Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

NEVLASTNÍ RIEMANNŮV INTEGRÁL A METODY VÝPOČTU

(The CALCULUS of IMPROPER INTEGRAL)

Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

Autor práce: Jan Babický
Studijní obor: FIMp

2008

Zadání diplomové práce

Student: **Jan BABICKÝ**
Téma: **Nevlastní Riemannův integrál a metody výpočtu**
(The calculus of improper integral)

Zásady pro vypracování

Diplomant v práci popíše a odvodí nevlastní Riemannův integrál prvního a druhého druhu a ukáže metody vedoucí k výpočtu, případně k zjišťování konvergence příslušných integrálů.

Doporučená literatura:
V. Jarník : Integrální počet I , Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Petr Chládek, Ph.D.**

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne ………………

………….………..………….
Jan Babický

Chtěl bych touto cestou poděkovat Mgr. Petru Chládkovi, Ph. D. za jeho odbornou pomoc, cenné rady, připomínky a náměty, kterými mi při vypracování velmi pomohl.

Děkuji také své rodině a přátelům za podporu, které se mi dostávalo po celou dobu vysokoškolského studia.

ANOTACE

V práci je popsán a odvozen nevlastní Riemannův integrál prvního a druhého druhu, jsou zde ukázány metody vedoucí k výpočtu těchto integrálů, případně ke zjišťování jejich konvergence. Druhá část obsahuje řešené příklady s popisem postupu.

ABSTRACT

At this work there are described and derived the first and the second type improper integral, there are showed a methods which goes to solve these of Riemann´s improper integral, possibly to finding out their convergence. The second part of this work contains the solution of the examples and the description of the process.

Obsah

1. Úvod

Protože jsem se při studiu matematické analýzy nesetkal s uceleným textem, týkajícím se nevlastního integrálu, rozhodl jsem se tomuto tématu věnovat svoji bakalářskou práci.

Pokusím se na základě popisu konstrukce Riemannova integrálu, následném definování nevlastního integrálu, shrnutím metod vedoucích k výpočtu nevlastních integrálů prvního a druhého druhu a použitím těchto metod na konkrétních příkladech, podat čtenáři návod a potřebné znalosti k počítání s nevlastními integrály.

Okrajově také zmíním životopis Bernharda Riemanna a jeho přínos matematice.

Předpokládanými a potřebnými znalostmi k pochopení problematiky nevlastních integrálů je látka matematické analýzy 1 a matematické analýzy 2, zejména pak vlastnosti funkcí, limitní počet, derivování, integrování a substituční metody pro integrace.

2. Georg Friedrich Bernhard Riemann

2.1 Riemannův přínos matematice

Georg Friedrich Bernhard Riemann byl německý matematik, který výrazně přispěl k propojení geometrie a matematické analýzy. Na jeho myšlenkách byly dále rozvinuty například Riemannova geometrie, algebraická geometrie či teorie komplexních ploch. Tyto oblasti matematiky se staly základem topologie. V reálné analýze přispěl definicí Riemannova integrálu a rozvinul také teorii trigonometrických řad. Ve svém článku věnovaném teorii čísel zavedl Riemannovu funkci zeta a ukázal její vztah k rozmístění prvočísel. V tomtéž článku vyslovil řadu domněnek o vlastnostech zeta funkce, z nichž nejznámější je Riemannova hypotéza.

2.2 Biografie

2.2.1 Dětství a mládí

Bernhard Riemann se narodil 17. září 1826 v malé vesničce Breselenz poblíž Dannenbergu v dnešním Německu. Jeho otcem byl Friedrich Bernhard Riemann, chudý luteránský kněz. Již od raného dětství projevoval Riemann výjimečné matematické nadání (zejména měl skvělé počtářské dovednosti), ale prodělal několik nervových kolapsů, trpěl abnormální stydlivostí a měl hrůzu z mluvení na veřejnosti.

Na střední škole se Riemann zabýval především studiem Bible, ale i zde se projevoval jeho vztah k matematice - pokusil se matematicky dokázat korektnost knihy Genesis. Své učitele však překvapoval svými schopnostmi při řešení obtížných matematických úloh. Roku 1840 se odstěhoval ke své babičce do Hannoveru, kde začal studoval na místním Lyceu. Po babiččině smrti roku 1842 se odstěhoval do Johannea v Lüneburgu. V roce 1846 začal studovat filologii a teologii, aby se v budoucnosti mohl stát knězem a finančně tím zajistit rodinu. O rok později mu však jeho otec povolil přerušit toto studium a zahájit na proslulé universitě v Göttingenu studium matematiky. Zde se poprvé potkal s Carlem Friedrichem Gaussem, když navštěvoval jeho přednášky z metody nejmenších čtverců. Ještě téhož roku (1847) však odešel studovat do Berlína, kde tehdy přednášeli Jacobi, Dirichlet a Steiner. Po dvou letech se však roku 1849 vrátil zpět do Göttingenu.

2.2.2 Dospělost

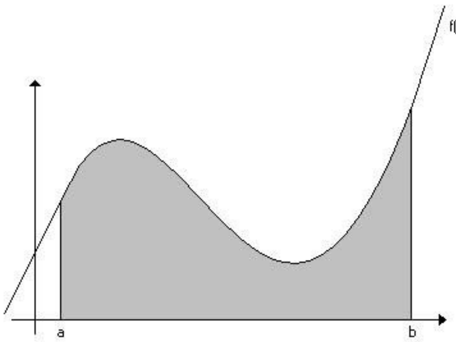
Svou první universitní přednášku v Göttingenu vedl Riemann roku 1854, již roku 1857 se stal na této univerzitě mimořádným profesorem a roku 1859 profesorem řádným. Svými pracemi na geometrii, jež dnes bývá nazývána Riemannova, a svojí teorií vyšších dimenzí připravil půdu pro Alberta Einsteina a jeho teorii relativity. Roku 1862 se oženil s Elise Kochovou. Zemřel na tuberkulózu v Selasce (nyní vesnička Ghiffa u jezera Maggiore) při své třetí cestě do Itálie roku 1866.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

3. Určitý Riemannův integrál

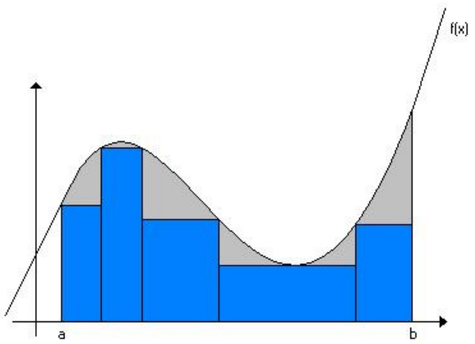
3.1 Konstrukce Riemanova integrálu

Jestliže hledáme obsah rovinného útvaru ohraničeného z jedné jeho strany funkcí *f*, můžeme použít postup popsaný panem Riemannem. Předpokládejme, že máme omezenou funkci *f*(*x*), která je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ - viz obr. 4.1.

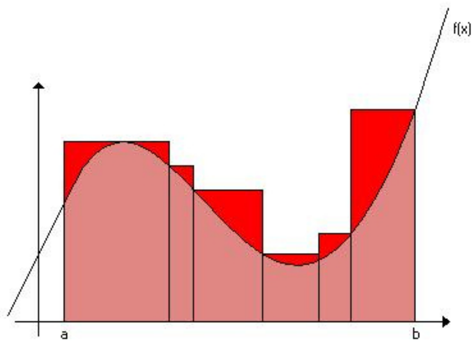


Obr. 4.1

Nyní naznačíme stručný popis postupu. Budeme převádět obsah plochy pod křivkou na součet obsahů obdélníků o určitých dále popsaných kritériích. K tomuto rozdělíme interval, na kterém obsah počítáme (v tomto případě $\langle a, b\rangle$) na podintervaly. Pomocí těchto intervalů, sestrojíme dva druhy obdélníků (tzv. dolní součet (viz obr. č. 4.2) a tzv. horní součet (viz obr. č. 4.3)). Svislou stranu obdélníků u dolních součtů bude představovat inf *f*(*x*) na příslušném intervalu, u horních součtů ho bude představovat sup *f*(*x*) na příslušném intervalu a délku vodorovných stran budou u obou součtů tvořit ony příslušné intervaly.



Obr. 4.2



Obr. 4.3

Potom pokud budeme dělení intervalu neustále zjemňovat, budou se dolní a horní součty limitně blížit jeden druhému a zároveň skutečnému obsahu.

Definice 3.1

Buď *f* funkce, $f(x) > 0$ na $\langle a,b\rangle$, f omezená na $\langle a,b\rangle$. Pak posloupnost $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n - b$ nazveme *dělení D* intervalu $\langle a,b\rangle$, $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1,...,n$ je *i-tý dělící interval*, x_i jsou *dělící body* dělení *D*. Dále označíme

$$m_i = \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad i = 1,\dots,n$$

$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ dolní součet příslušný funkci *f* a dělení *D*

$S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ horní součet příslušný funkci *f* a dělení D

Je-li *D* dělení takové, že každý bod dělení *D* je i bodem dělení D_1, pak se D_1 nazývá *zjemnění* dělení *D*, píšeme $D \subset D_1$.

Věta 3.2 (O vlastnosti horních a dolních součtů)

Nechť *f* je funkce omezená na $\langle a,b\rangle$, , např. $c \le f(x) \le d \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$ a D_1, D_2 jsou libovolná dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$c(b-a) \le s(D1, f) \le S(D_2, f) \le d(b-a)$$

Věta 3.3

Množinu všech dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ označíme $\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$. Podle věty 4.2 jsou množiny $\{s(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\}$, $\{S(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\}$ ohraničené.

Z axiomu supréma (resp. infima) plyne, že

$$\sup\{S(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\} = d(b-a), \quad d = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

$$\inf\{s(D,f) \mid D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\} = c(b-a), \quad c = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

Definice 3.4

Položme nyní

$$\sup\,\{s(D,f)\mid D\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\}=\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx$$

a nazvěme tento integrál jako *dolní Riemannův integrál* funkce *f* na $\langle a,b\rangle$ a

$$\inf\,\{S(D,f)\mid D\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\}=\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$$

a nazvěme tento integrál jako *horní Riemannův integrál* funkce *f* na $\langle a,b\rangle$.

Věta 3.5 (O vztahu dolního a horního Riemannova integrálu)

$$c(b-a)\le\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx\le\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx\le d(b-a),\qquad c\le f(x)\le d\ \ \forall x\in\langle a,b\rangle$$

Plyne bezprostředně z definice dolního a horního Riemannova integrálu a z věty 3.2.

Definice 3.6

Jestliže $\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$, říkáme, že funkce *f* má na intervalu $\langle a,b\rangle$ *určitý Riemannův integrál* a hodnotu tohoto integrálu klademe

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$$

Takovou funkci nazýváme *Riemannovsky integrabilní* na $\langle a,b\rangle$, značíme $f\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Jestliže $\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx<\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$, říkáme, že funkce *f* není na $\langle a,b\rangle$ Riemannovsky integrabilní a její Riemannův integrál nedefinujeme.

Příklad 3.1

1) Konstantní funkce $f(x) = c$ je na libovolném intervalu $\langle a,b\rangle$ R-integrabilní.

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \quad M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

Podle věty 3.5 (o vztahu dolního a horního Riemannova integrálu):

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le M(b-a)$$

Protože $c = m$, $c = M$

$$c(b-a) \le \underline{\int_a^b} cdx \le \overline{\int_a^b} cdx \le c(b-a)$$

2) Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá na $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Označme $D : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak

$$m_i = \inf_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} \chi(x) = 0$$

$$M_i = \sup_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} \chi(x) = 1$$

a odtud

$$s(D,\chi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0\cdot(x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$S(D,\chi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_{i-1} - x_{i-2}) + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

$$\underline{\int_a^b} \chi(x)dx = 0$$

$$\overline{\int_a^b} \chi(x)dx = b - a$$

Potom protože $0 = \underline{\int_a^b} \chi(x)dx \ne \overline{\int_a^b} \chi(x)dx = b - a$ nemá Dirichletova funkce Riemannův integrál (viz definice 3.6).

Věta 3.7 (Newton - Leibnitzova formule, Základní věta integrálního počtu)

Nechť f je Riemannovsky integrabilní na $\langle a,b\rangle$ a F je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a primitivní k funkci f. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

4. Nevlastní Riemannův integrál

Nutnou podmínkou existence Riemannova integrálu je konečnost intervalu, na němž integrujeme, a omezenost funkce *f*(*x*) na tomto intervalu. Integrály, které obě podmínky splňují označujeme jako *vlastní*. Pokud není splněn některý z těchto předpokladů, pak hovoříme o *integrálu nevlastním*.

4.1 Nevlastní Riemannův integrál 1. druhu

Integrály, které porušují první podmínku, tzn. integrace probíhá na nekonečném intervalu, jsou *nevlastní integrály 1. druhu* (*tzv. vlivem meze*).

Definice 4.1 a)

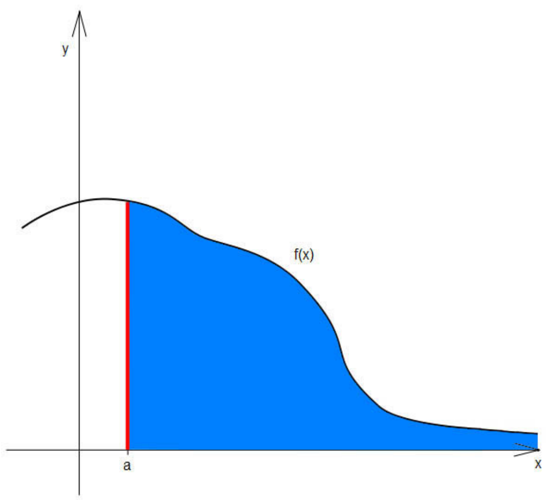
Nechť *f* je definovaná na intervalu $\langle a, \infty)$ a Riemannovsky integrabilní na každém intervalu $\langle a, c \rangle$, kde c je libovolný bod intervalu $\langle a, \infty)$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)dx$$

říkáme, že existuje *nevlastni integrál 1. druhu* funkce *f* na intervalu $\langle a, \infty \rangle$ a označujeme jej

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Viz obr. 4.1 a)



Obr 4.1 a)

Definice 4.1 b)

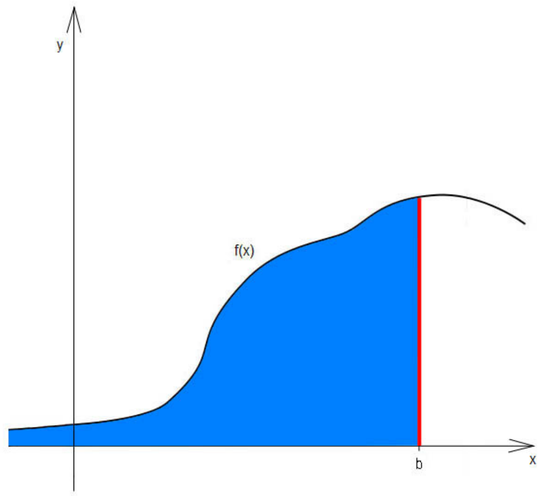
Nechť f je definovaná na intervalu $(-\infty, b\rangle$ a Riemannovsky integrabilní na každém intervalu $\langle c, b\rangle$, kde c je libovolný bod intervalu $(-\infty, b\rangle$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx$$

říkáme, že existuje *nevlastni integrál 1. druhu* funkce f na intervalu $(-\infty, b\rangle$ a označujeme jej

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

Viz obr. 4.1 b)



Obr 4.1 b)

4.2 Nevlastní Riemannův integrál 2. druhu

Pokud je v okolí bodu a, okolí bodu b nebo uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ funkce neohraničená, ale existuje (jednostranná) limita v bodě neohraničenosti, pak je porušena druhá podmínka a hovoříme o *nevlastních integrálech 2. druhu* (*tzv. vlivem funkce*).

Definice 4.2

a) Nechť *f* je definovaná na intervalu $(a,b\rangle$ a v každém pravém okolí bodu *a* neohraničená. Potom říkáme, že *f* má v bodě *a* singularitu (*a* je *singulární bod* funkce *f*).

b) Nechť *f* je definovaná na intervalu $\langle a,b)$ a v každém levém okolí bodu *b* neohraničená. Potom říkáme, že *f* má v bodě *b* singularitu (*b* je *singulární bod* funkce *f*).

c) Nechť *f* je definovaná na intervalech $\langle a,d)$ a $(d,b\rangle$ a v každém levém i pravém okolí bodu *d* neohraničená. Potom říkáme, že *f* má v bodě *d* singularitu (*d* je *singulární bod* funkce *f*).

Definice 4.3 a)

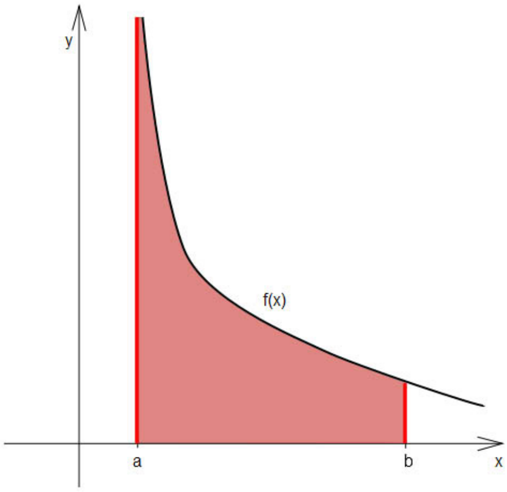
Nechť nyní *f* je definovaná na intervalu $(a,b\rangle$ přičemž bod *a* je singulárním bodem funkce *f*, a nechť *f* je Riemannovsky integrabilní na každém intervalu $\langle c,b\rangle \subset (a,b\rangle$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$$

nazveme ji *nevlastní integrál 2. druhu (se singularitou v dolní mezi)* a značíme jej

$$\int_a^b f(x)dx$$

Viz obr. 4.2 a)



Obr. 4.2 a)

Definice 4.3 b)

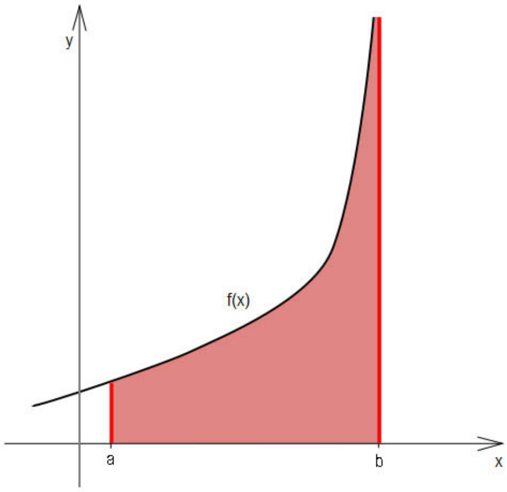
Nechť *f* je definovaná na intervalu $\langle a, b)$ přičemž bod *b* je singulárním bodem funkce *f*, a nechť *f* je Riemannovsky integrabilní na každém intervalu $\langle a, c\rangle \subset \langle a, b)$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx$$

nazveme ji *nevlastní integrál 2. druhu (se singularitou v horní mezi)* a značíme jej

$$\int_a^b f(x)dx$$

Viz obr. 4.2 b)



Obr 4.2 b)

Definice 4.3 c)

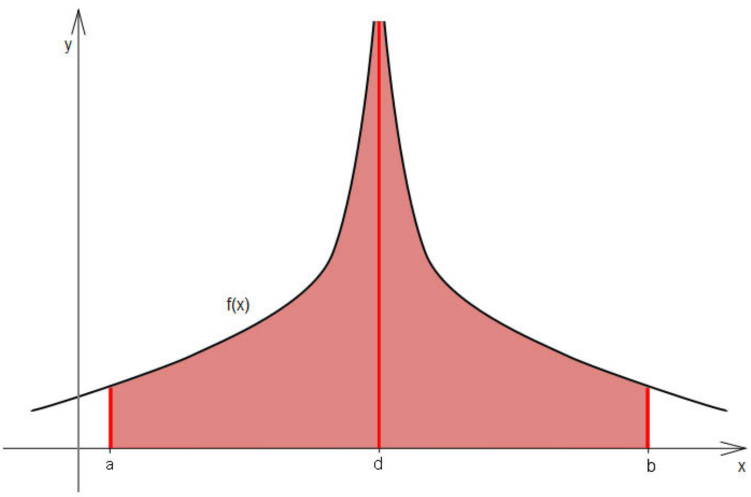
Nechť *f* je definovaná na intervalech $\langle a, d)$ a $(d, b\rangle$ přičemž bod *d* je singulárním bodem funkce *f*, a nechť *f* je Riemannovsky integrabilní na každém intervalu $\langle a, c_1\rangle \subset \langle a, d)$ a $\langle c_2, b\rangle \subset (d, b\rangle$. Jestliže existují vlastní limity

$$\lim_{c_1 \to d-} \int_a^{c_1} f(x)dx \text{ a } \lim_{c_2 \to d+} \int_{c_2}^{b} f(x)dx$$

nazveme jejich součet *nevlastní integrál 2. druhu (se singularitou uvnitř integračního intervalu)* a značíme jej

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

Viz obr. 4.2 c)



Obr. 4.2 c)

5. Metody výpočtu nevlastích integrálů

5.1 Výpočet integrálů z definice

Jak bylo již naznačeno v předchozí kapitole, hodnoty nevlastních integrálů určujeme pomocí limit. V jednoduchých příkladech nám stačí zkoumat konvergenci integrálů přímo z definice tak, že dokážeme existenci (popř. neexistenci) vlastní limity.

Pak tedy pokud je daná limita vlastní, říkáme, že se jedná o konvergentní integrál, popř. že *integrál konverguje*. Naopak pokud daná limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že se jedná o divergentní integrál, popř. že *integrál diverguje*.

Pro výpočet nevlastního integrálu je příznivá situace, když se jedná o limitu vlastní. Pak nevlastní integrál touto limitou (podle definic 4.1 a 4.3) nahradíme a hodnotu vypočteme podle základní věty integrálního počtu (Newton - Leibnitzovy formule – v textu uvedena jako věta 3.7).

Výše popsané postupy aplikujeme na ty nevlastní integrály, které mají na integračním intervalu $\langle a, b \rangle$ vždy pouze jeden singulární bod.

Pokud má integrál na integračním intervalu $\langle a, b \rangle$ konečně mnoho bodů nespojitosti, v jejichž okolí je neohraničenou funkcí, potom takový integrál vyjádříme jako součet integrálů přes dílčí intervaly tak, aby jednotlivé integrály měly singularitu pouze v jedné mezi. Jestliže všechny tyto integrály konvergují, je daný nevlastní integrál také konvergentní a je roven jejich součtu. V opačném případě integrál diverguje. U divergence nám k prohlášení celého integrálu za divergentní stačí, aby divergoval pouze jeden jeho dílčí integrál.

5.2 Výpočet integrálů pomocí kritérií konvergence

Ve složitějších případech, kdy je výpočet integrálu podle definice náročný, volíme jiný postup. Porovnáváme integrovanou funkci s jinou jednodušší funkcí. K tomuto postupu užíváme tzv. *kritéria konvergence*, na jejichž základě rozhodneme, zda se jedná o integrál konvergentní nebo divergentní. Pokud se tedy jedná o integrál konvergentní, jeho hodnotu spočítáme nebo se rozhodneme výpočet ukončit odhadem výsledné hodnoty integrálu pomocí srovnávací funkce.

Obecné pravidlo pro konvergenci integrálů vyjadřuje následující věta.

Věta 5.1 (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže integrál $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konverguje a existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)dx$, pak je tato limita rovna nule.

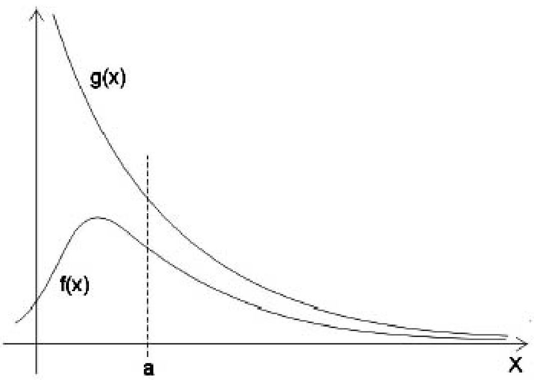
5.2.1 Kritéria konvergence pro nevlastní integrály 1. druhu

Ke zjišťování konvergence nevlastních integrálů používáme kritéria, založená na nejrůznějších podmínkách. Základním kritériem je *srovnávací kritérium*.

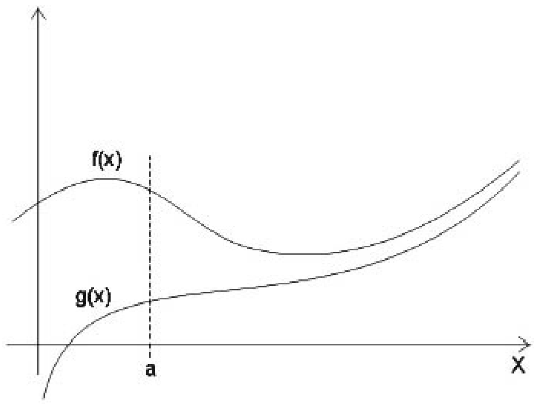
Věta 5.2 (Srovnávací kritérium)

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce definované na intervalu $\langle a,\infty)$ a integrovatelné na libovolném intervalu $\langle c,\infty)$, kde c je libovolný bod $\langle a,\infty)$. Potom platí

- Pokud pro každé $x \in \langle a,\infty)$ platí $0 \le f(x) \le g(x)$ a integrál $\int_a^{\infty} g(x)dx$ konverguje, konverguje i integrál $\int_a^{\infty} f(x)dx$. (viz obr. 5.1 a)).
- Pokud pro každé $x \in \langle a,\infty)$ platí $0 \le g(x) \le f(x)$ a integrál $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverguje, diverguje i integrál $\int_a^{\infty} f(x)dx$. (viz obr. 5.2 b)).



Obr. 5.1 a)



Obr. 5.2 b)

Dalším z kritérií použitelných ke zjištění konvergence (popř. divergence) nevlastních integrálů je *limitní srovnávací kritérium*. Toto kritérium je silnější než srovnávací kritérium.

Věta 5.3 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou nezáporné funkce definované na intervalu $\langle a, \infty)$.

Nechť existuje limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Pak platí

- Pokud $K < \infty$ a integrál $\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje, konverguje i integrál $\int_a^\infty f(x)dx$.
- Pokud $K > 0$ a integrál $\int_a^\infty g(x)dx$ diverguje, diverguje i integrál $\int_a^\infty f(x)dx$.

Věta 5.4 (Cauchy – Bolzanovo kritérium)

a) Integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $c > a$ tak, že pro každé $c_2 > c_1 > c$ platí

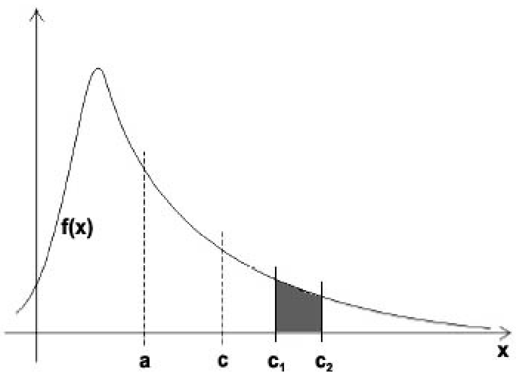
$$\left|\int_a^{c_2} f(x)dx - \int_a^{c_1} f(x)dx\right| = \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

viz obr. 5.2 a)

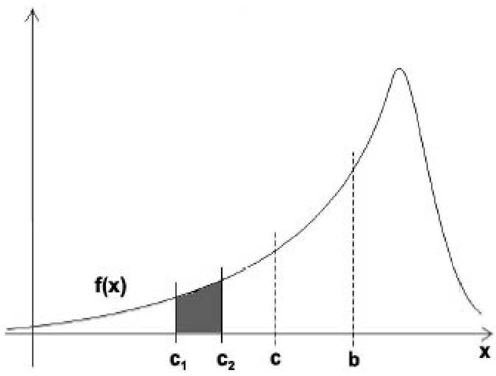
b) Integrál $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $c < b$ tak, že pro každé $c_1 < c_2 < c$ platí

$$\left|\int_{c_1}^{b} f(x)dx - \int_{c_2}^{b} f(x)dx\right| = \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

viz obr. 5.2 b)



Obr 5.2 a)

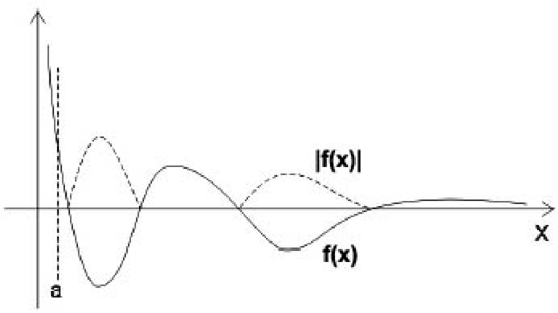


Obr 5.2 b)

Důsledek:

Z Cauchy – Bolzanova kritéria plyne, že pokud konverguje integrál $\int_a^\infty |f(x)|dx$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f(x)dx$. Opačná implikace ovšem neplatí tzn. z konvergence integrálu $\int_a^\infty f(x)dx$ nelze usuzovat na konvergenci integrálu $\int_a^\infty |f(x)|dx$.

viz obr. 5.3



Obr 5.3

Dále pak na základě Cauchy – Bolzanova kritéria a těchto důsledků můžeme zavést následující definici.

Definice 5.5

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $\langle a, \infty)$. Potom pokud konverguje integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ i integrál $\int_a^\infty |f(x)|dx$, pak integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ nazýváme *absolutně konvergentní* a funkci $f(x)$ *absolutně integrovatelnou* na intervalu $\langle a, \infty)$.

Věta 5.6

Pokud je funkce $f(x)$ absolutně integrovatelná na intervalu $\langle a, \infty)$ a funkce $g(x)$ je na tomto intervalu omezená, potom jejich součin $f(x) \cdot g(x)$ je funkcí absolutně integrovatelnou na intervalu $\langle a, \infty)$.

Věta 5.7 (Abelovo kritérium)

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány na intervalu $\langle a, \infty)$ a platí

- integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje
- $g(x)$ je monotónní a ohraničená na intervalu $\langle a, \infty)$

Pak platí, že integrál

$$\int_a^\infty f(x) \cdot g(x) dx$$

konverguje.

Věta 5.8 (Dirichletovo kritérium)

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány na intervalu $\langle a,\infty)$ a platí

- Funkce $f(x)$ je integrovatelná na libovolném intervalu $\langle a,c\rangle$ a existuje konstanta *K*, tak že $\forall c \in \langle a,\infty)$ je integrál $\int_a^c f(x)dx \leq K$.
- Funkce $g(x)$ je monotónně klesající k 0, tj. $\lim_{x\to\infty} g(x)dx = 0$.

Pak integrál

$$\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)dx$$

konverguje.

5.2.2 Kritéria konvergence pro nevlastní integrály 2. druhu

Věta 5.9 (Srovnávací kritérium)

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce definované na intervalu $(a,b\rangle,$ přičemž bod *a* je singulárním bodem obou funkcí. Nechť jsou integrovatelné na každém intervalu $\langle c,b\rangle \subset (a,b\rangle.$ Potom platí

- Pokud pro každé $x \in (a,b\rangle$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$ a integrál $\int_a^b g(x)dx$ konverguje, konverguje i integrál $\int_a^b f(x)dx.$
- Pokud pro každé $x \in (a,b\rangle$ platí $0 \leq g(x) \leq f(x)$ a integrál $\int_a^b g(x)dx$ diverguje, diverguje i integrál $\int_a^b f(x)dx.$

Věta 5.10 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou nezáporné funkce definované na intervalu $(a,b\rangle$, přičemž bod a je singulárním bodem obou funkcí.

Nechť existuje limita

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$$

Pak platí

- Pokud $K<\infty$ a integrál $\int_a^b g(x)dx$ konverguje, konverguje i integrál $\int_a^b f(x)dx.$
- Pokud $K>0$ a integrál $\int_a^b g(x)dx$ diverguje, diverguje i integrál $\int_a^b f(x)dx.$

Věta 5.11 (Cauchy – Bolzanovo kritérium)

a) Je-li a singulárním bodem funkce f, pak $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon>0$ existuje $c>a$ tak, že pro každé $c_1, c_2 \in (a,c)$ platí

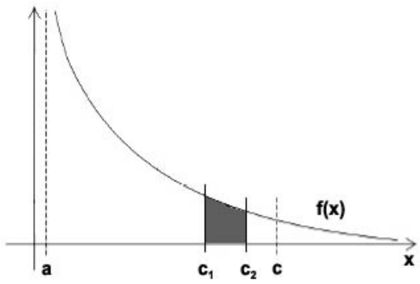
$$\left|\int_a^{c_2} f(x)dx-\int_a^{c_1} f(x)dx\right|=\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

viz obr. 5.4 a)

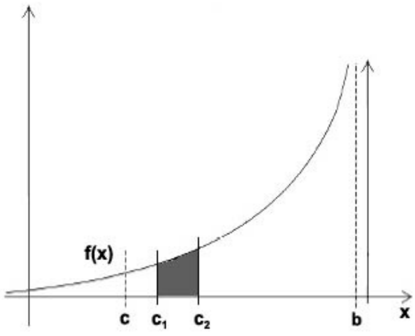
b) Je-li b singulárním bodem funkce f, pak $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon>0$ existuje $c<b$ tak, že pro každé $c_1, c_2 \in (c,b)$ platí

$$\left|\int_{c_1}^{b} f(x)dx-\int_{c_2}^{b} f(x)dx\right|=\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

viz obr. 5.4 b)



Obr 5.4 a)



Obr 5.4 b)

Věta 5.12 (Abelovo kritérium)

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány na intervalu $(a,b\rangle$, přičemž bod a je singulárním bodem obou funkcí a platí

- integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje
- $g(x)$ je monotónní a ohraničená na intervalu $(a,b\rangle$

Pak platí, že integrál

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$$

Věta 5.13 (Dirichletovo kritérium)

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány na intervalu $(a,b\rangle$, přičemž bod a je singulárním bodem obou funkcí a platí

- Funkce $f(x)$ je integrovatelná na libovolném intervalu $(a,c\rangle \subset (a,b\rangle$ a existuje konstanta K, tak že $\forall c \in (a,b\rangle$ je integrál $\int_a^c f(x)dx \leq K$.
- Funkce $g(x)$ je monotónně klesající k 0, tj. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)dx = 0$.

Pak integrál

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$$

konverguje.

6. Řešené příklady

6.1 Výpočet podle definice

6.1.1 Nevlastní integrál 1. druhu

Příklad 6.1

Vypočítejte integrál $\int_{-\infty}^{0} (x-1)^2 \, dx$.

Jedná se o konvergentní integrál 1. druhu, protože dolní mezí je nevlastní bod -∞. Nelze tudíž spočítat určitý integrál, protože integrační interval není konečný.

Přepíšeme podle definice nevlastního integrálu 1. druhu.

$$\int_{-\infty}^{0} (x-1)^2 \, dx = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} (x-1)^2 \, dx =$$

Pro všechna reálná *c* jdoucí k -∞ je nyní integrál určitý a lze proto použít Newton – Leibnitzovu formuli.

$$= \lim_{c \to -\infty} \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_c^0 =$$

Dosadíme meze a spočteme limitu.

$$= \lim_{c \to -\infty} \left(\frac{c^3}{3} - c^2 + c \right) = -\infty$$

Integrál diverguje.

Příklad 6.2

Vypočítejte integrál $\int_0^{\infty} 2^{-x}\,dx$.

Jedná se o integrál 1. druhu, protože horní mezí je nevlastní bod $+\infty$. Nelze tudíž spočítat určitý integrál, protože integrační interval není konečný.

Pokusíme se najít primitivní funkci (pomocí substituce pro integrování obecné exponenciály).

$$\int 2^{-x}\,dx = \int e^{-x\cdot\ln(2)}dx = \left| \begin{matrix} y = -x\cdot\ln(2) \\ dx = -\dfrac{1}{\ln(2)}dy \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\ln(2)}\int e^{y}dy = -\frac{1}{\ln(2)}\cdot e^{y} + C =$$

$$= -\frac{1}{\ln(2)}\cdot e^{-x\cdot\ln(2)} + C = -\frac{1}{\ln(2)}\cdot 2^{-x} + C$$

Přepíšeme podle definice nevlastního integrálu 1. druhu.

$$\int_0^{\infty} 2^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^{c} 2^{-x}\,dx =$$

Pro všechna reálná c jdoucí k $+\infty$ je nyní integrál určitý a lze proto použít Newton – Leibnitzovu formuli.

$$= \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(2)}2^{-x}\right]_0^c =$$

Dosadíme integrační meze a spočteme limitu.

$$= \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{2^{c}}\right) = \frac{1}{\ln(2)}$$

Integrál konverguje.

Příklad 6.3

Vypočítejte integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Jedná se o integrál 1. druhu, protože dolní mez nám jde k $-\infty$ a horní mez k $+\infty$.

Rozdělíme na dva integrály s jednou singularitou, přičemž vhodným bodem k rozdělení se jeví bod $x=0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

První část integrálu přepíšeme podle definice nevlastního integrálu 1. druhu se singularitou v dolní mezi a druhou část podle definice nevlastního integrálu 1. druhu se singularitou horní mezi.

$$= \lim_{c_1 \to -\infty} \int_{c_1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c_2 \to +\infty} \int_{0}^{c_2} \frac{dx}{1+x^2} =$$

Pro všechna reálná c_1 jdoucí k $-\infty$ a pro všechna reálná c_2 jdoucí k $+\infty$ je nyní integrál určitý a lze proto použít Newton – Leibnitzovu formuli.

$$= \lim_{c_1 \to -\infty} \left[\arctan x\right]_{c_1}^{0} + \lim_{c_2 \to +\infty} \left[\arctan x\right]_{0}^{c_2} =$$

Dosadíme meze a spočteme limitu.

$$= \lim_{c_1 \to -\infty} \left(\arctan 0 - \arctan c_1\right) + \lim_{c_2 \to +\infty} \left(\arctan c_2 - \arctan 0\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

Integrál konverguje.

6.1.2 Nevlastní integrál 2. druhu

6.1.2.1 Singularita v dolní mezi

Příklad 6.4

Vypočítejte integrál $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx.$

Jedná se o integrál 2. druhu se singularitou v dolní mezi, protože pro $x = 0$ není funkce definovaná. Nelze tudíž spočítat určitý integrál, protože v bodě $x = 0$ neexistuje primitivní funkce.

Přepíšeme podle definice nevlastního integrálu 2. druhu se singularitou v dolní mezi.

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

Pro všechna reálná c z pravého okolí bodu $x = 0$ je nyní integrál určitý a lze proto použít Newton – Leibnitzovu formuli.

$$= \lim_{c\to 0+} \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2/3} \right]_c^8 =$$

Zjednodušíme zlomek. Konstantu lze vytknout až před limitu.

$$= \frac{3}{2} \lim_{c\to 0+} \left[\sqrt[3]{x^2} \right]_c^8 =$$

Dosadíme meze a spočteme limitu.

$$= \frac{3}{2} \lim_{c\to 0+} \left(4 - \sqrt[3]{c^2} \right) = \frac{3}{2} (4 - 0) = 6$$

Integrál konverguje.

6.1.2.2 Singularita v horní mezi

Příklad 6.5

Vypočítejte integrál $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$.

Jedná se o integrál 2. druhu se singularitou v horní mezi, protože pro $x=1$ není funkce definovaná. Nelze tudíž spočítat určitý integrál, protože v bodě $x=1$ neexistuje primitivní funkce.

Přepíšeme podle definice nevlastního integrálu 2. druhu se singularitou v horní mezi.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{1}{1-x}\,dx$$

Pro všechna reálná c z levého okolí bodu $x=1$ je nyní integrál určitý a lze proto použít Newton – Leibnitzovu formuli.

$$= \lim_{c\to 1-} \left[-\ln|1-x|\right]_0^c =$$

Dosadíme meze a spočteme limitu.

$$= \lim_{c\to 1-} \left(-\ln|1-c| + \ln 1\right) = \infty + 0 = \infty$$

Integrál diverguje.

6.1.2.3 Singularita uvnitř integračního intervalu

Příklad 6.6

Vypočítejte integrál $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx.$

Jedná se o integrál 2. druhu se singularitou uvnitř integračního intervalu, protože pro $x=1$ není funkce definovaná. Nelze tudíž spočítat určitý integrál, protože v bodě $x=1$ neexistuje primitivní funkce.

Rozdělíme na dva integrály s jednou singularitou.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx =$$

Přepíšeme podle definice nevlastního integrálu 2. druhu se singularitou uvnitř integračního intervalu.

$$= \lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \lim_{c\to 1+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx =$$

Pro všechna reálná c z levého i pravého okolí bodu $x=0$ je nyní integrál určitý a lze proto použít Newton – Leibnitzovu formuli.

$$= \lim_{c\to 1-} \left[3\sqrt[3]{x-1}\right]_0^c + \lim_{c\to 1+} \left[3\sqrt[3]{x-1}\right]_c^2 =$$

Dosadíme meze a spočteme limity.

$$= \lim_{c\to 1-} \left(3\sqrt[3]{c-1}+3\right) + \lim_{c\to 1+} \left(3-3\sqrt[3]{c-1}\right) = 3+3=6$$

Limity jsou vlastní. Integrál konverguje.

Příklad 6.7

Vypočítejte integrál $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Jedná se o integrál 2. druhu se singularitou uvnitř integračního intervalu, protože pro $x=1$ není funkce definovaná. Nelze tudíž spočítat určitý integrál, protože v bodě $x=1$ neexistuje primitivní funkce.

Rozdělíme na dva integrály s jednou singularitou.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-2} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x-2}$$

Pokusíme se najít primitivní funkci (pomocí rozkladu na parciální zlomky).

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}\, dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

Nyní vypočteme oba integrály pomocí Newton – Leibnitzovy formule.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{c\to 1-}\left[\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_0^c = \lim_{c\to 1-}\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{c-1}{c+2}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{2}\right|\right) = -\infty$$

Protože první část integrálu diverguje, diverguje i daný integrál $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+x-2}$ a není již nutné počítat druhou část integrálu.

6.1.3 Nevlastní integrál 1. i 2. druhu současně

Příklad 6.8

Vypočítejte integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln(x)}$.

Jedná se současně o integrál 1. druhu i 2. druhu se singularitou v dolní mezi, protože pro $x=1$ není funkce definovaná a horní integrační mez nám jde k $+\infty$.

Rozdělíme tedy na dva integrály s jednou singularitou, přičemž bodem rozdělení zvolme např. bod $x=2$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_1^2 \frac{dx}{x\ln(x)} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x)}$$

Integrál

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x)} = \begin{vmatrix} y = \ln(x) \\ dy = dx/x \end{vmatrix} = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{dy}{y} = \lim_{c\to\infty} \int_{\ln(2)}^\infty \frac{dy}{y} = \lim_{c\to\infty} \left[\ln(y)\right]_{\ln(2)}^c = \infty$$

diverguje a proto diverguje i integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln(x)}$.

Příklad 6.9

Vypočítejte integrál $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$.

Jedná se současně o integrál 1. druhu i 2. druhu se singularitou v dolní mezi, protože pro $x=0$ není funkce definovaná a horní integrační mez nám jde k $+\infty$.

Rozdělíme tedy na dva integrály s jednou singularitou, přičemž vhodným bodem k rozdělení se jeví bod $x=1$.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx$$

Pokusíme se najít primitivní funkci (pomocí substituce).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \begin{vmatrix} y=\sqrt{x} \\ x=y^2 \\ dx=2ydy \end{vmatrix} = \int \frac{2ydy}{y(y^2+4)} = \int \frac{2dy}{y^2+4} = \begin{vmatrix} y=2z \\ dy=2dz \end{vmatrix} = \int \frac{4dz}{4z^2+4} =$$

$$= \int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctan}(z) + C = \operatorname{arctan}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + C$$

Nyní vypočteme oba integrály pomocí Newton – Leibnitzovy formule.

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \lim_{c_1\to 0+} \int_{c_1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \lim_{c_1\to 0+}\left[\operatorname{arctan}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right]_{c_1}^{1} =$$

$$= \lim_{c_1\to 0+}\left(\operatorname{arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctan}\left(\frac{\sqrt{c_1}}{2}\right)\right) = \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \lim_{c_2\to\infty} \int_{1}^{c_2} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \lim_{c_2\to\infty}\left[\operatorname{arctan}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right]_{1}^{c_2} =$$

$$= \lim_{c_2\to\infty}\left(\operatorname{arctan}\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\right) - \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Protože oba integrály konvergují, konverguje i daný integrál $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$ a jeho hodnota je

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

6.2 Výpočet pomocí kritérií konvergence

6.2.1 Srovnávací kritérium

Příklad 6.10

Rozhodněte o konvergenci integrálu $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$

Protože integrovaná funkce nemá primitivní funkci vyjádřitelnou pomocí elementárních funkcí, nemůžeme uvažovat o přímém výpočtu. Použijeme srovnávací kritérium.

Pro $x \geq 1$ je $x \leq x^2.$ Pak také

$$0 \leq f(x) = e^{-x^2} \leq g(x) = e^{-x}.$$

Protože testovací integrál

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^{c} e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\left(-e^{-c}+e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

konverguje, podle srovnávacího kritéria konverguje i menší integrál $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$

6.2.2 Limitní srovnávací kritérium

Příklad 6.11

Rozhodněte o konvergenci integrálu $\int_1^\infty \frac{x+5}{x^3+3x^2-1}dx.$

Snadno odhadneme, že když poroste x do nekonečna, převáží ve zlomku nejvyšší mocniny a po jejich zkrácení dostaneme funkci $\frac{1}{x^2}$ o které víme, že její integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ konverguje. Odhadneme tedy, že integrál bude konvergovat.

Nyní zkusíme tento předpoklad korektně ověřit.

Srovnávací kritérium není použitelné, protože pro srovnávací funkci $\frac{1}{x^2}$, která se sama nabízí, neplatí nerovnost

$$\frac{x+5}{x^3+3x^2-1} \le \frac{1}{x^2},$$

protože například v bodě $x = 1$ dostaneme hodnotu $\frac{6}{3} \le 1,$ což není pravda. Zbývá nám tedy limitní srovnávací kritérium s naším odhadem:

$$f(x) = \frac{x+5}{x^3+3x^2-1} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = g(x).$$

Tento odhad snadno ověříme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\frac{x^2}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+5x^2}{x^3+3x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+5/x}{1+3/x-1/x^3}\right) = 1$$

Podmínka limitního srovnávacího kritéria je tedy splněna a protože víme, že testovací integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konverguje, musí podle limitního srovnávacího kritéria konvergovat i integrál $\int_1^\infty \frac{x+5}{x^3+3x^2-1}dx.$

Příklad 6.12

Rozhodněte o konvergenci integrálu $\int_3^{\infty} \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$.

Cítíme, že když je x opravdu velké, tak

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x}\sim\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}=g(x).$$

Tento odhad musí být ověřen.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+2x}\frac{x}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-1/x}{1+2/x}\right)=1$$

Funkce jsou tedy opravdu v zásadě stejné v blízkosti problematického bodu. Protože testovací integrál $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x}$ diverguje, podle Limitního srovnávacího kritéria diverguje i integrál $\int_3^{\infty} \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$.

7. Závěr

Zadáním bakalářské práce bylo odvodit nevlastní Riemannův integrál prvního a druhého druhu a ukázat metody vedoucí k výpočtu (případně ke zjišťování konvergence) příslušných integrálů.

V první části práce, která by se dala nazvat teoretickou, jsem popsal konstrukci Riemannova integrálu a tím vlastně i zavedl potřebnou terminologii k následnému definování pojmu nevlastního integrálu. Dále jsem utřídil metody vedoucí k výpočtu nevlastních integrálů.

V druhé části (praktické) jsem již tyto metody používal k samotnému výpočtu nevlastních integrálů prvního a druhého druhu. Snažil jsem se také podat čtenáři u jednotlivých příkladů slovní komentář prováděných matematických operací.

8. Seznam použité literatury

- Brabec J., Martan F., Rozenský Z. *Matematická analýza I*. Praha: SNTL, 1985
- Jarník V. *Integrální počet I*. Praha: Academie, 1974
- Katedra matematiky, Fakulta elektrotechnická, ČVUT *Math Tutor* [1.4.2008]. <http://math.feld.cvut.cz/mt/indexcd.htm>
- Lerch T. *Diplomová práce "Nevlastní integrály"*. Brno: Masarykova univerzita, 2006
- Novák V. *Integrální počet v R.* Praha: SPN, 1986,
- Wikipedie *Riemanův integrál* [1.4.2008]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l>