JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

POUŽITÍ RIEMANNOVA INTEGRÁLU K VÝPOČTU MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍCH ÚLOH

Ondřej MAREČEK

České Budějovice, duben 2008

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích, dne 25. dubna 2008

…………………………………….

Ondřej Mareček

ANOTACE

Teoretická část diplomové práce se skládá ze zavedení Riemannova integrálu, jeho vlastností, zavedení funkce více proměnných, ze zavedení dvojného a trojného Riemannova integrálu a fyzikálních aplikací integrálu. Praktická část obsahuje odvození obecných vzorců pro obsah různých geometrických útvarů a objem různých těles, na některých příkladech jsou ukázány různé postupy vedoucí k jejich vyřešení. Je zde také obsaženo využití Riemannova integrálu k určení těžiště tělesa, statických momentů a momentů setrvačnosti těles.

ABSTRACT

The theoretical part of the thesis includes introduction of Riemann integral and its qualities, introduction of function of more variables, introduction of double and triple Riemann integral and physical applications of integral. The practical part includes derivation of general area formulas for different shapes and volume formulas for different solids, in some examples there are shown different ways of solution. The practical part also includes the use of Riemann integral for the determination of centre of mass, of statical moments and moments of inertia of objects.

PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych touto cestou poděkovat Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc, cenné rady, připomínky a náměty, kterými mně při vypracování diplomové práce velmi pomohl.

Děkuji také své rodině a přátelům za podporu, které se mi dostávalo po celou dobu vysokoškolského studia.

OBSAH

1. ÚVOD

Ve své diplomové práci bych se chtěl věnovat využitelnosti Riemannova určitého integrálu pro výpočet fyzikálních veličin, jako jsou obsahy rovinných útvarů, objemy těles, statické momenty, momenty setrvačnosti těles a těžiště tělesa. Práce je rozdělena na dvě části – teoretickou a praktickou.

V teoretické části uvedu důležité věty a definice integrálního počtu, dále bude práce obsahovat teorii z diferenciálního počtu funkcí více proměnných, dvojný a trojný Riemannův integrál. Hlavním důvodem zavedení integrálního počtu funkcí více proměnných je fakt, že jednoduchý Riemannův integrál nelze využít k výpočtu objemu libovolného tělesa, ale jen těles rotačních. Potom by v práci nemohl být obsažen např. výpočet objemu jehlanu. Také vztahy pro výpočet různých fyzikálních veličin, obsažené v kapitole Fyzikální aplikace integrálu, využívají vícerozměrnou integraci. Předpokládám znalost integračních metod (substituce, per-partes, ...), a proto je v teoretické části neuvádím.

Praktická část bude obsahovat odvození vzorců pro obsah rovinných útvarů a objem těles. Na některých příkladech ukážu různé možnosti řešení a postupů při výpočtech obsahů a objemů pomocí Riemannova integrálu. Také zde odvodím vzorce pro výpočet některých fyzikálních vlastností těles (těžiště tělesa, statické momenty a momenty setrvačnosti těles). Součástí každého příkladu bude srozumitelný postup odvození vzorce v obecném tvaru a většina příkladů bude doplněna názorným obrázkem.

Problematiku integrálního počtu jsem si zvolil, protože mě během studia matematické analýzy zaujala a oceňuji zejména to, že vzorce, které jsme se v průběhu studia na základní a střední škole museli učit nazpaměť, se dají pomocí integrálního počtu odvodit.

2. TEORETICKÁ ČÁST

2. 1. DIFERENCIÁLNÍ POČET

2.1.1. Pojem funkce

Definice. Nechť M je nějaká podmnožina množiny reálných čísel. Jestliže každému číslu x množiny M je přiřazeno určité číslo y, říkáme, že y je funkcí x; množinu M nazýváme oborem této funkce.

Funkci f můžeme také definovat přímo jako množinu dvojic, a proto uvádím i následující definici.

Definice. Funkcí f rozumíme množinu uspořádaných dvojic reálných čísel $[x, y]$, jež má tuto vlastnost: Ke každému číslu x_0 existuje nejvýše jedno (tj. buďto žádné nebo právě jedno) číslo y takové, že dvojice $[x_0, y]$ patří do množiny f. Toto číslo y nazýváme pak hodnotou funkce f v bodě x_0 a značíme jej znakem $f(x_0)$. Čísla x, k nimž existuje číslo y tak, že dvojice $[x, y]$ patří do množiny f, tvoří jistou podmnožinu M množiny reálných čísel, kterou nazýváme oborem funkce f.

2.1.2. Věta o supremu a infimu

Definice. Existuje-li takové číslo K, že pro všechna čísla x množiny N platí $x \leq K$, pak množinu N označíme jako omezenou shora.

Věta. Je-li N neprázdná shora omezená množina, existuje právě jedno číslo G mající tyto dvě vlastnosti:

I. Žádné číslo z N není větší než G.
II. Je-li G' libovolné číslo menší než G, existuje v N aspoň jedno číslo, jež je větší než G'.

Toto číslo G se nazývá supremum množiny N a značíme jej znakem $\sup N$.

Definice. Existuje-li takové číslo K, že pro všechna čísla x množiny N platí $x \geq K$, pak množinu N označíme jako omezenou zdola.

Věta. Je-li N neprázdná zdola omezená množina, existuje právě jedno číslo g mající tyto dvě vlastnosti:

I. Žádné číslo z N není menší než g.

II. Je-li g' libovolné číslo větší než g, existuje v množině N aspoň jedno číslo, jež je menší než g'.

Toto číslo g se nazývá infimum množiny N a značíme jej znakem $\inf N$.

2.1.3. Funkce omezené

Definice. Nechť funkce f je shora omezená v neprázdné číselné množině M. Potom existuje právě jedno číslo G mající tyto dvě vlastnosti:

I. Pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq G$.

II. Je-li G' libovolné číslo menší než G, existuje v množině M aspoň jedno číslo x_0 tak, že je $f(x_0) > G'$.

Toto číslo značíme znakem $\sup\limits_{x \in M} f(x)$ a říkáme mu supremum funkce f v množině M.

Definice. Nechť funkce f je zdola omezená v neprázdné číselné množině M. Potom existuje právě jedno číslo g mající tyto dvě vlastnosti:

I. Pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq g$.

II. Je-li g' libovolné číslo větší než g, existuje v množině M aspoň jedno číslo x_0 tak, že je $f(x_0) < g'$.

Toto číslo značíme znakem $\inf\limits_{x \in M} f(x)$ a říkáme mu infimum funkce f v množině M.

2.1.4. Spojitost

Definice. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě *c*, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ je splněna pro všechny hodnoty *x*, pro něž je $|x-c|<\delta$.

Věta. Nechť funkce $f(x), g(x)$ jsou spojité v bodě *c*. Potom také funkce $|f(x)|$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ jsou spojité v bodě *c*. A v případě, že $g(c)\neq 0$, je také funkce $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v bodě *c*.

Definice. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu (a,b), je-li spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu.

Definice. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě *c* zprava (popř. zleva), jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo δ, že nerovnost $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ je splněna pro všechny hodnoty x z intervalu $\langle c, c+\delta)$ (popř. $(c-\delta, c\rangle$).

Definice. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, je-li spojitá v otevřeném intervalu (a,b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věty o spojitosti složených funkcí:

Věta. Nechť funkce $\varphi(t)$ je spojitá v bodě c a nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $\varphi(c)$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v bodě *c*.

Věta. Nechť funkce $\varphi(t)$ je spojitá v otevřeném intervalu (α,β); nechť funkce $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu (a,b). Pro každé *t* z intervalu (α,β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a,b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu (α,β).

Věta. Nechť funkce $\varphi(t)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$; nechť funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pro každé t z intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.

2.1.5. Derivace

Věta (o přírůstku funkce). Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Potom existuje číslo ξ tak, že platí

$$a < \xi < b, \; f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi).$$

Věta. Nechť funkce f je spojitá v intervalu J a v každém vnitřním bodě intervalu J má derivaci rovnou nule. Potom je funkce f konstantní v J.

Věta. Nechť f, g jsou dvě funkce spojité v intervalu J, které mají v každém vnitřním bodě intervalu J touž derivaci $f'(x) = g'(x)$. Potom jejich rozdíl je konstantní v J, tj. existuje číslo C tak, že pro všechna $x \in J$ je $g(x) = f(x) + C$.

Věta. Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci $\varphi'(t)$ v jistém bodě t; nechť funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ v příslušném bodě $x = \varphi(t)$; potom funkce $F(t) = f(\varphi(t))$ má v bodě t derivaci $f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Věta. Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v intervalu (α, β); nechť funkce $f(x)$ má derivaci v intervalu (a, b); nechť pro každé t z intervalu (α, β) hodnota funkce $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ má v intervalu (α, β) derivaci $f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

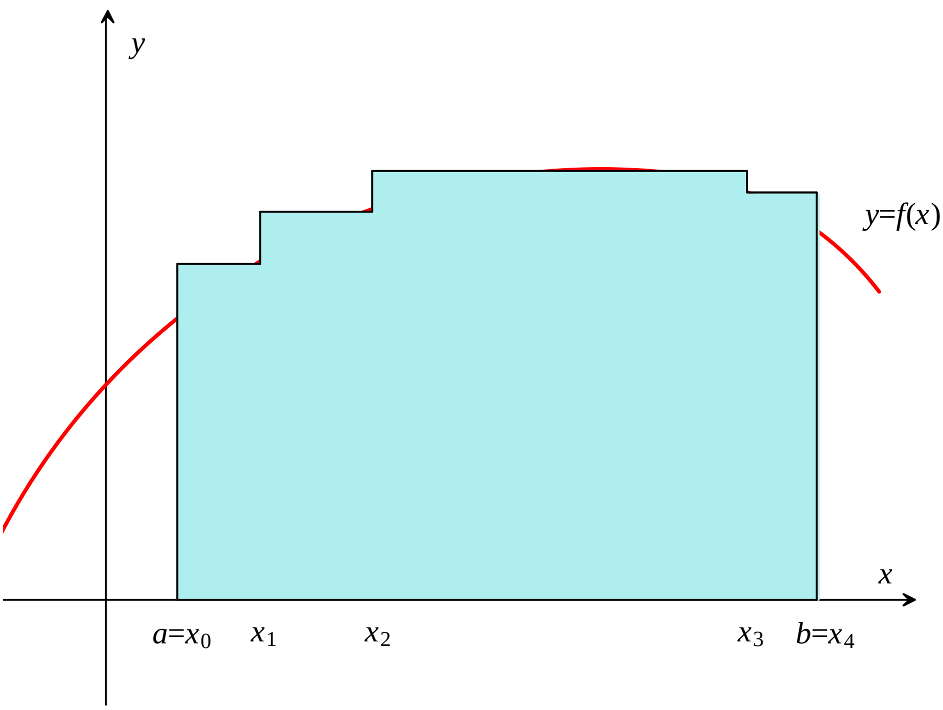
2. 2. TEORIE URČITÉHO RIEMANNOVA INTEGRÁLU

2.2.1. Součtová definice určitého integrálu

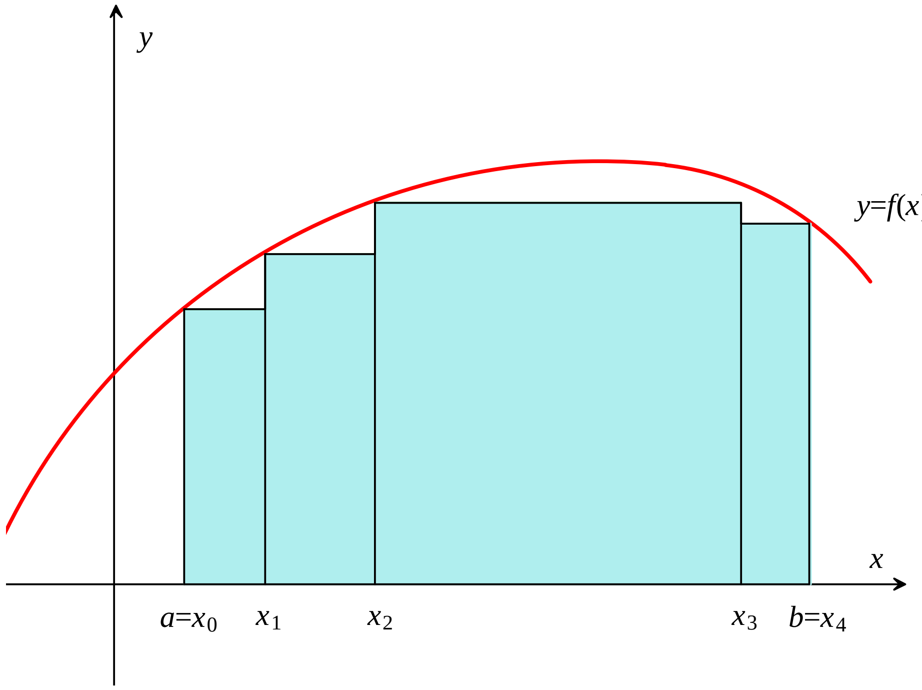
Budiž dán interval $\langle a,b \rangle$ a budiž dána funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a,b \rangle$. Je-li dáno celé kladné číslo n a je-li dáno n + 1 bodů $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, jež splňují vztahy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

říkáme, že tyto body definují určité *dělení* intervalu $\langle a,b \rangle$. Body $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ budeme nazývat *dělícími body* tohoto dělení; tyto body dělí interval $\langle a,b \rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle$, …, $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$.



obr. 1: Horní součet



obr. 2: Dolní součet

Toto dělení definované dělícími body $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ označme písmenem *D*. Znakem Δx_i označme délku *i*-tého částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Danému dělení *D* přiřadíme nyní dvě čísla:

číslo

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \Delta x_i ,$$

jež budeme nazývat *horním součtem příslušným k dělení D* (viz obr.1), a číslo

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \Delta x_i ,$$

jež budeme nazývat *dolním součtem příslušným k dělení D* (viz obr.2).

Definice. Nechť D a D' jsou dvě dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Dělení D' je *zjemněním dělení* D, jestliže každý dělící bod dělení D je také dělícím bodem dělení D', $D \subseteq D'$.

Věta.

I. Dolní součet, příslušný k dělení *D*, je nejvýše roven hornímu součtu příslušnému k témuž dělení,tzn. $s(D) \leq S(D)$.

II. Je-li dělení D' zjemněním dělení *D*, platí $s(D) \leq s(D') \leq S(D') \leq S(D)$.

III. Jsou-li D_1, D_2 dvě libovolná dělení intervalu $\langle a,b \rangle$, platí $S(D_1) \geq s(D_2)$.

Věta. Je-li $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a,b \rangle$, je nejvyšší možná hodnota horního součtu rovna číslu $\sup\limits_{\langle a,b \rangle} f(x) \cdot (b-a)$, nejnižší možná hodnota dolního součtu rovna číslu $\inf\limits_{\langle a,b \rangle} f(x) \cdot (b-a)$.

Je-li tedy *D* libovolné dělení intervalu $\langle a,b \rangle$, platí nerovnosti

$$\inf_{\langle a,b \rangle} f(x) \cdot (b-a) \leq s(D) \leq S(D) \leq \sup_{\langle a,b \rangle} f(x) \cdot (b-a).$$

Označme V_1 množinu všech možných dělení D intervalu $\langle a,b \rangle$.

Definice.

I. Infimum množiny horních součtů pro všechna možná dělení D intervalu $\langle a,b \rangle$ označíme znakem $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme je nazývat horním integrálem funkce $f(x)$ od *a* do *b*.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{ S(D) \middle| D \in V_1 \right\}$$

II. Supremum množiny dolních součtů pro všechna možná dělení D intervalu $\langle a,b \rangle$ označíme znakem $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme je nazývat dolním integrálem funkce $f(x)$ od *a* do *b*.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{s(D) \mid D \in V_1\}$$

Čísla a, b nazýváme mezemi horního (dolního) integrálu; číslo a nazýváme dolní mezí, číslo b horní mezí. Písmeno x nazýváme integrační proměnnou.

Věta. Nechť $a < b$, funkce $f(x)$ je omezená v intervalu $\langle a,b \rangle$, pak platí

$$\inf_{\langle a,b\rangle} f(x)\cdot(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sup_{\langle a,b\rangle} f(x)\cdot(b-a)$$

Definice. Riemannova součtová definice určitého integrálu.

Řekneme, že funkce $f(x)$ omezená na intervalu $\langle a,b \rangle$ má Riemannův určitý integrál od a do b, platí-li $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ (funkce $f(x)$ je integrovatelná v intervalu $\langle a,b \rangle$). Společnou hodnotu nazveme Riemannovým určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b a označujeme ji znakem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. Nutná a postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu.

Riemannův určitý integrál od a do b existuje, právě tehdy když platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists D) : S(D) - s(D) < \varepsilon \,.$$

2.2.2. Integrace součtu

Věta. Nechť $a < b$ a funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou omezené na intervalu $\langle a,b \rangle$; existují-li integrály $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$, existuje i integrál $\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

Věta. Nechť $a < b$, funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b a je-li c libovolné číslo, má i funkce $c \cdot f(x)$ určitý integrál od a do b a platí $\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. Nechť $a < b$ a funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají určitý integrál od a do b a jsou-li $c_1, c_2, \dots, c_n$ libovolná čísla, má i funkce $c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x)$ určitý integrál od a do b a platí

$$\int_a^b \left(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x)\right)\mathrm{d}x =$$
$$= c_1 \cdot \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \cdot \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \dots + c_n \cdot \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Této vlastnosti se říká *linearita integrálu*.

Věta. Nechť $a < b$, funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b; $f(x) \geq 0$ pro všechna x z intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Věta. Nechť $a < b$, funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ mají určitý integrál od a do b; $f_1(x) \geq f_2(x)$ pro všechna x z intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$. Této vlastnosti se říká *monotonie integrálu*.

2.2.3. Integrál od *a* do *c* , vyjádřený integrály od *a* do *b* a od *b* do *c*

Věta. Nechť $a < b < c$ a nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i integrál $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom existuje i integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Této vlastnosti se říká *konečná aditivita integrálu vzhledem k intervalu*.

Věta. Nechť $a < b$, funkce $f(x)$ má určitý integrál od *a* do *b*. Nechť $\langle c, d\rangle$ je částečný interval intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom funkce $f(x)$ má také určitý integrál od *c* do *d*.

2.2.4. Funkce spojitá v $\langle a,b\rangle$ má určitý integrál od *a* do *b*

Věta. Nechť $a < b$; nechť funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$; potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Věta. Nechť $a < b$; nechť funkce $f(x)$ je omezená v intervalu $\langle a,b\rangle$ a má v intervalu (a,b) konečný počet bodů nespojitosti; potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

2.2.5. Funkce primitivní a její souvislost s určitým integrálem

Věta. Nechť $a < b$ a existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Nechť $F(x)$ je funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a v každém bodě otevřeného intervalu (a,b) má derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

2.2.6. Definice integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a \geq b$

První dodatek k definici integrálu. Je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$, definujeme

$$\overline{\int_a^a} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Druhý dodatek k definici integrálu. Nechť $a > b$, potom definujeme určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rovnicí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže ovšem integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

2.2.7. Výpočet obsahu rovinných útvarů pomocí Riemannova integrálu

Budeme vyšetřovat rovinné útvary (tj. množiny bodů v rovině) tohoto tvaru: Jsou dána dvě čísla a, b ($a < b$) a funkce $f(x)$, spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a,b \rangle$. Tím je v rovině definována určitá množina bodů $[x, y]$, pro které platí $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$. Tuto množinu označme znakem $M(a,b, f(x))$.

Definice. Obsahem $P(a,b, f(x))$ rovinného útvaru $M(a,b, f(x))$ nazveme číslo, pro které platí:

1. $P(a,b, f(x)) \ge 0$
2. Je-li $a < c < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a,b \rangle$, platí $P(a,b, f(x)) = P(a,c, f(x)) + P(c,b, f(x))$.
3. Nechť $M(\alpha,\beta,\varphi(x))$, $M(a,b, f(x))$ jsou dvě množiny vyšetřovaného typu a nechť $M(\alpha,\beta,\varphi(x)) \subseteq M(a,b, f(x))$. Potom platí $P(\alpha,\beta,\varphi(x)) \le P(a,b, f(x))$.
4. Je-li $M(a,b, f(x))$ obdélník o stranách z, v, je $P(a,b, f(x)) = z \cdot v$.

Věta. Nechť $f(x)$ je spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a,b \rangle$, potom platí

$$P(a,b, f(x)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

2.2.8. Výpočet objemu rotačních těles pomocí Riemannova integrálu

Jsou dána dvě čísla a, b ($a < b$) a funkce $f(x)$, spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a,b \rangle$. Uvažujeme rotační těleso, které vznikne rotací rovinného útvaru $M(a,b, f(x))$ kolem osy x. Pro množinu bodů rotačního tělesa $[x, y, z]$ platí: $a \le x \le b$, $y^2 + z^2 \le f^2(x)$. Tuto množinu označíme znakem $K(a,b, f(x))$.

Definice. Objemem $V_x\left(a,b,f\left(x\right)\right)$ rotačního tělesa $K(a,b,f(x))$ nazveme číslo, pro které platí:

1. $V_x\left(a,b,f\left(x\right)\right)\geq 0$
2. Je-li $a<c<b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a,b\rangle$, platí $V_x\left(a,b,f\left(x\right)\right)=V_x\left(a,c,f\left(x\right)\right)+V_x\left(c,b,f\left(x\right)\right)$.
3. Nechť $K(\alpha,\beta,\varphi(x))$, $K(a,b,f(x))$ jsou dvě množiny vyšetřovaného typu a nechť $K(\alpha,\beta,\varphi(x))\subseteq K(a,b,f(x))$. Pak platí $V_x\left(\alpha,\beta,\varphi\left(x\right)\right)\leq V_x\left(a,b,f\left(x\right)\right)$.
4. Je-li $M(a,b,f(x))$ obdélník o stranách *z*, *v*, je $V_x\left(a,b,f\left(x\right)\right)=\pi\cdot v^2\cdot z$.

Věta. Nechť $f(x)$ je spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a,b\rangle$, potom platí

$$V_x\left(a,b,f\left(x\right)\right)=\int_a^b \pi\cdot f^2\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Věta. Nechť $f(x)$ má spojitou nenulovou derivaci na intervalu $\langle a,b\rangle$. Objem tělesa vzniklého rotací plochy $M(a,b,f(x))$ kolem osy *y* je $V_y\left(a,b,f\left(x\right)\right)=2\pi\int_a^b x\cdot f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

2. 3. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

2.3.1. Reálné funkce více reálných proměnných

V diferenciálním počtu reálných funkcí jedné reálné proměnné jsme se zabývali zobrazeními z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$, tj. zobrazeními, která reálným číslům přiřazují reálná čísla. Nyní se budeme zabývat zobrazeními, která bodům prostoru $\mathbf{R}^n$ přiřazují body nějakého prostoru $\mathbf{R}^p$. I těmto zobrazením budeme říkat funkce. Pro $p=1$ budeme také mluvit o skalární funkci n reálných proměnných, nebo také o reálné funkci. Pro $p>1$ budeme mluvit o vektorové funkci n reálných proměnných.

Nejvíce nás budou zajímat případy $n=2$, resp. $n=3$ a $p=1$, tj. reálné funkce dvou, resp. tří reálných proměnných. V těchto případech používáme obvykle označení $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$.

Definice. Je-li $f: D(f) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ reálná funkce n reálných proměnných, pak grafem funkce f nazýváme množinu graf $f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \,|\, y = f(x), x \in D(f)\}$.

2.3.2. Metrické prostory

Definice. Nechť je dána množina P a zobrazení $\rho: P \times P \to \mathbf{R}$. Říkáme že ρ je metrika v P právě tehdy, když ρ má následující vlastnosti:

I. $\rho(x,y) \geq 0$ pro všechna $x,y \in P$,

II. $\rho(x,y) = 0$ právě tehdy, když $x=y$,

III. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ pro všechna $x,y \in P$,

IV. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ pro všechna $x,y,z \in P$.

Je-li ρ je metrika v P, nazýváme dvojici (P,ρ) *metrickým prostorem*.

Je-li (P,ρ) metrický prostor, pak prvky množiny P nazýváme body a pro každé dva body $x,y \in P$ číslo $\rho(x,y)$ nazýváme *vzdáleností bodů* x,y. Vlastnost I. a II. se obvykle nazývá *pozitivní definitnost metriky* ρ, vlastnost III. *symetričnost metriky* ρ ,a vlastnost IV. *trojúhelníková nerovnost*.

Definice. Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $a \in P$. *Sférickým okolím* bodu a o poloměru $\varepsilon > 0$, nebo stručně $\varepsilon -$*okolím bodu* $a \in P$ nazýváme množinu

$$\mathrm{U}(a,\varepsilon) = \{x \in P \,|\, \rho(x,a) < \varepsilon\}.$$

Definice. Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $a \in P$. *Prstencovým okolím* bodu a o poloměru $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu $\mathrm{P}(a,\varepsilon) = \{x \in P \,|\, 0 < \rho(x,a) < \varepsilon\}$.

2.3.3. Spojitost funkce

Definice. Nechť $N \subset \mathbf{R}^n, \boldsymbol{a} \in N$. Říkáme, že bod $\boldsymbol{a}$ je *izolovaným bodem* množiny N právě tehdy, když existuje okolí $\mathrm{U}(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že $\mathrm{U}(\boldsymbol{a}) \cap N = \{\boldsymbol{a}\}$.

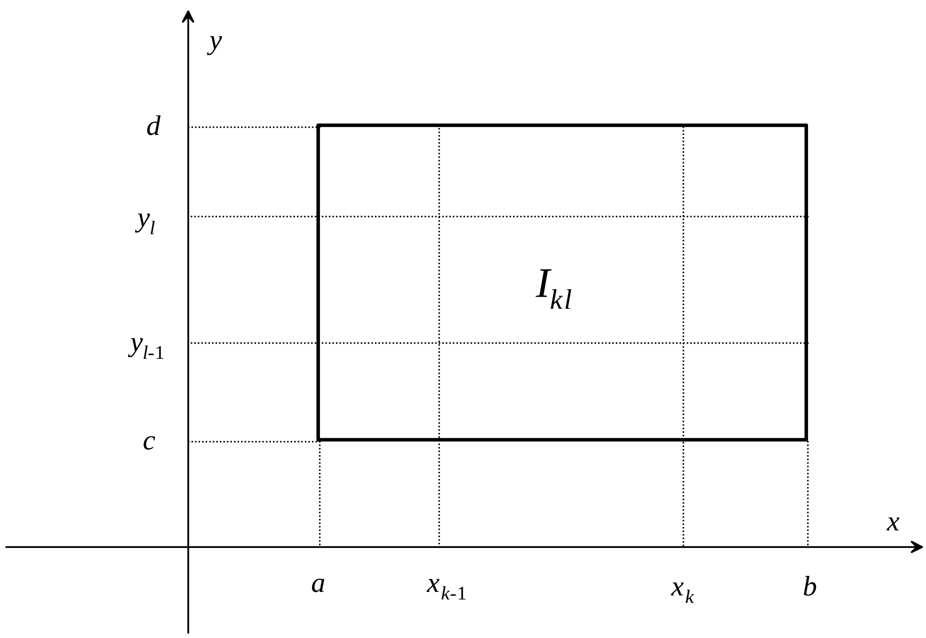
Definice. Nechť je dána funkce $\boldsymbol{f} : D(\boldsymbol{f}) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, množina $N \subset D(\boldsymbol{f})$ a bod $\boldsymbol{a} \in N$. Říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$ vzhledem k množině N právě tehdy, když buď $\boldsymbol{a}$ je izolovaný bod množiny N nebo je $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in N}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Je-li $N = D(\boldsymbol{f})$, říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$.

Říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ je spojitá na množině N právě tehdy, když je spojitá v každém bodě množiny N vzhledem k množině N. Je-li $N = D(\boldsymbol{f})$, říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ je spojitá.

2. 4. DVOJNÝ RIEMANNŮV INTEGRÁL

2.4.1. Dvojný Riemannův integrál na kompaktním intervalu



obr. 3

Nechť $\langle a,b\rangle$ je kompaktní (tj. omezený a uzavřený) interval. Dělením $D_{\langle a,b\rangle}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ budeme nazývat konečnou posloupnost čísel $x_0, x_1, x_2,..., x_n$ takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\,;$$

píšeme také $D_{\langle a,b\rangle} = \{x_0, x_1,..., x_n\}$. Body $x_0, x_1, x_2,..., x_n$ dělí interval $\langle a,b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, …, $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$.

Nechť $\langle c,d\rangle$ je další kompaktní interval. Dělením $D_{\langle c,d\rangle}$ intervalu $\langle c,d\rangle$ budeme nazývat konečnou posloupnost čísel $y_0, y_1, y_2,..., y_m$ takovou, že

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{m-1} < y_m = d\,;$$

píšeme také $D_{\langle c,d\rangle} = \{y_0, y_1,..., y_m\}$. Body $y_0, y_1, y_2,..., y_m$ dělí interval $\langle c,d\rangle$ na m částečných intervalů $\langle y_0, y_1\rangle$, $\langle y_1, y_2\rangle$, …, $\langle y_{m-1}, y_m\rangle$.

Uvažujme dvourozměrný interval $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$.

Množinu všech obdélníků tvaru $I_{kl} = \langle x_{k-1}, x_k\rangle \times \langle y_{l-1}, y_l\rangle$ pro $k = 1,2,...,n$, $l = 1,2,...,m$ označíme D a budeme nazývat dělením intervalu I (vzniklým z dělení $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$). Budeme také psát $D = \{I_{kl}\}$.
Označme $\mu(I)$ velikost plošného obsahu obdélníka I , tj. $\mu(I) = (b-a)(d-c)$. Podobně $\mu(I_{kl}) = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1})$.

Definice. *Diametrem (průměrem) množiny* $M \subset \mathbf{R}^2$ nazveme číslo $\operatorname{diam} M$, definované předpisem $\operatorname{diam} M = \sup\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \,|\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in M\}$.

Definice. Je-li $D = \{I_{kl}\}$ libovolné dělení intervalu $I \subset \mathbf{R}^2$, definujeme *normu dělení D* jako číslo $\|D\| = \max\{\operatorname{diam} I_{kl} \,|\, I_{kl} \in D\}$.

Definice. Nechť f je funkce dvou proměnných omezená na I. D je dělení intervalu I určené děleními $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$.

Horním součtem příslušným k dělení D nazveme číslo

$$S(D)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sup_{I_{kl}} f(x,y)\cdot(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sup_{I_{kl}} f(x,y)\cdot\mu(I_{kl}).$$

Dolním součtem příslušným k dělení D nazveme číslo

$$s(D)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\inf_{I_{kl}} f(x,y)\cdot(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\inf_{I_{kl}} f(x,y)\cdot\mu(I_{kl}).$$

Věta. Nechť f je funkce dvou proměnných omezená na I. D je dělení intervalu I určené děleními $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$. Potom platí, že dolní součet, příslušný k dělení *D*, je nejvýše roven hornímu součtu příslušnému k témuž dělení,tzn. $s(D)\le S(D)$.

Definice. Nechť $D=\{I_{kl}\}$ a $D'=\{I'_{rs}\}$ jsou dvě dělení intervalu I. Dělení D' je *zjemněním dělení* D, jestliže ke každému $I'_{rs}\in D'$ existuje interval $I_{kl}\in D$ tak, že $I'_{rs}\subseteq I_{kl}$.

Definice. Nechť D je dělení intervalu I určené děleními $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$. Nechť $D'_{\langle a,b\rangle}$ je zjemněním dělení $D_{\langle a,b\rangle}$ a $D'_{\langle c,d\rangle}$ je zjemněním dělení $D_{\langle c,d\rangle}$. Potom dělení D' intervalu I určené děleními $D'_{\langle a,b\rangle}$, $D'_{\langle c,d\rangle}$ nazveme zjemněním dělení D.

Věta. Nechť f je funkce dvou proměnných omezená na I. D je dělení intervalu I, D' je zjemnění dělení D. Potom platí $s(D)\le s(D')\le S(D')\le S(D)$.

Věta. Nechť f je funkce dvou proměnných omezená na I. D_1, D_2 jsou libovolná dělení intervalu I. D' je společné zjemnění D_1, D_2. Potom platí

$$s(D_1)\le S(D_2),\quad s(D_1)\le s(D')\le S(D')\le S(D_2).$$

Označme V_2 množinu všech možných dělení D intervalu $I = \langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle$.

Definice.

I. Infimum množiny horních součtů $S(D)$ pro všechna možná dělení D intervalu I označíme znakem $\overline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a budeme je nazývat horním integrálem funkce $f(x,y)$ na intervalu I.

$$\overline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \inf\left\{ S(D) \middle| D \in V_2 \right\}$$

II. Supremum množiny dolních součtů $s(D)$ pro všechna možná dělení D intervalu I označíme znakem $\underline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a budeme je nazývat dolním integrálem funkce $f(x,y)$ na intervalu I.

$$\underline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup\left\{ s(D) \middle| D \in V_2 \right\}$$

Věta. Nechť f je funkce dvou proměnných omezená na I, pak platí

$$\underline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \overline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,.$$

Definice. Jestliže $\underline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, nazýváme společnou hodnotu dvojným Riemannovým integrálem funkce $f(x,y)$ na intervalu I. Říkáme, že funkce $f(x,y)$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Pro dvojný Riemannův integrál budeme používat stručné označení $\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f$.

2.4.2. Dvojný Riemannův integrál na množině *M*

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^2$ a nechť χ_M značí charakteristickou funkci množiny *M*, tj. funkci definovanou na $\mathbf{R}^2$ předpisem $\chi_M(x,y) = \begin{cases} 1 & pro \;\; [x,y] \in M \\ 0 & pro \;\; [x,y] \in \mathbf{R}^2 - M. \end{cases}$

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ a nechť $M \subset I$. Říkáme, že *M* má *Jordan-Peanův objem* $\mu_2(M)$ právě tehdy, když existuje Riemannův integrál funkce χ_M přes interval *I*.

$$\mu_2(M) = \iint_I \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je interval a nechť $M \subset I$ má Jordan-Peanův objem. Je-li $f(x,y)$ funkce definovaná alespoň na *M*, definujeme $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f(x,y)\chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, pokud integrál vpravo existuje. Přitom klademe $f(x,y)\chi_M(x,y) = 0$ i v těch bodech $[x,y] \notin M$, v nichž funkce $f(x,y)$ není případně definována.

2.4.3. Existence dvojného Riemannova integrálu spojité funkce

Věta. Nutná a postačující podmínka pro existenci dvojného Riemannova integrálu.
Dvojný Riemannův integrál na kompaktním intervalu $I \subset \mathbf{R}^2$ existuje, právě tehdy když platí $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D): S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Věta. Postačující podmínka pro existenci dvojného Riemannova integrálu.
Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na kompaktním intervalu $I \subset \mathbf{R}^2$. Potom Riemannův integrál $\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ existuje.

Věta. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na kompaktním intervalu $I \subset \mathbf{R}^2$. Je-li $\{D_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu *I* taková, že $\|D_n\| \to 0$ pro $n \to \infty$, pak

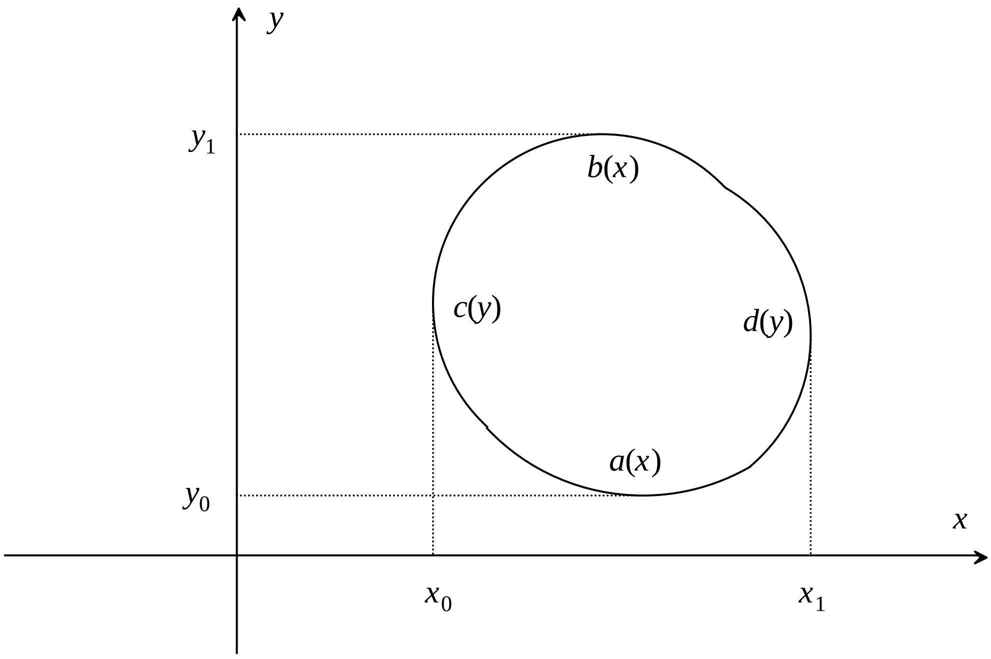
$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n).$$

2.4.4. Vlastnosti dvojného Riemannova integrálu

Množinu $M \subset \mathbf{R}^2$ budeme nazývat *přípustnou oblastí* právě tehdy, když je omezená a její hranici tvoří konečně mnoho prostých křivek.

Věta. Nechť M je přípustná oblast a nechť f_1, f_2 jsou funkce integrovatelné na množině M. Jsou-li c_1, c_2 libovolná čísla, pak také lineární kombinace $c_1 f_1 + c_2 f_2$ je integrovatelná na množině M a platí rovnost $\iint_M (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \iint_M f_1 + c_2 \iint_M f_2$. Této vlastnosti se říká *linearita integrálu*.

2.4.5. Fubiniova věta pro přípustnou oblast



obr. 4

Věta. Nechť M je přípustná oblast, nechť x_0, x_1, y_0, y_1 jsou čísla a $a(x), b(x), c(y), d(y)$ jsou funkce popisující tuto přípustnou oblast a nechť existuje dvojný integrál $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Existuje-li jeden z integrálů

$$g(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in\langle x_0,x_1\rangle,\quad h(y)=\int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\mathrm{d}x,\quad y\in\langle y_0,y_1\rangle,$$

pak existuje i druhý a platí

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} g(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,\\ \displaystyle\int_{y_0}^{y_1} h(y)\mathrm{d}y=\int_{y_0}^{y_1}\left(\int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\end{cases}$$

2.4.6. Výpočet objemu těles pomocí dvojného Riemannova integrálu

Věta. Nechť $M\subset\mathbf{R}^2$ je přípustná oblast. Mějme na množině M definovánu funkci $z=f(x,y)$ a předpokládejme, že $z\geq 0$. Objem V tělesa, jehož dolní podstavou je průmět množiny M do roviny xy a shora jej omezuje funkce $z=f(x,y)$ získáme výpočtem dvojného integrálu $V=\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 5. TROJNÝ RIEMANNŮV INTEGRÁL

2.5.1. Trojný Riemannův integrál na kompaktním intervalu

Definice trojného integrálu je analogická definici dvojného integrálu. V prostoru $\mathbf{R}^3$ máme třírozměrný interval $I=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle\times\langle e,f\rangle$. Zavedeme dělení D intervalu I. Rozdělíme interval $\langle a,b\rangle$ body $x_i, i=0,1,...,m$, interval $\langle c,d\rangle$ body $y_j, j=0,1,...,n$ a interval $\langle e,f\rangle$ body $z_k, k=0,1,...,p$ tak, že platí

$$\begin{aligned}a&=x_0<x_1<x_2<...<x_{m-1}<x_m=b\\ c&=y_0<y_1<y_2<...<y_{n-1}<y_n=d\\ e&=z_0<z_1<z_2<...<z_{p-1}<z_p=f.\end{aligned}$$

Množinu všech kvádrů tvaru $I_{ijk}=\langle x_{i-1},x_i\rangle\times\langle y_{j-1},y_j\rangle\times\langle z_{k-1},z_k\rangle$ pro $i=0,1,\ldots,m$, $j=0,1,\ldots,n$, $k=0,1,\ldots,p$ označíme D a budeme nazývat dělením intervalu I (vzniklým z dělení $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$, $D_{\langle e,f\rangle}$). Budeme také psát $D=\{I_{ijk}\}$.

Definice. Nechť je dána funkce f tří proměnných definovaná a omezená na I. D je dělení intervalu I určené děleními $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$, $D_{\langle e,f\rangle}$.
Horním součtem příslušným k dělení D nazveme číslo

$$S(D)=\sum_{i,j,k}\sup_{I_{ijk}} f(x,y,z)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})(z_k-z_{k-1}).$$

Dolním součtem příslušným k dělení D nazveme číslo

$$s(D)=\sum_{i,j,k}\inf_{I_{ijk}} f(x,y,z)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})(z_k-z_{k-1}).$$

Věta. Nechť f je funkce tří proměnných omezená na I. D je dělení intervalu I určené děleními $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$, $D_{\langle e,f\rangle}$. Potom platí, že dolní součet, příslušný k dělení *D*, je nejvýše roven hornímu součtu příslušnému k témuž dělení,tzn. $s(D)\le S(D)$.

Definice. Nechť $D=\{I_{ijk}\}$ a $D'=\{I'_{rst}\}$ jsou dvě dělení intervalu $I=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle\times\langle e,f\rangle$. Dělení D' je *zjemněním dělení* D, jestliže ke každému $I'_{rst}\in D'$ existuje interval $I_{ijk}\in D$ tak, že $I'_{rst}\subseteq I_{ijk}$.

Definice. Nechť D je dělení intervalu I určené děleními $D_{\langle a,b\rangle}$, $D_{\langle c,d\rangle}$, $D_{\langle e,f\rangle}$. Nechť $D'_{\langle a,b\rangle}$ je zjemněním dělení $D_{\langle a,b\rangle}$, $D'_{\langle c,d\rangle}$ zjemněním dělení $D_{\langle c,d\rangle}$ a $D'_{\langle e,f\rangle}$ je zjemněním dělení $D_{\langle e,f\rangle}$. Potom dělení D' intervalu I určené děleními $D'_{\langle a,b\rangle}$, $D'_{\langle c,d\rangle}$ a $D'_{\langle e,f\rangle}$ nazveme zjemněním dělení D.

Věta. Nechť f je funkce tří proměnných omezená na I. D je dělení intervalu I, D' je zjemnění dělení D. Potom platí $s(D)\le s(D')\le S(D')\le S(D)$.

Věta. Nechť f je funkce tří proměnných omezená na I. D_1, D_2 jsou libovolná dělení intervalu I. D' je společné zjemnění D_1, D_2. Potom platí

$$s(D_1) \le S(D_2),\quad s(D_1) \le s(D') \le S(D') \le S(D_2).$$

Označme V_3 množinu všech možných dělení D intervalu $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$.

Definice.

I. Infimum množiny horních součtů $S(D)$ pro všechna možná dělení D intervalu I označíme znakem $\overline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ a budeme je nazývat horním integrálem funkce $f(x,y,z)$ na intervalu I.

$$\overline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \inf\left\{S(D) \,|\, D \in V_3\right\}$$

II. Supremum množiny dolních součtů $s(D)$ pro všechna možná dělení D intervalu I označíme znakem $\underline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ a budeme je nazývat dolním integrálem funkce $f(x,y,z)$ na intervalu I.

$$\underline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sup\left\{s(D) \,|\, D \in V_3\right\}$$

Věta. Nechť f je funkce tří proměnných omezená na I, pak platí

$$\underline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \overline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Definice. Jestliže $\underline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \overline{\iiint\limits_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, nazýváme společnou hodnotu trojným Riemannovým integrálem funkce $f(x,y,z)$ na intervalu I.

Říkáme, že funkce $f(x,y,z)$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Pro trojný Riemannův integrál budeme používat stručné označení $\iiint_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_I f$.

2.5.2. Trojný Riemannův integrál na množině *M*

Definovali jsme Riemannův integrál přes interval $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$. Nyní tuto definici rozšíříme na integraci přes libovolnou přípustnou oblast.

Množinu $M \subset \mathbf{R}^3$ budeme nazývat *přípustnou oblastí* právě tehdy, když je omezená a její hranici tvoří konečný počet prostých po částech hladkých ploch.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^3$ je přípustná oblast a nechť f je funkce definovaná a omezená na množině M a nechť I je interval v $\mathbf{R}^3$ takový, že $M \subset I$. Definujeme funkci g předpisem $g(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & pro \ [x,y,z] \in M \\ 0 & pro \ [x,y,z] \in I - M. \end{cases}$

Definice. Je-li funkce g integrovatelná na I, pak definujeme $\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_I g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Říkáme pak také, že funkce f je integrovatelná na množině *M*.

2.5.3. Vlastnosti trojného Riemannova integrálu

Věta. Nechť *M* je přípustná oblast a nechť f_1, f_2 jsou funkce integrovatelné na množině *M*. Jsou-li c_1, c_2 libovolná čísla, pak také lineární kombinace $c_1 f_1 + c_2 f_2$ je integrovatelná na množině *M* a platí rovnost $\iiint_M (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \iiint_M f_1 + c_2 \iiint_M f_2$. Této vlastnosti se říká *linearita integrálu*.

2.5.4. Fubiniova věta pro přípustnou oblast

Věta. Nechť M je přípustná oblast v $\mathbf{R}^3$, nechť x_0, x_1 jsou čísla a funkce $a(x), b(x), c(x,y), d(x,y)$ popisují hranici oblasti M. Nechť

$$M_{xy} = \left\{(x,y) \middle| (x_0 \le x \le x_1) \wedge \left(a(x) \le y \le b(x)\right)\right\},$$

tj. množina M_{xy} je průmět množiny M do roviny xy. Nechť pro každé $\tilde{x} \in \langle x_0, x_1 \rangle$ je

$$M_{\tilde{x}} = \left\{(y,z) \middle| \left(a(\tilde{x}) \le y \le b(\tilde{x})\right) \wedge \left(c(\tilde{x},y) \le z \le d(\tilde{x},y)\right)\right\},$$

tj. $M_{\tilde{x}}$ je průmět řezu množiny M rovinou rovnoběžnou s rovinou yz procházející daným bodem $\tilde{x}$ do roviny yz. Konečně nechť existuje trojný integrál

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Existuje-li pro každé $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$ dvojný integrál $g(x) = \iint_{M_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

pak existuje i integrál $\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\left(\iint_{M_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{x_0}^{x_1}\int_{a(x)}^{b(x)}\int_{c(x,y)}^{d(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Existuje-li pro každé $[x,y] \in M_{xy}$ integrál $h(x,y) = \int_{c(x,y)}^{d(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$,

pak existuje i integrál $\iint_{M_{xy}} h(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a platí

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{M_{xy}} h(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_{xy}}\left(\int_{c(x,y)}^{d(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{x_0}^{x_1}\int_{a(x)}^{b(x)}\int_{c(x,y)}^{d(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

2.5.5. Výpočet objemu těles pomocí trojného Riemannova integrálu

Věta. Nechť $M \subset \mathbf{R}^3$ je přípustná oblast, pak pro objem V množiny M platí $V = \iiint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

2. 6. FYZIKÁLNÍ APLIKACE INTEGRÁLU

2.6.1. Hmotnost tělesa

Hmotnost je vlastnost hmoty, která vyjadřuje míru setrvačných účinků hmoty či míru gravitačních účinků.

Uvažujeme-li s rovnoměrným rozložením látky v prostoru, lze pro výpočet hmotnosti tělesa použít vztah $\mathrm{d}m = \sigma \cdot \mathrm{d}V$ ($\mathrm{d}m$ je diferenciál hmotnosti v daném objemu $\mathrm{d}V$, σ je hustota tělesa).

Pro hmotnost tedy platí $m = \int\limits_V \sigma \mathrm{d}V$.

Věta. Je-li $\sigma(x, y, z)$ hustota tělesa a $M \subset \mathbf{R}^3$ přípustná oblast, pak pro celkovou hmotnost tělesa M platí

$$m(M) = \iiint\limits_M \sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

2.6.2. Statické momenty tělesa

Statický moment tělesa (hmotného bodu) vzhledem k bodu, přímce nebo rovině, je součin hmotnosti tělesa (hmotného bodu) a jeho kolmé vzdálenosti k danému bodu, přímce nebo rovině.

Odvodíme si vztahy pro statické momenty tělesa vzhledem k rovinám xy , xz a yz .

Diskrétní rozložení hmoty

Pro statické momenty hmotného bodu vzhledem k již zmíněným rovinám platí $S_{xy} = m \cdot z,\ S_{xz} = m \cdot y,\ S_{yz} = m \cdot x$

Pro *n* hmotných bodů určíme celkový statický moment jako součet statických momentů jednotlivých hmotných bodů. Všechny statické momenty jednotlivých hmotných bodů se určují ke společné rovině. Můžeme pak psát

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i,\ S_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i,\ S_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$$

Spojité rozložení hmoty

Uvažujeme-li hmotu jako spojitě rozloženou, lze celkový statický moment získat integrací přes celý objem *V* prostoru (popř. přes objem prostoru obsahující hmotu). Pokud navíc použijeme vztah $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$, kde σ je hustota, dostaneme

$$S_{xy} = \int_M z\mathrm{d}m = \int_V \sigma z\mathrm{d}V,\ S_{xz} = \int_M y\mathrm{d}m = \int_V \sigma y\mathrm{d}V,\ S_{yz} = \int_M x\mathrm{d}m = \int_V \sigma x\mathrm{d}V.$$

Věta. Je-li $M \subset \mathbf{R}^3$ přípustná oblast s hustotou $\sigma(x, y, z)$, pak pro výpočet statického momentu $S_{xy}(M)$ vzhledem k rovině xy, statického momentu $S_{xz}(M)$ vzhledem k rovině xz a statického momentu $S_{yz}(M)$ vzhledem k rovině yz platí vztahy

$$S_{xy}(M) = \iiint_M z \cdot \sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$S_{xz}(M) = \iiint_M y \cdot \sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$S_{yz}(M) = \iiint_M x \cdot \sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

2.6.3. Momenty setrvačnosti tělesa

Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Body (části) tělesa s větší hmotností a umístěné dál od osy mají větší moment setrvačnosti.

Diskrétní rozložení hmoty

Při otáčivém pohybu soustavy hmotných bodů kolem nehybné osy opisují jednotlivé hmotné body kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení. Úhlová rychlost ω všech bodů je stejná.

Celkovou kinetickou energii určíme jako součet kinetických energií všech n hmotných bodů soustavy, tzn.

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \ ,$$

kde m_i je hmotnost i-tého hmotného bodu, v_i je velikost jeho rychlosti.

Když využijeme toho, že rychlost bodu při kruhovém pohybu je přímo úměrná vzdálenosti bodu od osy otáčení $(v = \omega r)$, můžeme vztah pro kinetickou energii napsat ve tvaru

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

kde r_i je (kolmá) vzdálenost i-tého hmotného bodu od osy otáčení a veličina I představuje moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení.

Moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů je tak definován vztahem

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Spojité rozložení hmoty

Je-li těleso složeno z jednotlivých částic, lze jeho moment setrvačnosti snadno určit pomocí součtu. Je-li však hmota rozložena spojitě, je třeba tento součet nahradit integrálem $I = \int_M r^2 \mathrm{d}m$, kde se integrace provádí přes celé těleso o hmotnosti m $\left(m = \sum_{i=1}^{n} m_i \right)$.

Je-li σ hustota, pak $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}V$, kde V je objem tělesa a moment setrvačnosti lze vyjádřit ve tvaru

$$I = \int_V r^2 \sigma \mathrm{d}V .$$

V případě, že těleso je homogenní $(\sigma = \text{konst.})$, je možné předchozí vztah zjednodušit

$$I = \sigma \int_V r^2 \mathrm{d}V .$$

Věta. Je-li $M \subset \mathbf{R}^3$ přípustná oblast s hustotou $\sigma(x, y, z)$, pak pro její momenty setrvačnosti $I_x(M)$ vzhledem k ose x, $I_y(M)$ vzhledem k ose y a $I_z(M)$ vzhledem k ose z platí

$$I_x(M) = \iiint_M \left(y^2 + z^2 \right) \sigma(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$
$$I_y(M) = \iiint_M \left(x^2 + z^2 \right) \sigma(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$
$$I_z(M) = \iiint_M \left(x^2 + y^2 \right) \sigma(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

2.6.4. Souřadnice těžiště tělesa

Těžiště (**hmotný střed**) je působiště gravitační síly působící na těleso. Těžiště je takový bod, že působení gravitační síly na něj má stejný účinek jako působení na celé těleso. Má-li být těleso podepřeno (nebo zavěšeno) v jednom bodě tak, aby gravitační síla byla vyrovnána, pak svislá těžnice musí procházet bodem podepření nebo závěsu.

Diskrétní rozložení hmoty

Mějme soustavu *n* částic umístěných na ose x, jejich celková hmotnost je $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Jejich těžiště je v bodě o souřadnici $x_t = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$.

Jsou-li částice soustavy umístěny v trojrozměrném prostoru, je poloha jejich těžiště určena trojicí rovnic

$$x_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i ,\; y_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i ,\; z_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i .$$

Spojité rozložení hmoty

Jestliže předpokládáme spojité rozložení hmoty, musíme nahradit součty v rovnicích integrálem a těžiště definovat vztahem

$$x_t = \frac{1}{m} \int_M x \mathrm{d}m,\; y_t = \frac{1}{m} \int_M y \mathrm{d}m,\; y_t = \frac{1}{m} \int_M y \mathrm{d}m$$

A když vyjádříme hmotnost pomocí hustoty, dostaneme pro všechny tři souřadnice těžiště tělesa vztahy

$$x_t = \frac{1}{m} \int_V x\sigma \mathrm{d}V,\; y_t = \frac{1}{m} \int_V y\sigma \mathrm{d}V,\; z_t = \frac{1}{m} \int_V z\sigma \mathrm{d}V$$

a jednotlivé integrály můžeme nakonec nahradit statickými momenty tělesa vzhledem k příslušným rovinám.

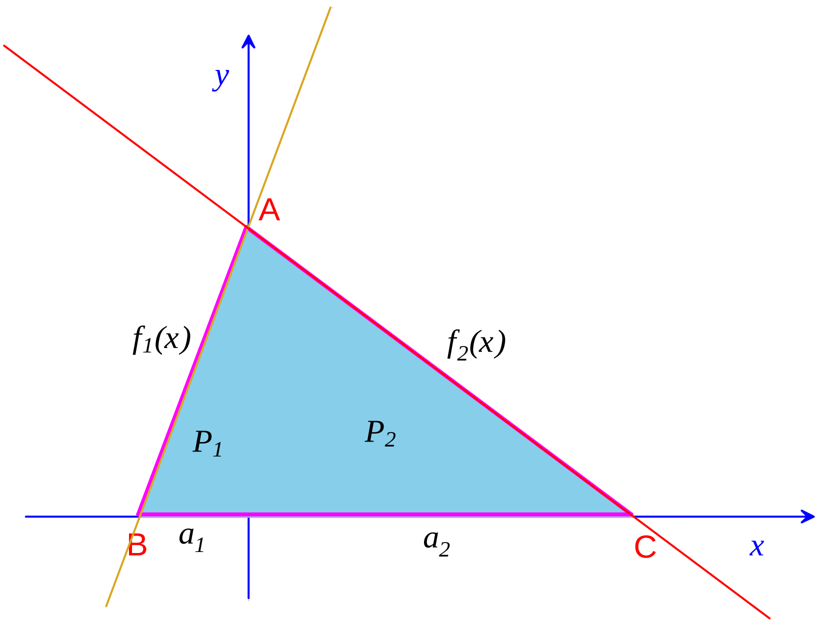
Věta. Pro souřadnice $\left[x_t(M), y_t(M), z_t(M)\right]$ těžiště tělesa M platí

$$x_t(M) = \frac{S_{yz}(M)}{m(M)},\; y_t(M) = \frac{S_{xz}(M)}{m(M)},\; z_t(M) = \frac{S_{xy}(M)}{m(M)}.$$

3. PRAKTICKÁ ČÁST

3. 1. OBSAHY

3.1.1. Trojúhelník



obr. 5

1. Při odvozování obecného vzorce pro obsah trojúhelníka o stranách a, b, c považuji za nejvýhodnější umístit trojúhelník do kartézské soustavy souřadnic jako na obrázku. Je na něm dobře vidět, že trojúhelník je shora ohraničen dvěma různými funkcemi $f_1(x)$, $f_2(x)$. Tu část vlevo od osy y ohraničuje funkce $f_1(x)$ a tu vpravo funkce $f_2(x)$. Považuji proto za vhodné spočítat obsah levé části P_1 a pravé části P_2 zvlášť a potom sečíst jednotlivé obsahy.

2. Při zjišťování předpisu funkce $f_1(x)$ můžeme vycházet například z toho, že prochází body $B[-a_1;0]$ a $A[0;v_a]$. Potom už jednoduše dojdeme k tomu, že funkce, kterou hledáme, je

$$f_1(x) = \frac{v_a}{a_1}x + v_a .$$

Stejně budeme postupovat i u $f_2(x)$, která prochází body $C[a_2;0]$ a $A[0;v_a]$. Její předpis je

$$f_2(x) = -\frac{v_a}{a_2}x + v_a .$$

3. Při výpočtu obsahu P_1 budou integrační meze $a = -a_1, b = 0$.

$$P_1 = \int_{-a_1}^{0} \left(\frac{v_a}{a_1}x + v_a \right) \mathrm{d}x = v_a \left[\frac{x^2}{2a_1} + x \right]_{-a_1}^{0} = \frac{a_1 v_a}{2}$$

Při výpočtu obsahu P_2 budou integrační meze $a = 0, b = a_2$.

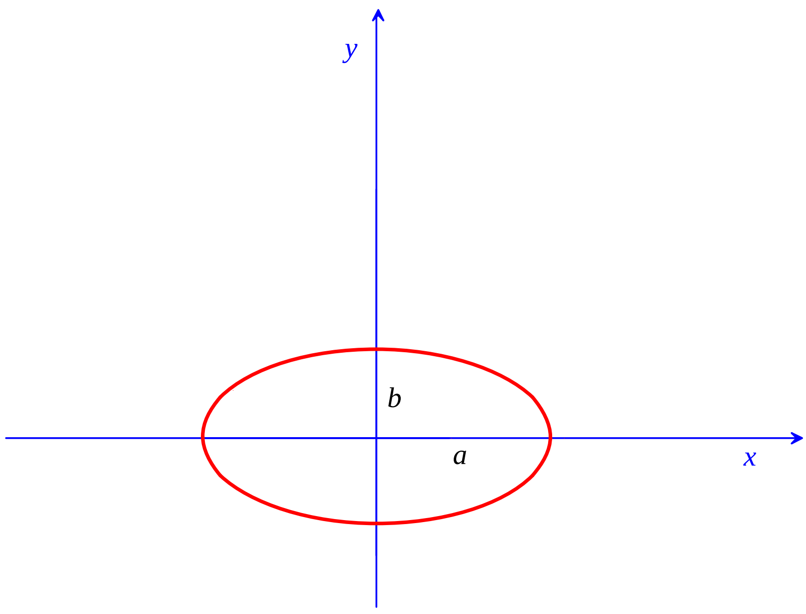
$$P_2 = \int_{0}^{a_2} \left(-\frac{v_a}{a_2}x + v_a \right) \mathrm{d}x = -v_a \left[\frac{x^2}{2a_2} - x \right]_{0}^{a_2} = \frac{a_2 v_a}{2}$$

Výsledný obsah *P* je součtem obsahů P_1 a P_2.

$$\underline{P} = P_1 + P_2 = \frac{a_1 v_a}{2} + \frac{a_2 v_a}{2} = \frac{v_a}{2}(a_1 + a_2) = \underline{\frac{a v_a}{2}}$$

Obecný vzorec pro obsah trojúhelníka je $P = \frac{a v_a}{2}$.

3.1.2. Elipsa



obr. 6

1. Funkci $f(x)$ v tomto případě odvodíme z analytického předpisu pro elipsu. V analytické geometrii jsme pro elipsu používali vzorec $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Z něj si vyjádříme *y* a budeme znát funkce, které popisují elipsu.

$$f(x)=y=\pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

2. Elipsa je osově symetrická podle hlavní i vedlejší osy a při umístění na obrázku to znamená, že je také souměrná podle osy *x* a *y*. Toho můžeme využít a vypočítat obsah P_1, který bude jen obsahem části elipsy nacházející se v prvním kvadrantu. Funkci budeme psát ve tvaru $f(x)=b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Celkový obsah P elipsy bude pochopitelně čtyřikrát větší.

3. Při výpočtu obsahu P_1 budeme integrovat v mezích od 0 do a.

$$P_1 = \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x = b\int_0^a \sqrt{1\text{-}\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

použijeme substituci $\frac{x}{a} = \sin t$

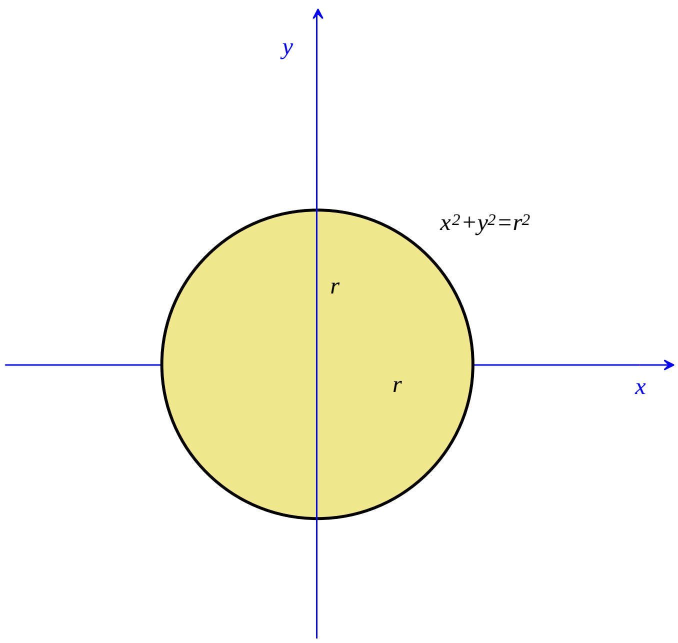
$$P_1 = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = ab\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$

Pro celkový obsah P elipsy platí:

$$\underline{P} = 4P_1 = 4\cdot\frac{\pi ab}{4} = \underline{\pi ab}$$

Obecný vzorec pro obsah elipsy je $P = \pi ab$.

3.1.3. Kruh



obr. 7

1. Při odvozování vzorce pro obsah kruhu budu postupovat velmi podobně jako u elipsy. $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

2. Kruh je osově symetrický podle všech přímek procházejících jeho středem, a proto také podle osy *x* a *y*. Opět tedy odvodím jen vzorec pro obsah P_1 části kruhu nacházející se v prvním kvadrantu a pro dosazení do vzorce $P(a,b,f(x))=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ použiji funkci $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$. Celkový obsah P bude čtyřikrát větší.

3. Při výpočtu obsahu P_1 budou integrační meze $a=0, b=r$.

$$P_1=\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=r\int_0^r \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\mathrm{d}x$$

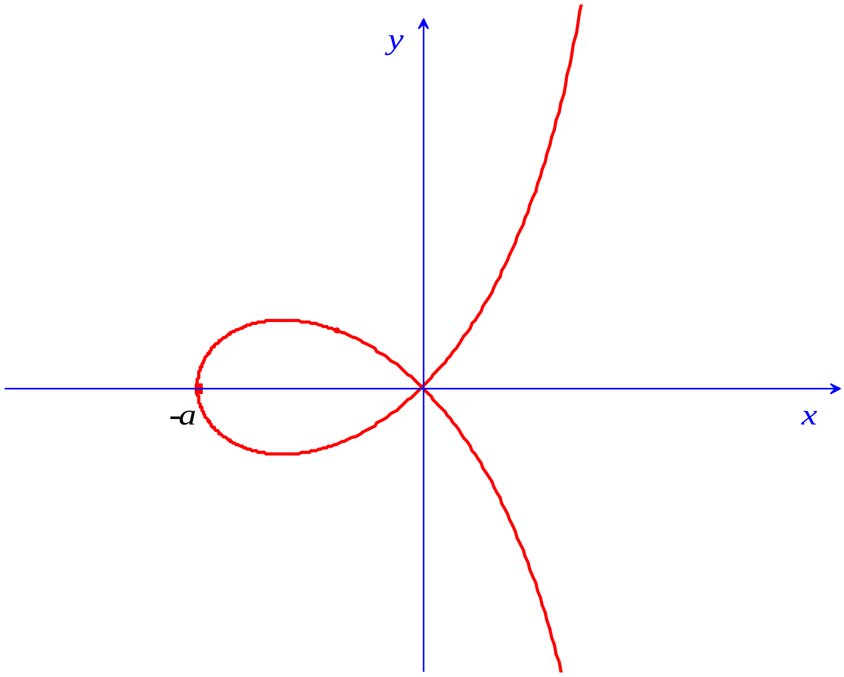
použijeme substituci $\frac{x}{r}=\sin t$

$$P_1=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}$$

$$\underline{P}=4P_1=4\cdot\frac{\pi r^2}{4}=\underline{\pi r^2}$$

Obecný vzorec pro obsah kruhu je $P=\pi r^2$.

3.1.4. Strofoida



obr. 8

1. V případě strofoidy budeme hledat vzorec pro výpočet obsahu smyčky této křivky. Funkci $f(x)$, kterou použijeme ve vzorci $P(a,b,f(x))=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, odvodíme z analytického předpisu pro strofoidu. Vyjádříme si y ze vztahu $(a-x)y^2=(a+x)x^2$.

$$y=f(x)=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

2. Protože strofoida není funkce, ale křivka popsaná dvěma funkcemi $f_1(x)=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, $f_2(x)=-x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, musíme zjistit, která z těchto funkcí popisuje část křivky omezující interval $\langle -a,0\rangle$ shora. Když si zkusíme dosadit za x libovolnou hodnotu z intervalu $\langle -a,0\rangle$, vidíme, že funkce $f_1(x)$ nabývá záporných hodnot a funkce $f_2(x)$ hodnot kladných. Z toho vyplývá, že budeme pracovat s funkčním předpisem $f(x)=f_2(x)=-x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. Protože je strofoida souměrná podle osy x, můžeme pro zjednodušení integrovat jen horní polovinu strofoidy a obsah násobit dvěma.

3. Za dolní mez dosazujeme číslo $(-a)$, horní mez je rovna 0.

$$P = 2\int_{-a}^{0} -x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$$

použijeme substituci $y^2 = \dfrac{a+x}{a-x}$

$$y^2 = \frac{a+x}{a-x} \Rightarrow x = \frac{ay^2 - a}{y^2+1} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{4ay}{\left(y^2+1\right)^2}\mathrm{d}y$$

$$P = -2\int_0^1 \frac{ay^2-a}{y^2+1}\cdot y \cdot \frac{4ay}{\left(y^2+1\right)^2}\mathrm{d}y = -8a^2\int_0^1 \frac{y^4-y^2}{\left(y^2+1\right)^3}\mathrm{d}y$$

Výraz v integrálu převedeme na parciální zlomky.

$$\frac{y^4-y^2}{\left(y^2+1\right)^3} = \frac{Ay+B}{\left(y^2+1\right)} + \frac{Cy+D}{\left(y^2+1\right)^2} + \frac{Ey+F}{\left(y^2+1\right)^3}$$
$$y^4 - y^2 = Ay^5 + By^4 + (2A+C)y^3 + (2B+D)y^2 + (A+C+E)y + (B+D+F)$$

$$\begin{array}{ll}
y^5 : 0 = A & A = 0 \\
y^4 : 1 = B & B = 1 \\
y^3 : 0 = 2A + C & C = 0 \\
y^2 : -1 = 2B + D & D = -3 \\
y^1 : 0 = A + C + E & E = 0 \\
y^0 : 0 = B + D + F & F = 2
\end{array}$$

$$\frac{y^4-y^2}{\left(y^2+1\right)^3} = \frac{1}{\left(y^2+1\right)} - \frac{3}{\left(y^2+1\right)^2} + \frac{2}{\left(y^2+1\right)^3}$$

$$P = -8a^2\int_0^1 \frac{1}{\left(y^2+1\right)}\mathrm{d}y + 24a^2\int_0^1 \frac{1}{\left(y^2+1\right)^2}\mathrm{d}y - 16a^2\int_0^1 \frac{1}{\left(y^2+1\right)^3}\mathrm{d}y = K + L + M$$

Jednotlivé integrály si můžeme označit K, L, M a spočítat je každý zvlášť.

$$K = -8a^2 \int_0^1 \frac{1}{\left(y^2+1\right)} \mathrm{d}y = -8a^2 [\operatorname{arctg} y]_0^1 = -2\pi a^2$$

Pro L, M použijeme rekurentní vzorec, který nám umožňuje mocninu ve jmenovateli postupně snižovat o jedničku.

$$\int \frac{1}{\left(y^2+1\right)^n} \mathrm{d}y = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{y}{\left(y^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{1}{\left(y^2+1\right)^{n-1}} \mathrm{d}y$$

$$L = 24a^2 \int_0^1 \frac{1}{\left(y^2+1\right)^2} \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\left(y^2+1\right)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} y\right]_0^1 = 6a^2 + 3\pi a^2$$

$$M = -16a^2 \int_0^1 \frac{1}{\left(y^2+1\right)^3} \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{y}{\left(y^2+1\right)^2} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\left(y^2+1\right)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} y\right)\right]_0^1 =$$

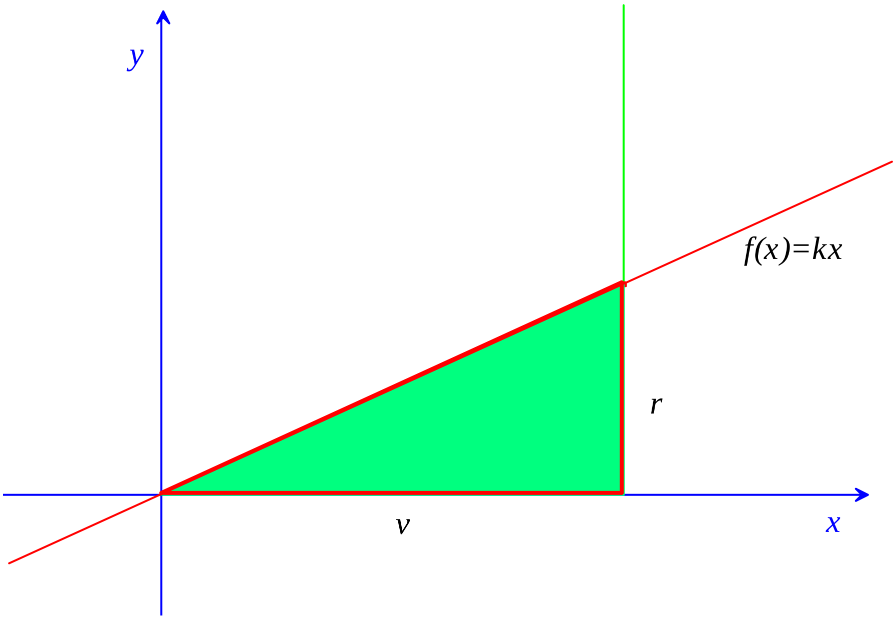
$$= \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{y}{\left(y^2+1\right)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{y}{\left(y^2+1\right)} + \frac{3}{8} \cdot \operatorname{arctg} y\right]_0^1 = -4a^2 - \frac{3}{2}\pi a^2$$

$$\underline{P} = K + L + M = -2\pi a^2 + 6a^2 + 3\pi a^2 - 4a^2 - \frac{3}{2}\pi a^2 = \underline{2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}}$$

Obecný vzorec pro obsah smyčky strofoidy je $P = 2a^2 - \dfrac{\pi a^2}{2}$.

3. 2. OBJEMY ROTAČNÍCH TĚLES

3.2.1. Rotační kužel



obr. 9

1. Pro odvození objemu použijeme vzorec pro objem rotačních těles $V=\int_a^b \pi \cdot f^2(x)\mathrm{d}x$.

Rotační kužel vznikne rotací trojúhelníka na obrázku kolem osy *x*.

2. Potřebujeme znát konkrétní tvar funkce $f(x)=kx+q$ ohraničující trojúhelník na obrázku shora. Vidíme, že grafem funkce je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic. V tomto případě $q=0$ a hledaná funkce bude ve tvaru $f(x)=kx$. Směrnici *k* můžeme odvodit například následovně:

$$\frac{v}{r}=\frac{x}{y}\Rightarrow y=\frac{r}{v}\cdot x\Rightarrow k=\frac{r}{v}$$

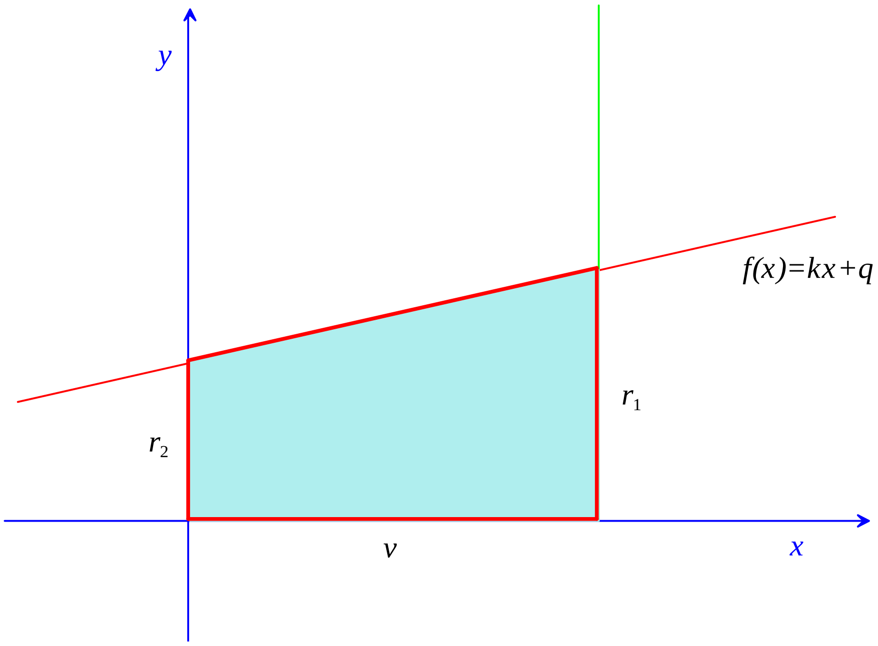
Předpis funkce, která popisuje přímku na obrázku, je $f(x)=\frac{r}{v}\cdot x$.

3. Nyní musíme integrovat odvozenou funkci podle vzorce $V=\int_a^b \pi\cdot f^2(x)\mathrm{d}x$; r, v a π jsou konstanty. Pro meze platí $a=0, b=v$.

$$\underline{V}=\int_0^v \pi\cdot\left(\frac{r}{v}\cdot x\right)^2 \mathrm{d}x=\frac{\pi\cdot r^2}{v^2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v=\underline{\frac{1}{3}\pi r^2 v}$$

Obecný vzorec pro objem rotačního kužele je $V=\frac{1}{3}\pi r^2 v$.

3.2.2. Komolý rotační kužel



obr. 10

1. Pro odvození objemu můžeme využít vzorce pro objem rotačních těles $V=\int_a^b \pi\cdot f^2(x)\mathrm{d}x$. K tomu potřebujeme předpis funkce pro přímku, která čtyřúhelník na obrázku omezuje shora.

2. Odvodíme ho následovně:

Obecně lze lineární funkci zapsat takto: $f(x)=kx+q$

q je posunutí grafu funkce $f(x)$ ve směru osy y. V tomto případě to znamená vzdálenost r_2 a to je poloměr horní podstavy komolého rotačního kužele. Směrnici k chceme také vyjádřit pomocí poloměrů a výšky kužele. My víme, že

$$k = \mathrm{tg}\varphi = \frac{r_1 - r_2}{v}.$$

Takže nyní už můžeme napsat funkci popisující přímku.

$$f(x) = \frac{r_1 - r_2}{v} \cdot x + r_2$$

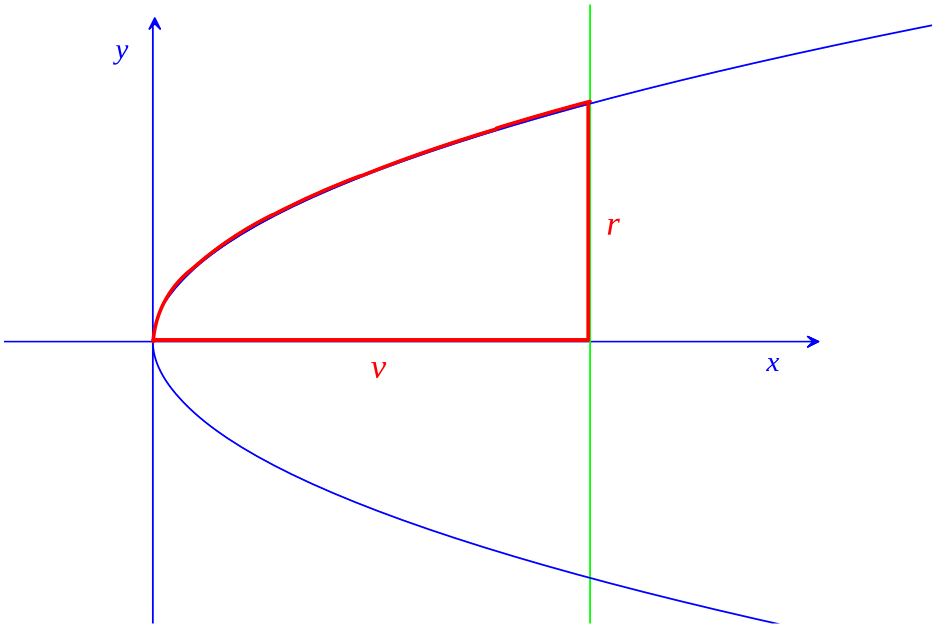
3. Protože r_1, r_2, v a π jsou konstanty a pro meze platí $a = 0, b = v$, tak výpočet objemu je už snadný.

$$\underline{V} = \pi \cdot \int_0^v \left(\frac{r_1 - r_2}{v} \cdot x + r_2 \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi (r_1 - r_2)^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v + \frac{2\pi r_2 (r_1 - r_2)}{v} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v + \pi r_2^2 [x]_0^v =$$

$$= \underline{\frac{\pi v}{6} \cdot \left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 \right)}$$

Obecný vzorec pro objem komolého rotačního kužele je $V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 \right)$.

3.2.3. Rotační paraboloid



obr. 11

1. Při odvozování vzorce pro objem rotačního paraboloidu (tělesa omezeného rotačním paraboloidem a rovinou kolmou k jeho ose ve vzdálenosti v od vrcholu paraboloidu) můžeme opět využít vzorce pro objem rotačních těles $V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x) \mathrm{d}x$. Rotační paraboloid vznikne rotací červeně ohraničeného útvaru na obrázku kolem osy *x*.

2. Výška rotačního paraboloidu je tedy v a poloměr podstavy si můžeme označit r. Funkční předpis pro parabolu, umístěnou v kartézské soustavě souřadnic jako na obrázku, je $y^2 = 2px$. Protože chceme, aby ve vzorci figurovala výška v a poloměr r, využijeme toho, že na parabole leží bod o souřadnicích $[v, r]$.

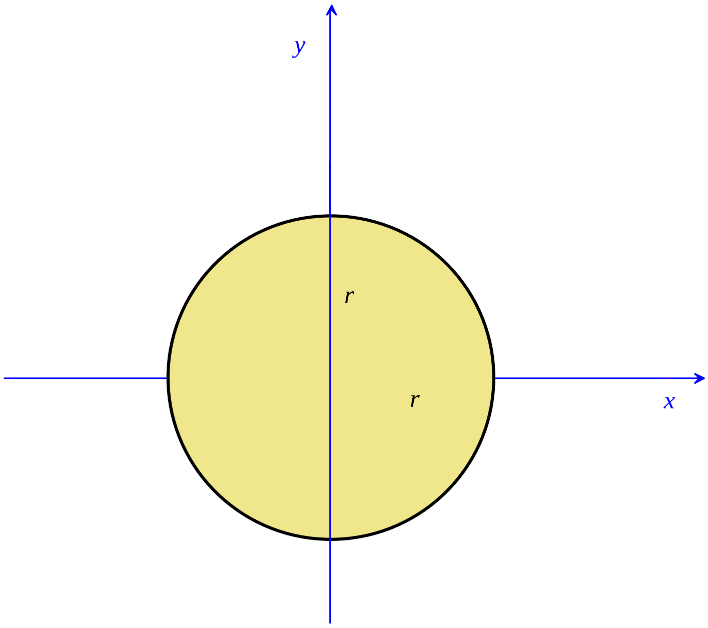
$$y^2 = 2px \Rightarrow r^2 = 2pv \Rightarrow 2p = \frac{r^2}{v} \Rightarrow y^2 = f^2(x) = \frac{r^2}{v} x$$

3. Takto upravený funkční předpis budeme integrovat podle vzorce $V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x) \mathrm{d}x$; r, v a π jsou konstanty. Pro meze platí $a = 0, b = v$.

$$\underline{V} = \int_0^v \pi \cdot \frac{r^2}{v} \cdot x\mathrm{d}x = \frac{\pi \cdot r^2}{v} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v = \underline{\frac{1}{2}\pi r^2 v}$$

Obecný vzorec pro objem rotačního paraboloidu je $V = \frac{1}{2}\pi r^2 v$.

3.2.4. Koule



obr. 12

1. Pro odvození vzorce objemu koule můžeme opět využít vzorce pro objem rotačních těles. V tomto případě nám bude kolem osy *x* rotovat půlkružnice omezená osou *x*. Půlkružnice je ale symetrická (osově souměrná s osou *y*), a tak se můžeme zaměřit pouze na první kvadrant.

2. Funkci, kterou budeme integrovat, si odvodíme z analytického předpisu pro kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ tak, že si vyjádříme *y*.

$$f(x) = y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

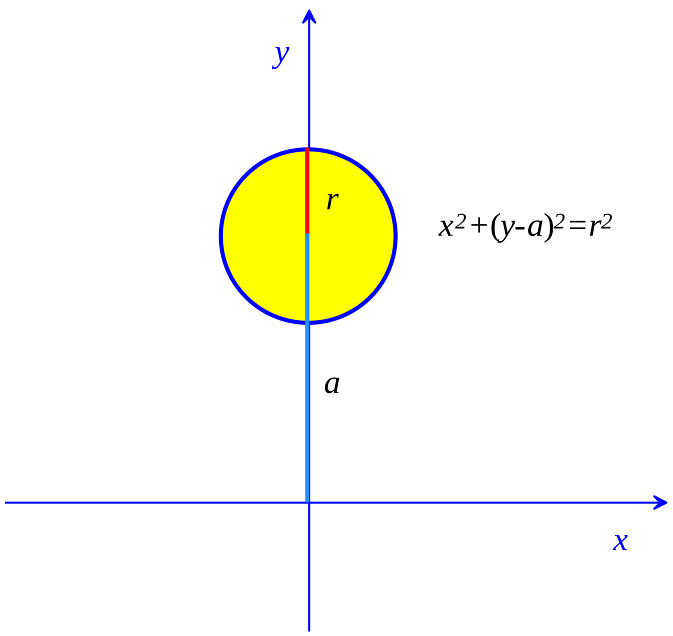
Protože nás bude zajímat jen první kvadrant, můžeme použít funkci ve tvaru $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

3. Nyní budeme integrovat odvozenou funkci podle vzorce $V=\int_a^b \pi\cdot f^2(x)\mathrm{d}x$; r a π jsou konstanty. Pro meze platí $a=0, b=r$.

$$\underline{V}=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi r^2\left[x\right]_0^r-2\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Obecný vzorec pro objem koule je $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

3.2.5. Anuloid



obr. 13

1. Protože se jedná o rotační těleso, tak pro odvození objemu můžeme opět využít vzorce pro objem rotačních těles $V=\int_a^b \pi\cdot f^2(x)\mathrm{d}x$. Anuloid vznikne rotací kružnice vyznačené na obrázku kolem osy *x*.

2. Vzdálenost středu kružnice od počátku soustavy souřadnic (jedná se vlastně o poloměr anuloidu) jsem označil *a*, poloměr kružnice je *r*. Analytický předpis pro takto umístěnou kružnici je $x^2 + (y-a)^2 = r^2$. Kružnici můžeme popsat dvěma funkcemi, horní polovinu kružnice funkcí $f_1(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ a dolní polovinu funkcí $f_2(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Při výpočtu objemu se bude vlastně jednat o rozdíl dvou těles, která vzniknou rotací kolem osy *x*. První těleso bude shora ohraničeno funkcí $f_1(x)$ a druhé těleso bude shora ohraničeno funkcí $f_2(x)$. Protože je takto umístěný anuloid souměrný i podle osy *y*, můžeme počítat s mezemi $a = 0, b = r$. Když ale použijeme tyto meze, musíme objem zdvojnásobit, protože jinak bychom dostali jen objem části anuloidu napravo od osy *y*.

3. V tomto případě jsou konstanty π , *r* a *k*. Pro meze platí $a = 0, b = r$.

$$V = 2\pi\int_0^r \left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - 2\pi\int_0^r \left(a-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\int_0^r \left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 - \left(a-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^r 4a\cdot\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 8\pi ar\int_0^r \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

použijeme substituci $\frac{x}{r} = \sin t$

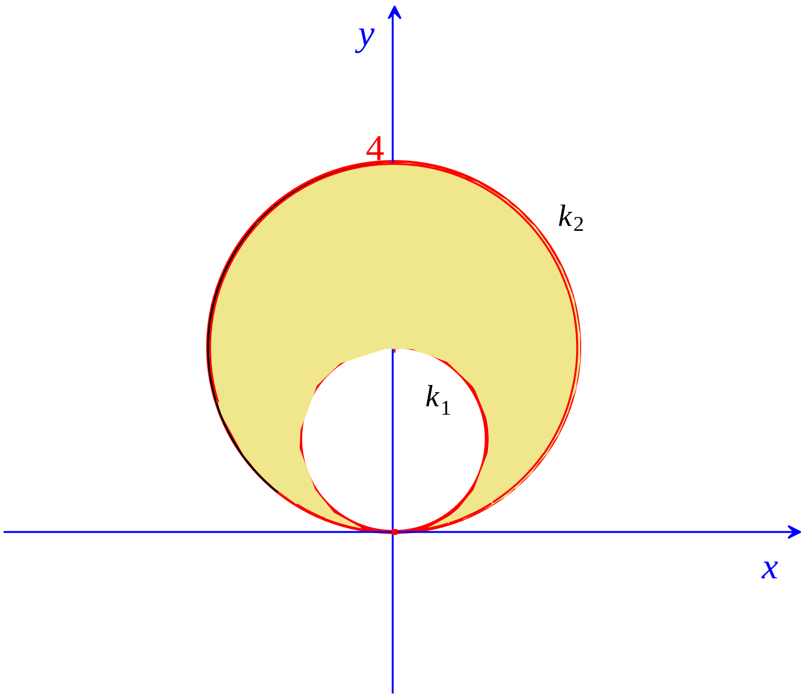
$$\underline{V} = 8\pi ar^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = 4\pi ar^2\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi ar^2\left[\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{2\pi^2 ar^2}$$

Obecný vzorec pro objem anuloidu je $V = 2\pi^2 ar^2$.

3. 3. DALŠÍ ZPŮSOBY VÝPOČTU OBSAHŮ GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ A OBJEMŮ TĚLES

3.3.1. Obsah geometrického útvaru

Chtěl bych ukázat různé přístupy využití jednoduchého a dvojného integrálu na příkladu, kde máme najít plošný obsah útvaru, pro který platí podmínka $2y \le x^2 + y^2 \le 4y$.



obr. 14

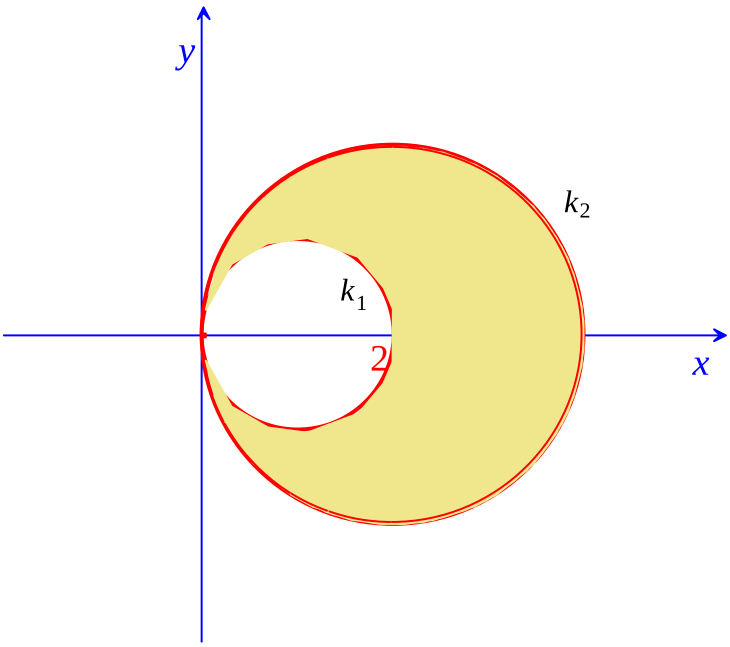
Jedná se o množinu ohraničenou dvěma kružnicemi. První kružnice, označíme si ji k_1, má analytický tvar $x^2 + (y-1)^2 = 1$, což znamená, že má poloměr 1 a střed v bodě $[0,1]$. Druhá kružnice k_2 má předpis $x^2 + (y-2)^2 = 4$, střed v bodě $[0,2]$ a poloměr 2.

1. Výpočet pomocí **jednoduchého** Riemannova integrálu

Při výpočtu pomocí jednoduchého Riemannova integrálu používáme vzorec $P(a,b,f(x))=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro náš případ se ale vzorec moc nehodí, protože si neumíme jednoduše vyjádřit y z daných předpisů pro kružnice.

Jak můžeme příklad vyřešit?

a) Útvar zobrazíme v osové souměrnosti podle osy 1.kvadrantu ($x=y$). Tvar obrazce bude zachován, v analytickém vyjádření to bude znamenat záměnu proměnných x a y.



obr. 15

Teď platí pro kružnice: $k_1: y=\pm\sqrt{1-(x-1)^2}$, $k_2: y=\pm\sqrt{4-(x-2)^2}$

Obsah útvaru je roven rozdílu obsahů kruhů vymezených kružnicemi k_1, k_2.

$$P=P(k_2)-P(k_1)=2\int_0^4\sqrt{4-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x-2\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Oba integrály si vyřešíme zvlášť

$$P(k_1) = 2\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci $x-1=\sin t$

$$P(k_1) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Druhý integrál spočítáme podobně

$$P(k_2) = 2\int_0^4 \sqrt{4-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^4 \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci $\dfrac{x-2}{2}=\sin t$

$$P(k_2) = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

$$\underline{P} = P(k_2) - P(k_1) = 4\pi - \pi = \underline{3\pi}$$

Obsah obrazce ohraničeného kružnicemi je 3π .

b) Obě kružnice posuneme tak, aby střed každé z nich byl ve středu kartézské soustavy souřadnic. Tím se změní tvar útvaru a analytické vyjádření kružnic, nicméně obsah mezi kružnicemi zůstane zachován a budeme schopni jej vyřešit.

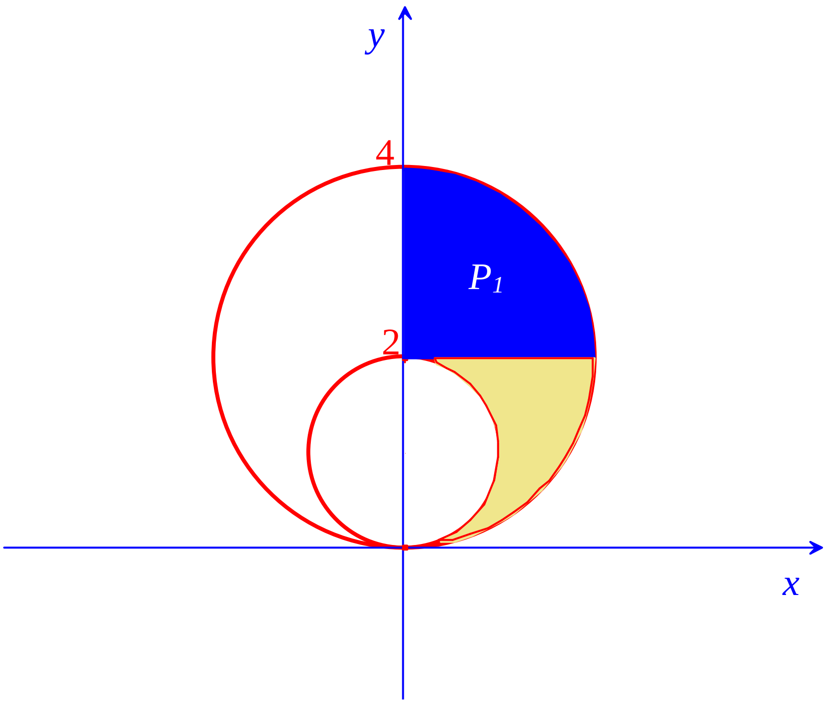
Pro kružnice platí:

$$k_1 : x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-(x-1)^2}\ ,\ k_2 : x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-(x-2)^2}$$

Stejně jako v předchozím případě bude obsah útvaru roven rozdílu obsahů kruhů vymezených kružnicemi k_1, k_2 ale narozdíl od předchozího příkladu budeme substituovat trošku jednodušší výrazy, jinak je řešení velmi podobné.

$$\underline{P} = P(k_2) - P(k_1) = 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x - 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \pi = \underline{3\pi}$$

2. Výpočet pomocí **dvojného** Riemannova integrálu



obr. 16

Obsah útvaru mezi kružnicemi při výpočtu pomocí dvojného integrálu bude roven dvojnásobku součtu obsahů P_1 a P_2 na obrázku. $P = 2(P_1 + P_2)$.

Obsahy jednotlivých útvarů si spočítáme opět zvlášť.

$$P_1 = \int_2^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-(y-2)^2}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 2\int_2^4 \sqrt{1 - \left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

Použijeme substituci $\dfrac{y-2}{2}=\sin t$

$$P_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Nyní spočítáme obsah P_2.

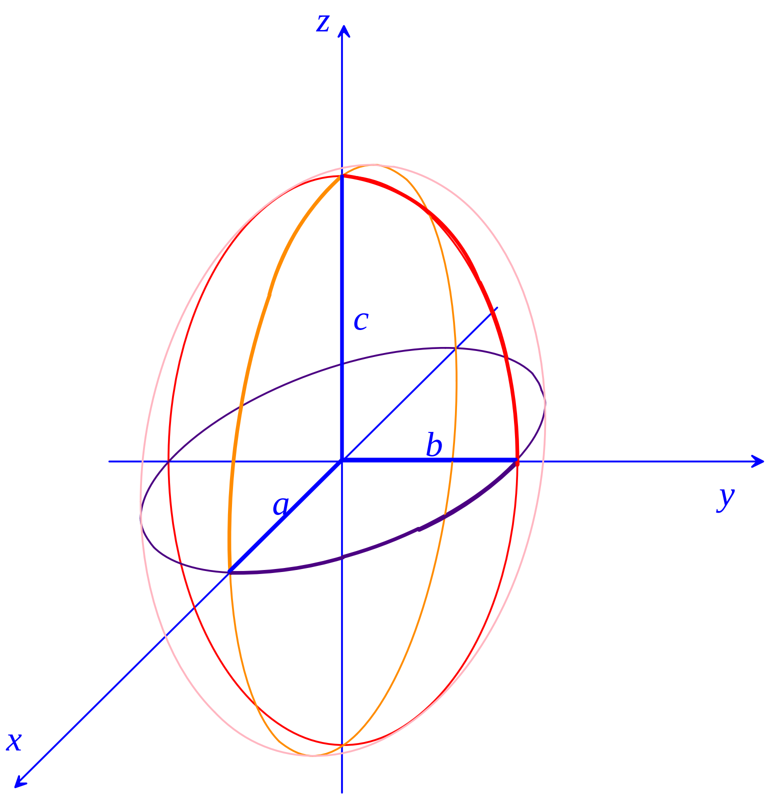
$$P_2 = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-(y-2)^2}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^2 \sqrt{4-(y-2)^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{P} = 2(P_1+P_2) = 2\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \underline{3\pi}$$

Obsah obrazce ohraničeného kružnicemi je 3π.

3.3.2. Objem elipsoidu



obr. 17

1. Odvození vzorce pomocí **jednoduchého** Riemannova integrálu

Jednoduchým Riemannovým integrálem lze odvodit vzorec pro objem rotačního elipsoidu a můžeme rozlišovat 2 případy.

a) Rotační elipsoid vznikne rotací elipsy kolem osy *x* (poloosa *a*).

$$\underline{V_x} = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left[x\right]_0^a - 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \underline{\frac{4}{3}\pi a b^2}$$

Pro poloosu c platí: $c = b$.

b) Rotační elipsoid vznikne rotací elipsy kolem osy *y* (poloosa *b*).

$$V_y = 2\pi \cdot \int_{-a}^{a} x \cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2\pi \int_0^a xb \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x$$

použijeme substituci $t = \dfrac{x^2}{a^2}$

$$V_y = 4\pi b \int_0^1 x \cdot \frac{a^2}{2x}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = 2\pi a^2 b \int_0^1 \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

použijeme substituci $u = 1 - t$

$$\underline{V_y} = 2\pi a^2 b(-1)\int_1^0 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = 2\pi a^2 b\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \mathrm{d}u = \underline{\frac{4}{3}\pi a^2 b}$$

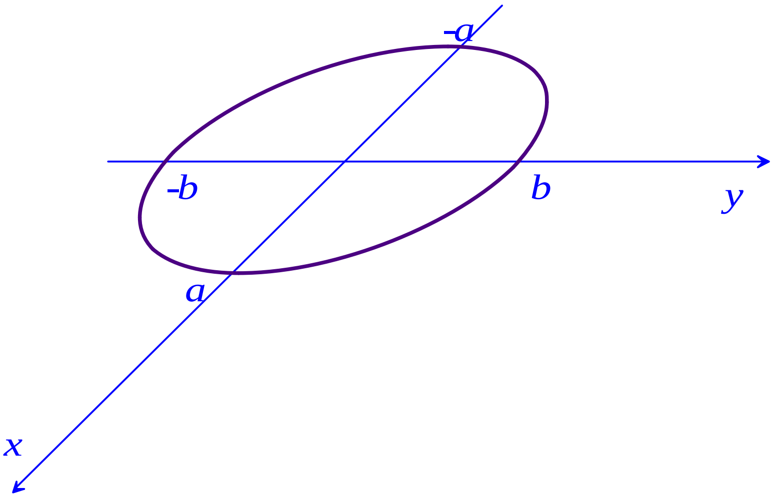
Pro poloosu c platí: $c = a$.

2. Odvození vzorce pomocí **dvojného** Riemannova integrálu

Rovnice, kterou je elipsoid s poloosami $a, b, c,$ popsán v kartézských souřadnicích, má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Pro zjednodušení budeme integrovat jen horní půlelipsoid, který je omezen rovinou $z = 0$ a plochou $z = c \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$, jejíž rovnici dostaneme z rovnice elipsoidu. Nesmíme ale potom zapomenout, že objem celého elipsoidu bude dvojnásobný. Při určování mezí integrálů budeme vycházet z toho, že podstava půlelipsoidu je omezena elipsou $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



obr. 18

Víme, že x může nabývat hodnot $\langle -a, a \rangle$. Hodnoty, kterých bude nabývat $y-$ová složka již budou závislé na x a tuto závislost si vyjádříme z rovnice $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

x budeme integrovat v mezích $\langle -a, a \rangle$

y budeme integrovat v mezích $\left\langle -b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right\rangle$

$$V=2c\int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Nejdříve si spočítáme integrál v závorce, můžeme si ho označit A. Můžeme také provést substituci $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=m$, protože výraz se při integraci podle y chová jako konstanta.

$$A=\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y=\int_{-bm}^{bm}\sqrt{m^2-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y=m\int_{-bm}^{bm}\sqrt{1-\left(\frac{y}{bm}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

použijeme substituci $\frac{y}{bm}=\sin t$

$$A=bm^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=bm^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}bm^2$$

Teď dosadíme za m zase zpět odmocninu $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, protože budeme integrovat podle x.

$$\underline{V}=2c\int_{-a}^{a}(A)\mathrm{d}x=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}=\underline{\frac{4}{3}\pi abc}$$

Obecný vzorec pro objem elipsoidu je $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

3. Odvození vzorce pomocí **trojného** Riemannova integrálu

Opět budeme vycházet z rovnice $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, kterou je elipsoid popsán v kartézských souřadnicích.

x budeme integrovat v mezích $\langle -a,a\rangle$

y budeme integrovat v mezích $\left\langle -b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\rangle$

z budeme integrovat v mezích $\left\langle -c\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},c\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\rangle$

Trojný integrál sestavíme následovně:

$$V=\int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Pro zjednodušení výpočtu využijeme toho, že elipsoid je osově symetrický podle všech souřadnicových os.

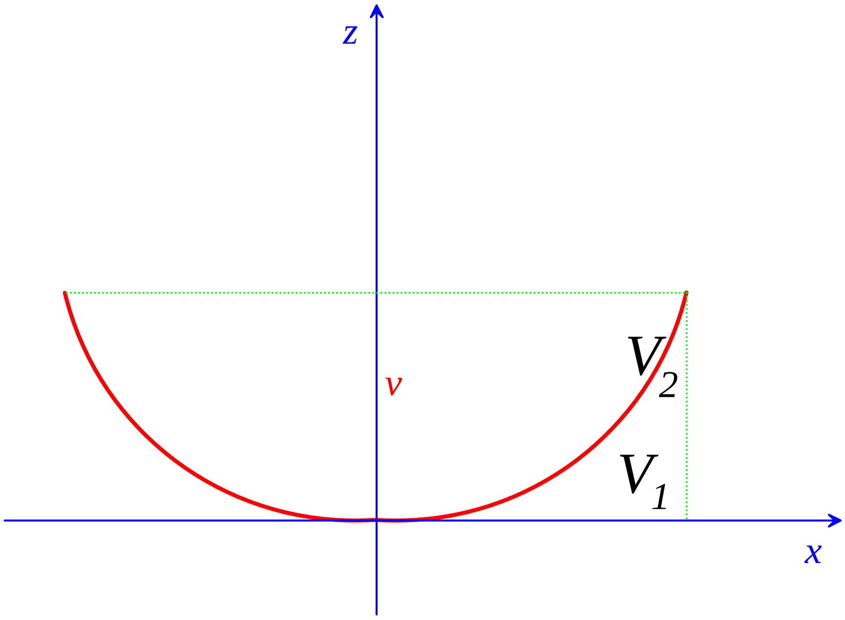
$$V=2\int\limits_{0}^{a}\left(2\int\limits_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(2\int\limits_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=8\int\limits_{0}^{a}\left(\int\limits_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Výraz v tomto tvaru je stejný jako u dvojného integrálu, takže dále bychom už postupovali stejně.

$$\underline{V=\frac{4}{3}\pi abc}$$

3.3.3. Objem kvartoidu

Plocha kvartoidu je dána předpisem $z=\frac{1}{a^3}\left(x^2+y^2\right)^2$, kde a je parametr. Máme-li na mysli objem kvartoidu, je to objem tělesa ohraničeného touto plochou a rovinou kolmou k ose souměrnosti kvartoidu v libovolné výšce v (vzdálenosti od vrcholu). Vrchol kvartoidu je v počátku soustavy souřadnic.



obr. 19

1. Odvození vzorce pomocí **jednoduchého** Riemannova integrálu

Při odvozování vzorce pro objem kvartoidu můžeme postupovat následovně. Najdeme jeho průsečnici s rovinou xz, takže volíme $y=0$ a dostáváme rovnici $z=\frac{1}{a^3}x^4$. Jedná se o předpis mocninné funkce, grafem je křivka podobná parabole. Jako nejjednodušší řešení při odvozování se nabízí využití vzorců pro objem rotačních těles.

a) Uvažujme případ, že těleso rotuje kolem osy z, potom $V=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

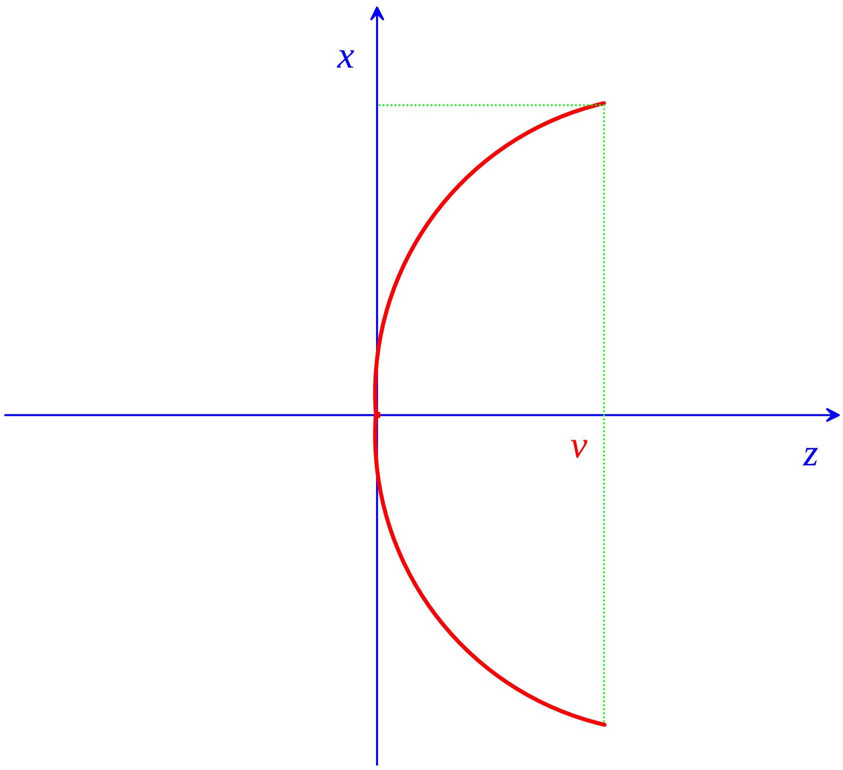
Protože vzorec můžeme použít při výpočtu objemu rotačního tělesa, které je omezeno ve směru osy z funkcí $f(x)$ a funkcí $z=0$, musíme výsledný objem počítat jako rozdíl objemu V_2 válce o výšce v a poloměru $\sqrt[4]{va^3}$ a rotačního tělesa o objemu V_1 (viz. obrázek).

$$V_1=2\pi\int_0^{\sqrt[4]{va^3}} x\cdot\frac{x^4}{a^3}\mathrm{d}x;\quad V_2=2\pi\int_0^{\sqrt[4]{va^3}} x\cdot v\mathrm{d}x$$

$$\underline{V} = V_2 - V_1 = 2\pi \int_0^{\sqrt[4]{va^3}} x \cdot v - x \cdot \frac{x^4}{a^3} \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} \cdot v - \frac{x^6}{6a^3} \right]_0^{\sqrt[4]{va^3}} = \underline{\frac{2}{3}\pi av\sqrt{av}}$$

Obecný vzorec pro objem kvartoidu je $V = \frac{2}{3}\pi av\sqrt{av}$.

b) Když pootočíme soustavu souřadnic o 90°, dostaneme analogickou situaci jako v případech, když jsme počítali objem rotačních těles rotujících kolem osy x pomocí jednoduchého Riemannova integrálu $V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\mathrm{d}x$.



obr. 20

Pro tento náš případ si vzorec pozměníme $V = \int_a^b \pi \cdot f^2(z)\mathrm{d}z$. Abychom mohli integrovat, vyjádříme si $x = f(z)$, tj. $f(z) = \sqrt[4]{a^3 z}$. Protože z bude nabývat hodnot od 0 do v, kde v je výška kvartoidu, můžeme do vzorce dosadit a dostáváme:

$$\underline{V} = \int_0^v \pi \cdot \left(\sqrt[4]{a^3 z}\right)^2 \mathrm{d}z = \pi\sqrt{a^3}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_0^v = \underline{\frac{2}{3}\pi av\sqrt{av}}$$

2. Odvození vzorce pomocí **trojného** Riemannova integrálu

Nejdůležitější je správně zvolit meze, ve kterých budeme integrovat .

$x-$ová složka nabývá hodnot $\left\langle -\sqrt[4]{va^3}, \sqrt[4]{va^3} \right\rangle$

Při určování mezí $y-$ové složky vycházíme z toho, že řezem kvartoidu rovinou $z=v$ bude kružnice $x^2+y^2=\left(\sqrt[4]{va^3}\right)^2$, takže platí $y \in \left\langle -\sqrt{\sqrt{va^3}-x^2}; \sqrt{\sqrt{va^3}-x^2} \right\rangle$.

Hodnoty $z-$ové souřadnice jsou omezeny zespoda plochou kvartoidu a shora rovinou $z=v$. $z \in \left\langle \frac{1}{a^3}\left(x^2+y^2\right)^2; v \right\rangle$.

$$V = \int_{-\sqrt[4]{va^3}}^{\sqrt[4]{va^3}} \left(\int_{-\sqrt{\sqrt{va^3}-x^2}}^{\sqrt{\sqrt{va^3}-x^2}} \left(\int_{\frac{1}{a^3}\left(x^2+y^2\right)^2}^{v} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Ještě než se pustíme do integrování, bude vhodné si integraci trošku zjednodušit, zavedeme substituci $\sqrt{va^3}=m$ a také využijeme symetrie kvartoidu.

$$V=4\int_0^{\sqrt{m}}\left(\int_0^{\sqrt{m-x^2}}\left(\int_{\frac{1}{a^3}\left(x^2+y^2\right)^2}^{v}1\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=4\int_0^{\sqrt{m}}\left(\int_0^{\sqrt{m-x^2}}v-\frac{1}{a^3}\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=4\int_0^{\sqrt{m}}\left[vy-\frac{1}{a^3}x^4y-\frac{2x^2y^3}{3a^3}-\frac{y^5}{5a^3}\right]_0^{\sqrt{m-x^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=4\int_0^{\sqrt{m}}\left(v\sqrt{m-x^2}-\frac{1}{a^3}x^4\sqrt{m-x^2}-\frac{2x^2\left(m-x^2\right)\sqrt{m-x^2}}{3a^3}-\frac{\left(m-x^2\right)^2\sqrt{m-x^2}}{5a^3}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=4v\int_0^{\sqrt{m}}\sqrt{m-x^2}\mathrm{d}x-\frac{32}{15a^3}\int_0^{\sqrt{m}}x^4\sqrt{m-x^2}\mathrm{d}x-\frac{16m}{15}\int_0^{\sqrt{m}}x^2\sqrt{m-x^2}\mathrm{d}x-\frac{4m^2}{5a^3}\int_0^{\sqrt{m}}\sqrt{m-x^2}\mathrm{d}x=$$

$$=4v\cdot A-\frac{32}{15a^3}\cdot B-\frac{16m}{15}\cdot C-\frac{4m^2}{5a^3}\cdot A$$

Jednotlivé integrály jsem označil A,B,C. Bude jednodušší , když si vyřeším každý zvlášť.

$$A=\int_0^{\sqrt{m}}\sqrt{m-x^2}\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci $x=\sqrt{m}\cdot\sin t$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}m\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{m}{4}[t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{m}{4}[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi m}{4}$$

$$B=\int_0^{\sqrt{m}}x^4\cdot\sqrt{m-x^2}\mathrm{d}x$$

použijeme stejnou substituci jako v předchozím případě

$$B=\int_0^{\sqrt{m}}x^4\cdot\sqrt{m-x^2}\mathrm{d}x=m^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{m^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t-$$

$$-\frac{m^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)\mathrm{d}t+\frac{m^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+3\cos 2t+3\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{m^3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t-\frac{m^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t-\frac{m^3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\mathrm{d}t+\frac{m^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\left(1-\sin^2 2t\right)\mathrm{d}t$$

První tři integrály jsou jednoduché, při integraci čtvrtého použijeme substituci $\sin 2t = k$

$$B = \frac{m^3}{16}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{m^3}{16}[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{m^3}{64}[\sin 4t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m^3}{16}\left[k - \frac{k^3}{3}\right]_0^0 = \frac{\pi m^3}{32}$$

$$C = \int_0^{\sqrt{m}} x^2\sqrt{m - x^2}\,\mathrm{d}x = m^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{m^2}{8}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{m^2}{32}[\sin 4t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi m^2}{16}$$

Nyní můžeme dosadit A, B, C a pokračovat ve výpočtu objemu.

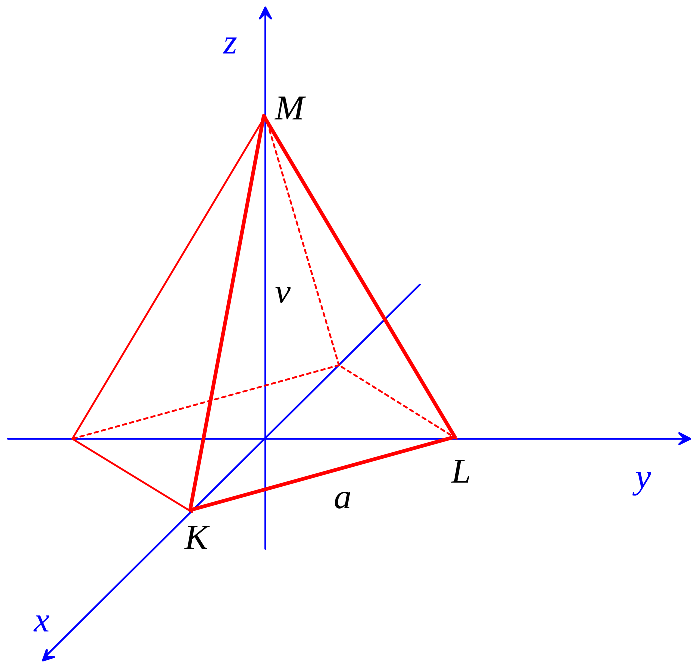
$$V = 4v \cdot \frac{\pi m}{4} - \frac{32}{15a^3} \cdot \frac{\pi m^3}{32} - \frac{16m}{15} \cdot \frac{\pi m^2}{16} - \frac{4m^2}{5a^3} \cdot \frac{\pi m}{4} = \pi m v - \frac{\pi m^3}{3a^3}$$

Vrátíme se k původní substituci a dosadíme $m = \sqrt{va^3}$

$$\underline{V} = \pi v\sqrt{va^3} - \frac{\pi\left(\sqrt{va^3}\right)^3}{3a^3} = \underline{\frac{2}{3}\pi av\sqrt{av}}$$

I touto cestou jsme dospěli k tomu, že obecný vzorec pro výpočet objemu kvartoidu je $V = \frac{2}{3}\pi av\sqrt{av}$, ale vidíme, že pomocí vzorce pro objem rotačních těles byla integrace podstatně jednodušší.

3.3.4. Objem pravidelného čtyřbokého jehlanu



obr. 21

1. Pro odvození vzorce objemu jehlanu využijeme trojného integrálu, jako nejvýhodnější se jeví umístění jehlanu do soustavy souřadnic jako na obrázku. Vidíme, že u symetrického jehlanu stačí vypočítat objem části jehlanu v prvním oktantu, výsledný objem bude čtyřikrát větší.

2. Budeme počítat objem V_1 čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou body K, L, M a počátek soustavy souřadnic. Čtyřstěn je omezen rovinami $x=0, y=0, z=0$ a rovinou ρ, která je určena body K, L, M. Analytické vyjádření roviny ρ můžeme zjistit následujícím způsobem. Nejdříve si vyjádříme souřadnice bodů K, L, M pomocí výšky jehlanu v a délky strany a.

$K=[\alpha,0,0]; L=[0,\alpha,0]; M=[0,0,v]$, kde $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

Po dosazení do obecné rovnice roviny $ax+by+cz+d=0$ dostáváme

$$a=-\frac{d}{\alpha}; b=-\frac{d}{\alpha}; c=-\frac{d}{v}$$

Tedy obecná rovnice roviny ρ je $vx+vy+\frac{\sqrt{2}}{2}az-\frac{\sqrt{2}}{2}av=0$.

3. Objem V_1 budeme počítat pomocí trojného integrálu, kde

x budeme integrovat v mezích $\left\langle 0;\frac{\sqrt{2}}{2}a\right\rangle$

y budeme integrovat v mezích $\left\langle 0;\frac{\sqrt{2}}{2}a-x\right\rangle$

z budeme integrovat v mezích $\left\langle 0;v-\frac{2vx}{\sqrt{2}a}-\frac{2vy}{\sqrt{2}a}\right\rangle$

$$V_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a-x}\left(\int_0^{v-\frac{2vx}{\sqrt{2}a}-\frac{2vy}{\sqrt{2}a}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a-x}\left(v-\frac{2vx}{\sqrt{2}a}-\frac{2vy}{\sqrt{2}a}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\left(\left[vy-\frac{2vxy}{\sqrt{2}a}-\frac{vy^2}{\sqrt{2}a}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}av-vx+\frac{\sqrt{2}vx^2}{2}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{2}}{4}avx-\frac{vx^2z}{2}+\frac{\sqrt{2}vx^3}{6}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{va^2}{12}$$

$$\underline{V}=4V_1=4\cdot\frac{va^2}{12}=\underline{\frac{1}{3}va^2}$$

Obecný vzorec pro výpočet objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu je $V=\frac{1}{3}va^2$.

3. 4. TĚŽIŠTĚ TĚLESA, STATICKÉ MOMENTY

3.4.1. Elipsoid

Pomocí uvedených vzorců můžeme například ověřit, že těžiště elipsoidu s jednotkovou hustotou je ve středu elipsoidu. Při umístění středu elipsoidu do středu kartézské soustavy by i těžiště mělo být ve středu kartézské soustavy souřadnic.

1. $\sigma(x,y,z)=1$

2. Ve vzorci pro souřadnice tělesa figurují statické momenty a hmotnost tělesa, která je pro jednotkovou hustotu tělesa rovna objemu tělesa.

$$m(M)=\frac{4}{3}\pi abc$$

3. Spočítáme jednotlivé statické momenty tělesa. Začneme momentem $S_{yz}(M)$ vzhledem k rovině yz, kde můžeme použít některé části z odvozování objemu elipsoidu.

$$S_{yz}(M)=\iiint_M x\cdot\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}(x\cdot 1)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Protože integrace podle x nás čeká až nakonec, můžeme x vytknout jako konstantu, použít stejný postup jako u integrace samotného elipsoidu a navázat v místě, kde integrujeme podle x.

$$\underline{S_{yz}(M)}=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(x-\frac{x^3}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\pi bc\left[x^2-\frac{x^4}{4a^2}\right]_{-a}^{a}=\underline{0}$$

Statický moment $S_{yz}(M)$ vzhledem k rovině yz je roven 0.

Protože při určování mezí elipsoidu můžeme začít od libovolné souřadnice, umíme si integrál připravit tak, aby integrace podle proměnné, která je obsažena ve vzorci, následovala až nakonec, a potom analogicky celý integrál spočítáme.

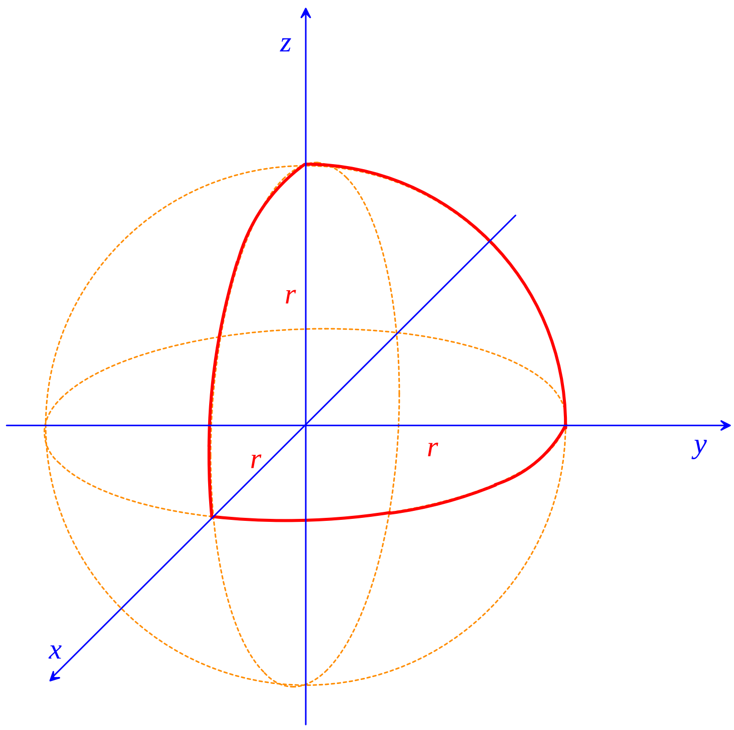
Pro statické momenty tedy platí $S_{xy}(M)=0$, $S_{xz}(M)=0$, $S_{yz}(M)=0$.

4. Teď už jen dosadíme do vzorců pro souřadnice $[x_t(M), y_t(M), z_t(M)]$ těžiště tělesa M a platí:

$$\underline{x_t(M)}=\frac{S_{yz}(M)}{m(M)}=\frac{0}{\frac{4}{3}\pi abc}=\underline{0},\quad \underline{y_t(M)}=\frac{S_{xz}(M)}{m(M)}=\underline{0},\quad \underline{z_t(M)}=\frac{S_{xy}(M)}{m(M)}=\underline{0}.$$

Souřadnice těžiště elipsoidu v kartézské soustavě souřadnic jsou $[0,0,0]$, z čehož vyplývá, že těžiště elipsoidu leží v jeho středu.

3.4.2. Osmina koule



obr. 22

Budu počítat těžiště a statické momenty tělesa M ohraničené rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a kulovou plochou $x^2+y^2+z^2=r^2$; pro x, y, z platí $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

1. Nejdříve odvodím pomocí trojného Riemannova integrálu vzorec pro objem tělesa M umístěného v prvním oktantu. Je tedy třeba určit meze, v nichž budeme integrovat.

Začít můžeme třeba osou x, kde x může nabývat hodnot $\langle 0, r\rangle$. Pak $y \in \left\langle 0, \sqrt{r^2-x^2}\right\rangle$ a $z \in \left\langle 0, \sqrt{r^2-x^2-y^2}\right\rangle$.

$$V(M)=\int_0^r\left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^r\left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^r (A)\mathrm{d}x$$

$$A=\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{r^2-x^2}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

použijeme substituci $\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}=\sin t$

$$A=\left(r^2-x^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\left(r^2-x^2\right)}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(r^2-x^2\right)\frac{\pi}{4}$$

$$\underline{V(M)}=\int_0^r (A)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^r\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\left[xr^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\underline{\frac{1}{6}\pi r^3}$$

Objem tělesa M je $\frac{1}{6}\pi r^3$.

2. Budeme opět uvažovat jednotkovou hustotu ($\sigma(x,y,z)=1$), a tak hmotnost tělesa bude rovna jeho objemu.

$$m(M)=\frac{1}{6}\pi r^3$$

3. Při výpočtu statických momentů tělesa začneme stejně jako u elipsoidu statickým momentem $S_{yz}(M)$ vzhledem k rovině yz, kde využijeme postupů z odvozování objemu a navážeme opět až ve chvíli, kdy integrujeme podle x (x se přestává chovat jako konstanta).

$$S_{yz}(M)=\frac{\pi}{4}\int_0^r x\cdot\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^2r^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^r=\frac{1}{16}\pi r^4$$

Pokud bychom změnili pořadí při určování mezí, analogicky bychom dospěli k tomu, že

$$S_{xz}(M)=\frac{1}{16}\pi r^4,\ S_{xy}(M)=\frac{1}{16}\pi r^4.$$

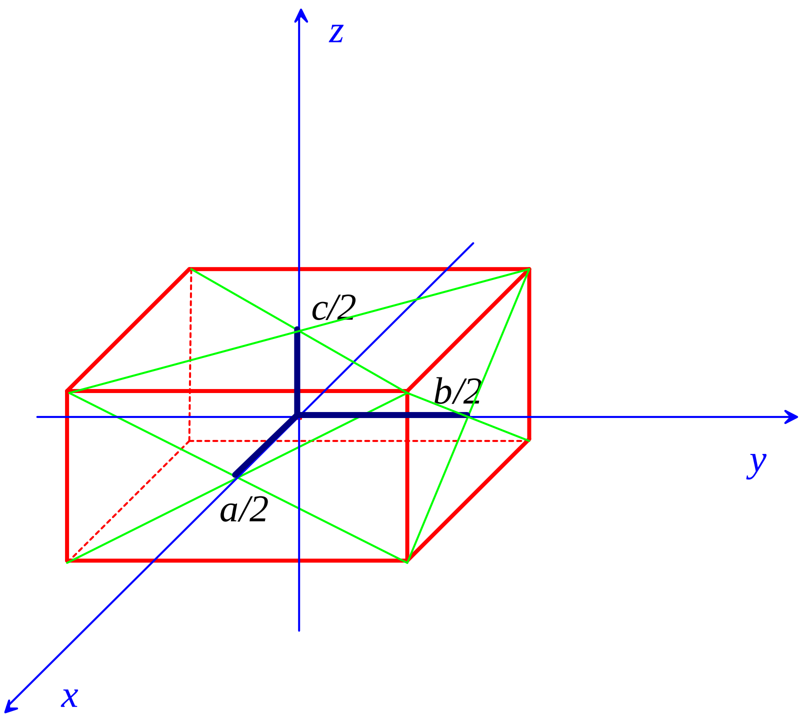
4. Pro souřadnice těžiště tělesa M platí:

$$\underline{x_t(M)} = \frac{S_{yz}(M)}{m(M)} = \underline{\frac{3}{8}r}, \quad \underline{y_t(M)} = \frac{S_{xz}(M)}{m(M)} = \underline{\frac{3}{8}r}, \quad \underline{z_t(M)} = \frac{S_{xy}(M)}{m(M)} = \underline{\frac{3}{8}r}.$$

Souřadnice tělesa M v kartézské soustavě souřadnic jsou $\left[\frac{3}{8}r, \frac{3}{8}r, \frac{3}{8}r\right]$.

3. 5. MOMENTY SETRVAČNOSTI TĚLESA

3.5.1. Kvádr



obr. 23

1. Kvádr M umístíme těžištěm do počátku soustavy souřadnic, hrany kvádru budou rovnoběžné se souřadnicovými osami a osy rotace se budou se souřadnicovými osami shodovat.

Pro objem kvádru platí $V = \iiint\limits_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc$

2. Předpokládáme, že kvádr M je homogenní $(\sigma = \text{konst.})$, potom pro moment setrvačnosti vzhledem k ose x platí

$$\underline{I_x(M)} = \iiint_M \left(y^2+z^2\right)\cdot\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \sigma\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[zy^2+\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sigma\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(cy^2+\frac{c^3}{12}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sigma\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[cy^3+\frac{c^3y}{12}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \sigma\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{cb^3}{12}+\frac{bc^3}{12}\right)\mathrm{d}x = \sigma\cdot\frac{abc}{12}\left(b^2+c^2\right) = \underline{\frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right)}$$

kde m je hmotnost kvádru $(m = \sigma V = \sigma abc)$.

Pro momenty setrvačnosti vhledem ke dalším souřadnicovým osám platí analogické vztahy.

Plný stejnorodý kvádr má vzhledem k navzájem kolmým osám x, y, z procházejícím jeho středem momenty setrvačnosti

$$I_x(M) = \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) I_y(M) = \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right), I_z(M) = \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right).$$

3.5.2. Koule

1. Homogenní kouli M o poloměru R ohraničenou kulovou plochou $x^2+y^2+z^2=R^2$ umístíme středem do počátku soustavy souřadnic. Ze symetrie koule vyplývá, že momenty setrvačnosti vzhledem ke všem třem souřadnicovým osám budou stejné, proto stačí vypočítat např. moment setrvačnosti $I_x(M)$ vzhledem k ose x.

2. Integrál součtu můžeme rozepsat jako součet integrálů.

$$I_x(M) = \iiint\limits_M y^2 \sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_M z^2 \sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \sigma \iiint\limits_M y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \sigma \iiint\limits_M z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Opět využijeme toho, že koule je symetrická a při určování mezí, ve kterých budeme integrovat připravíme situaci tak, abychom integrovali vzhledem k y, resp. z až nakonec a to v mezích $\langle -R; R\rangle$.

$$I_x(M) = \sigma \int\limits_y \int\limits_z \int\limits_x y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y + \sigma \int\limits_z \int\limits_y \int\limits_x z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \sigma \int\limits_{-R}^{R} y^2 \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y + \sigma \int\limits_{-R}^{R} z^2 \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

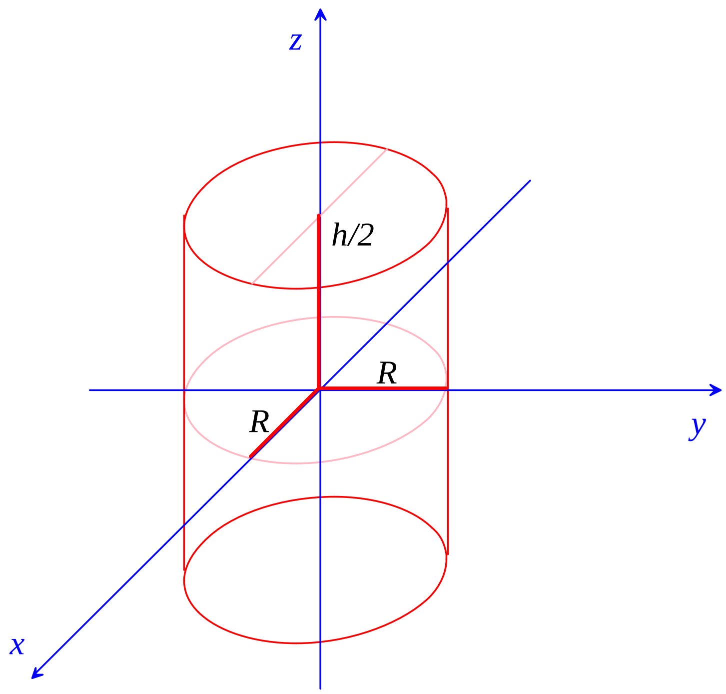
3. Postup při integraci uzávorkovaných částí je totožný jako postup při výpočtu použitém pro statické momenty osminy koule, takže dostáváme

$$\underline{I_x(M)} = \sigma \int\limits_{-R}^{R} y^2 \pi \left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y + \sigma \int\limits_{-R}^{R} z^2 \pi \left(R^2 - z^2\right)\mathrm{d}z =$$
$$= \pi\sigma \int\limits_{-R}^{R} \left(R^2 y^2 - y^4\right)\mathrm{d}y + \pi\sigma \int\limits_{-R}^{R} R^2 z^2 - z^4 \mathrm{d}z =$$
$$= \pi\sigma \left[R^2 \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-R}^{R} + \pi\sigma \left[R^2 \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_{-R}^{R} = \frac{8\pi\sigma R^5}{15} = \underline{\frac{2}{5} m R^2}$$

kde m je hmotnost koule $\left(m = \sigma \cdot V = \sigma \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \right)$

Plná stejnorodá koule má vzhledem k ose procházející jejím středem moment setrvačnosti $I = \frac{2}{5} m R^2$.

3.5.3. Válec



obr. 24

1. Homogenní válec M o výšce h a poloměru R umístíme středem do počátku soustavy souřadnic. Z obrázku můžeme vyčíst, že v tomto případě se liší moment setrvačnosti válce $I_z(M)$ vzhledem k ose z (ve spojitosti s momenty setrvačnosti válce je nejčastěji uváděný) od momentů setrvačnosti $I_x(M)$ a $I_y(M)$, které jsou totožné.

2. Pro určení momentu setrvačnosti homogenního válce vzhledem k ose z jsem zvolil následující postup.

$$I_z(M) = \sigma \iiint_M \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \left(\iiint_M x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_M y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) = \sigma\left(A + B\right)$$

Teď stačí vyřešit aspoň jeden z integrálů, za které jsem zavedl substituce A, resp. B, pro druhý bude platit obdobný postup.

$$A=\sigma\iiint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-R}^{R}2hx^2\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=2hR\int_{-R}^{R}x^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\mathrm{d}x$$

použijeme substituci $\dfrac{x}{R}=\sin t$

$$A=2hR^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t=hR^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t-\frac{hR^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{hR^4}{4}\left[t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{hR^4}{16}\left[\sin 4t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi hR^4}{4}$$

Pro integrál B jen zaměníme meze pro x-ovou a y-ovou souřadnici

$$B=\sigma\iiint_M y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\frac{\pi hR^4}{4}$$

Pro moment setrvačnosti vzhledem k ose z platí

$$\underline{I_z(M)}=\sigma(A+B)=\sigma\left(\frac{\pi hR^4}{4}+\frac{\pi hR^4}{4}\right)=\frac{\sigma\pi hR^4}{2}=\underline{\frac{1}{2}mR^2}$$

kde m je hmotnost válce $\left(m=\sigma\cdot V=\sigma\cdot\pi R^2 h\right)$.

Vidíme, že v tomto případě moment setrvačnosti vůbec nezáleží na výšce válce ale jen na jeho poloměru a hmotnosti.

Teď ještě doplním moment setrvačnosti válce vzhledem k souřadnicové ose y.

$$I_y(M)=\sigma\iiint_M\left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sigma\left(\iiint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_M z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)=\sigma(A+C)$$

Výslednou hodnotu pro integrál A můžeme použít z předchozího příkladu, zbývá nám už jen C.

$$C = \sigma\iiint_M z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2z^2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2Rz^2 \int_{-R}^{R} \sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 4R^2z^2\frac{\pi}{4}\mathrm{d}z = \pi R^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\mathrm{d}z = \pi R^2\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\pi R^2 h^3}{12}$$

Pro moment setrvačnosti válce otáčejícího se kolem osy y (stejně jako pro moment setrvačnosti vzhledem k ose x) tedy platí

$$\underline{I_y(M)} = \sigma(A+C) = \sigma\left(\frac{\pi h R^4}{4} + \frac{\pi h^3 R^2}{12}\right) = \underline{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2}$$

Plný stejnorodý válec má vzhledem k podélné (geometrické) ose moment setrvačnosti $I = \frac{1}{2}mR^2$ a vzhledem k osám procházejícím jeho těžištěm, které jsou k podélné ose kolmé, momenty setrvačnosti $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$.

4. ZÁVĚR

Výsledkem mé práce je odvození některých vzorců pro obsah útvarů (trojúhelník, elipsa, kruh, strofoida), odvození několika vzorců pro objem těles (rotační kužel, komolý rotační kužel, rotační paraboloid, koule, anuloid, elipsoid, kvartoid a jehlan), odvození vzorců pro statické momenty těles (elipsoid, osmina koule) a také odvození vzorců pro momenty setrvačnosti těles (kvádr, koule, válec).

Při odvozování jsem používal pouze systém kartézských souřadnic a nezaváděl jsem souřadnice polární. Problém byl v tom, že některé integrály se nedají kartézsky dobře vyjádřit, a proto jsem v diplomové práci neodvodil vzorce všech útvarů, které jsem původně zamýšlel. Obrázky, které doplňují téměř každý výpočet, jsem vytvořil v programu Cabri Geometry II Plus. Snažil jsem se, aby z obrázků bylo dobře pochopitelné, proč volím dané integrační meze a jaký bude předpis funkce pro integraci. Z důvodu lepší orientace v textu jsou většinou jednotlivé příklady rozděleny na tři části. U odvozování vzorců pro obsah útvarů a objem těles jsem v první části uvedl vzorec, který využijeme v integraci, obsahem druhé části bylo odvození předpisu funkce, kterou použijeme pro vlastní integraci v části třetí.

V kapitole Další způsoby výpočtu obsahů geometrických útvarů a objemů těles jsem ukázal různé možnosti řešení jednotlivých příkladů a je vidět, že některé postupy jsou značně jednodušší než ostatní. Proto jsem také objem rotačních těles odvozoval pomocí vzorců k tomu určených využívajících jednoduchého Riemannova integrálu.

Tato diplomová práce může být využitelná jako souhrn odvození základních vzorců pro obsahy a objemy, také seznámí čtenáře s některými fyzikálními aplikacemi Riemannova integrálu. Předpokládám, že má práce by mohla být vhodná i pro studenty, kteří se během studia s touto problematikou setkávají, a mohla by jim pomoci ve snaze o pochopení integračních postupů.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] Bartsch H.-J.: *Matematické vzorce*, Praha: Mladá fronta, 2002

[2] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Fyzika*, Brno: Vutium, 2000

[3] Jarník V.: *Diferenciální počet I*, Praha: Academia, 1974

[4] Jarník V.: *Integrální počet I*, Praha: Academia, 1984

[5] Kvasnica J., Havránek A., Lukáč P., Sprušil B.: *Mechanika*, Praha: Academia, 2004

[6] Minorskij V.P.: *Sbírka úloh z vyšší matematiky*, Praha: SNTL, 1958

[7] Nagy J., Navrátil O.: *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*, Praha: ČVUT, 2005

[8] Nagy J., Taufer J.: *Integrální počet funkcí více proměnných*, Praha: ČVUT, 2004

[9] Rektorys K. a spol.: *Přehled užité matematiky 1*, Praha: Prometheus, 2003

[10] Sikorski R.: *Diferenciální a integrální počet*, Praha: Academia, 1973