JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Substituce a integrál

The integral and substitution

Autor:	**_Tomáš Člupek_**
Studijní obor:	**_Finanční matematika_**
Vedoucí práce:	**_Mgr. Petr Chládek, Ph.D._**
Rok:	**_2008_**

Zadání diplomové práce

Student: **Tomáš Člupek**

Téma: **Substituce a integrál**

(The integral and substitution)

Zásady pro vypracování

Diplomant v práci ukáže použití substituční metody pro výpočet neurčitého i určitého integrálu. Metoda bude odvozena teoreticky a následně pro názornost předvedena na konkrétních příkladech.

Doporučená literatura:

V. Jarník : Integrální počet I , Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Petr Chládek, Ph.D.**

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

....

Poděkování

Děkuji Mgr. Petru Chládkovi PhD. nejen za odbornou pomoc a vedení při tvorbě této bakalářské práce, ale i za vstřícný a laskavý přístup při všech konzultacích a poradách, který významně usnadnil její vznik.

Anotace

Tato bakalářská práce obsahuje zavedení určitého a neurčitého integrálu, substitučních metod pro jejich výpočet a řešené i neřešené příklady jejich využití.

Abstract

This document introduces indefinite and definite integral. Also includes various substitution methods for calculation. Solved and unsolved examples of their usage are also attached.

Obsah

Obsah 1

1. Úvod 2
2. Neurčitý integrál 3
   - 2.1. Primitivní funkce 3
   - 2.2. Integrace 3
   - 2.3. Substituční metoda při výpočtu neurčitého integrálu 4
3. Určitý integrál 7
   - 3.1. Newtonův integrál 7
   - 3.2. Riemannův integrál 7
     - 3.2.1. Dělení intervalu 8
     - 3.2.2. Výpočet určitého integrálu 10
     - 3.2.3. Aplikace určitého integrálu 12
     - 3.2.4. Substituční metoda při výpočtu určitého integrálu 14
4. Speciální substituce 16
   - 4.1. Goniometrické substituce 16
   - 4.2. Integrování racionálních funkcí 19
   - 4.3. Integrování iracionálních funkcí 23
   - 4.4. Integrování goniometrických funkcí 28
   - 4.5. Integrování binomických funkcí 32
   - 4.6. Integrování exponenciálních funkcí 35
5. Závěr 38
6. Summary 39
7. Seznam použité literatury 40
8. Přílohy

1. Úvod

Cílem této práce je ukázat použití substituční metody pro výpočet neurčitého i určitého integrálu a poskytnout ucelený přehled konkrétních substitučních metod výpočtu.

Nejprve budou oba typy integrálu definovány, bude popsán způsob jejich výpočtu a některého praktického využití, následně bude odvozena substituční metoda výpočtu obou typů.

V další části budou jednotlivé, nejběžněji užívané, typy substitucí nejprve popsány a následně na konkrétních řešených příkladech pro názornost předvedeny. Pro všechny typy substitucí budou v práci připojeny i neřešené příklady s uvedeným výsledkem, pro jejichž řešení je daná substituční metoda použitelná.

U všech příkladů budeme předpokládat řešení v definičním oboru daného výrazu, a proto nebude stanovený definiční obor uveden.

2. Neurčitý integrál

2.1. Primitivní funkce

- Funkci F nazýváme *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu $\langle a,b \rangle$, jestliže pro všechna $x \in \langle a,b \rangle$ platí $F'(x) = f(x)$.
- Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle a,b \rangle$, pak existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí k funkci *f*, a všechny mají tvar $F(x)+C$, kde $C \in R$ je libovolná konstanta.

2.2. Integrace

- Operace, při níž určujeme primitivní funkci $F(x)+C$ k dané funkci $f(x)$ se nazývá *integrování* (inverzní operace k derivování). Zápis úlohy intergrovat funkci $f(x)$provádíme:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

kde symbol $\int f(x)dx$ se nazývá *neurčitý integrál* a představuje množinu všech primitivních funkcí $F(x)+C$. Znak $\int$ se nazývá integrační znak, $f(x)$ integrand, dx diferenciál, x označuje integrační proměnnou a C je integrační konstanta.

2.3. Substituční metoda při výpočtu neurčitého integrálu

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, má-li dále funkce $\varphi(t)$ na intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$ a leží-li funkční hodnota $\varphi(t)$ pro každé t z tohoto intervalu v intervalu $\langle a,b\rangle$, pak po dosazení funkce $\varphi(t)$ za proměnnou x v intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$ platí:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Tuto důležitou rovnost je možné snadno odvodit, neboť označíme-li $F(x)$ primitivní funkci k $f(x)$ a položíme-li $x=\varphi(t)$, pak

$$[F(x)]' = [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = F'(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Substituční metody pro výpočet neurčitého integrálu lze užít následujícími dvěma způsoby:

- Řešíme-li integrál tvaru $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, můžeme ho při splnění uvedených předpokladů převést pomocí substituce $x=\varphi(t)$ na integrál tvaru $\int f(x)dx$. Po vypočtení integrálu dosadímě zpět za proměnnou x funkci $\varphi(t)$ a výpočet je ukončen.

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{\ln(t)}{t}dt$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{array}{l} x=\ln(t) \\ dx=\frac{dt}{t} \end{array} \right|$, tedy

$$\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \int x\,dt = \frac{1}{2}x^2 + C$$

a po dosazení

$$\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln^2(t) + C\,,\ \text{ pro } t > 0.$$

- Řešíme-li integrál tvaru $\int f(x)dx$, můžeme ho převést pomocí vhodné substituce $x = \varphi(t)$ na integrál tvaru $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, který - i když se to nezdá - může být v mnoha případech jednodušší. Po vypočtení tohoto integrálu dosadíme za parametr t funkci proměnné x vypočtenou ze vztahu $x = \varphi(t)$ a výpočet je ukončen.

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right|$ a tedy

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin^5 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt =$$

$$= \int \frac{\sin^5 t}{\sqrt{\cos^2 t}}\cos t\,dt = \int \sin^5 t\,dt =$$

nyní použijeme substituci $\left| \begin{array}{c} \cos t = k \\ -\sin t\,dt = dk \end{array} \right|$, tedy

$$= \int \left(1 - \cos^2 t\right)^2 \sin t \, dt = -\int \left(1 - k^2\right)^2 dk =$$

$$= -\int \left(1 - 2k^2 + k^4\right) dk = -k + 2\frac{k^3}{3} - \frac{k^5}{5} + C .$$

Postupným návratem k původním proměnným

získáme výsledek

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + C =$$

$$= -\cos(\arcsin x) + \frac{2}{3}\cos^3(\arcsin x) - \frac{1}{5}\cos^5(\arcsin x) + C .$$

3. Určitý integrál

3.1. Newtonův integrál

- Je-li funkce F primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak rozdíl funkčních hodnot funkce F v krajních bodech tohoto intervalu $F(b) - F(a)$ se nazývá *Newtonův určitý integrál* funkce f v mezích od a do b a značí se:

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

přičemž číslo a se zde nazývá *dolní mez integrálu*, číslo b *horní mez integrálu,* funkce f *integrand*, dx *diferenciál* a x označuje *integrační proměnnou*. Platí tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

3.2. Riemannův integrál

Definice *Riemannova integrálu* vychází z intuitivní představy měření obsahu plochy pod grafem funkce. Chceme-li přibližně zjistit tento obsah, provedeme to v praxi tak, že položíme do měřené plochy nějaké geometrické útvary, jejichž obsah dovedeme spočíst, tak, aby nepřesahovaly hranici měřené oblasti a vzájemně se nepřekrývaly. Sečtemi-li nyní obsahy všech vložených útvarů, dostaneme zřejmě číslo, které je menší nebo rovný obsahu měřené plochy - tzv. dolní odhad. Obdobně (pokrytím celé měřené plochy známými útvary) získáme tzv. horní odhad. Obsah měřené plochy pak leží mezi dolním a horním odhadem. Budeme-li používat k vykládání plochy stále menší a menší útvary, dokážeme oba odhady stále zpřesňovat, až teoreticky při vyložení plochy nekonečně mnoha nekonečně malými útvary dosteneme, že horní odhad je roven dolímu odhadu a oba se rovnají obsahu měřené plochy. Pro jednoduchost se při zavádění Riemannova integrálu používají za ony útvary, jimiž se plocha vykládá, obdélníky se stranami rovnoběžnými s osami soustavy souřadnic.

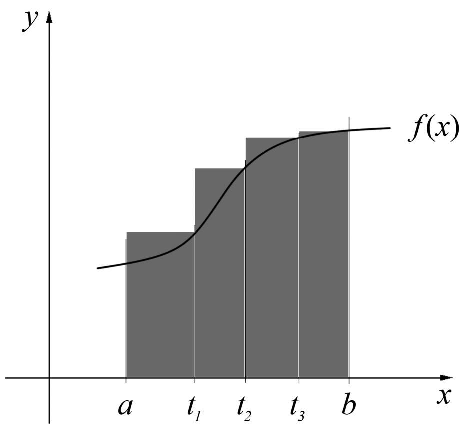
3.2.1. Dělení intervalu

- *Dělením* intervalu $\langle a, b\rangle$ nazýváme $(n+1)$-tici $t_0, ..., t_n$ takovou, že:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b.$$

- *Horní Riemannův součet* pro funkci f a dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ definujeme jako

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in (t_{i-1}, t_1)} [f(x)](t_i - t_{i-1}).$$



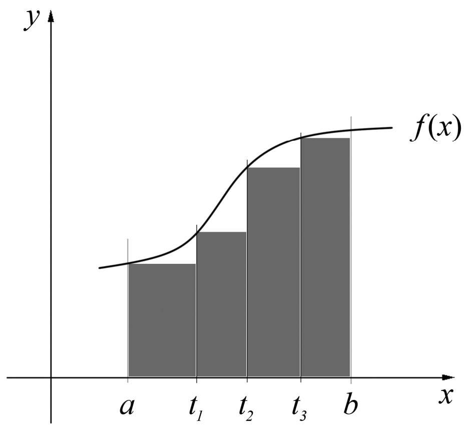
Obr. č.1 Horní Riemannův součet *f*(*x*) od *a* do *b*

- *Horní Riemannův integrál* funkce *f* od *a* do *b* definujeme takto:

$$(HR)\int_a^b f(x)dx = \inf\{S(f,D);\ D \text{ je libovolné dělení } \langle a,b\rangle\ \}$$

- *Dolní Riemannův součet* pro funkci *f* a dělení *D* intervalu $\langle a,b\rangle$ definujeme jako

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in(t_{i-1},t_i)} [f(x)](t_i - t_{i-1}).$$



Obr. č.2 Dolní Riemannův součet *f*(*x*) od *a* do *b*

- *Dolní Riemannův integrál* funkce *f* od *a* do *b* definujeme takto:

$$(DR)\int_a^b f(x)dx = \sup\{s(f,D);\ D \text{ je libovolné dělení } \langle a,b\rangle\ \}$$

- Je-li tedy funkce *f* na intervalu $\langle a,b\rangle$ omezená, definujeme *Riemannův určitý integrál* funkce *f* na intervalu $\langle a,b\rangle$ jako společnou hodnotu dolního a horního Riemannova integrálu (pokud se tyto integrály rovnají). Pokud se dolní a horní Riemannův integrál od sebe liší, říkáme, že Riemannův integrál funkce *f* neexistuje.

Jestliže tedy existuje Riemannův integrál, pak platí

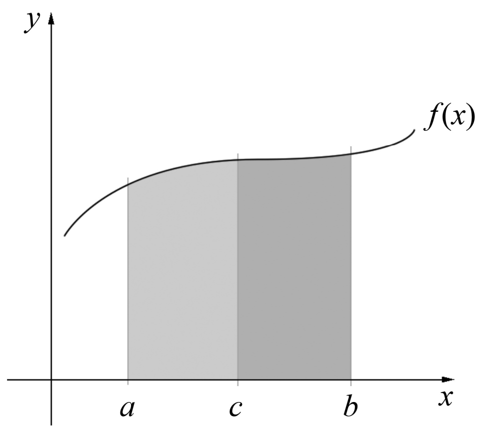
$$\int_a^b f(x)dx = (HR)\int_a^b f(x)dx = (DR)\int_a^b f(x)dx$$

Z definice horního a dolního součtu vidíme, že funkce je *Riemannovsky integrovatelná* pouze je-li na intervalu omezená - pro neomezené funkce totiž není definován horní a dolní Riemannův součet.

3.2.2. Výpočet určitého integrálu

- Je-li funkce *f* spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a bod *c* je jeho vnitřním bodem, pak lze integrál vyjádřit jako součet integrálů v dílčích intervalech:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Obr. č.3. Integrál funkce *f*(*x*) od *a* do *b* (*s* vnitřním bodem intervalu *c)*

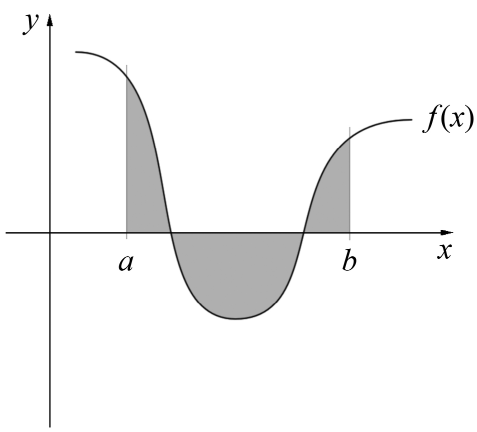
Z předchozí rovnosti lze snadno odvodit následující vztah pro změnu integračních mezí v určitém integrálu

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

a pro rovnost dolní a horní meze

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

Proto počítáme-li plochu obrazce mezi funkcí $f(x)$ a osou x ze záporné funkce, dostaneme správný obsah, ale se záporným znaménkem. Obecně je tedy Riemannův integrál roven geometrickému obsahu částí, které jsou nad osou *x*, minus geometrický obsah částí pod osou *x*.



Obr. č.4. Integrál funkce *f*(*x*) protínající v intervalu od *a* do *b* osu *x*

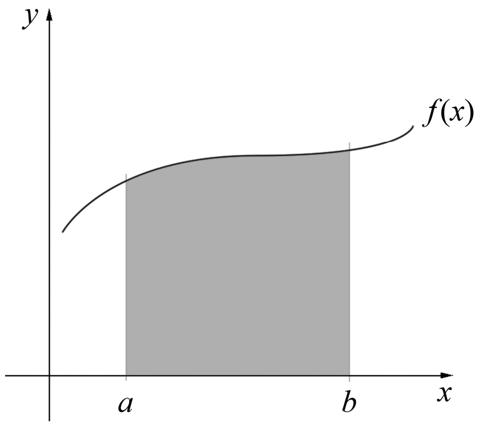
- Pro spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ dává Riemannova definice integrálu stejný výsledek jako definice Newtonova. Pro výpočet Riemannova integrálu ze spojité funkce lze tedy použít Newtonův vztah $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, což budeme v praktické části této práce efektivně využívat.

3.2.3. Aplikace určitého integrálu

Pomocí integrálů můžeme vypočítat obsah rovinných útvarů, objemy rotačních těles a délky rovinných křivek. Velké uplatnění má určitý integrál také ve fyzice a chemii.

- Nechť *f* je spojitá a nezáporná funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom učitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ udává obsah útvaru ohraničeného grafem funkce *f*, osou *x* a přímkami $x = a$, $x = b$. Tedy

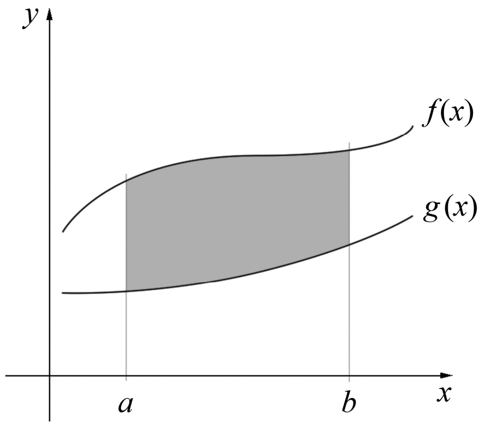
$$\mathrm{S(U)} = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$



Obr. č.5. Obsah útvaru ohraničeného grafem funkce *f*, osou *x* a přímkami $x = a$, $x = b$

- Je-li rovinný útvar ohraničený dvěma křivkami $y = f(x)$ shora, $y = g(x)$ zdola, jsou-li *f* a *g* jsou spojité funkce a je-li $g(x) \leq f(x)$, potom pro jeho obsah platí:

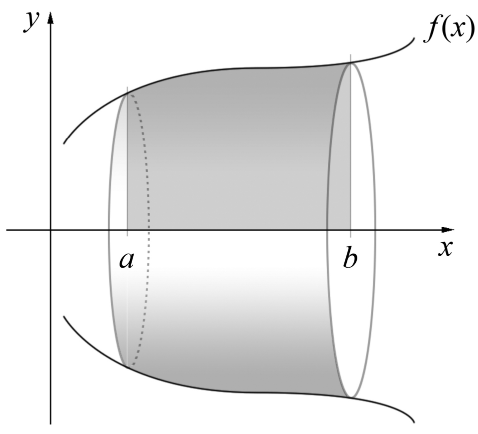
$$S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx\,.$$



Obr. č.6. Obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí *f* a *g*, a přímkami $x = a$, $x = b$

- Nechť rotační těleso vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x (f je nezáporná spojitá funkce) v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom jeho objem V vypočteme podle vztahu:

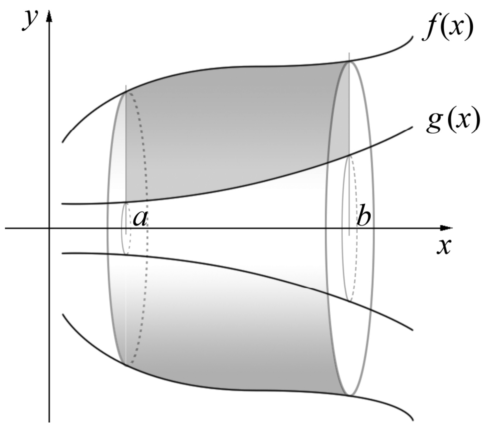
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$



Obr. č.7. Objem tělesa vzniklého rotací funkce *f* okolo osy *x* na intervalu od *a* do *b*

- Je-li rotační těleso vzniklé rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$ kolem osy x na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde f a g jsou nezáporné spojité funkce a platí $g(x) \leq f(x)$, potom jeho objem V vypočteme podle vztahu:

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx .$$



Obr. č.8. Objem tělesa vzniklého rotací plochy mezi funkcemi *f* a *g* okolo osy *x* na intervalu od *a* do *b*

3.2.4. Substituční metoda při výpočtu určitého integrálu

- Má-li funkce $\varphi(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci a je-li $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle A, B \rangle$ a pro každé t z intervalu $\langle A, B \rangle$ platí $A \leq \varphi(t) \leq B$, pak položíme-li $a = \varphi(\alpha)$ a $b = \varphi(\beta)$, můžeme analogicky jako v případě neurčitého integrálu odvodit vztah

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt .$$

- Příklad: Řešte integrál $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\,dt$.

- Řešení: Použijeme substituci $\left|\begin{array}{l} x = \ln(t) \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array}\right|$, tedy

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \int_{\ln 1}^{\ln 2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\ln 1}^{\ln 2}$$

a po dosazení

$$\left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln^2(2) - \frac{1}{2}\ln^2(1) = \frac{1}{2}\ln^2(2) \doteq 0{,}24$$

4. Speciální substituce

4.1. Goniometrické substituce

- Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ lze řešit substitucí $x = a.\sin t$ a výraz $\sqrt{a^2 - x^2}$ se zjednoduší použitím vzorce

$$1 - \sin^2 t = \cos^2 t \ .$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right|$ a tedy

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int \frac{\sin^5 t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cos t\,dt =$$

$$= \int \frac{\sin^5 t}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\,dt = \int \sin^5 t\,dt =$$

nyní použijeme substituci $\left| \begin{array}{c} \cos t = k \\ -\sin t\,dt = dk \end{array} \right|$ (viz. 4.4.), tedy

$$= \int \left(1 - \cos^2 t\right)^2 \sin t\,dt = -\int \left(1 - k^2\right)^2 dk =$$

$$= -\int \left(1 - 2k^2 + k^4\right)dk = -k + 2\frac{k^3}{3} - \frac{k^5}{5} + C\,.$$

Postupným návratem k původním proměnným získáme výsledek

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + C =$$

a po zpětném dosazení tedy

$$= -\cos(\arcsin x) + \frac{2}{3}\cos^3(\arcsin x) - \frac{1}{5}\cos^5(\arcsin x) + C\,.$$

- Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ lze řešit substitucí $x = a.\tan t$ a výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$ se zjednoduší použitím vzorce

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}\,.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{array}{l} x = \tan t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right|$, tedy

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\tan^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}\,\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^3 t} =$$

nyní použijeme substituci $\left| \begin{array}{l} \sin t = k \\ dt = \dfrac{dk}{\cos t} \end{array} \right|$ (viz. 4.4) a tedy

$$= \int \frac{1}{\cos^3 t} \frac{dk}{\cos t} = \int \frac{dk}{\cos^4 t} = \int \frac{dk}{\left(1-\sin^2 t\right)^2} =$$

$$= \int \frac{dk}{\left(1-k^2\right)^2} = \int \frac{dk}{[(1-k)(1+k)]^2} = \int \frac{dk}{(1-k)^2(1+k)^2}$$

výraz rozložíme na parcialní zlomky

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dk}{1-k} + \frac{1}{4}\int \frac{dk}{(1-k)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dk}{1+k} + \frac{1}{4}\frac{dk}{(1+k)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-k| + \frac{1}{4}\frac{1}{1-k} + \frac{1}{4}\ln|1+k| - \frac{1}{4}\frac{1}{1+k} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right| + \frac{1+k-1+k}{4\left(1-k^2\right)} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right| + \frac{2k}{4\left(1-k^2\right)} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right| + \frac{k}{2\left(1-k^2\right)} + C$$

nyní už jen dosadíme za k a potažmo i za t

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + \frac{\sin t}{2\left(1-\sin^2 t\right)} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin(\arctan x)}{1-\sin(\arctan x)}\right| + \frac{\sin(\arctan x)}{2\cos^2(\arctan x)} + C.$$

Příklady k procvičení:

1. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ $\left[2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C\right]$

2. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ $\left[\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C\right]$

3. $\int \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx$ $\left[\frac{9}{8}\left(x^4+1\right)^{\frac{2}{3}}+C\right]$

4. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]+C\right]$

5. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ $\left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C\right]$

6. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\arcsin x^4 + C\right]$

7. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,dx$ $\left[\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+C\right]$

4.2. Integrování racionálních funkcí

Integrování racionální funkce provádíme tak, že racionální funkci rozložíme na součet mnohočlenu a jednoduchých racionálních funkcí, které dovedeme integrovat – nazýváme je *parciální zlomky* a rozdělujeme je do čtyř typů:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\ \text{a}\ \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

ve kterých trojčlen x^2+px+q je bez reálných kořenů.

- Pro integrály typu $\int \frac{A}{x-a}\,dx$ používáme substituci

$$t = x\text{-}a\ ,\ dx = dt$$

a tedy

$$A\int \frac{1}{t}\,dt = A\ln|t| + C\ .$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{2}{x-3}\,dx$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{matrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{matrix} \right|$, tedy

$$\int \frac{2}{x-3}\,dx = 2\int \frac{1}{t}\,dt = 2\ln|x-3| + C$$

- Pro integrály typu $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx$ používáme substituci

$$t = x\text{-}a\ ,\ dx = dt$$

a tedy

$$A\int \frac{1}{t^k}\,dt = A\int t^{-k}dt = A\frac{t^{1-k}}{1-k} + C = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}} + C\,.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{2}{(x-3)^5}\,dx$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{matrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{matrix} \right|$, tedy

$$\int \frac{2}{(x-3)^5}\,dx = 2\int t^{-5}dt = 2\frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{2}{4}\frac{1}{t^4} + C$$

a po zpětném dosazení

$$\int \frac{2}{(x-3)^5}\,dx = -\frac{2}{4}\frac{1}{(x-3)^4}\,.$$

- Zlomky typu $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ rozložíme na součet dvou zlomků ve tvaru

$$\frac{K\left(x^2+px+q\right)'}{x^2+px+q}+\frac{L}{x^2+px+q}.$$

  - První zlomek má v čitateli derivaci jmenovatele a povede po substituci

$$t = x^2+px+q \qquad na \qquad \ln\left|x^2+px+q\right|+C$$

  - Druhý zlomek má v čitateli konstantu a ve jmenovateli x^2+px+q. Úpravami ho převedeme na typ

$$\frac{1}{t^2+1},$$

    který povede po substituci na arctan $t + C$.

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx$.
- Řešení: Integrál rozložíme na součet integrálů, tedy

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx.$$

Nejprve pomocí substituce $\left|\begin{array}{l} t = x^2+2x+2 \\ dt = 2x+2dx \end{array}\right|$ vypočteme první integrál:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C$$

po dosazení

$$= \ln\left|x^2+2x+2\right|+C.$$

Druhý integrál upravíme a použijeme substituci $\begin{vmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{vmatrix}$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C$$

a po dosazení

$$= \arctan(x+1) + C$$

Původní integrál je tedy roven

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \ln\left|x^2+2x+2\right| + \arctan(x+1) + C\,.$$

- *Integrál typu* $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx$ nejprve rozložíme na dva integrály stejným způsobem jako u předchozího typu.
  - První bude mít v čitateli derivaci kvadratického trojčlenu jmenovatele a druhý pouze konstantu. První integrál substitucí převedeme na integrál typu:

$$\int \frac{dt}{t^k} = \frac{-1}{k-1}\cdot\frac{1}{t^{k-1}} + C$$

  - Druhý integrál upravíme takto:

$$\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\,dt - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,dt$$

Postupně tedy snižujeme stupeň jmenovatele u prvního integrálu a druhý integrál můžeme počítat například metodou per partes.

Příklady k procvičení:

1. $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$

2. $\int \frac{2x^3-8x^2+9x+1}{x^2-4x+4}dx$ $\left[x^2+\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}\right]$

3. $\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}$ $\left[\frac{x}{216\left(x^2+9\right)}+\frac{x}{36\left(x^2+9\right)^2}+\frac{1}{648}\arctan\frac{x}{3}+C\right]$

4. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$ $\left[\ln|(x-2)(x+5)|+C\right]$

5. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right]$

4.3. Integrování iracionálních funkcí

Některé typy iracionálních funkcí lze vhodnými substitucemi převest na racionální funkce a ty potom integrovat způsobem ukázaným v předchozí kapitole.

- Integrály typu $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, kde n je přirozené číslo a determinant

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, převádíme na integrály racionálních funkcí použitím substituce

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\ .$$

- o Příklad: Řešte integrál $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx.$.
- o Řešení: Pro x>-1 použijeme výše uvedenou substituci

(a=1, b=1, c=0, d=1, n=2) ve tvaru $\begin{vmatrix} \sqrt{x+1} = t \\ dx = 2tdt \end{vmatrix}$ tedy

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx = \int \frac{t-1}{t+1}2t\,dt = \int \frac{t+1-2}{t+1}2t\,dt =$$

$$= \int\left(1-\frac{2}{t+1}\right)2t\,dt = 2\int t\,dt - 4\int \frac{t}{t+1}dt =$$

$$= t^2 - 4\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = t^2 - 4t + 4\ln(t+1) + C =$$

a po dosazení

$$= x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C.$$

- Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ můžeme vždy racionalizovat některou ze tří Eulerových substitucí:

  1. ***Eulerova substituce***

     - Je-li $a > 0$, pak použijeme substituci

       $$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Řešení: Použijeme substituci $\begin{vmatrix} \sqrt{1+x^2} = t - x \\ dx = \frac{2t^2+2}{4t^2}dt \end{vmatrix}$, tedy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{t - \frac{t^2-1}{2t}} \frac{2(t^2+1)}{4t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C .$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{t - \frac{t^2-1}{2t}} \frac{2(t^2+1)}{4t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt$$

a po dosazení

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C .$$

2. *Eulerova substituce*

- Je-li $c > 0$, pak použijeme substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c} .$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = xt+1 \\ dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2} dt \end{array} \right|$

a vyjádříme odmocninu pomocí proměnné t

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt+1 = \frac{2t-1}{1-t^2} t + 1 = \frac{2t^2-t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2} .$$

Spočítáme integrál proměnné t

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t-1}{1-t^2}\,\frac{t^2-t+1}{1-t^2}}\,dt = \int \frac{2\,dt}{2t-1} = \ln|2t-1|$$

a dosadíme z rovnice $\sqrt{x^2+x+1} = xt+1$ vypočtenou funkci parametru x, tedy

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|2\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right| = \ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x}\right| + C$$

3. *Eulerova substituce*

- Má-li kvadratický trojčlen dva různé, reálné kořeny r a s ve tvaru $ax^2+bx+c = a(x-r)(x-s)$, pak použijeme substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-r).$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$.
- Řešení: Rozložíme kvadratický trojčlen, tedy

$$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4),$$

použijeme substituci $\sqrt{x^2+3x-4} = t(x-1)$ a vyjádříme z ní x a dx, tedy

$$x = \frac{t^2+4}{t^2-1}$$

$$dx = \frac{2t(t^2-1)-(t^2+4)2t}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{10t}{(t^2-1)^2}\,dt\ .$$

Vyjádříme odmocninu pomocí parametru t

$$\sqrt{x^2+3x-4} = t(x-1) = t\left(\frac{t^2+4}{t^2-1}-1\right) =$$

$$= t\,\frac{t^2+4t-t^2+1}{t^2-1} = \frac{5t}{t^2-1}$$

a dosadíme do původního integrálu

$$\int \frac{\frac{-10t}{(t^2-1)^2}}{\left(\frac{t^2+4}{t^2-1}+4\right)\frac{5t}{t^2-1}}\,dt = -2\int \frac{dt}{t^2+4+4t^2-4}\,dt = -\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2} = \frac{2}{5t}\ .$$

Nyní si vyjádříme proměnnou t z rovnice $t^2 = \frac{x+4}{x-1}$, tedy

$$t = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}$$

a zpětným dosazením do integrálu získáme výsledek

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} = \frac{2}{5\sqrt{\frac{x+4}{x-1}}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C\ .$$

Příklady k procvičení:

1. $\int \frac{1+\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ $\qquad\left[\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2-x\right|+C\right]$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ $\qquad \left[\ln\left| \frac{x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}} \right| + C \right]$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ $\qquad \left[\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}} + C \right]$

4. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$ $\qquad \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}} + C \right]$

5. $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$

$$\left[\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{x^2+x+2} \right) + C \right]$$

6. $\int \frac{3x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

$$\left[\left(x^2-5x+28\right)\sqrt{x^2+4x+1} - 51\ln\left| x+2+\sqrt{x^2+4x+1} \right| + C \right]$$

4.4. Integrování goniometrických funkcí

- Integrály funkcí typu $R(\sin x, \cos x)$ lze v obecném případě (pro intervaly neobsahující body $x = (2k+1)\pi$ pro celá k) racionalizovat substitucí

$$\tan\frac{x}{2} = t\,.$$

Pro výpočty si můžeme odvodit několik užitečných vzorců

$$\tan\frac{x}{2} = t\,,\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,,\; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,,\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{1}{2-\cos x}\,dx$.

- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{matrix} \tan\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{matrix} \right|$, tedy

$$\int \frac{1}{2-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{3t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{3}}\,dt = \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctan}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

a zpětné dosazení nám dá výsledek

$$\int \frac{1}{2-\cos x}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctan}\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C.$$

Tato substituce je sice univerzální, ale může přinést i velice složité výpočty. V takovém případě může být použití jiné (speciální) substituce rychlejší:

- Je-li integrovaná funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledme k $\sin x$, tedy

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak použijeme substituci

$$t = \cos x.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dx = -\frac{dt}{\sin x} \end{array} \right|$, tedy

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{1+t} . \frac{-dt}{\sin x} = -\int \frac{dt}{1+t}$$

a po zpětném dosazení

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = -\ln|1+\cos x| + C .$$

- Je-li integrovaná funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledme k $\cos x$, tedy

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak použijeme substituci

$$t = \sin x.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$.
- Řešení: Integrál upravíme

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x \, dx$$

a použijeme substituci $\left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right|$, tedy

$$= \int t^2 (1-t^2)^2 \, dt = \int t^2 (1-2t^2+t^4) dt =$$

$$= \int t^2 dt - 2\int t^4 dt + \int t^6 dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}$$

a po zpětném dosazení získáme výsledek

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - 2\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

- Je-li integrovaná funkce $R(\sin x, \cos x)$ sudá k $\sin x$ *i* $\cos x$, tedy

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

pak použijeme substituci

$$t = \tan x.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x} dx$.
- Řešení: Integrál upravíme a použijeme substituci $\left| \begin{matrix} t = \tan x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right|$,

tedy

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{\sin x}{\cos x}} \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{t^2 - 5t} dt = \int \left(-\frac{1}{5t} + \frac{1}{5(t-5)} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|t| + \frac{1}{5}\ln|t-5| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-5}{t}\right| + C$$

a po dosazení

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan x - 5}{\tan x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|1 - \frac{5}{\tan x}\right| + C$$

Příklady k procvičení:

1. $\int \sin^5 x \cos x\,dx$ $\left[\frac{\sin^6 x}{6}\right]$

2. $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$ $\left[\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}\right]$

3. $\int \sin^{10} x \cos^3 x\,dx$ $\left[\frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13}\right]$

4. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$ $\left[\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}\right]$

5. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\cos^8 \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos^6 \frac{x}{2}\right]$

6. $\int \cos^2 3x \sin^4 3x\,dx$ $\left[\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right)\right]$

4.5. Integrování binomických funkcí

Integrály ve tvaru $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$, kde m, n a p jsou racionální čísla, nazýváme binomické integrály. Racionalizují se pomocí substituce, je-li alespoň jedno z čísel p , $(m+1)/n$, nebo $(m+1)/n+p$ celé číslo.

Vhodnou substituci volíme podle čísla p:

- Je-li *p* celé číslo, pak použijeme substituci

$$t = x^{\frac{1}{S}}$$

(*S* je nejmenší společný násobek jmenovatelů zlomků *m* a *n*)

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

- Řešení: Integrál upravíme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} dx$$

a použijeme substituci $t = x^{\frac{1}{3}}$ ve tvaru $\left|\begin{matrix} x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{matrix}\right|$, tedy

$$= \int t^{-2}\left(1+t^2\right)^{-1} 3t^2 dt = 3\int \frac{dt}{t^2+1} = 3\arctan t + C$$

a po zpětném dosazení za *t*

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)} = 3\arctan\sqrt[3]{x} + C$$

- Není-li *p* celé číslo, pak použijeme substituci

$$t = x^n,$$

která převede funkci na typ

- $R\left(t, \sqrt[s]{(a+bt)^r}\right)$, který řešíme další substitucí

$$z^s = a + bt,$$

- nebo na typ $R\left(t, \sqrt[s]{\left(\frac{a+bt}{t}\right)^r}\right)$, který řešíme substitucí

$$z^s = \frac{a+bt}{t}.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

- Řešení: Integrál upravíme

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$$

a použijeme substituci $\left| \begin{array}{l} t = x^{\frac{1}{4}} \\ dt = \frac{dx}{4t^3} \end{array} \right|$, tedy

$$= \int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{3}} 4t^3 dt = 4\int t(1+t)^{\frac{1}{3}}.$$

Použijeme další substituci $\left| \begin{array}{c} z^3 - 1 = t \\ 3z^2 dz = dt \end{array} \right|$, tedy

$$= 4\int \left(z^3 - 1\right) z\, 3z^2\, dz = 12\int z^3\left(z^3 - 1\right)dz = 12\int \left(z^6 - z^3\right)dz$$

po integraci a zpětném dosazení získáme

$$=12\left(\frac{z^7}{7}-\frac{z^4}{4}\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[3]{(1+t)^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{(1+t)^4}}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C=\frac{3}{7}\left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$$

Příklady k procvičení:

1. $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}+C\right]$

2. $\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}$ $\left[3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2\left(1+\sqrt[3]{x}^{\,2}\right)}\right]+C\right]$

3. $\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C\right]$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ $\left[\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C\right]$

4.6. Integrování exponenciálních funkcí

Substituci můžeme použít i počítáme-li integrály z exponenciálních funkcí.

- Integrály typu $\int R\left(e^x\right)dx$ lze racionalizovat substitucí

$$t=e^x.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$.
- Řešení: Použijeme substituci $\left|\begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{matrix}\right|$, tedy

$$\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x-2}{e^{2x}+1}e^x\,dx = \int \frac{t-2}{t^2+1}dt =$$

$$= \int \frac{t}{t^2+1}dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - 2\operatorname{arctan} t + C =$$

a po zpětném dosazení

$$\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) - 2\operatorname{arctan} e^x + C.$$

- Integrály typu $\int R\left(a^x\right)dx$ lze převést pomocí vzorce $a = e^{\ln a}$ na integrály typu $\int R\left(e^{x\ln a}\right)dx$ a řešit způsobem uvedeným v minulé kapitole, nebo racionalizovat pomocí substituce

$$t = a^x.$$

- Příklad: Řešte integrál $\int \frac{dx}{1+2^x}$.
- Řešení: Použijeme substituci $t = a^x$ ve tvaru $\left|\begin{matrix} x = \frac{\ln t}{\ln 2} \\ dx = \frac{dt}{t\ln 2} \end{matrix}\right|$, tedy

$$\int \frac{dx}{1+2^x} = \int \frac{1}{1+t}\,\frac{dt}{t\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t(1+t)}$$

nyní integrál rozložíme na součet zlomků

$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{\ln 2}\left(\ln|t| - \ln|t+1|\right) + C\,.$$

Po zpětném dosazení získáváme výsledek

$$\int \frac{dx}{1+2^x} = \frac{\ln\left|\frac{2^x}{2^x+1}\right|}{\ln 2} + C\,.$$

Příklady k procvičení:

1. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C\right]$

2. $\int \frac{\sqrt{e^x}}{e^x+4}\,dx$ $\left[\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{e^x}}{2} + C\right]$

3. $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx$ $\left[-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + C\right]$

4. $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + C\right]$

5. $\int \frac{1}{3^x+1}\,dx$ $\left[x - \frac{\ln\left(3^x+1\right)}{\ln 3} + C\right]$

5. Závěr

V práci bylo ukázáno použití substituční metody pro výpočet neurčitého i určitého integrálu a byl poskytnut ucelený přehled konkrétních substitučních metod výpočtu.

Nejprve byly oba typy integrálu definovány, byl popsán způsob jejich výpočtu a praktického využití, následně byla odvozena substituční metoda výpočtu obou typů.

V další části byly jednotlivé, nejběžněji užívané, typy substitucí nejprve popsány a následně na konkrétních řešených příkladech pro názornost předvedeny. Pro všechny typy substitucí byly v práci připojeny i neřešené příklady s uvedeným výsledkem, pro jejichž řešení je daná substituční metoda použitelná.

Příklad pro IV. typ racionální funkce v kapitole 4.2. byl vynechán, neboť substituční metoda je jen jednou ze součástí komplikovaného řešení, které vyžaduje použití řady metod, jež nebyly tématem této práce a svou obtížností překračují její rámec.

6. Summary

In this work was presented usage of substitution method for calculation of definite and indefinite integral and overview of concrete substitutions was offered.

Firstly both types of integral were defined, techniques of their calculation and practical usage were described. Secondly the substitution methods for both of them were deduced.

In the next part of this work, various single types of substitution were described and presented on few specific samples. For all kinds of substitution also unsolved examples of methods were attached.

Solved example of IV. type of racional function in chapter 4.2. was excluded, because of the fact, that the substitution method is only one part of large-scaled solution including various methods, which are not subject of this work.

7. Seznam použité literatury

- Aksamit, P., Mráz, F. *Příklady z matematické analýzy pro učitelské studium*. České Budějovice: Pedagogická fakulta JU České Budějovice, 1995. 209 s.
- Jarník, V. *Integrální počet (I)*. Praha: Academia, 1974. 243 s.
- Kaňka, M., Henzler, J. *Matematika pro ekonomické fakulty*. Praha: Ekopress, 2000. 379 s.
- Mojeskola. *Matika krokem.* [15.4. 2008]. Dostupné na WWW: <http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/matika_krokem.php>
- Wikipedie. *Riemannův integrál*. [15.4. 2008]. Dostupné na WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l>

8. Přílohy

8.1. Vzorce pro integrování

Ze vzorců pro derivování můžeme odvodit základní vzorce pro integrování (platí pro proměnné z definičního oboru výrazů):

- $\int a\,dx = ax + C$, a je reálná konstanta
- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctan} x + C$
- $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctan} \dfrac{x}{a} + C$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

- $\int c.f(x)\,dx = c.\int f(x)\,dx$

  konstantu (v součinu) lze vytknout před integrál

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

  v součtu integrujeme jednotlivé sčítance

- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

  v rozdílu integrujeme jednotlivé členy