3}} = 0{,}1889$$

*Př. 3.21:* Pravděpodobnost, že bude vyrobeno špatně izolující termoska, je za normálních výrobních podmínek 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 80 vyrobenými termoskami budou 4, které nebudou řádně izolovat?

*Př. 3.22:* Bylo statisticky zjištěno, že na 1 000 m určité tkaniny připadá v průměru 5 kazů. Pro dodávku do maloobchodu bylo připraveno 50 stometrových balíků této tkaniny. Jaký počet bezvadných balíků můžeme očekávat?

### 3.4.1 Aproximace pomocí Poissonova rozdělení

Poissonova rozdělení se také využívá při aproximaci binomického rozdělení pravděpodobnosti. Lze ho použít v těch případech, kdy jsou splněny následující předpoklady:

a) $n > 30$

b) $p \leq 0{,}1$

c) součin $n \cdot p$ je konstanta v intervalu $\langle 0\,;10 \rangle$

<u>*Poissonova věta:*</u> Jestliže $n \to \infty$ a pravděpodobnost $p = \dfrac{\lambda}{n}$ je blízká nule, přejde zákon binomického rozdělení náhodné veličiny $X$ v zákon Poissonova rozdělení tvaru

$$p(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

téže náhodné veličiny $X$, přičemž $\lambda = n \cdot p$

Důkaz: Pro $p = \dfrac{\lambda}{n}$ z binomického rozdělení dostáváme

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-x+1)}{x!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-x+1)}{n^x} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x-1}{n}\right)$$

Pro $n \to \infty$ platí

$$\lim \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda} \qquad \lim \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

Proto $$\lim_{n \to \infty} p(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

*<u>Př. 3.23:</u>* Podíl zmetků v určité sérii výrobků činí 0,5%. Určete pravděpodobnost, že mezi 60 náhodně vybranými výrobky

- nebude žádný zmetek

- budou nejvýše 3 zmetky

*<u>Řešení:</u>* Protože podíl zmetků je velmi malý $(0{,}005)$, použijeme Poissonovo rozdělení pro $\lambda = 0{,}005 \cdot 60 = 0{,}3$.

$$p_1 = P[k \leq 0] = e^{-\lambda} = e^{-0{,}3} = 0{,}7408$$

$$p_2 = P[k \leq 3] = e^{-\lambda} \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}\right) = e^{-0{,}3} \cdot \left(1 + 0{,}3 + \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{6}\right) = 0{,}9997$$

## 3.5 Geometrické rozdělení

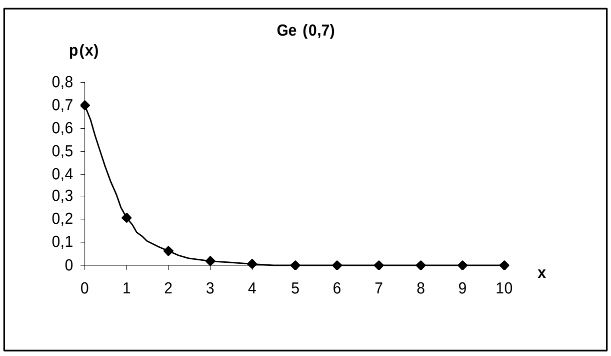
Předpokládejme, že provádíme nezávislé pokusy a že pravděpodobnost úspěchu je pro všechny pokusy stejná a rovna $p$, $p \in (0;1)$. Náhodnou veličinou $X$ nechť je počet neúspěšných pokusů, které předcházejí prvnímu úspěšnému pokusu. Rozdělení takovéto náhodné veličiny $X$ se nazývá geometrické rozdělení, $X \sim Ge(p)$.

Náhodná veličina $X$ s geometrickým rozdělením nabývá hodnot $k = 0,1,2,\ldots$ s pravděpodobnostmi

$$p(k) = P(X = k) = p \cdot (1 - p)^k$$

Distribuční funkce $F(x)$ geometrického rozdělení je tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \le 0 \\ \sum\limits_{0 \le k \le x} p \cdot (1-p)^k & pro\ x > 0 \end{cases}$$




*Obrázek 4:* Pravděpodobnostní funkce geomertického rozdělení Ge(0,7).

*Věta:* Pro číselné charakteristiky veličiny $X$ s geometrickým rozdělením platí

$$EX = \frac{1-p}{p}$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Důkaz: Ze vzorce pro součet geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

lze derivováním podle $q$ odvodit

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} = \frac{1}{(1-q)^3}$$

Potom tedy

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^k = p \cdot (1-p) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1-p}{p}$$

$$EX(X-1) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p \cdot (1-p)^k = p \cdot (1-p)^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot (1-p)^{k-2} =$$

$$= p \cdot (1-p)^2 \cdot \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2}$$

Odtud plyne

$$D(X) = EX \cdot (X-1) + EX - (EX)^2 = \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Název tohoto rozdělení vyplývá ze skutečnosti, že s rostoucím $k$ hodnoty pravděpodobnostní funkce $p(k)$ klesají geometrickou řadou.

<u>*Př. 3.24:*</u> Házíme kostkou. $X$ nechť označuje, kolik hodů předcházelo hození šestky. Jaké má $X$ rozdělení?

<u>*Řešení:*</u> Vzhledem k nezávislosti hodů, je

$$P[X = k] = P\,[k - krát\ nezávisle\ nešestka,\ pak\ šestka] = \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6}$$

což je geometrické rozdělení $Ge\left(\frac{1}{6}\right)$.

<u>*Př. 3.25:*</u> 2 hráči střídavě házejí kostkou. Vyhrává ten, kdo první hodí šestku. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje ten, který začínal?

<u>*Př. :*</u> Lovec má 5 patron a pravděpodobnost zásahu 0,4. Střílí, dokud netrefí (a dokud má čím). Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl počtu výstřelů.

# 4. Rozdělení spojitých náhodných veličin

## 4.1 Rovnoměrné rozdělení

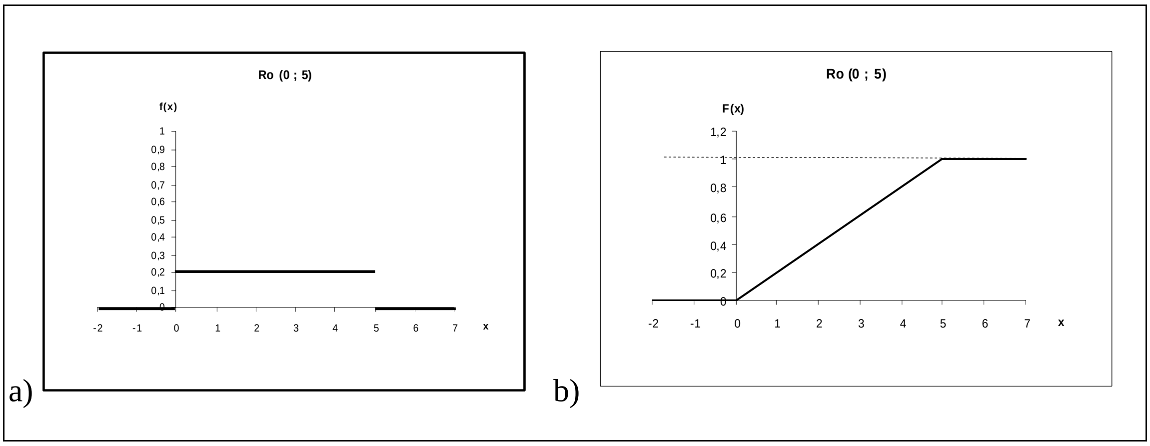
Říkáme, že náhodná veličina $X$ má rovnoměrné spojité rozdělení na intervalu $(a,b)$, kde $a,b$ jsou reálná čísla, $a < b$, jestliže pro její hustotu platí

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{\textit{pro} } a < x < b \\ 0 & \text{\textit{pro ostatní} } x \end{cases}$$

Distribuční funkce je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{pro} } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_a^x dx = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{\textit{pro} } a < x < b \\ 1 & \text{\textit{pro} } x \ge b \end{cases}$$

Pro náhodnou veličinu $X$ s rovnoměrným rozdělením používáme označení $X \sim Ro(a,b)$, neboť určujícími parametry tohoto rozdělení jsou hranice intervalu, na kterém je tato veličina definována.




*Obrázek 5:* Hustota (a) a distribuční funkce (b) rovnoměrného rozdělení Ro(0 ; 5).

<u>*Věta:*</u> Nechť náhodná veličina $X$ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle a\,;b\rangle$, $X \sim Ro(a,b)$. Pak střední hodnota je

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

a rozptyl této náhodné veličiny je roven

$$DX = \frac{1}{12}\cdot(b-a)^2 .$$

Důkaz:

$$EX = \int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a)\cdot(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$EX^2 = \int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$DX = EX^2-(EX)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} =$$

$$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^2$$

Náhodnými veličinami s rovnoměrným rozdělením jsou např. doba čekání do nastoupení určitého jevu, který se opakuje v pravidelných intervalech, nebo chyby při zaokrouhlování v numerických výpočtech. Zaokrouhlují-li se čísla na $k$ desetinných míst, lze chybu ze zaokrouhlování považovat na náhodnou veličinu s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\left\langle -5 \cdot 10^{-k-1} ; 5 \cdot 10^{-k-1} \right\rangle$.

*<u>Př. 4.1:</u>* Prodejna očekává dodávku nového zboží určitý den v době od 8 do 10 hodin. Podle sdělení dodavatele je uskutečnění dodávky stejně možné kdykoliv během tohoto časového intervalu. Jaká je pravděpodobnost, že zboží bude dodáno v době od půl deváté do tři čtvrtě na devět?

*<u>Řešení:</u>* $Ro(8;10)$

$$P[8{,}5 \le X \le 8{,}75] = \frac{1}{2} \cdot \int_{8{,}5}^{8{,}75} dx = \frac{8{,}75 - 8{,}5}{2} = 0{,}125$$

*<u>Př. 4.2:</u>* Náhodná veličina $X$ má rovnoměrné rozdělení. Jaká je její hustota, jestliže $EX = 1$, $DX = 3$?

*<u>Př. 4.3:</u>* Dělník obsluhuje v dílně 4 stroje. U prvního stroje stráví 10 minut, u druhého 25 minut, u třetího 15 minut a u čtvrtého 10 minut, poté se opět vrací k prvnímu stroji. Určete pravděpodobnost, že přijdeme-li do dílny v náhodný okamžik, zastihneme ho u třetího stroje.

## 4.2 Normální rozdělení

Nejprve se budeme zabývat speciálním typem normálního rozdělení, tzv. normovaným normálním rozdělením.

### 4.2.1 Normované normální rozdělení

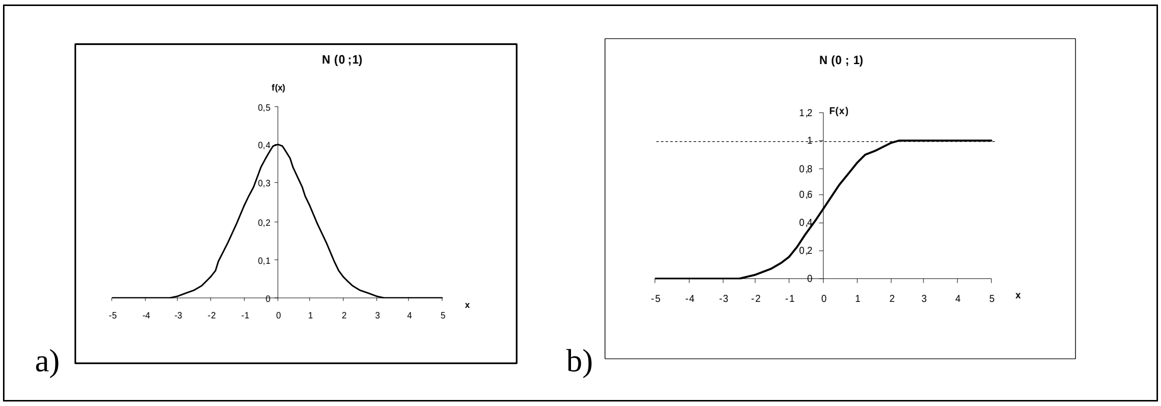
Říkáme, že náhodná veličina $X$ má normované normální rozdělení, jestliže pro její hustotu platí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{pro } -\infty < x < \infty .$$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení se značí písmenem $\Phi$.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \qquad -\infty < x < \infty$$

Graf hustoty náhodné veličiny $X$ s normovaným normálním rozdělením se nazývá Gaussova křivka. Tato křivka je symetrická kolem nuly a v bodě $x = 0$ nabývá svého maxima $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. V bodech $x = \pm 1$ jsou inflexní body Gaussovy křivky.




*Obrázek 6:* Hustota (a) a distribuční funkce (b) normovaného normálního rozdělení N (0;1).

<u>*Věta:*</u> Nechť náhodná veličina $X$ má normované normální rozdělení. Pak

střední hodnota je

$$EX = 0$$

a rozptyl

$$D(X) = 1$$

Důkaz: Funkce $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ je v $R$ lichá, proto

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 0$$

$$D(X) = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

neboť $x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ je na intervalu $(-\infty; \infty)$ sudou funkcí.

Metodou per partes určíme

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{+\infty}^{0} + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1$$

Veličinu $X$ mající normované normální rozdělení zpravidla označujme $X \sim N(0;1)$. Toto označení vyjadřuje, že jde o normální rozdělení s parametry $EX = 0$ a $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1$. Distribuční funkce $\Phi(x)$ náhodné veličiny $X \sim N(0;1)$ se nazývá Laplaceova funkce. Je to tzv. speciální funkce, kterou nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí a její hodnoty jsou tabelovány. Hodnota Laplaceovy funkce $\Phi(x)$ udává podle definice pravděpodobnost, že náhodná veličina $X \sim N(0;1)$ nabývá hodnoty z intervalu $(-\infty; x)$.

Základní vlastnosti Laplaceovy funkce jsou:

1) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
2) $P(x_1 < X < x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

Význam má především v souvislosti s užitím centrální limitní věty (CLV).

### 4.2.2 Obecné normální rozdělení

Řekneme, že náhodná veličina $X$ má normální rozdělení s parametry $\mu$ a $\sigma$, jestliže pro její hustotu platí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

kde $\mu$ a $\sigma$ jsou reálné parametry.

Distribuční funkci

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt \qquad -\infty < x < \infty$$

lze vyjádřit také pomocí funkce $\Phi$ jako $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

<u>*Věta:*</u> Nechť náhodná veličina $X$ má normální rozdělení. Pak

střední hodnota je

$$EX = \mu$$

a rozptyl

$$D(X) = \sigma^2$$

Normální rozdělení je tedy jednoznačně určeno střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$, proto je zvykem ho označovat $N(\mu;\sigma^2)$.

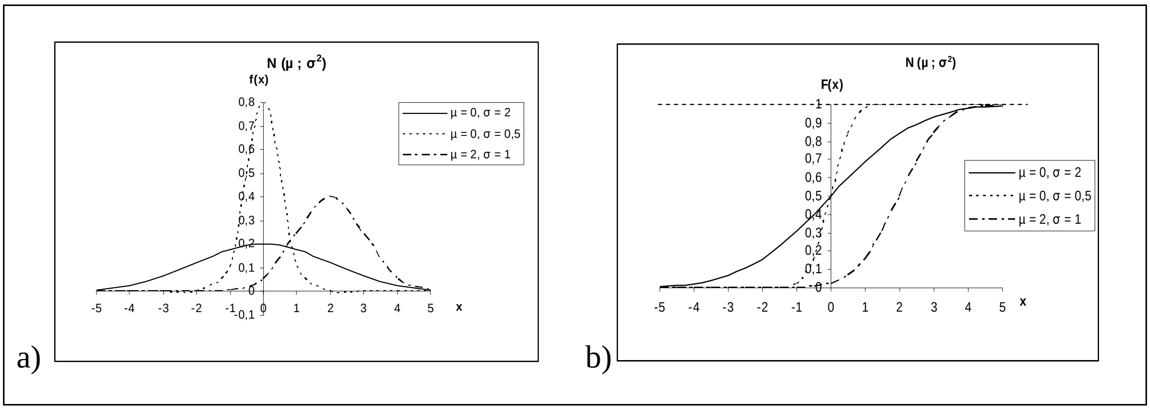
Důkaz: Mezi náhodnou veličinou $X \sim N(\mu;\sigma^2)$ a náhodnou veličinou $T \sim N(0;1)$ platí vztah

$$T = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{neboli} \quad X = \mu + \sigma \cdot T$$

Potom tedy

$$EX = \mu + \sigma \cdot ET = \mu$$

$$D(X) = \sigma^2 \cdot D(T) = \sigma^2$$




*Obrázek 7:* Hustota (a) a distribuční funkce (b) normálního rozdělení N (μ ; σ²).

Tvar normální křivky rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$ se mění v závislosti na velikosti směrodatné odchylky $\sigma = \sqrt{D(X)}$. Je vidět, že čím je směrodatná odchylka $\sigma$ větší, tím je příslušná křivka nižší a protáhlejší.

Normálním rozdělením se přesně řídí jen málo náhodných veličin. Jsou to především náhodné chyby měření, tj. chyby způsobené velkým počtem neznámých a vzájemně nezávislých příčin.

Význam normálního rozdělení spočívá zejména v tom, že za jistých podmínek dobře aproximuje řadu jiných (i diskrétních) rozdělení. Normální rozdělení velmi dobře aproximuje např. binomické rozdělení pro velké hodnoty parametru $n$.

V praxi se často předpokládá, že sledovaná náhodná veličina má normální rozdělení, ačkoliv její skutečné rozdělení má jen podobný tvar (je jednovrcholové a přibližně symetrické). Takový postup velmi usnadňuje teoretické řešení mnoha problémů i praktický výpočet hledaných charakteristik.

*Př. 4.4:* Výrobky jsou považovány za prvotřídní, pokud odchylka od předepsané délky nepřekročí 3,6 mm. Jestliže odchylka má rozdělení $N(0\,;9)$, kolik prvotřídních výrobků lze čekat mezi 100 výrobky?

*Řešení:*

$$p = P\left[|X| \leq 3{,}6\right] = P\left[-\frac{3{,}6}{3} \leq U \leq \frac{3{,}6}{3}\right] = P\left[-1{,}2 \leq U \leq 1{,}2\right] = \Phi(1{,}2) - \Phi(-1{,}2) =$$

$$= \Phi(1{,}2) - (1 - \Phi(1{,}2)) = 2 \cdot \Phi(1{,}2) - 1 = 2 \cdot 0{,}88493 - 1 = 0{,}76986$$

Mezi 100 výrobky lze očekávat 77 prvotřídních.

*Př. 4.5:* Vyučující dá studentům neohlášený test. Výsledky tohoto testu mají normální rozdělení s průměrem 53% a směrodatnou odchylkou 14%. Jaká je pravděpodobnost, že

a) student test neudělá, tj. bude mít méně než 40%?

b) student test napíše na výbornou, tj. bude mít alespoň 80%?

*Řešení:*

a) $P[X < 40] = P\left[U < \frac{40-53}{14}\right] = \Phi(-0{,}93) = 1 - \Phi(0{,}93) = 1 - 0{,}82381 = 0{,}17619$

b) $P[X \geq 80] = 1 - P[X < 80] = 1 - P\left[U < \frac{80-53}{14}\right] = 1 - \Phi(1{,}93) =$

$= 1 - 0{,}9732 = 0{,}0268$

*Př. 4.6:* Jaký rozptyl mají normálně rozdělená měření, která se s pravděpodobností 0,41 neodchylují od správné hodnoty o více než 24 m?

*Řešení:* $0{,}41 = P\left[|X - EX| < 24\right] = P\left[|U| < \frac{24}{\sigma}\right] = 2 \cdot \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) - 1$

$$\frac{0{,}41+1}{2} = \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)$$

$$u_{1,41/2} = \frac{24}{\sigma}$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{24}{u_{1,41/2}}\right)^2 = \left(\frac{24}{0{,}54}\right)^2 = 1\,975\ m$$

<u>*Př. 4.7:*</u> Délka pobytu v nemocnici má přibližně normální rozdělení s průměrem 14 dnů a směrodatnou odchylkou 3 dny. Jaká je pravděpodobnost, že pacient stráví v nemocnici

a) nejvýše 10 dní

b) více než 18 dní

c) 10 až 18 dní

d) Určete, kolik maximálně dní stráví v nemocnici $\frac{3}{4}$ pacientů.

<u>*Řešení:*</u> $X \sim N(14\,;3)$

a) $$p_a = P\left[X \le 10\right] = \Phi\left(\frac{10-14}{3}\right) = \Phi(-1{,}33) = 1-\Phi(1{,}33) =$$

$$= 1 - 0{,}90824 = 0{,}09176$$

b) $$p_c = P\left[X > 18\right] = 1 - P\left[X \le 18\right] = 1 - \Phi\left(\frac{18-14}{3}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}33) = 1 - 0{,}90824 = 0{,}09176$$

c) $$p_d = P\left[10 \le X \le 18\right] = P\left[X \le 18\right] - P\left[X < 10\right] =$$

$$= 1 - 0{,}09176 - 0{,}09176 = 0{,}81648$$

d) $$0{,}75 = P[X < D] = P\left[U < \frac{D-14}{3}\right] = \Phi\left(\frac{D-14}{3}\right)$$

$$\frac{D-14}{3} = u_{0,75}$$

$$D = 3 \cdot u_{0,75} + 14 = 3 \cdot 0{,}675 + 14 = 16{,}025$$

*__Př. 4.8:__* Životnost svíčky v *km* má normální rozdělení s průměrem 10 000 a směrodatnou odchylkou 3 000. Jeká je pravděpodobnost, že během plánované cesty dlouhé 4 300 km nebude třeba měnit žádnou ze 4 svíček?

*__Př. 4.9:__* Výška jedenáctiletých chlapců se řídí normálním rozdělením se střední hodnotou 146 cm a směrodatnou odchylkou 8 cm. Jakou výšku mají 2,5% nejvyšších chlapců?

*__Př. 4.10:__* Při studiu Alzheimerovy choroby bylo zjištěno, že hmotnost mozku se řídí normálním rozdělením s průměrem 1 076,8 gramu a směrodatnou odchylkou 105,76g.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v případě Alzheimerovy choroby bude mozek vážit méně než 900 g?

b) Jaká je pravděpodobnost, že bude vážit více než 1 200 g?

*__Př. 4.11:__* Výsledky měření jsou zatíženy jen normálně rozdělenou náhodnou chybou se směrodatnou odchylkou 3 mm. Jaká je pravděpodobnost, že při 3 měřeních bude aspoň jednou chyba v intervalu $(0\,;\,2{,}4)$?

## 4.3 Exponenciální rozdělení

Říkáme, že náhodná veličina $X$ má exponenciální rozdělení s parametry $A$ a $\delta$, $\delta > 0$, jestliže pro její hustotu platí

$$f(x) = \begin{cases} \delta \cdot e^{-\delta \cdot (x-A)} & pro\ x > A \\ 0 & pro\ x \leq A \end{cases}$$

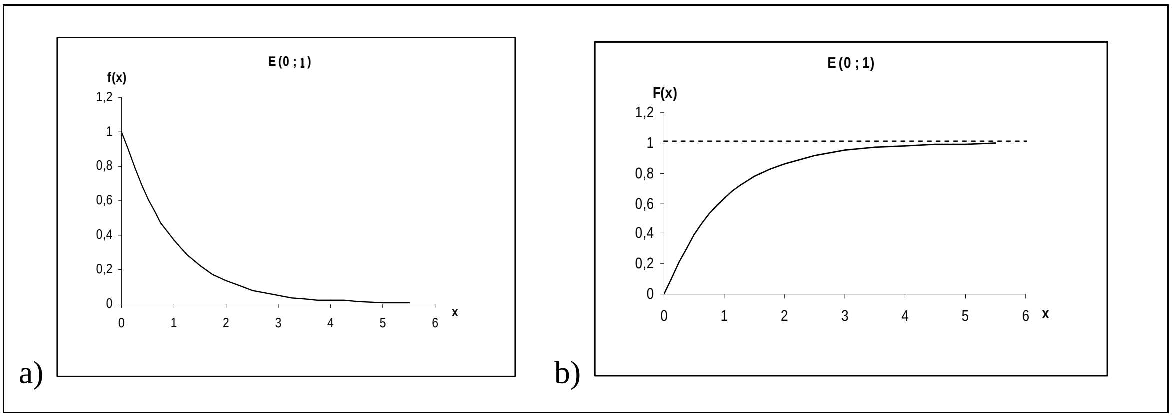
Distribuční funkce veličiny s exponenciálním rozdělením má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \leq A \\ 1 - e^{-\delta (x-A)} & pro\ x > A \end{cases}$$

Skutečnost, že náhodná veličina $X$ má exponenciální rozdělení s parametry $A$ a $\delta$ značíme $X \sim E(A;\delta)$. Náhodnou veličinou $X$ bývá obvykle čas, v němž nastane sledovaný jev, a $A$ je počáteční doba, během níž jev nastat nemůže.

V praxi se častěji používá speciálního tvaru tohoto rozdělení, kdy počáteční doba $A$ je rovna nule $(A = 0)$, tj. tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \delta \cdot e^{-\delta \cdot x} & pro\ x > 0 \\ 0 & pro\ x \leq 0 \end{cases}$$




*Obrázek 8:* Hustota (a) a distribuční funkce (b) exponenciálního rozdělení E (0;1).

<u>*Věta:*</u> Střední hodnota náhodné veličiny $X$ s exponenciálním rozdělením je rovna

$$EX = A + \frac{1}{\delta},$$

rozptyl je $$D(X) = \frac{1}{\delta^2}$$

Důkaz:

$$EX = \delta \cdot \int_A^{\infty} x \cdot e^{-\delta(x-A)}\, dx = \delta \cdot \left[ \frac{A}{\delta} + \frac{1}{\delta} \cdot \int_A^{\infty} e^{-\delta(A-x)}\, dx \right] = A + \frac{1}{\delta}$$

Analogicky lze odvodit

$$EX^2 = A^2 + 2 \cdot \frac{A}{\delta} + \frac{2}{\delta^2}$$

Tedy

$$D(X) = EX^2 - (EX)^2 = A^2 + 2 \cdot \frac{A}{\delta} + \frac{2}{\delta^2} - \left( A + \frac{1}{\delta} \right)^2 = \frac{1}{\delta^2}$$

Exponenciální rozdělení je vhodným modelem „doby čekání“ do nastoupení určitého jevu. Popisuje se jím doba životnosti některých zařízení, doba trvání určitých akcí apod. Toto rozdělení úzce souvisí s Poissonovým rozdělením. Jestliže totiž Poissonovo rozdělení modelovalo *počet* nějakých událostí v čase, exponenciální rozdělení se používá k modelování *doby* do výskytu příslušné události.

Exponenciální rozdělení bývá někdy nazýváno „rozdělení bez paměti“. Pravděpodobnost, že zařízení, které pracovalo bez poruchy po dobu $a$, bude pracovat bez poruchy ještě alespoň dalších $x$ hodin, je rovna pravděpodobnosti, že zařízení, které dosud nebylo v provozu, bude pracovat alespoň $x$ hodin. Informace o tom, že událost nenastala po dobu $a$ hodin, nemění pravděpodobnost výskytu události v příštích $x$ hodinách.

Exponenciální rozdělení popisuje dobře rozdělení doby života zařízení, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných (vnějších) příčin a nikoliv v důsledku mechanického opotřebení, únavy materiálu atd.

<u>*Př. 4.12:*</u> Doba opravy televizoru má exponenciální rozdělení. Určete střední dobu opravy, jestliže do 60 minut je opraveno 30% televizorů.

<u>*Řešení:*</u> $0{,}3 = P[X < 60] = 1 - e^{-\lambda \cdot 60}$

$$\lambda = \frac{-\ln(1-0{,}3)}{60} = 0{,}005944$$

$$EX = \frac{1}{\lambda} = 168{,}22$$

<u>*Př. 4.13:*</u> Nechť životnost výrobků se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 5 let. Jakou záruční dobu poskytne výrobce zákazníkům, nemá-li počet

reklamovaných výrobků překročit 10%?

*Řešení:* Záruční dobu označíme $x$. Žádáme, aby pravděpodobnost $P[X \leq x] = 0{,}1$.

Předpokládáme, že $A = 0$ a tedy $X \sim E\left(0; \frac{1}{5}\right)$

$$0{,}1 = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{5}}$$

$$x = (\ln 0{,}9) \cdot (-5) = -5 \cdot (-0{,}10536) = 0{,}5268$$

*Př. 4.14:* Střední doba čekání zákazníka na obsluhu v určité prodejně je 1 minuta, přičemž doba čekání se řídí exponenciálním rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že náhodný zákazník bude obsloužen v době kratší než 40 sekund?

# 5. Centrální limitní věta

V souvislosti s náhodným výběrem se často pracuje se součtem nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Za určitých dosti obecných podmínek má takový součet asymptoticky normální rozdělení.

Centrální limitní věta ospravedlňuje předpoklad o normálním rozdělení náhodných veličin, které vznikají jako výslednice velkého počtu takových náhodných faktorů, že vliv každého z nich je sám o sobě zanedbatelný.

*Věta (Moivreova-Laplaceova věta):* Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají alternativní rozdělení s parametrem $p$. Pak posloupnost náhodných veličin

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot p \right)$$

konverguje v distribuci k náhodné veličině s rozdělením $N(0;1)$.

*Věta (Lindebergova-Lévyova věta):* Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají stejné rozdělení, stejné střední hodnoty a stejné rozptyly, takže

$$E(X_k) = \mu \qquad D(X_k) = \sigma^2 \qquad k = 1,2,\ldots$$

Pak posloupnost náhodných veličin

$$Y_n = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu \right)$$

konverguje v distribuci k náhodné veličině s rozdělením $N(0;1)$.

Poznámka: Centrální limitní věta ospravedlňuje aproximaci některých diskrétních rozdělení normálním rozdělením. Nechť náhodná veličina $X$ má binomické, Poissonovo nebo hypergeometrické rozdělení a nechť $D(X) > 9$ (v případě hypergeometrického rozdělení nechť je navíc $n/N < 0{,}1$). Pak pro nezáporná celá čísla $a < b$ lze použít aproximaci

$$P[a \le X \le b] \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - EX}{\sqrt{D(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - EX}{\sqrt{D(X)}}\right),$$

kde $\Phi$ je distribuční funkce rozdělení $N(0;1)$.

*Př. 5.1:* Člověku, který o sobě prohlašuje, že má proutkařské schopnosti, předložíme 100 dvojic zakrytých nádob, v jedné je vždy voda a druhá ve prázdná. Člověk rozlišil správně 62 dvojice nádob. Má opravdu schopnosti, o kterých mluví, nebo je to jen náhoda?

*Řešení:* $Y_{100} \sim Bi\left(100\,;\frac{1}{2}\right)$

$$P[Y_{100} > 62] = 1 - P[Y_{100} \le 62] \approx 1 - \Phi\left(\frac{62 - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = 1 - \Phi(2{,}4) =$$

$$= 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$$

Pravděpodobnost, že pouze náhodou určí správně 64 dvojice nádob, je menší než 1 %, tedy je téměř nemožné toho dosáhnout pouhým hádáním.

*Př. 5.2:* Zaměstnanec jistého závodu jezdí do zaměstnání i zpět metrem. Vlak metra jezdí v tříminutových intervalech. Jaká je pravděpodobnost, že celková doba čekání za jeden měsíc (21 pracovních dní) bude nebude delší než 70 minut?

*Řešení:* Náhodná veličina $X_i$, $i = 1,2,\ldots,42$, doba čekání na příjezd metra při $i$-té cestě, má rovnoměrné rozdělení $R(0;3)$. Hustota tohoto rozdělení je rovna $\frac{1}{3}$ pro $0 < x < 3$, rovna nule pro ostatní $x$.

$$EX_i = \frac{b-a}{2} = \frac{3}{2} \qquad\qquad DX_i = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$P[X \le 70] = \Phi\left(\frac{70 - 42 \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 42}}\right) = \Phi\left(\frac{70-63}{\sqrt{31{,}5}}\right) = \Phi(1{,}25) = 0{,}89435$$

*<u>Př. 5.3:</u>* Zatížení letadla se 148 místy nemá překročit 13 200 kg. Jaká je pravděpodobnost, že při plném obsazení bude tato hodnota překročena, má-li hmotnost cestujícího střední hodnotu 87 kg a směrodatnou odchylku 10 kg?

# 6. Příklady

*Př. 6.1:* Určete, které z následujících náhodných proměnných jsou diskrétního a které spojitého typu:

- počet vyléčených z 15 pacientů
- průměrná známka ze zkoušky z pravděpodobnosti
- doba čekání na autobus MHD, který jezdí v pravidelných intervalech
- porodní váha novorozenců v jedné porodnici
- počet pacientů, kteří navštíví lékaře během jednoho dne

*Př. 6.2:* Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny s alternativním rozdělením s parametrem $p$.

*Př. 6.3:* Při pokusu nastává úspěch s pravděpodobností $p$. Náhodná veličina $X$ nechť udává počet úspěchů po $n$ nezávislých opakováních takového pokusu. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. Jaké má náhodná veličina $X$ rozdělení?

*Př. 6.4:* Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny s Poissonovým rozdělením a parametrem $\lambda$.

*Př. 6.5:* $n$-krát vytáhneme kartu z plného (32 karet) důkladně zamíchaného balíčku karet (kartu vracíme a vždy důkladně promícháme). Pomocí distribuční funkce některého rozdělení určete pravděpodobnost, že alespoň jednou vytáhneme eso.

*Př. 6.6:* Určitý druh léčby má 90% úspěšnost. Jaká je pravděpodobnost, že u obou dvou náhodně vybraných pacientů tato léčba selže?

*Př. 6.7:* V počítačové hře jde o sestřelení nepřátelského letadla. Hráč má 8 střel a pravděpodobnost zásahu je stále rovna 0,2. Určete, s jakou pravděpodobností hráč nepřátelské letadlo sestřelí, jestliže je k tomu potřeba alespoň 2 zásahů.

*Př. 6.8:* Student jde na písemnou zkoušku. Zkouška probíhá formou testu, má 10 otázek a u každé otázky jsou na výběr 4 možnosti, z nichž právě jedna je správná. Ke složení zkoušky je potřeba odpovědět správně alespoň na polovinu otázek. Student se na zkoušku vůbec nepřipravoval a odpovědi tedy volí naprosto náhodně.

a) Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku udělá?

b) Jaká je pravděpodobnost, že bude mít správně maximálně jednu odpověď?

*Př. 6.9:* V klobouku je 30 obálek s lístky do tomboly. V pěti obálkách je lístek, na který okamžitě vyhráváte nějakou cenu, v ostatních lístky postupující do dalšího losování. Určete pravděpodobnost, že při koupi 3 obálek bude alespoň v jedné lístek vyhrávající ihned.

*Př. 6.10:* Knihovna upomínala čtenáře o dvě knihy ze sedmi vypůjčených. Čtenář však upomínku ztratil a vrátil náhodně vybranou dvojici knih. Jaká je pravděpodobnost, že vrátil ty, o které byl upomínán?

*Př. 6.11:* Ve přírodě se pohybuje nebezpečná šelma, kterou je potřeba převézt. Střelec s uspávací pistolí má v těžkém terénu pravděpodobnost zásahu rovnu 0,4. Jaká je pravděpodobnost, že šelma unikne, pokud má střelec k dispozici 7 patron?

*<u>Př. 6.12:</u>* Ze zkušenosti víme, že při správném chodu stroje je v průměru 0,1% výrobků vadných. Ke stroji nastoupil nový pracovník. Z 5 000 kusů, které vyrobil během týdne, bylo 11 zmetků. Vzniká otázka, zde je jeho práce vyhovující, tzn. není -li počet zmetků vyšší, než lze odůvodnit náhodou.

*<u>Př. 6.13:</u>* Trolejbusy městské dopravy odjíždějí ze stanice v pětiminutových intervalech. Cestující přišel ke stanici v libovolný okamžik. Určete střední hodnotu a rozptyl doby jeho čekání na odjezd ze stanice.

*<u>Př. 6.14:</u>* Předpokládejme, že průměrná doba zpracování zakázky je 10 minut a doba zpracování se řídí exponenciálním rozdělením.

a) Určete pravděpodobnost, že zakázka bude zpracována do čtvrt hodiny.

b) Určete dobu, do níž bude zakázka s pravděpodobností 0,9 zpracována.

*<u>Př. 6.15:</u>* Klidový tep srdce u zdravé populace má přibližně normální rozdělení s průměrem 70 úderů za minutu a směrodatnou odchylkou 10 úderů. Jaká část zdravé populace má srdeční tep vyšší než 80 úderů za minutu?

*<u>Př. 6.16:</u>* Bylo zjištěno, že procentní podíl prachu ve vagónu dodaného uhlí je náhodná veličina s normálním rozdělením s průměrem 16,99% a směrodatnou odchylkou 2,66%. Za jakou hranici procentního podílu prachu v příštím vagónu se lze zaručit s pravděpodobností $p = 0{,}95$?

*<u>Př. 6.17:</u>* Ve třídě je 15 dívek a 11 chlapců. Třída si má zvolit předsedu, jeho zástupce a pokladníka. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou

a) samé dívky?

b) 2 dívky a chlapec?

*Př. 6.18:* Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk bude narozen

a) 28. února

b) 29. února

c) 28. nebo 29. února

*Př. 6.19:* Do autoopravny přivezli 12 motorů. Ví se, že třetina z nich bude potřebovat generální opravu. Pět motorů předali rovnou na dílnu. Jaká je pravděpodobnost, že dva z nich budou potřebovat generální opravu?

*Př. 6.20:* Je-li 1% leváků, jaká je pravděpodobnost, že mezi 200 lidmi budou

a) právě 4 leváci

b) alespoň 4 leváci

*Př. 6.21:* Délka výrobku v mm má $N(68{,}3\,;\,0{,}04)$. Jaká je pravděpodobnost, že délka náhodně odebraného výrobku bude mezi 68 a 69 mm?

*Př. 6.22:* Při jedné otáčce radarové antény je kosmický objekt objeven s pravděpodobností 0,1. Určete pravděpodobnost, že objekt bude objeven až po osmi otáčkách antény.

*Př. 6.23:* Závodník ve střelbě ze sportovní pistole vyhraje, pokud ze tří výstřelů získá alespoň 28 bodů. Maximální počet bodů na teči je 10 a pravděpodobnost toho, že dosáhne 30 bodů, je 0,008. Je známo, že při jednom výstřelu získá závodník 8 bodů s pravděpodobností 0,15 a méně než 8 bodů s pravděpodobností 0,4. Určete šance závodníka na výhru.

*Př. 6.24:* Číselný zámek má kotouče s číslicemi po obvodu, k jeho otevření je potřeba nastavit současně na každém kotouči jedinou správnou číslici. Který zámek je bezpečnější, se čtyřmi kotouči a pěti číslicemi po obvodu každého z nich nebo s pěti kotouči a čtyřmi číslicemi po obvodu každého z nich?

*Př. 6.25:* Pravděpodobnost výhry na jeden los je 0,2. Kolik losů musíme koupit, chceme-li mít 95% pravděpodobnost, že alespoň na jeden z nich něco vyhrajeme?

*Př. 6.26:* Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 000 novorozenci bude stejně nebo více děvčat než chlapců?

*Př. 6.27:* Student si u zkoušky losuje tři otázky z deseti. Dobře připraven je na pět otázek. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými jsou alespoň dvě, na které je připraven, a zkoušku tedy udělá?

*Př. 6.28:* 3 mafiáni hrají ruskou ruletu. Bubínkový revolver má 7 komor, šest z nich je prázdných, v jedné je náboj. První zatočí bubínkem a stiskne spoušť. Když revolver nevystřelí, pokračuje druhý, po něm třetí a znovu od prvního. Jaké je pravděpodobnost, že prvním zastřeleným bude druhý mafián a to ve třetím kole ruské rulety? Jaká je pravděpodobnost, že hra bude trvat déle než pět kol?

*Př. 6.29:* Bylo zjištěno, že průměrná životnost lampy do projektoru je 2 000 hodin. Výrobce chce v rámci své propagace garantovat dobu, během níž nepraskne více než 5% lamp. Za jakou dobu se může zaručit?

*Př. 6.30:* Počet organismů ve vzorku odebraném z proudící vody má normální rozdělení se střední hodnotou 10 organismů v jednom litru vody a směrodatnou odchylkou 2 organismy.

a) Určete, jaký podíl vzorků bude obsahovat více než 15 organismů.

b) Určete hranici $H$ počtu mikroorganismů ve vodě tak, aby v 90% vzorků byl počet mikroorganismů pod touto hranicí.

*Př. 6.31:* Důležitá objednávka, kterou je potřeba ihned začít vyřizovat, může být doručena do firmy kdykoliv v době od 7 do 19 hodin. Určete pravděpodobnost, že nebude doručena během polední pauzy, tj. mezi 11. a 13. hodinou.

*Př. 6.32:* V košíku je 20 grepů, 12 červených a 8 bílých. Vyjmeme náhodně 2 grepy. Která ze 3 možných kombinací je nejpravděpodobnější?

*Př. 6.33:* Jakou pravděpodobnost zásahu musí mít střelec, aby s pravděpodobností 0,99 zasáhl cíl alespoň jednou z pěti ran?

*Př. 6.34:* Prevalence astmatu v dětské populaci je 1 z 20. Náhodně vybereme 20 dětí.

a) Najděte rozdělení pravděpodobnosti počtu astmatiků ve vybraném vzorku a určete jeho parametry.

b) Jaká je pravděpodobnost, že žádné z vybraných dětí netrpí astmatem?

c) Jaká je pravděpodobnost, že právě jedno z vybraných dětí má astma?

d) Jaká je pravděpodobnost, že maximálně jedno z vybraných dětí má astma?

e) Jaká je pravděpodobnost, že nejméně 2 děti mají astma?

*Př. 6.35:* Hledám člověka, který slaví narozeniny ve stejný den jako já (stejný den a měsíc, přestupné roky zanedbáváme). Kolika lidí se musím zeptat, aby pravděpodobnost nalezení alespoň jednoto takového byla $\frac{2}{3}$.

*Př. 6.36:* Auto v mrazu nastartujeme při jednom otočení klíčkem v zapalování s pravděpodobností 0,75. Jaká je pravděpodobnost, že motor chytne na pátý pokus?

*Př. 6.37:* Počet chyb na jedné straně textu má střední hodnotu 8 a rozptyl 4. Jaká je pravděpodobnost, že na 100 stranách textu bude méně než 750 chyb?

*Př. 6.38:* Dělník obsluhuje v dílně 4 stroje. U prvního stroje stráví 10 minut, u druhého 25 minut, u třetího 15 minut a u čtvrtého 10 minut, poté se opět vrací k prvnímu stroji. Určete pravděpodobnost, že přijdeme-li do dílny v náhodný okamžik, zastihneme ho u třetího stroje.

*Př. 6.39:* Hokejista se při samostatných nájezdech strefí do branky s pravděpodobností $p = 0{,}6$. Určete, jaký je nejpravděpodobnější počet vstřelených branek, pokud absolvuje 9 samostatných nájezdů.

*Př. 6.40:* V prodejně je regál s 50 CD, mezi kterými je 6 vadných. Vyberete si 5 CD. Jakou máte pravděpodobnost, že všechna vybraná CD budou v pořádku?

*Př. 6.41:* Pevnost jistého druhu ocelových lan je náhodná veličina s normálním rozdělením $N\left(1\,000\,{}^{kg}\!/\!{}_{cm^2}\,;\,50\,{}^{kg}\!/\!{}_{cm^2}\right)$. Norma stanoví minimální pevnost $900\,{}^{kg}\!/\!{}_{cm^2}$. Určete, kolik ocelových lan z 2 000 kusů splňuje danou normu?

*Př. 6.42:* Letadlo nese jednu raketu, kterou vystřelí na nepřátelský cíl. Pravděpodobnost zásahu je 0,75. Kolik letadel je potřeba vyslat, aby byl nepřátelský cíl zničen s pravděpodobností 0,99?

*Př. 6.43:* Podíl kuřáků na studentských kolejích je 20%. Vybereme náhodně 2 studenty.

a) Určete pravděpodobnostní funkci počtu kuřáků ve vybraném vzorku.

b) Jaká je pravděpodobnost, že oba vybraní studenti budou kuřáci?

*Př. 6.44:* Na seznamu dětí narozených během jednoho měsíce v určité porodnici je 19 chlapců a 11 děvčat. Jaká je pravděpodobnost, že na prvních 5 místech jsou 2 chlapci a 3 děvčata?

*Př. 6.45:* Výsledky radarového měření jsou zatíženy normálně rozdělenou náhodnou chybou s nulovou střední hodnotou, která s pravděpodobností 0,95 nepřesahuje $\pm 20$ m. Určete směrodatnou odchylku měření.

*Př. 6.46:* Střílí se z bodu $O$ podél přímky $Ox$. Střední vzdálenost dopadu střely se rovná 1 200 m. Za předpokladu, že vzdálenost $H$ místa dopadu střely má normální rozdělení a směrodatnou odchylku $\sigma = 40\ m$, určete, jaký procentní podíl střel dopadne 60-80 m za cíl?

# 7. Řešení

**3.2** *a)* ano; *b)* ne, mění se pravděpodobnost úspěchu při přechodu od jednoho pokusu k druhému; *c)* ano; *d)* ano; *e)* ne, je porušena podmínka nezávislosti jednotlivých pokusů **3.3** $X \sim A(\frac{1}{2})$, $Y \sim A(\frac{1}{2})$; $EX = EY = \dfrac{1}{2}$; $DX = DY = \dfrac{1}{4}$ **3.9** *a)* oba můžou mít 0,1,2 nebo 3 zásahy. $P = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}32076$; *b)* když první zasáhne 1x, druhý nesmí zasáhnout vůbec, když první zasáhne 2x, druhý může 1x nebo vůbec, atd. $P = p_{10} + p_{21} + p_{20} + p_{32} + p_{31} + p_{30} = 0{,}243$ **3.10** $Bi(10;\frac{3}{4})$, $EX = 7{,}5$ **3.11** $p = P[X \geq 13] = 0{,}0962$ **3.12** $p = 1 - 0{,}98^{100} = 0{,}8674$

**3.13** $Bi(15\,;0{,}1)$; *a)* $p_0 = P[X = 0] = 0{,}2059$; *b)* $p_2 = P[X = 2] = 0{,}2669$; je to druhá nejčastější situace. **3.14** $p = 1 - \sqrt[4]{0{,}41} = 0{,}1998$ **3.17** $Hg(13;8;3)$; *a)* $p_0 = 0{,}035$; *b)* $p_3 = 0{,}1958$; Jevy v bodech *c)* a *d)* jsou totožné, $p = 0{,}685$ **3.18** $Hg(18;5;9)$; $p = P[X = 0] + P[X = 5] = 0{,}029$ **3.19** $Hg(35;5;5)$; $p = 0{,}0000031$ **3.21** Počet vadných termosek mezi 80 vyrobenými $X \sim Po(4)$; $p_4 = 0{,}195$ **3.22** Počet kazů v balíku $X \sim Po(100 \cdot 0{,}005)$; střední hodnota počtu bezvadných balíků: $50 \cdot p_0 = 30{,}33$

**3.25** První úspěch po sudém počtu neúspěchů; $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$

**3.26** Useknuté geometrické rozdělení; $p_k = 0{,}6^{k-1} \cdot 0{,}4$ pro $k = 1, \ldots, 4$; $p_5 = 0{,}6^4$; $EX = \sum_i x_i \cdot p_i = 2{,}3056$; $EX^2 = \sum_i x_i^2 \cdot p_i = 7{,}2784$; $DX = 1{,}9626$

**4.2** $b - a = \sqrt{12 \cdot 3} = 6$; $f(x) = \dfrac{1}{6}$ na intervalu $(-2\,;4)$ **4.3** $Ro(0;60)$; $p = 0{,}25$

**4.8** $X$ - počet km, které vydrží 1 svíčka; $p = (P[X \geq 4\,300])^4 = 0{,}88997$

**4.9** $N(146\,;64)$; 162 cm. **4.10** *a)* 0,04746; *b)* 0,12302 **4.11** Při jednom měření: $p_1 = 0{,}28814$; alespoň 1x ze tří měření: $p = 1 - (1 - p_1)^3 = 0{,}6393$

**4.14** $X \sim E\left(0; \tfrac{1}{60}\right)$; $P[X \le 40] = F(40) = 0{,}487$

**5.3** $P[Y_{148} > 13\,200] \approx 1 - \Phi\left(\dfrac{13\,200 - 148 \cdot 87}{10 \cdot \sqrt{148}}\right) = 0{,}00391$

**6.1** diskrétní; spojitá; spojitá; spojitá; diskrétní **6.2** $EX =$
$= 0 \cdot P[X = 0] + 1 \cdot P[X = 1] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$; $EX^2 = 0^2 \cdot P[X = 0] + 1^2 \cdot P[X = 1] =$
$= 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$; $DX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p)$

**6.3** Rozdělením na disjunktní jevy (v kterých konkrétních $k$ pokusech z $n$ možných úspěch nastal) $P[X = k] = \sum\limits_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}} p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

což je rozdělení $Bi(n, p)$. Protože $X$ je součtem nezávislých stejně rozdělených veličin $Z_i \sim A(p)$, je $EX = \sum\limits_i EZ_i = n \cdot p$ a vzhledem k nezávislosti $Z_i$

$$DX = D\left(\sum_i Z_i\right) = \sum_i DZ_i = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

**6.4** $EX = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot P[X = k] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} =$
$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$. Pro určení rozptylu potřebujeme znát 2. moment. Spočteme-li faktoriální moment $EX(X - 1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot (k - 1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$

můžeme vyjádřit $EX^2 = \lambda^2 + EX = \lambda^2 + \lambda$ a $DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

**6.5** $X \sim Bi\left(n; \tfrac{1}{8}\right)$; $p = P[X \ge 1] = 1 - \left(\tfrac{7}{8}\right)^n$ **6.6** $p = 0{,}01$

**6.7** $p = 1 - p_0 - p_1 = 0{,}4967$ **6.8** $Bi\left(10; \tfrac{1}{4}\right)$; *a)* $P[X \ge 5] = 0{,}078127$;
*b)* $P[X \le 1] = 0{,}244$ **6.9** $Hg(30; 5; 3)$; $P[X \ge 1] = 0{,}433$ **6.10**

$Hg(7;2;2)$; $P[X=2]=0{,}0476$ **6.11** $Bi(7;0{,}4)$; $P[X=0]=0{,}02799$

**6.12** $X \sim Po(5)$; $P[X=11]=0{,}0082$. Pravděpodobnost, že mezi 5 000 výrobky bude 11 zmetků je menší než 1%. Tento počet zmetků tedy skoro jistě není náhodný a je způsoben novým pracovníkem. **6.13** Rovnoměrné rozdělení s hustotou $f(x)=0{,}2$ pro $0<x<5$; $f(x)=0$ pro ostatní $x$. $EX=\frac{5}{2}=2{,}5$ min; $DX=2{,}08$

**6.14** $E(0\,;0{,}1)$; *a)* $P[X\le 15]=0{,}7769$; *b)* $P[X\le t]=0{,}9$; $t=\ln(0{,}1)\cdot(-10)=23$

**6.15** $p=P[X>80]=0{,}15866$ **6.16** $0{,}95=P[X<T]$; $T=0{,}2137$

**6.17** $Hg(26;15;3)$; *a)* $P[X=3]=0{,}175$; *b)* $P[X=2]=0{,}4442$

**6.18** *a)* $p_a=\dfrac{4}{365+365+365+366}=0{,}0027378$; *b)* 0,0006845; *c)* 0,0034223

**6.19** $Hg(12;4;5)$; $P[X=2]=0{,}3535$ **6.20** $Po(200\cdot 0{,}01)$; *a)* 0,09; *b)* 0,143

**6.21** 0,93296 **6.22** $Ge(0{,}1)$; $P(X=7)=0{,}0478$

**6.23** $P[X_1=10]=\sqrt[3]{0{,}008}=0{,}2$; $P[X_1=8]=0{,}15$;

$P[X_1=9]=1-0{,}4-0{,}15-0{,}2=0{,}25$; Možnosti získání alespoň 28 bodů jsou:

10;10 ;10 10;10;9 10;10;8 10;9;9 $P[X\ge 28]=0{,}0935$

**6.24** čtyři kotouče s pěti číslicemi: $Bi\left(4\,;\frac{1}{5}\right)$; $p=0{,}0016$; pět kotoučů se čtyřmi číslicemi: $Bi\left(5\,;\frac{1}{4}\right)$; $p=0{,}000977$. Bezpečnější je zámek s pěti kotouči a 4 číslicemi po obvodu kotoučů. **6.25** $Bi(n;0{,}2)$; $P(X>0)=0{,}95$; $n=13{,}43$, tedy 14 losů.

**6.26** K řešení použijeme centrální limitní větu;

$$P[Y_{10\,000}\le 5\,000]\approx \Phi\left(\frac{5\,000-10\,000\cdot 0{,}515}{\sqrt{10\,000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}\right)=\Phi(-3)=0{,}00135$$

**6.27** $Hg(10;5;3)$; $P[X\ge 2]=0{,}5$ **6.28** $Ge\left(\frac{1}{7}\right)$; $p_1=P(X=7)=0{,}049$; $p_2=P(X>15)=0{,}099$ **6.29** $E(0;0{,}0005)$; $P[X>t]=0{,}95$; $t=102{,}6$ *hod*

**6.30** $N(10\,;4)$; *a)* $P[X>15]=0{,}00621$; *b)* $P[X<H]=0{,}9$; $H=12{,}57$

**6.31** $Ro(7\,;19)$; $p = \frac{5}{6} = 0{,}83$ **6.32** $Hg(20;12;2)$; *a)* oba bílé: $p_1 = P[X = 0] = 0{,}147$; *b)* oba červené: $p_2 = P[X = 2] = 0{,}347$; *c)* jeden bílý, jeden červený: $p_3 = P[X = 1] = 0{,}505$ **6.33** $Bi(5; p)$; $P[X \geq 1] = 0{,}99$

$p = 1 - \sqrt[5]{0{,}01} == 0{,}6019$ **6.34** *a)* $X \sim Bi(20\,;0{,}05)$; *b)* $p_0 = 0{,}3585$; *c)* $p_1 = 0{,}3774$; *d)* $p = P[X \leq 1] = 0{,}7359$; *e)* $p = P[X \geq 2] = 0{,}2641$ **6.35** $Bi(n\,;\frac{1}{365})$;

$P(X > 0) = \frac{2}{3}$; $n = 400{,}44$; tj. 401 lidí **6.36** $Ge(0{,}75)$; $P(X = 4) = 0{,}00293$

**6.37** Řešíme pomocí centrální limitní věty; $P[X < 750] = \Phi\left(\dfrac{750 - 100 \cdot 8}{\sqrt{100 \cdot 4}}\right) = 0{,}00621$

**6.38** $Ro(0;60)$; $p = 0{,}25$ **6.39** $X \sim Bi(9\,;0{,}6)$; $EX = 5{,}4$; $p_5 = P[X = 5] = 0{,}251$; $p_6 = P[X = 6] = 0{,}251$; Z devíti samostatných nájezdů je nejpravděpodobnějších 5 nebo 6 gólů. **6.40** $Hg(50;6;5)$; $p_0 = P[X = 0] = 0{,}513$

**6.41** $P[X \geq 900] = 0{,}97725$; Z 2 000 kusů ocelových lan 1 954 až 1 955 kusů splňuje stanovenou normu. **6.45** $Bi(n\,;0{,}75)$; $P(X > 0) = 0{,}99$; $n = 3{,}32$; tj. 4 letadla

**6.46** $X \sim Bi(2\,;0{,}2)$; $p_0 = P[X = 0] = 0{,}64$; $p_1 = P[X = 1] = 0{,}32$; $p_2 = P[X = 2] = 0{,}04$ **6.44** $Hg(30;19;5)$; $p = P[X = 2] = 0{,}19799$

**6.45** $0{,}95 = P\,[|X| < 20]$; $\sigma = \dfrac{20}{u_{1{,}95/2}} = 10{,}2\ m$

**6.46** $P[1\,260 \leq X \leq 1\,280] = 0{,}04406$

# Literatura


[1] Anděl, J.: Matematická statistika, Praha: SNTL, 1985

[2] Anděl, J.: Matematika náhody, Praha: MATFYZPRESS, vydavatelství matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, 2003

[3] Janeček, P.: Sbírka úloh z pravděpodobnosti a statistiky, Hradec Králové: Pedagogický ústav v Hradci Králové, 1991.

[4] Křivý, I.: Úvod do teorie pravděpodobnosti, Ostrava: Pedagogická fakulta, 1983.

[5] Komenda, S.: Základy pravděpodobnostních a statistických metod v psychologickém a pedagogickém výzkumu, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1968.

[6] Likeš, J., Machek, J.: Počet pravděpodobnosti, Praha: SNTL, 1987

[7] Plocki, A.: O náhodě a pravděpodobnosti, ÚV matematické olympiády, Praha: Mladá fronta, 1982.

[8] Rektory, K. a spol.: Přehled užité matematiky II, Praha: Prométheus, 2000

[9] Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky III, Praha: SNTL, 1990.

[10] Tlustý, P., Petrášková, V.: Úvod do počtu pravděpodobnosti, České Budějovice: PF JU, 1992

[11] http://stattrek.com

[12] http://www.sjsu.edu

[13] http://iastat.vse.cz

[14] http://mathonline.fme.vutbr.cz

# Příloha I

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení (Laplaceova funkce) $\Phi(u)$:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92786 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95905 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4 | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5 | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,6 | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8 | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,0 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 |
| 3,1 | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| 3,2 | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| 3,3 | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| 3,4 | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| 3,5 | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 |
| 3,6 | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| 3,7 | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| 3,8 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| 3,9 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |
| 4,0 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 |
| 4,1 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99999 | 0,99999 |
| 4,2 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 |
| 4,3 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 | 0,99999 |
| 4,4 | 0,99999 | 0,99999 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |