JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH UDĚJOVICÍCH

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Kombinatorika pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce

RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

Jana Provazníková, České Budějovice 2008

Anotace:

Diplomová práce je zaměřena na kombinatorické učivo, které je určeno studentům oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy. Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část zajišťuje teoretický výklad kombinatorického učiva. Jsou v ní uvedeny vzorové příklady, na kterých se kombinatorický celek vysvětluje a je názorně popsán. Praktická část diplomové práce obsahuje příklady na procvičení. Každý příklad je doplněn výsledkem a stručným postupem výpočtu.

Annotation:

This thesis focuses on the combinatorial curriculum which is settled for the students of pedagogy for primary teaching. The thesis is divided in a theoretical part and a practical part. The theoretical part obtains the theoretical interpretation of the combinatorial curriculum. It contains illustrative examples which explain the combinatorial unit and illustrate it. The practical part of this thesis contains the examples to practice. Results are added to each example as well as the brief method of calculation.

Poděkování:

Chtěla bych poděkovat vedoucí mé diplomové práce, RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D., za odborné vedení při zpracování diplomové práce.

Prohlášení:

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Kombinatorika pro studenty učitelství 1. stupně základní školy jsem vypracovala samostatně a že jsem veškerou použitou literaturu uvedla v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 24. dubna 2008 ………………........

Jana Provazníková

Obsah:

1. Úvod

Tématem této diplomové práce je kombinatorika pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ. Zaměříme se na přehledný a srozumitelný výklad kombinatorického učiva, na který následně navazuje procvičení jednotlivých příkladů. Příklady jsou vybrány z učebnic prvního a druhého stupně základních škol, škol středních a z knih určených pro rozšíření matematického učiva.

Kapitoly jsou: kombinatorická pravidla, kombinační čísla, variace bez opakování, variace s opakováním, permutace bez opakování, permutace s opakováním, kombinace bez opakování a kombinace s opakováním. Jednotlivé kapitoly obsahují vzorové příklady, které jsou doplněny názorným nákresem postupu. Kapitoly na sebe navazují: z variací vycházejí permutace, následují kombinace, které jsou jejich zobecněním.

Příklady v praktické části jsou rozděleny podle jednotlivých témat: kombinační čísla, variace bez opakování, variace s opakováním, permutace bez opakování, permutace s opakováním, kombinace bez opakování, kombinace s opakováním. Obsahují vzorové příklady, na nichž je předveden postup výpočtu. Ostatní příklady vždy za svým zadáním mají výsledky a některé i stručný postup výpočtu.

Cílem této práce je přiblížení kombinatorického učiva studentům učitelství 1. stupně ZŠ. Příklady v praktické části mohou být využity v jejich budoucí praxi učitele prvního stupně základní školy.

2. Kombinatorika

Kombinatorika je část matematiky, která se zabývá vlastnostmi konečných množin. V kombinatorice jsme často odkázáni na svůj vlastní úsudek, v mnoha případech není možné ověřit správnost. Úsudky v této oblasti matematiky jsou proto často složité, pro některé jedince nepochopitelné. Problém v nepochopení se skrývá (často) v tom, že kombinatorické úsudky jsou pro nás něčím novým a k seznámení s nimi potřebujeme delší čas.

Vznik kombinatoriky nelze zcela jasně zařadit do přesného historického období. Vyvíjela se s potřebou člověka, který hledal odpovědi na nejrůznější otázky. Jako matematická disciplína se kombinatorika začala objevovat v 17. století, byla spojována se jmény B. Pascala (na konci svého života vytvořil trojúhelník kombinačních čísel- tabulka, jejichž řádky tvoří kombinační čísla $\binom{n}{0}$ až $\binom{n}{n}$), P. Fermata (společně s B. Pascalem dali základ pravděpodobnosti- šance na vítězství při hře v kostky), J. Bernoulliho (společně s G. W. Leibnizem dali základ terminologii pravděpodobnosti), G. W. Leibnize a L. Eulera. V této době se kombinatorické úvahy zaobíraly především různými hrami v kostky a hrami s kartami.

Kombinatorika dnešní doby je součástí tzv. finitní matematiky, která studuje vlastnosti konečných množin.

Kombinatorika je propojena s mnoha dalšími disciplínami. Nejvíce společného s kombinatorikou má pravděpodobnost. Pravděpodobnost je na kombinatorice založena.

2. 1 Základní kombinatorická pravidla

Při řešení kombinatorických úloh se využívá především dvou pravidel - - kombinatorické pravidlo součinu a kombinatorické pravidlo součtu.

Nejprve se zaměříme na **kombinatorické pravidlo součinu:**

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ (Calda & Dupač, 2006)

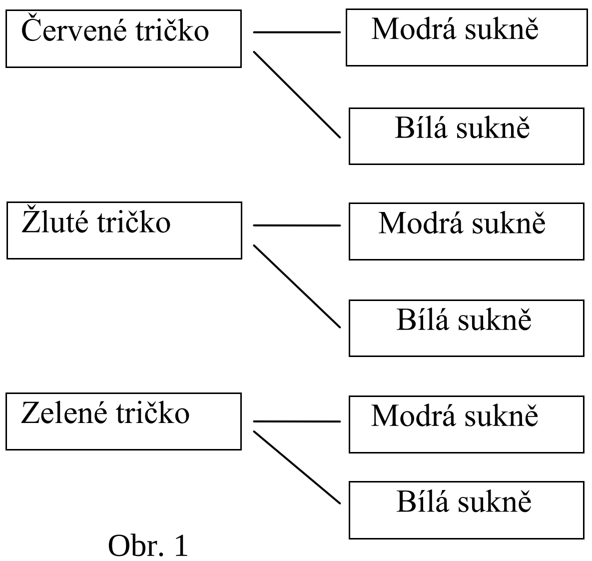
Kombinatorické pravidlo součinu si ukážeme na příkladě 1.

Příklad 1:

Maruška má ve skříni červené, žluté a zelené tričko, modrou a bílou sukni. Kolik má Maruška možností různého oblečení?

Řešení:

Uvedenou úlohu můžeme graficky znázornit (obr. 1).



Obr. 1

Z obr. 1 vidíme, že ke každému ze tří triček si může Maruška vzít dvě sukně. Vytvoří tak $3 \cdot 2 = 6$ různých možností oblečení.

Vzhledem k tomu, že nemůžeme zaměnit tričko za sukni, hledáme uspořádané dvojice tričko- sukně, jejíž první člen tričko lze vybrat třemi způsoby a druhý člen sukně dvěma způsoby.

Použijeme-li matematickou symboliku:

$k = 2$ (tvoříme dvojice)

$n_1 = 3$ (počet triček)

$n_2 = 2$ (počet sukní),

obdržíme podle pravidla kombinatorického součinu: $n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Příklad 2:

Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž zápise se vyskytují číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 nejvýše jednou.

Řešení:

Uvedeme dva způsoby řešení:

1. Na místě desítek může stát libovolné číslo z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, nemůže zde stát číslice 0. Pokud by na místě desítek stála nula, utvořené číslo by nebylo dvojciferné. Na místo desítek můžeme tedy dosadit šest čísel. Na místo jednotek můžeme dosadit také šest číslic, nyní můžeme dosadit nulu (nemůžeme již dosadit číslo, které jsme použili na pozici desítek). Máme tedy $6 \cdot 6 = 36$ možných dvojciferných čísel.

D	J	
6 ·	6	= 36

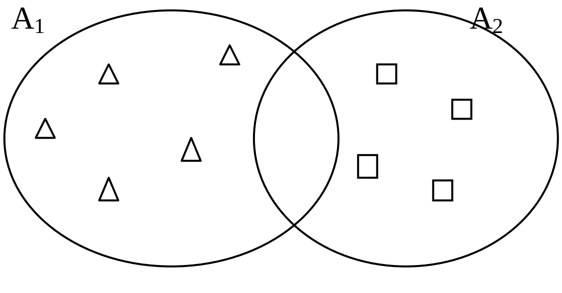
2. Všechna dvojciferná čísla obsahují dvě skupiny čísel. Čísla, která jsou tvořena stejnými číslicemi (11,22,33,44,…). A čísla, která mají různé číslice. Čísel, ve kterých se číslice opakují je 6 (11, 22, 33, 44, 55, 66), všech dvojciferných čísel, které lze ze zadaných čísel sestavit je 42 (ze zadaných čísel mohu utvořit dvojciferná čísla- 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, …- vytvořím tak v první dvacítce sedm čísel, v druhé pak dalších sedm, ve třetí také sedm pokračuji až k sedmdesátce- vytvořím tak 7+7+7+7+7+7= 42 dvojciferných čísel). Počet čísel s různými číslicemi si označíme p, počet čísel se stejnými číslicemi je 6.

$$p+6=42$$
$$p=36$$

Druhé pravidlo, se kterým se seznámíme je kombinatorické pravidlo součtu (kombinatorické pravidlo součtu je ukázáno na předchozím příkladě, řešení druhé):

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě množiny disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$. (Calda & Dupač, 2006)

Na obr. 2 je dané pravidlo znázorněno pro 2 množiny A_1 a A_2, přičemž první množina má 5 prvků a druhá 4 prvky.



$A_1 \cup A_2 = 5 + 4 = 9$

Obr. 2

2. 2 Kombinační číslo

Dříve než zavedeme kombinační číslo, definujeme faktoriál.

Faktoriál z přirozeného čísla *n* je součin všech přirozených čísel od jedné do *n*. Tzn.

$$\mathbf{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \text{ (Calda \& Dupač, 2006)}$$

Vlastnosti faktoriálu:

Pro n=0 je n!= 1, tedy 0!= 1.

Dále platí**: n!= n· (n-1)!**

Příklad:

Určete hodnotu 5!

Řešení:

$$5! = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1} = 120$$

$$5! = 5 \cdot 4! = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \cdot (n-1)!} = 120$$

Kombinační čísla se používají k vyjádření počtu *k*-prvkových podmnožin *n*-prvkové množiny, přičemž při výběru nezáleží na pořadí jednotlivých prvků. Značíme je $\binom{n}{k}$, kde n$\in N$, k$\in N$, n$\geq k$. Čteme n nad k.

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k; k$\leq$ n lze pomocí faktoriálu zapsat kombinační číslo jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{(Calda \& Dupač, 2006).}$$

Dále definujeme:

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1$$

Postup při výpočtu kombinačního čísla

Určíme hodnotu kombinačního čísla $\binom{12}{3}$ (čteme dvanáct nad třemi).

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!}$$

Dané kombinační číslo jsme zapsali pomocí vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{3! \cdot \cancel{9!}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Upravíme: Čitatele postupně zmenšujeme o jedna, až k číslu, které je rovno vypočtenému číslu ze závorky *(n-k)!* ve jmenovateli. Daná čísla jsou faktoriály a my je můžeme vykrátit. Vznikne nám zlomek, ve kterém čitatel obsahuje stejný počet číslic jako jmenovatel.

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 1} = \mathbf{220}$$

Zlomek zkrátíme na základní tvar. Ve jmenovateli nám zůstává 1. Vypočteme součin.

Kombinační číslo můžeme určit i pomocí **Pascalova trojúhelníku,** který obsahuje kombinační čísla $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$ v řádcích. (obr. 3)

1. diagonála, k=0

2. diagonála, k=1

1	n=0
1 **1**	n=1
1 **2** 1	n=2
1 **3** 3 1	n=3
1 **4** 6 4 1	n=4
1 **5** 10 10 5 1	n=5
1 **6** 15 20 15 6 1	n=6
1 **7** 21 35 35 21 7 1	n=7

Obr. 3: Pascalův trojúhelník

Z Pascalova trojúhelníku můžeme vyčíst, že na první diagonále, leží samé jedničky, znamená to, že první diagonála určuje kombinační čísla, ve kterých se k=0, druhá diagonála určuje kombinační čísla, ve kterých se k=1 atd.

Vlastnosti kombinačních čísel (pro $n \in N_0$, $k \in N_0 \wedge k \leq n$):

(Polák, 1977)

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (výpočet kombinačního čísla)

2. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ (existence komplementární dvojice)

Existenci **komplementární dvojice** si můžeme dokázat pomocí Pascalova trojúhelníku:

Zvolíme si například n=4, k=4

- zvolená čísla dosadíme $\binom{4}{4} = \binom{4}{4-4}$

$$\binom{4}{4} = \binom{4}{0}$$

- výsledky kombinačních čísel najdeme v Pascalově trojúhelníku

<u>1</u> 4 6 4 <u>1</u> – řádek, kde n= 4

diagonála, k= 0 diagonála, k= 4

- vidíme, že daná rovnost platí a existují komplementární dvojice

1= 1

Komplementární dvojici tvoří taková dvojice kombinačních čísel, která jsou stejně vzdálená od osy souměrnosti Pascalova trojúhelníku a po vypočítání jsou si rovna.

3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (součet dvou kombinačních čísel)

Tomuto součtu se také říká **Pascalovo pravidlo**, neboť výsledek součtu se nachází v řádku Pascalova trojúhelníku následujícím „pod jejich středem‘‘. Užitím tohoto vztahu lze najít jakýkoliv řádek Pascalova trojúhelníku, je-li znám řádek předcházející. (Calda & Dupač, 2006)

Na jednoduchém příkladě si ukážeme užití vlastnosti **3.**

Příklad:

Vypočtěte:

$$\binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

Řešení:

$$\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{4+1}{3+1} = \binom{5}{4}$$

V následujícím příkladě budeme muset použít znalosti komplementárních dvojic, abychom mohli daná kombinační čísla sečíst.

Příklad:

Vypočtěte:

$$\binom{4}{3} + \binom{4}{0}$$

Řešení:

Vzhledem k platnosti vztahu $\binom{4}{0} = \binom{4}{4}$,

Můžeme zapsat příklad:

$$\binom{4}{3} + \binom{4}{0} = \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}.$$

2. 3. Variace

2. 3. 1. Variace bez opakování

Dříve než přejdeme k definování variací bez opakování, uvedeme jednoduchý příklad.

Příklad:

K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných svislých pruhů, máme k dispozici látky barvy červené, zelené, žluté a modré. Kolik vlajek můžeme sestavit z těchto látek?

Řešení:

Pruhy musí mít různé barvy a na pořadí barev záleží, protože nám vzniknou různé vlajky (např. vlajka barvy červené- modré- zelené je jiná než zelená- modrá- červená).

Vlajky:	červená- zelená- žlutá	červená- žlutá- zelená
	červená- žlutá- modrá	červená- modrá- žlutá
	červená- zelená- modrá	červená- modrá- zelená
	žlutá- modrá- zelená	žlutá- zelená- modrá
	žlutá- zelená- červená	žlutá- červená- zelená
	žlutá- červená- modrá	žlutá- modrá- červená
	modrá- zelená- žlutá	modrá- žlutá- zelená
	modrá- červená- žlutá	modrá- žlutá- červená
	modrá- červená- zelená	modrá- zelená- červená
	zelená- červená- modrá	zelená- modrá- červená
	zelená- červená- žlutá	zelená- žlutá- červená
	zelená- žlutá- modrá	zelená- modrá- žlutá

Vzniklo nám celkem 24 různých vlajek.

Do prvního pruhu jsme mohli dosadit jednu ze 4 barev, do druhého pruhu jednu ze zbývajících 3 barev (jedna barva je již v prvním pruhu), do třetího pruhu jednu za zbývajících 2 barev. Vzniklo nám tedy $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ možných vlajek. Tento počet nám souhlasí s námi vytvořenými vlajkami.

Vytvořili jsme tedy uspořádané trojice (k= 3) ze čtyř prvků (n= 4) a k výpočtu jsme použili kombinatorické pravidlo součinu:

Počet vlajek = $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Pokud vytváříme uspořádané *k*-tice z *n*-prvků a žádný prvek se v *k*-tici neopakuje, mluvíme o **variacích bez opakování**.

U variací tedy záleží na pořadí.

Variace značíme **V(k, n)**. K určení jejich počtu využíváme kombinatorické pravidlo součinu.

Výpočet celkového počtu variací bez opakování

Máme dáno *n* navzájem různých prvků a přirozené číslo *k*, $k \leq n$. První člen uspořádané *k*-tice můžeme vybrat *n* možnostmi, jelikož máme *n* prvků a zatím jsme žádný nepoužili. Pro 2. člen už máme na výběr jen *n-1* možností, nemůžeme použít již prvek, který jsme použili v prvním členu. Pro 3. člen máme tedy *n-2* možností a tak dále, až po výběr k-tého členu, kde máme n-(k-1) možností. (Calda & Dupač, 2006)

Pokud použijeme kombinatorické pravidlo součinu, získáme vzorec pro variace:

Kombinatorické pravidlo součinu:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

Obecný vzorec pro variace bez opakování:

V(k, n)= $\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$; **k≤n**

(Polák, 1977)

Zvláštní případ variací bez opakování:

V případě $k = n$ se variace bez opakování nazývají permutace bez opakování a platí:

V(n)= n!= P(n).

K permutacím se ještě vrátíme v kapitole 2.4.

2. 3. 2. Variace s opakováním

Začneme opět příkladem.

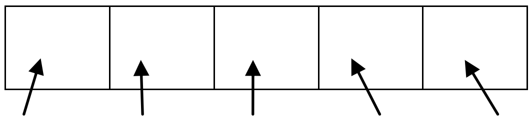
Příklad:

Určete počet všech devítimístných telefonních čísel, která telefonní společnost vytvoří z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Telefonní číslo nemůže začínat 0.

Řešení:

Pro utvoření telefonních čísel můžeme použít tyto číslice: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Čísla se v telefonních číslech mohou opakovat a nesmí začínat O. Máme tedy celkem 10 číslic k vytvoření telefonního čísla.

Na první místo můžeme použít jen devět číslic (můžeme použít 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; nesmíme použít 0), na druhé místo můžeme použít deset číslic (můžeme požít již použité číslo a 0), i na ostatní místa můžeme použít všech deset číslic. (obr. 4)



9 číslic 10 číslic 10 číslic 10 číslic 10 číslic

obr. 4

Vznikne nám tedy $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ telefonních čísel. Tedy $9 \cdot 10^4$ telefonních čísel. Vytvořili jsme počet všech telefonních čísel pomocí variací s opakováním. Použili jsme kombinatorické pravidlo součinu.

počet telefonních čísel= $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 = 90\ 000$

Nyní přejdeme k definici variací s opakováním.

Variace s opakováním jsou uspořádané skupiny obsahující *k* prvků sestavené z *n* různých prvků tak, že kterýkoliv prvek se může ve skupině libovolněkrát opakovat a jednotlivé skupiny se liší buď prvky (alespoň jedním) nebo jejich uspořádáním. Stručněji řečeno: Variace *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním jsou všechny možné uspořádané *k*-tice prvků sestavené z daných *n* různých prvků. (Polák, 1977)

Značíme je $\boldsymbol{V_O(k, n)}$.

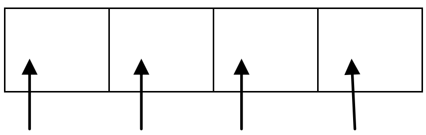
Variace s opakováním můžeme vytvořit i v případě, že $k > n$.

Příklad:

Zjistěte, kolik čtyřciferných čísel můžeme vytvořit z číslic 1, 2.

Řešení:

Začneme názorným obrázkem (obr. 5)



Tisíce Stovky Desítky Jednotky

Obr. 5

Pro výběr čísla na pozici tisíce máme 2 možnosti (1, nebo 2), pro výběr čísla na pozici stovek máme také 2 možnosti (číslice se mohou opakovat) atd. Celkový počet možností pro vytvoření čtyřciferného čísla je tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 24$ možností. K vypočtení jsme použili kombinatorické pravidlo součinu.

Jinak to znamená, že tvoříme čtyřprvkové variace s opakováním $k = 4$, ze dvou prvků $n = 2$.

$$V_o(4, 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24 = 16$$

Pokud máme zadáno n navzájem různých prvků a máme utvořit k-členné variace s opakováním, využijeme k výpočtu kombinatorické pravidlo součinu, obdržíme obecný vzorec pro výpočet k-člených variací s opakováním z n-prvků.

$$\boldsymbol{V_O}\,\mathbf{(k, n)} = \underbrace{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \ldots \cdot \boldsymbol{n}}_{\text{k-krát}} = \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}}$$

2. 4. Permutace

2. 4. 1. Permutace bez opakování

Jak jsme již výše poznamenali, permutace jsou speciálním případem variací bez opakování. V této kapitole se zaměříme na jejich některé vlastnosti. Dříve však uvedeme příklad, který nám permutace přiblíží.

Příklad:

V parlamentě chtějí se svými návrhy vystoupit čtyři poslanci (poslanci: Novák (N), Bouček (B), Kozel (K) a Hora (H)). Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.

Řešení:

Znázorněme obrázkem (obr. 6)

1.	2.	3.	4.

4. možnosti 3. možnosti 2. možnosti 1. možnost

obr. 6

Pro výběr prvního poslance, který bude prezentovat svůj návrh máme čtyři možnosti (máme k dispozici čtyři poslance), pro výběr druhého poslance v pořadí máme tři možnosti (jeden poslanec již bude svůj návrh prezentovat jako první), pro třetího poslance v pořadí máme dvě možnosti (dva poslanci budou prezentovat jako první a druhý) a pro výběr čtvrtého poslance nám zůstane jedna možnost.

Pro výpočet všech možných pořadí využijeme kombinatorické pravidlo součinu a tím i vypočítáme počet permutací ze čtyř prvků (4 poslanci):

$P(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$

Permutace jsou uspořádané n-tice sestavené z daných n prvků, jedná se tedy o případy, ve kterých se $k = n$. Prvky se v n-tici neopakují, tudíž mluvíme o permutacích bez opakování. Značíme je ***P(n).***

Určit všechny permutace n prvků, znamená určit počet všech možných pořadí n prvků.

Počet všech permutací určíme tak, že máme dáno n prvků, které máme umístit na n míst. K umístění prvního prvku máme n možností, k umístění druhého *(n-1)* možností (jeden prvek už jsme umístili na první pozici). Pro třetí prvek máme *(n-2)* možností. Máme tedy *n·(n-1)·(n-2)* možností jak umístit tři prvky. A tak dále. Použijeme-li kombinatorické pravidlo součinu, dostaneme tak:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots\cdot2\cdot1 = n!$$

Obecný vzorec pro permutace:

$\boldsymbol{P(n)= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots\cdot2\cdot1 = n!}$ (Calda & Dupač, 2006)

Poznámka:

P(0)= 0!= 1

Permutace se dají zapsat ve formě **matic,** kde první řádek tvoří vzor (tedy danou permutaci, beze změny) a druhý jeho obraz (permutace beze změny- v základním, daném tvaru; nebo ve tvaru změněném- prvky jsou na jiných místech, v jiném pořadí)

Příklad:

Máme danou permutaci P_1=(1, 2, 3). Utvořte jejich matice.

$P_1= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $P_2= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $P_3= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$P_4= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $P_5= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $P_6= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

V matici určujeme **identické dvojice**. Identické dvojice jsou dvojice čísel, které se nachází v matici pod sebou a jsou stejné.

$P_1= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}} \end{pmatrix}$ Obsahuje 3 identické dvojice

Kromě identických dvojic určujeme **inverzní prvky**. Inverzní prvky, jsou taková čísla ve vzoru (druhém řádku), která nejsou zapsána podle pořadí, ve kterém jdou vzestupně za sebou.

$P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Obsahuje 3 inverzní prvky (1 je za 3, 1 je za 2, 2 je za 3)

Permutace vznikají **cyklickými záměnami**. To jsou takové záměny, při nichž se prvek z prvního místa dostává na poslední atd.

(1 2 3) $\rightarrow$ (2 3 1) $\rightarrow$ (3 1 2) $\rightarrow$ (1 2 3)

Při cyklických záměnách se mění počet inverzních prvků i identických dvojic.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

0 inverzních prvků 3 identické dvojice	2 inverzní prvky 0 identických dvojic	2 inverzní prvky 0 identických dvojic	0 inverzních prvků 3 identické dvojice

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

1 inverzní prvek 1 identická dvojice	3 inverzní prvky 1 identická dvojice	1 inverzní prvek 1 identická dvojice	1 inverzní prvek 1 identická dvojice

Skládání permutací

Složením dvou permutací vznikne permutace nová.

Příklad:

Určete permutaci, která vznikne složením:

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení:

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Nejprve zjistíme, jaké číslo se nachází pod 1 ve vzoru permutace P_1, vidíme, že na daném místě leží 1, hledáme tedy číslo, které se nachází pod 1 v obraze permutace P_5. Pod jedničkou je v jeho obraze číslo 3. Ve složené permutaci se bude pod 1 nacházet číslo 3, atd.

Skládání permutací se značí $P_1 \circ P_5 = P$.

2. 4. 2. Permutace s opakováním

Nyní se zaměříme na permutace s opakováním. Uvedeme je následujícím příkladem.

Příklad:

Máme čtyři krabice s malými krabičkami: Jednu krabici se 2 žlutými krabičkami, druhou se 3 červenými krabičkami, třetí se 2 zelenými krabičkami a čtvrtou krabici také se 2 modrými krabičkami. Určete, kolika způsoby je možné seřadit všechny krabičky do řady.

Řešení:

Nejprve si spočítáme kolik je celkem krabiček- 2+ 3+ 2+ 2= 9.
Tímto jsme zjistili, jak dlouhá bude řada krabiček.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1

obr. 7

K vybrání krabičky na první místo (obr. 7) máme 9 možností, na druhé místo 8 možností (jedna krabička je již první), na třetí místo 7 možností atd. Vznikne nám 9! možností (použili jsme kombinatorické pravidlo součinu, zjistili jsme pořadí prvků v permutaci (bez opakování)) jak vybrat krabičky do řady, ale nesmíme zapomínat, že některé krabičky mají stejné barvy a tudíž utvoří stejná pořadí. Z toho plyne, že způsobů uspořádání krabiček bude méně než 9! Spočteme nyní počet stejných pořadí. Žluté krabičky jsou dvě, proto 2! pořadí je stejných, protože se v nich mění jen pořadí žlutých krabiček. Červené krabičky jsou tři , proto 3! pořadí je stejných, protože se v nich mění je pořadí červených krabiček. Zelené krabičky jsou 2- 2! pořadí je stejných, modré krabičky jsou 2- 2! pořadí je stejných. Výsledný počet pořadí krabiček je tedy:

$P_o(2, 3, 2, 2) = \frac{(2+3+2+2)!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} = 48$ možností jak sestavit různá pořadí krabiček.

Permutace s opakováním jsou uspořádané n-tice sestavené z daných k různých prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Opakování je dáno předem určeným počtem: n_1-krát prvek a_1, n_2-krát prvek a_2, atd. Jestliže $n \in N$ označuje počet všech prvků, jejichž různá pořadí zkoumáme, platí $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Permutace s opakováním značíme P_o

Obecný vzorec pro permutace s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $n_1, n_2, \ldots n_k$-krát je:

$$\mathbf{P_O(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{P(n)}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Nyní budou následovat zvláštní případy permutací s opakováním:

$$P_O(1, 1, \ldots, 1) = \frac{(1+1+\cdots+1)}{1!\cdot 1!\cdot \ldots \cdot 1!} = n! = P(n)$$

V případě vytváření uspořádaných n-tic ze dvou prvků, z nichž se jeden prvek opakuje k-krát, druhý $(n-k)$-krát je tato permutace s opakováním rovna počtu k-prvkových kombinací z n prvků. (Calda & Dupač, 2006)

$$P_O(k, n-k) = \frac{(k+(n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = K(k, n).$$

Příklad:

Určete počet všech pořadí pěti prvků, v nichž se jeden prvek opakuje 3-krát a další dva jsou různé. (prvky jsou *a*, *a*, *a*, *b*, *c*).

Řešení:

Nejdříve si zaveďme značení.

$k = 3$	- počet různých prvků
$n_1 = 3$	- první prvek *a* se opakuje 3-krát.
$n_2 = 1$	- prvek *b* se opakuje jen jednou
$n_3 = 1$	- prvek *c* se také opakuje jen jednou
$n = 5$	- celkem je 5 prvků

Z permutací umíme určit pořadí různých prvků, proto si prvky, které se opakují, označíme a_1, a_2, a_3. Vznikne nám tedy pět různých prvků a_1, a_2, a_3, b, c. Jejich počet umíme zjistit: $P(5) = 5! = 120$. Zjistili jsme pořadí prvků v permutaci (bez opakování).

Pokud zrušíme indexy u opakujících se prvků, bude počet permutací menší než 120, protože některá pořadí jsou stejná.

V následujícím schématu vidíme, jak se nám počet pětic postupně zredukuje.

(a_1, b, a_2, a_3, c), (a_1, b, a_3, a_2, c), (a_2, b, a_1, a_3, c), (a_2, b, a_3, a_1, c), (a_3, b, a_1, a_2, c), $(a_3, b, a_2, a_1, c) \longrightarrow (a, b, a, a, c)$

(c, a_1, b, a_2, a_3), (c, a_1, b, a_3, a_2), (c, a_2, b, a_1, a_3), (c, a_2, b, a_3, a_1), (c, a_3, b, a_1, a_2), $(c, a_3, b, a_2, a_1) \longrightarrow (c, a, b, a, a)$

(a_1, a_2, b, c, a_3), (a_1, a_3, b, c, a_2), (a_2, a_1, b, c, a_3), (a_2, a_3, b, c, a_1), (a_3, a_1, b, c, a_2), $(a_3, a_2, b, c, a_1) \longrightarrow (a, a, b, c, a)$

(a_1, a_2, a_3, b, c), (a_1, a_3, a_2, b, c), (a_2, a_3, a_1, b, c), (a_2, a_1, a_3, b, c), (a_3, a_1, a_2, b, c), $(a_3, a_2, a_1, b, c) \longrightarrow (a, a, a, b, c)$

Když budeme pokračovat dále, dostaneme celkový počet permutací s opakováním. Abychom nemuseli všechny permutace tvořit, všimněme si, že jsme s použitím označených prvků vytvořili několik permutací, kde šest těchto permutací, ve kterých leží prvky *a* na stejných místech, tvoří jednu permutaci s opakováním. Proto celkový počet permutací (bez opakování) vydělíme 6 (prvky nejsou navzájem různé, proto se některá pořadí opakují- prvek *a* se opakuje třikrát- proto 3! pořadí bude stejných; $3! = 6$). $120 \div 6 = 20$. Počet pořadí 5 prvků, z nichž 3 jsou stejné a zbývající 2 jsou různé je 20.

Pokud bychom pro výpočet použili výše uvedený vzorec (pro permutace s opakováním), bude výpočet následující:

$$P_o(3, 1, 1)=\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{120}{6}= 20$$

2. 5. Kombinace

2. 5. 1. Kombinace bez opakování

V této kapitole se budeme zabývat počtem neuspořádaných množin, které můžeme sestavit z *n* různých prvků, přičemž prvky se nesmí opakovat.

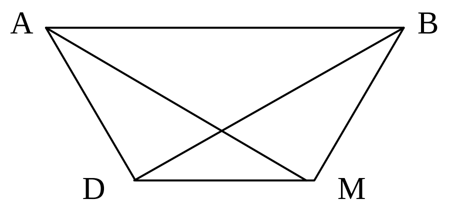
Podívejme se na jednoduchý příklad zabývající se touto problematikou.

Příklad:

Adam (A), Bobek (B), Dana (D), Marek (M) se loučí a podávají si ruce. Kolik je to celkem podání rukou?

Řešení:

Uvedená situace je znázorněna na obr. 8



obr. 8

Z obrázku 8 vidíme, že si ruku podá: Adam- Bobek, Adam- Dana, Adam- Marek, Dana- Marek, Dana- Bobek, Bobek- Marek. Zjistili jsme veškeré kombinace podání ruky, které se neopakují (podání ruky Adam- Bobek a Bobek- Adam je stejné). Celkem je jich tedy 6. Vytvořili jsme dvouprvkové množiny (dvojice- dva lidé si podají ruku) ze čtyř prvků (čtyři kamarádi). Všimněme si, že jsme vytvořili všechny dvouprvkové podmnožiny množiny {Adam, Bobek, Dana, Marek}. Je tedy zřejmé, že tvoření *k*- členných kombinací z *n* prvků je stejné jako tvoření *k*-prvkové podmnožiny *n*-prvkové množiny.

V příkladě jsme tvořili *k*-prvkové podmnožiny *n*-prvkové množiny. Tím se dostáváme k definici kombinace bez opakování.

Kombinace bez opakování jsou tvořeny *k*-člennými skupinami z *n* prvků, ve kterých nezáleží na pořadí. Ve skupinách se dané prvky vyskytují nejvýše jednou.

Ptáme se tedy na počet všech neuspořádaných *k*-tic tvořených z *n* prvků.

Kombinace se zapisují do množinových závorek {}.

Kombinace značíme ***C(k,n).*** Tedy jako k-členné kombinace z n prvků (jsou to k-prvkové podmnožiny množiny těmito n prvky určené). A platí pro ně:

$$\mathbf{C(k,\ n)=}\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}\ ;\ \mathbf{n}\in \boldsymbol{N},\ \mathbf{k}\in \boldsymbol{N},\quad \mathbf{k}\leq \boldsymbol{n}.$$

(Calda & Dupač, 2006)

2. 5. 2. Kombinace s opakováním

Podobně jako u variací výše uvedený problém tvorby *k*-prvkových množin tvořených z *n* prvků ztížíme. Nyní budeme předpokládat, že prvky v daných množinách se mohou opakovat. Opět nezáleží na pořadí.

Příklad:

Určete, kolika způsoby je možné rozdělit tři stejné kuličky do čtyř přihrádek?

Řešení:

Do přihrádky můžeme dát jednu, dvě, tři kuličky, nebo taky nemusíme do přihrádky dát žádnou kuličku. Přihrádky máme čtyři. Kuličky můžeme rozdělit podle následujícího schématu:

1.	2.	3.	4.	
●	●	●		1.
	●	●	●	2.
●		●	●	3.
●	●		●	4.
●●●				5.
	●●●			6.
		●●●		7.
			●●●	8.
●●	●			9.
●●		●		10.
●●			●	11.
	●●	●		12.
	●●		●	13.
●	●●			14.
		●●	●	15.
●		●●		16.
	●	●●		17.
●			●●	18.
	●		●●	19.
		●	●●	20.

Tři stejné kuličky jsme rozdělili 20 různými způsoby, v rozdělení kuliček nezáleží na jejich pořadí.

Kombinace s opakováním jsou tvořeny *k*-člennými skupinami z *n* prvků, ve kterých nezáleží na pořadí a jejichž členy se mohou opakovat.

Značíme je $\boldsymbol{C_o(k, n)}$.

U daného příkladu můžeme počet kombinací určit snadno (tím, že budeme kuličky postupně rozdělovat), ale při vyšších číslech je tento postup nepoužitelný. Při vyšších *n* a *k* je nutné použít vzorec pro kombinace s opakováním.

Obecný vzorec pro kombinace s opakováním:

$$\mathbf{C_o(k, n)} = \binom{n+k-1}{k}, \ k \in N. \text{ (Polák, 1977)}$$

3. Metodika:

Na sestavení praktické části jsem prostudovala učebnice prvního stupně, druhého stupně základní školy a učebnice pro střední školy a další matematické příručky (matematické sbírky, zábavné matematiky, matematiky pro volné chvíle, …), dále pak internetové stránky, ve kterých se kombinatorika nachází. Z těchto pramenů jsem vybrala příklady týkající se kombinatorického učiva. Příklady jsem roztřídila do procvičení kombinačních čísel, variací bez opakování a s opakováním, permutací bez opakování a s opakováním, kombinací bez opakování a s opakováním. Každou část jsem uvedla řešeným příkladem, na který navazuje několik dalších příkladů na procvičení. Z těchto příkladů jsem sestavila sbírku příkladů na procvičení.

4. Příklady na procvičení

4. 1. Kombinační čísla

Příklad 1:

Určete hodnoty kombinačních čísel:

$\binom{3}{1}, \binom{3}{3}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{5}{1}, \binom{7}{0}, \binom{7}{5}, \binom{7}{3}$

[3; 1; 6; 4; 5; 1; 21; 35]

Příklad 2:

Porovnejte:

$\binom{6}{3} \quad \binom{8}{2}$

$\binom{8}{3} \quad \binom{8}{5}$

$\binom{10}{7} \quad \binom{9}{4}$

$\binom{10}{4} \quad \binom{10}{6}$

[<; =; <; =]

Příklad 3:

Zapište jedním kombinačním číslem:

$\binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

$\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

$\binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

$\binom{7}{0} + \binom{7}{1}$

$\binom{6}{3} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

[$\binom{4}{3}; \binom{5}{2}; \binom{6}{5}; \binom{8}{1}; \binom{5}{3}$ **]**

Příklad 4:

Sečtěte:

$\binom{13}{2}+\binom{13}{10}+\binom{14}{4}+\binom{15}{10}+\binom{16}{6}$

[$\binom{17}{6}$]

Příklad 5:

Utvořte komplementární dvojice:

$\binom{68}{67}$; $\binom{12}{10}$; $\binom{68}{41}$; $\binom{85}{83}$

[$\binom{68}{1}$; $\binom{12}{2}$; $\binom{68}{27}$; ; $\binom{85}{2}$]

4. 2. Variace bez opakování

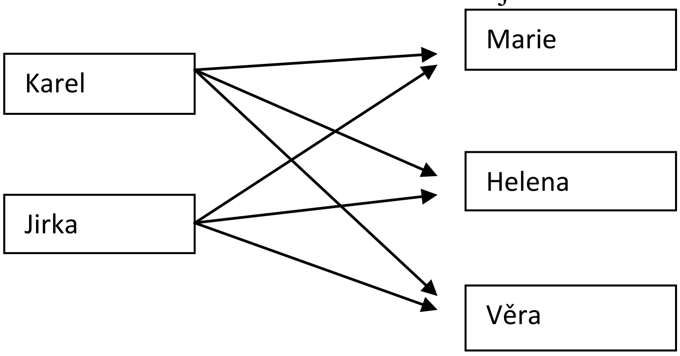
<u>Vzorový příklad:</u>

Příklad 1:

Dva chlapci, Karel a Jirka, odjeli na výlet. Svým spolužačkám, Marii, Helence a Věrce, poslal každý jednu pohlednici. Kolik pohlednic dostala děvčata?

Řešení:

Situaci si můžeme znázornit následujícím obrázkem (obr. 9).



obr. 9

Z obrázku vidíme, že Karel poslal celkem 3 pohledy, Jirka poslal také 3 pohledy. Každá dívka dostala dva pohledy. Dívky dostaly celkem 6 pohledů. Pokud bychom chtěli využít variačního počtu, můžeme konstatovat, že jde o dvojčlenné variace (pohlednice od chlapce dívce) ze tří prvků (tři děvčata)

$$V(2, 3)= \frac{3!}{(3-2)!}= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1}= 6$$

Odpověď: Děvčata dostala celkem 6 pohledů.

Příklad 2:

Z číslic 0, 2, 8 utvořte všechna možná dvojciferná a trojciferná čísla tak, aby v každém čísle byly různé číslice. Která jsou to čísla a kolik jich je?

[Čísla: 20, 28, 80, 82, 208, 280, 802, 820. Vypočet pomocí vzorce: (počet dvojciferných čísel): V(2, 3)=$3 \cdot 2 = 6$, nesmíme zapomenout, že dvojciferné číslo nesmí začínat 0. Budeme mít tedy o 2 čísla méně: $6 - 2 = 4$ dvojciferná čísla. Počet trojciferných čísel: V(3, 3)= $3 \cdot 2 \cdot 1$= 6, ale opět pozor trojciferné číslo nemůže začínat 0- Budeme mít opět o dvě čísla méně: $6 - 2 = 4$ trojciferná čísla]

Příklad 3:

V košíku je jablko, hruška, broskev a pomeranč. Kolika způsoby můžeme vybrat jedno ovoce k snídani, jedno ke svačině a jedno k obědu?

[V(3, 4)= $\frac{4!}{(4-3)!}$= $\frac{4!}{1}$= 4!= 24; ke snídani máme 4 možnosti, k obědu už jen 3 možnosti, k večeři 2 možnosti]

Příklad 4:

Máme k dispozici 5 kartiček s čísly 1, 2, 3, 4, 5. Kolik různých trojciferných číslic z nich můžeme sestavit?

[V(3, 5)= $\frac{5!}{(5-3)!}$= $\frac{5!}{2!}$= 60 trojciferných čísel]

Příklad 5:

Kolik existuje dvojciferných čísel větších než 30, které lze utvořit z číslic 1, 3, 4, 6 bez možnosti jejich opakovaného použití?

[V (2, 4)= $\frac{4!}{(4-2)!}$= $\frac{4!}{2!}$= 12 čísel; ale toto číslo obsahuje i čísla menší než 30, jsou to čísla 13, 14, 16.
Proto: $12 - 3 = 9$ čísel]

Příklad 6:

Z číslic 1, 2, 5, 8 utvořte všechna trojciferná čísla, která jsou dělitelná třemi. Přitom se v zápise čísla nesmí žádná číslice opakovat.

[V$(3,4) = 24$, ale všechna nejsou dělitelná 3;
dělitelná jsou čísla: 258, 285, 528, 582, 825, 852]

Příklad 7:

Výbor sportovního klubu tvoří šest mužů a čtyři ženy. Určete:

a) kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře;

b) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby ve funkci předsedy byl muž a ve funkci místopředsedy žena nebo obráceně;

c) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby právě jedním z nich byla žena.

[a) V(4, 10)= $\frac{10!}{(10-4)!}$= $\frac{10!}{6!}$= 5 040

b) předseda- 6 možností, místopředseda- 4 možnosti, jednatel- 8 možností (1 muž již předseda, 1 žena místopředseda- $10 - 2 = 8$), hospodář- 7 možností nebo předseda- 4 možnosti, místopředseda- 6možností jednatel-8 možností, hospodář-7 možností → $6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7$= 2 688 možností

c) předseda- 4 možnosti, místopředseda- 6 možností, jednatel- 5 možností, hospodář- 4 možnosti nebo předseda- 6 možností, místopředseda- 4 možnosti, jednatel- 5 možností, hospodář- 4 možnosti nebo předseda- 6 možností, místopředseda- 5 možností, jednatel- 4 možnosti, hospodář- 4 možnosti nebo předseda- 6 možností, místopředseda- 5 možností, jednatel- 4 možnosti, hospodář- 4 možnosti

→ $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$= 1 920]

Příklad 8:

Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se skládat ze šesti vyučovacích hodin. V kolika z nich se vyskytuje daný předmět a v kolika z nich je tento předmět zařazen na 1. vyučovací hodinu?

[V (6, 12)= $\frac{12!}{(12-6)!}$= $\frac{12!}{6!}$= 665 280 způsoby; rozvrhy s daným předmětem 6 V(5, 11)= 6· $\frac{11!}{(11-5)!}$= 6· $\frac{11!}{6!}$=

332 640 způsobů; rozvrhy s daným předmětem v první hodině V(5, 11)= $\frac{11!}{(11-5)!}$= 55 440 způsobů]

Příklad 9:

O telefonním čísle svého spolužáka si Vašek zapamatoval jen to, že je devítimístné, začíná dvojčíslím 23, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné pětadvaceti. Určete, kolik telefonních čísel přichází v úvahu.

[23_ _ _ _ _ 50, nebo 23_ _ _ _ _ 75 – na místo miliónů můžeme doplnit 6 číslic, na místo statisíců- 5 číslic, na místo desetitisíců- 4 číslice, na místo tisíců- 3 číslice, na místo stovek- 2 číslice. Máme dvě čísla- jedno končí 50 a druhé 75, proto 2·(6· 5· 4· 3· 2)= 1 440 čísel, nebo-li: 2·V(5, 6)= 2·$\frac{6!}{(6-5)!}$= 2· 6!= 2· 720= 1 440 telefonních čísel]

Příklad 10:

Kolik různých signálů je možno utvořit z pěti praporků různých barev, jsou-li:

a) tři praporky postaveny vedle sebe (trikolory);

b) dva praporky postaveny vedle sebe (bikolory);

c) vůbec všech signálů?

[a) V(3, 5)= $\frac{5!}{(5-3)!}$= $\frac{5!}{2!}$= 60 trikolor

b) V(2, 5)= $\frac{5!}{(5-2)!}$= $\frac{5!}{3!}$= 20 bikolor

c) $V(1,5)+V(2,5)+V(3,5)+V(4,5)+V(5,5)=$
$\frac{5!}{(5-1)!}+\frac{5!}{(5-2)!}+\frac{5!}{(5-3)!}+\frac{5!}{(5-4)!}+\frac{5!}{(5-5)!}=\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{1!}+$
$\frac{5!}{0!}=5+20+60+120+120=$ 325 signálů]

Příklad 11:

Kolika způsoby může být odměněno 1., 2., 3. cenou 13 účastníků sportovní soutěže?

[$V(3,13)=\frac{13!}{(13-3)!}=\frac{13!}{10!}=$ 1 715 způsobů]

Příklad 12:

Ve finále olympijského sprintu startuje 8 závodníků. Určete počet způsobů, jimiž se mohou rozdělit o zlatou stříbrnou a bronzovou medaili.

[$V(3,8)=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=$ 336 způsobů]

Příklad 13:

K sestavení vlajky skládající se ze tří různobarevných vodorovných pruhů jsou k dispozici látky těchto barev: červená, žlutá, modrá, bílá, zelená. Určete, kolik uvedených vlajek lze z těchto látek sestavit.

[$V(3,5)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=$ 60 vlajek]

Příklad 14:

Určete počet všech šestimístných telefonních čísel, v nichž se každá cifra vyskytuje nejvýše jednou.

[$V(6, 10)= \frac{10!}{(10-6)!}= \frac{10!}{4!}=$ 151 200 telefonních čísel]

Příklad 15:

Určete počet prvků, z nichž lze utvořit 240 dvoučlenných variací.

[$V(2, x)= 240 \rightarrow \frac{x!}{(x-2)!}= 240$

$\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}= 240$

$x(x-1)= 240$

$D= 1+ 4 \cdot 240$

$D= 961$

$x_{1, 2}= \frac{1 \pm \sqrt{961}}{2}$

$x_{1, 2}= 16 \rightarrow$ správné řešení

$= -15$]

Příklad 16:

Z číslic 2, 0, 7 sestavte různá dvojciferná čísla. Vytvořená čísla seřaďte podle velikosti, od nejmenšího k největšímu.

[$V(2, 3)= \frac{3!}{(3-2)!}=$ 6 čísel, ale pozor, 0 dvojciferné číslo začínat nemůže, nebylo by to dvojciferné číslo, proto 6- 2= 4 čísla; 20, 27, 70, 72]

Příklad 17:

Určete počet všech čtyřčlenných variací ze šesti prvků.

[V(4, 6)= $\frac{6!}{(6-4)!}$= $\frac{6!}{2!}$= 360 variací]

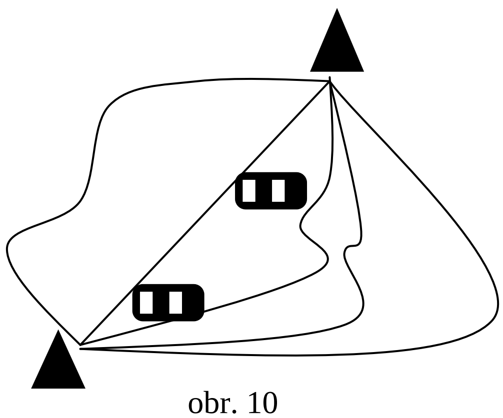
Příklad 18:

Kolika způsoby se může posadit 5 osob na 3 očíslované židličky?

[V(3, 5)=$\frac{5!}{(5-3)!}$= 60 způsobů; na první židličku můžeme posadit jednu z 5 osob, na druhou židličku jednu ze 4 osob a na třetí židličku jednu ze 3 osob]

Příklad 19:

Na vrchol hory vedou čtyři turistické cesty a lanovka (obr. 10). Určete počet způsobů, kterými je možno se dostat na vrchol a zpět tak, aby zpáteční cesta byla jiná než cesta na vrchol.



obr. 10

[V(2, 5)= $\frac{5!}{(5-2)!}$= $\frac{5!}{3!}$= 20 způsobů]

4. 3. Variace s opakováním

<u>Vzorový příklad:</u>

Příklad 1:

Z číslic 2, 3, 4 utvořte a zapište všechna možná dvojciferná čísla. Číslice se mohou opakovat.

Řešení:

Dvojciferné číslo si můžeme znázornit

D	J
↑	↑

3. možnosti   3 možnosti $\longrightarrow$ $3 \cdot 3 = 9$ čísel $\longrightarrow$ $V_o(2, 3) = 3^2 = 9$

Čísla: 22, 23, 24, 32, 33, 34, 42, 43, 44

<u>Vzorový příklad:</u>

Příklad 2:

Ve Švambránii je státní poznávací značka osobního automobilu tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy jsou písmena a další čtyři členy jsou číslice. Určete, kolik těchto poznávacích značek lze vytvořit, máme-li k dispozici 28 písmen.

Řešení:

První část značky je tvořena písmeny a písmen máme 28, mohou se opakovat.

28 · 28 · 28= 21 952 možností pro první část značky → $V_o(3, 28)= 28^3$

Druhá část značky je tvořena číslicemi a číslic máme 10 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), číslice se mohou opakovat.

10 · 10· 10 · 10= 10 000 možností pro druhou část značky → $V_o(4, 10)= 10^4$

Celkem: $V_o(3, 28) \cdot V_o(4, 10)= 28^3 \cdot 10^4$= 219 520 000 značek

Odpověď: Státních poznávacích značek lze vytvořit 219 520 000.

Příklad 3:

Kolik různých dvojciferných čísel lze zapsat pomocí čísel 0, 1, 2, 3, 4?

[$V_o(2, 5)$= 25, ale pozor, číslo nesmí začínat 0- 00, 01, 02, 03, 04- 5 čísel → 25- 5= 20 čísel]

Příklad 4:

Heslový zámek na kufříku má 5 kotoučů a na každém 8 číslic. Kolik různých hesel lze nastavit.

[$V_o(5, 8)= 8^5$= 32 768 hesel, první kotouč- 8 možností na výběr, druhý kotouč- 8 možností na výběr, třetí kotouč- 8 možností na výběr, čtvrtý kotouč- 8 možností na výběr, pátý kotouč- 8 možnosti na výběr. Tedy 8^5 možností na výběr]

Příklad 5:

Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až čtyřech prvcích.

[$V_o(1, 2)+ V_o(2, 2)+ V_o(3, 2)+ V_o(4, 2)= 2+ 4+ 8+ 16= 30$ skupin. Tedy skupiny s jedním prvkem, dvěma prvky, třemi prvky, čtyřmi prvky]

Příklad 6:

Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují cifry 1, 2, 3, 4, 5. (cifry se mohou opakovat)

[poslední dvojčíslí musí být dělitelné 4- 12, 24, 32, 44, 52- 5 dvojčíslí. Nyní hledám jen dvojčíslí- $V_o(2, 5)= 5^2=25 \longrightarrow 5\cdot V_o(2, 5)= 125$]

Příklad 7:

Jméno a příjmení každého obyvatele městečka s 1 500 obyvateli může začínat jedním ze 32 písmen. Dokažte, že alespoň dva obyvatele mají stejné iniciály.

[$V_o(2, 32)= 32^2= 1\,024$, obyvatel v městečku je 1 500, což je víc než možných iniciál, proto se iniciály budou opakovat]

Příklad 8:

Na panelu je 5 žárovek, z nichž každá může svítit zeleně, žlutě nebo červeně. Určete, kolik různých stavů může panel signalizovat.

[$V_o(5, 3)= 3^5= 243$ stavů]

Příklad 9:

Na vrchol hory vedou čtyři turistické cesty a lanovka. Určete počet způsobů, kterými je možno se dostat na vrchol a zpět.

[$V_o(2, 5)= 5^2=$ 25 způsobů]

Příklad 10:

Kolik různých dvojciferných čísel lze sestavit z číslic 2, 5, 7, 9? Číslice se smí opakovat.

[$V_o(2, 4)= 4^2=$ 16 číslic]

Příklad 11:

Určete počet všech pětimístných telefonních čísel.

[$V_o(5, 10)= 10^5=$ 100 000 telefonních čísel]

Příklad 12:

Při vykopávkách se našla ohnivzdorná skříň. Našel se i klíč, ale k otevření bylo třeba znát heslo, na které bylo třeba nastavit pět kotoučů s abecedou po obvodě (po 36 písmenech). Heslo se skládalo z 5 písmen, avšak nikdo nevěděl, z kterých. Nezbývalo nic jiného, než vyzkoušet všechny kombinace písmen na kroužcích.

Jestliže počítáme, že na sestavení jedné kombinace jsou třeba 3 vteřiny, je možné očekávat, že skříň otevřeme v nejbližších 10 dnech (pracovní doba je osmihodinová)?

[první kotouč- 36 možností, druhý kotouč- 36 možností, třetí kotouč- 36 možností, čtvrtý kotouč- 36 možností a pátý kotouč- 36 možností. $V_o(5, 36)= 36^5=$

60 466 176 možností. Pokud na jednu kombinaci 3 vteřiny, pak: 3· 60 466 176= 181 398 528 vteřin= 50 110,70 hodin, tedy téměř 6300 osmihodinových pracovních dní. Znamená to, že skříňku v nejbližší době neotevřeme]

4. 4. Permutace bez opakování

<u>Vzorový příklad:</u>

Příklad 1:

Dlouhý, Široký a Bystrozraký jsou za sebou v zástupu. Kolika různými způsoby mohou být seřazeni?

Řešení:

Různá řazení v zástupu: D- Š- B D- B- Š

Š- B- D B- Š- D

B- D- Š Š- D- B

Jedná se o P(3)= 3!= 6

Odpověď:

Dlouhý, Široký a Bystrozraký se mohou zařadit do zástupu 6 různými způsoby.

Příklad 2:

Určete, kolika způsoby může 10 táborníků při nástupu na ranní rozcvičku nastoupit

a) do řady;

b) do řady, v níž je táborník Aleš na kraji.

[a) P(10)= 10!= 3 628 800 možností

b) P(9)= 9!= 362 880 možností- Aleš může stát na pravé nebo levé straně, proto 2· 362 880= 725 760]

Příklad 3:

Kolik trojciferných čísel napíšeme pomocí cifer 1, 3, 7, můžeme-li použít každou z nich jen jednou.

[P(3)= 3!= 6 čísel]

Příklad 4:

Z číslic 2, 5, 7 sestavte všechna možná trojciferná čísla tak, aby se číslice v žádném z nich neopakovaly.

[P(3)= 3!= 6 , 257, 572, 725, 275, 752, 527]

Příklad 5:

Z číslic 4, 8, 3, 7 sestavte co nejvíce čtyřciferných čísel tak, aby se jednotlivé číslice v číslech neopakovaly. Kolik bude takových čísel?

[4837, 4873, 4783, 4738, 4378, 4387, 8734, 8743, 8347, 8374, 8473, 8437, 7348, 7384, 7438, 7483, 7834, 7843, 3478, 3487, 3784. 3748. 3874, 3847; P(4)= 4!= 24]

Příklad 6:

Sestavte z daných cifer (1, 2, 3) všechna trojciferná čísla a seřaďte je podle velikosti v pořadí od nejmenšího k největšímu. V žádném čísle se nesmí žádná cifra opakovat. Kolik je takových čísel?

[123< 132< 213< 231< 312< 321; P(3)= 3!= 6]

Příklad 7:

Z daných číslic 1, 2, 3, 4 (aniž by se opakovaly) sestavte všechna čtyřciferná čísla, která jsou dělitelná čtyřmi.

[P(4)= 4!= 24, ale všechna nejsou dělitelná 4; dělitelná jsou čísla: 1324, 1342, 1432, 3124, 3412, 4132, 4312]

Příklad 8:

Jirka cosi hledal ve čtyřdílném naučném slovníku. Zjistěte, kolika způsoby mohl uložit slovníky zpět do knihovny?

[P(4)= 4!= 24 možností; 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321]

Příklad 9:

Určete počet všech šestimístných telefonních čísel, v nichž je každá z číslic 0, 2, 4, 6, 8, 9.

[P(6)= 6!= 720 telefonních čísel]

Příklad 10:

V lavici je 5 míst. Kolika způsoby ji lze obsadit osobami A, B, C, D, E, jestliže:

a) C musí sedět na kraji;

b) C musí sedět uprostřed;

c) A, B musí sedět vedle sebe;

d) případ a), c) nastane současně;

e) případ b), c) nastane současně.

[a) osoba C sedí na levém kraji- P(4)= 4!= 24; osoba C sedí na pravém kraji P(4)= 24 → 4!+ 4!= 48

b) P(4)= 4!= 24

c)

A	B				3!
	A	B			3!
		A	B		3!
			A	B	3!
			B	A	3!
		B	A		3!
	B	A			3!
B	A				<u>3!</u>

8· 3!= 48

d)

C	A	B			2!
C		A	B		2!
C			A	B	2!
C			B	A	2!
C		B	A		2!
C	B	A			<u>2!</u>

a opačně- C vlevo: 2· 6· 2!= 24

e)

A	B	C			2!
B	A	C			2!
		C	A	B	2!
		C	B	A	2!

4· 2!= 8]

Příklad 11:

Kolik šesticiferných čísel je možno sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, (číslice se nesmí opakovat)

a) mají-li čísla začínat cifrou 4;

b) mají-li čísla začínat ciframi 4 nebo 5;

c) jsou-li dělitelná čtyřmi;

d) končí-li trojčíslím 216?

[a) $P(5)= 5!= 120$

b) $2\cdot P(5)= 240$

c) čísla musí končit 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64-

$8\cdot 4!= 192$

d) $P(3)= 3!= 6$]

Příklad 12:

Určete počet prvků tak, aby bylo možno z nich utvořit právě 40 320 permutací.

[a) $P(8)= 8!= 40\,320$]

Příklad 13:

Na Startovní čáře je připraveno ke startu 6 závodních aut (modré, červené, zelené, černé, žluté a bílé). Jaký je počet všech možných pořadí, v nichž auta projedou cílem?

[$P(6)= 6!= 720$]

Příklad 14:

Kolik možných slov vznikne záměnou pořadí písmen A, S, M, O?

[$P(4)= 4!= 24$ slov]

4. 5. Permutace s opakováním

Vzorový příklad:

Příklad 1:

Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA.

Řešení:

A se ve slově opakuje pětkrát, B dvakrát, D jednou, K jednou, R dvakrát:

5+ 2+ 1+ 1+ 2= 11

$P_o(5, 2, 1, 1, 2)= \frac{11!}{5!2!1!1!2!}$= 83 160 způsobů

Odpověď:

Slova lze přemístit 83 160 způsoby.

Příklad 2:

Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 šedé, 3 modré a 4 černé kostky.

[$P_o(2, 3, 4)= \frac{9!}{2!3!4!}$= 1 260 způsoby]

Příklad 3:

Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, v jejichž dekadickém zápisu nejsou jiné číslice než 0, 1, 2, 5, 7.

[aby číslo bylo dělitelné devíti, musí být devíti dělitelný jeho ciferný součet (cif. součet=9, 18, 27);
9= 5+ 2+ 1+ 1; 5+ 2+ 2+ 0; 7+ 1+ 1+ 0; 7+ 2+ 0+ 0;
18= 7+ 7+ 2+ 2; 7+ 5+ 5+ 1; 27= nelze;
Použití 5+ 2+ 1+ 1 …$P_o(5, 2, 1, 1)=\frac{4!}{2!}= 12$;
5+ 2+ 2+ 0 … $P_o(5, 2, 2, 0)=\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}= 9$; 7+ 1+ 1+ 0
… $P_o(7, 1, 1, 0)=\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{!}= 9$; 7+ 2+ 0+ 0 …$P_o(7, 2, 0, 0)=\frac{4!}{2!}- 3!= 6$; 7+ 7+ 2+ 2 … $P_o(7, 7, 2, 2)=\frac{4!}{2!2!}= 6$;
7+ 5+ 5+ 1 … $P_o(7, 5, 5, 1)=\frac{4!}{2!}= 12$.
Celkem 12+ 9+ 9+ 6+ 6+ 12= 54 čtyřciferných čísel]

Příklad 4:

Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků)

a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8x8;

b) na libovolné dvě řady šachovnice 8x8

[a) Celkem 16 figurek: $P_o(1, 1, 2, 2, 2, 8)=\frac{16!}{2!2!2!8!}=$
64 864 800 způsobů

b) 8 řad- Dvojice řad= $\binom{8}{2}\frac{16!}{2!2!2!8!}$= 28· 64 864 800]

Příklad 5:

Určete počet všech pěticiferných čísel, jež lze sestavit z číslic 5 a7, má-li v každé z nich být číslice 5

a) právě třikrát;

b) nejvýše třikrát;

c) aspoň třikrát.

[a) Cifry 5, 5, 5, 7, 7= 5 cifer: P_o(5, 5, 5, 7, 7)= $\frac{5!}{3!2!}$= 10

b) Tedy ani jednou, jednou, dvakrát a třikrát: P_o(7, 7, 7, 7, 7)+ P_o(5, 7, 7, 7, 7)+ P_o(5, 5, 7, 7, 7)+ P_o(5, 5, 5, 7, 7)= $\frac{5!}{5!}$+ $\frac{5!}{4!}$+ $\frac{5!}{3!2!}$ + $\frac{5!}{2!3!}$ = 1+ 5+ 10+ 10= 26

c) Tedy třikrát, čtyřikrát a pětkrát: P_o(5, 5, 5, 7, 7) + P_o(5, 5, 5, 5, 7)+ P_o(5, 5, 5, 5, 5)= $\frac{5!}{2!3!}$+ $\frac{5!}{4!}$+ $\frac{5!}{5!}$= 10+ 5+ 1= 16]

Příklad 6:

Šesticiferné heslo uzávěru trezoru je vytvořeno z týchž cifer jako číslo 220 096. Kolik je možností k vytvoření hesla na trezoru?

[P_o(2, 2, 0, 0, 9, 6)= $\frac{6!}{2!2!}$= 180 možných hesel]

Příklad 7:

Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova MISSISSIPPI. Kolik z nich nezačíná písmenem M?

[Písmena se vyskytují: M- jedenkrát; I- čtyřikrát; S- čtyřikrát; P- dvakrát: $P_o(1, 4, 4, 2) = \frac{11!}{1!4!4!2!} =$ 34 650 možností pro přemístění písmen. Písmenem M začíná $P_o(4,4,2) = \frac{10!}{4!4!2!} =$ 3 150; Písmenem M nezačíná: 34 650- 3 150= 31 500 přemístění]

Příklad 8:

Určete počet všech anagramů, které lze ze slova KOMBINATORIKA utvořit.

[Písmena se vyskytují: K- dvakrát, O- dvakrát, m- jedenkrát, B- jedenkrát, I- dvakrát, N- jedenkrát, A- dvakrát, T- jedenkrát, R- jedenkrát; $P_o(2,2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1) = \frac{13!}{2!2!2!2!}$]

Příklad 9:

Máme čtyři krabice s pastelkami: jednu krabici s 5 žlutými pastelkami, jednu krabici s 6 modrými pastelkami, jednu krabici s 5 zelenými pastelkami a jednu krabici se 3 červenými pastelkami. Určete, do kolika různých řad lze pastelky uspořádat.

[$P_o(5, 6, 5, 3) = \frac{19!}{5!6!5!3!}$]

Příklad 10:

Gaius Julius Ceasar po vítězství nad pontským králem Frankem zprávu do Říma, která byla takto zašifrovaná: CDEIIIIINVVV. Určete, kolika způsoby lze ve zprávě přemístit písmena.

$$[\ P_o(1, 1, 1, 5, 1, 3) = \frac{12!}{5!3!} = 665\ 280\ ]$$

Příklad 11:

Kolik lze vytvořit anagramů z písmen slova ANANAS?

$$[P_o(3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1} = 60 \text{ anagramů}]$$

4. 6. Kombinace bez opakování

Vzorový příklad:

Příklad 1:

Do zahrádky chce maminka zasadit dva druhy květin a má tuto nabídku: macešky, fialky, kosatce, tulipány, bledule a petrklíče. Kolik možností výběru maminka má?

Řešení:

Celkem možností na výběr je 6 (6 druhů rostlin). Maminka chce jen dva druhy:

Možnosti výběru:

macešky- fialky	fialky-kosatce	kosatce-tulipány
macešky- kosatce	fialky- tulipány	kosatce- bledule
macešky- tulipány	fialky- bledule	kosatce- petrklíče
macešky- bledule	fialky- petrklíče	
macešky- petrklíče		

tulipány- bledule		bledule- petrklíče

tulipány- petrklíče

C(2, 6)= $\binom{6}{2}$= $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$= 15 možností

Příklad 2:

V cukrárně mají čtyři druhy zmrzliny: vanilkovou, čokoládovou, jahodovou a oříškovou. Děti si kupovaly zmrzlinu po 2 kopečcích. Jak si mohly vybrat? Kolik je možností výběru?

[C(2, 4)= $\binom{4}{2}$= $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$= 6]

Příklad 3:

Karolína má 2sukně (bílou, šedou) a 5 triček (oranžové, žluté zelené, červené, modré). Kolik různých možností může z těchto součástí oděvu vytvořit?

[C(5, 2)= $\binom{5}{2}$= $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}$= 10]

Příklad 4:

Jirku, Petra, Alenku a Martinu chceme posadit do 2 lavic. Kolika způsoby je můžeme posadit?

[C(2, 4)= $\binom{4}{2}$= $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$= 6 způsobů]

Příklad 5:

Aleš, Jakub, Honza a Michal si při loučení podávali ruce. Kolik to bylo stisků, podal-li každý každému ruku jednou?

[C(2, 4)= $\binom{4}{2}$= $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$= 6 podání rukou]

Příklad 6:

Kolik úseček spojuje vrcholy pětiúhelníku, osmiúhelníku, dvanáctiúhelníku?

[Pětiúhelník: C(2, 5)= $\binom{5}{2}$= $\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}$= 10; Osmiúhelník: C(2, 8)= $\binom{8}{2}$= $\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}$= 28; Dvanáctiúhelník: C(2, 12)= $\binom{12}{2}$= $\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}$= 66]

Příklad 7:

Hra PEXESO obsahuje 32 dvojic shodných kartiček. Začínající hráč má obrátit dvojici kartiček. Z kolika možností si může vybrat?

[Je 32 dvojic kartiček, tedy 64 kartiček, C(2, 64)= $\binom{64}{2}$= $\frac{64\cdot 63}{2\cdot 1}$= 2 016]

Příklad 8:

Ve třídě je 18 chlapců a 14 dívek. Kolikerým způsobem se mohou zvolit do třídního výboru 3 zástupci, mají-li to být:

a) samí chlapci;

b) samé dívky;

c) dva chlapci a jedna dívka?

[a) C(3, 18)= $\binom{18}{3}$= $\frac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2\cdot 1}$= 816

b) C(3, 14)= $\binom{14}{3}$= $\frac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 2\cdot 1}$= 364

c) C(2, 18)· C(1, 14)= $\binom{18}{2}$· $\binom{14}{1}$= $\frac{18\cdot 17}{2\cdot 1}$· $\frac{14}{1}$= 153· 14= 2 142]

Příklad 9:

Test přijímací zkoušky se skládá z 5 otázek. Budou to dvě otázky z dějepisu (připraveno je jich 30), dvě otázky s občanské nauky (připraveno je jich 25) a jedna otázka ze zeměpisu (připraveno je jich 20). Kolik variant testu nám připravené otázky umožňují?

[Otázky z dějepisu C(2, 30)= $\binom{30}{2}$= $\frac{30\cdot 29}{2\cdot 1}$= 435 možností; otázky z občan. n. C(2,, 25)= $\binom{25}{2}$= $\frac{25\cdot 24}{2\cdot 1}$= 300 možností; otázky ze zeměpisu C(1, 20)= $\binom{20}{1}$= $\frac{20}{1}$= 20 možností: 435· 300· 20= 2 610 000 variant]

Příklad 10:

Určete, kolika způsoby může shromáždění 30 lidí zvolit ze svého středu tříčlenný výbor.

[C(3, 30)= $\binom{30}{3}$= $\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2\cdot 1}$= 4 060 způsobů]

Příklad 11:

Určete, kolika způsoby může utvořit 15 chlapců a 10 dívek taneční pár.

[C(2, 25)= $\binom{25}{2}$, není rozlišeno pohlaví, proto:C(2,25)- C(2, 15)- C(2, 10)= $\binom{25}{2} - \binom{15}{2} - \binom{10}{2}$= 300- 105- 45= 150 párů]

Příklad 12:

Basketbalové družstvo tvoří pět hráčů. Určete, kolik možností má pro sestavení družstva jeho trenér, má-li k dispozici 12 hráčů.

[C(12, 5)= $\binom{12}{5}$= $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$= 792 možností výběru]

Příklad 13:

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8x 8 vybrat trojici políček.

[C(3, 64)= $\binom{64}{3}$= 41 664 způsobů]

Příklad 14:

Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny.

[C(2, 7)· C(2, 10)= $\binom{7}{2} \cdot \binom{10}{2}$= 21· 45= 945]

Příklad 15:

Ze sedmi mužů a čtyř žen se má vybrat šestičlenná skupina, v níž jsou alespoň tři ženy. Určete, kolika způsoby to lze provést.

[Tři ženy- pak tři muži doplní šestici: C(3, 7)$\cdot$ C(3, 4)= $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3}$= $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{4}{1}$= 35$\cdot$ 4= 140; Čtyři ženy- pak dva muži doplní šestici: C(2, 7)$\cdot$ C(4, 4)= $\binom{7}{2}\cdot\binom{4}{4}$= $\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\cdot$1= 22; 140+ 22= 161 způsobů]

Příklad 16:

V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit 8 různých pohledů.

[C(8, 10)= $\binom{10}{8}$= $\binom{10}{2}$ = $\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}$= 45]

Příklad 17:

Kolika způsoby lze vybrat z dvaceti studentů dvojici na zkoušení.

[C(2, 20)= $\binom{20}{2}$= $\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}$= 190 způsobů]

Příklad 18:

Vypočítejte počet možných výsledků při losování

a) v matesu (z 35 čísel se losuje 5 čísel)

b) ve sportce (ze 49 čísel se losuje 6 čísel)

[a) C(5, 35)= $\binom{35}{5}$= $\frac{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$= 324 632

b) C(6, 49)= $\binom{49}{6}$= 13 983 816]

Příklad 19:

Radim poslal v pondělí z letního tábor 6 dopisů. Ve dvou případech omylem zalepil dopisy do vyměněných obálek. Ostatní dal do správných obálek. Kolik je takových možností?

[C(2, 6)= $\binom{6}{2}$= 15 možností]

Příklad 20:

Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků, 5 obránců a 2 brankáře. Kolik má možností utvořit sestav (sestava: 3 útočníci, 2 obránci a 1 brankář)?

[C(3, 13)· C(2, 5)· C(1, 2)= $\binom{13}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}$= 5 720]

Příklad 21:

Hostinský má 10 lahví různých likérů. Kolik různých směsí se z toho dá namíchat, dáváme-li všech likérů vždy stejně a ani dvě směsi nesmějí mít tutéž kombinaci?

[Tvoříme kombinace: ze dvou druhů je $\binom{10}{2}$= 45 směsí, ze tří druhů $\binom{10}{3}$= 120 směsí, ze čtyř druhů $\binom{10}{4}$= 210 směsí, z pěti druhů $\binom{10}{5}$= 252 směsí, ze šesti druhů 210 směsí, ze sedmi druhů 120 směsí, z osmi druhů 45 směsí, z devíti druhů 10 směsí a z deseti druhů 1 směs. Celkem: 45+ 120+ 210+ 252+ 210+ 120+ 45+ 10+ 1= 1 013 směsí]

Příklad 22:

Turnaje se zúčastní 10 družstev, z nichž první čtyři postupují do finále. Kolik je čtveřic, které mohou postoupit do finále?

[C(4, 10´)= $\binom{10}{4}$= 210 možností čtveřic]

Příklad 23:

Kolik má úhlopříček n-úhelník?

[C(2, n)= $\binom{n}{2} - n$]

4. 7. Kombinace s opakováním

<u>Vzorový příklad</u>

Příklad 1:

V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky; kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné. Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je aspoň pět kuliček od každé barvy.

Řešení:

Vybíráme pětici kuliček, ve kterém nezáleží na pořadí. Jde tedy o kombinace s opakováním:

$$C_o(5, 3)= \binom{3+5-1}{5}= \binom{7}{5}= \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\ 2\ 1}= 21$$

Odpověď:

Pět kuliček můžeme vybrat 21 způsoby.

Příklad 2:

V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit 15 pohledů.

[$C_o(10, 15)=\binom{10+15-1}{15}=\binom{24}{15}= 1\,307\,504$]

Příklad 3:

Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy (tj. z osmi pěšců, dvou věží, dvou jezdců a dvou střelců) vybereme a) trojici, b) dvojici. Jaký je počet možností pro jejich složení?

[a) $C_o(3, 4)- 3=\binom{3+4-1}{3} - 3= \binom{6}{3} - 3 = 17$

b) $C_o(2, 4)=\binom{4+2-1}{2}=\binom{5}{2}= 10$]

Příklad 4:

Kolik 3- prvkových kombinací s opakováním lze utvořit na 5- prvkové množině?

[$Co(3, 5)=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}= 35$]

Příklad 5:

Určete, kolika způsoby je možné rozmístit tři stejné kuličky do čtyř krabiček.

[$C_o(3, 4)=\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}= 20$]

Příklad 6:

Kolika způsoby může babička rozdělit 15 bonbónů mezi 10 vnuků?

[$C_o(15, 10)= \binom{10+15-1}{15}= \binom{24}{15}= \binom{24}{9}$=1 307 504 způsoby]

Příklad 7:

V obchodě mají tři druhy sirupu: Jahodový, meruňkový a citrónový. Určete počet všech možností nákupu čtyř lahví sirupu v tomto obchodě.

[$C_o(4, 3)= \binom{3+4-1}{4}= \binom{6}{4}= \frac{6\cdot5}{2\cdot1}$= 15 možností]

Příklad 8:

Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých kostkách při vrhu třemi kostkami? (obvyklá kostka s jedním až šesti oky na jednotlivých stranách)

[Tři kostky, šest stran: $C_o(3, 6)= \binom{6+3-1}{3}= \binom{8}{3} = 56$]

Příklad 9:

Klenotník vybírá do prstenu tři drahokamy. K dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné.

[$C_o(3, 3) – 1= \binom{5}{3}$ - 1= 9]

Příklad 10:

Určete, kolika způsoby můžeme zvolit dvě karetní barvy (barvy jsou srdce, kára, piky, kříže), které nemusejí být různé?

[$C_o(2, 4)= \binom{5}{2}= 10$: srdce- srdce; srdce- piky; srdce- káry; srdce- kříže; piky- piky; piky- káry; piky- kříže; káry- káry; káry- kříže; kříže- kříže]

Příklad 11:

Určete, kolika různými způsoby lze rozdělit 15 korunových mincí mezi 10 dětí?

[$C_o(10, 15)= \binom{24}{15}= 1\ 307\ 504$]

Příklad 12:

Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm stejných jablek.

[$C_o(8, 3)= \binom{10}{8}= 45$]

5. Závěr:

V této diplomové práci jsem se snažila postihnout celou oblast kombinatorického učiva, která se vyučuje na vysoké škole, na oboru Učitelství pro 1. stupeň základní školy. Snažila jsem se přehledně a srozumitelně shrnout teoretický základ dané problematiky. Tento teoretický základ je shrnut v teoretické části diplomové práce. Jsou rozebrány jednotlivé oblasti kombinatoriky: kombinatorická pravidla, kombinační čísla, variace bez a s opakováním, permutace bez a s opakováním, kombinace bez a s opakováním. Jednotlivé oblasti obsahují ukázky příkladů na dané téma a jejich řešení bez vzorce a se vzorcem. Řešení příkladů bez použití vzorců ukazuje možnosti řešení pro žáky základních škol, ve kterých se kombinatorické učivo jako takové nevyučuje.

Druhá část mé diplomové práce je tvořena příklady, které jsem vyhledávala v různých učebnicích, matematických sbírkách nebo na internetových stránkách. Učebnice ze základních škol, které jsem procházela, neobsahovaly mnoho příkladů kombinatorické povahy. A pokud ano, týkaly se především kombinací, variací a permutací bez opakování. Většinou se opakovaly ve stejném, nebo číselně změněném znění.

Příklady v praktické části obsahují výsledky a částečný postup výpočtu. Mohou sloužit k procvičení učiva a jeho prohloubení. Některé příklady se dají použít i na prvním stupni základních škol, příklady se dají vypočítat i bez vzorců, pomocí tabulek, nákresů, atd. Myslím si, že takové příklady jsou pro děti zajímavé a většinou je s radostí řeší.

Díky této diplomové práci jsem zjistila, jaké příklady se v učebnicích vyskytují, jaké příklady se dají použít k prohloubení a rozšíření vědomostí o učivu týkajících se kombinatoriky.

6. Literatura:

Calda, Emil- Dupač, Václav: *Matematika pro gymnázia- Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Čtvrté vydání, Praha, Prometheus, 2006, s. 170. ISBN 80-7196-147-7.

Petrásek, Oldřich- Calda, Emil- Hebák, Petr: *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 4 část.* Páté vydání, Praha, Prometheus, 1997, s. 148. ISBN 80-7196-040-3.

Polák, Josef: *Přehled středoškolské matematiky.* Druhé vydání, Praha, SPN, 1977, s. 628. ISBN 14-378-77.

Benda, Petr, et al.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Desáté vydání, Praha, SPN, 1988, s. 199. ISBN 14-373-88

Rossiová Dell´Acqua, Alba: *Encyklopedie matematiky*. První vydání, Praha, Mladá fronta, 1988, s. 280. ISBN 23-025-88

Divíšek, Jiří- Bálint, Ĺudovít- Jerošová, Marie: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. a 3. ročník ZŠ.* První vydání, Praha, SPN, 1989, s. 143. ISBN 80-04-23854-8

Novoveský, Štefan- Križalkovič, Karol- Lečko, Imrich: *Zábavná matematika*. První vydání, Praha, SPN, 1975, s. 324.

Vošický Zdeněk, et al.: *Testy z přírodních věd.* Druhé vydání, Havlíčkův Brod, Fragment, 1999, s. 159. ISBN 80-7200-344-5.

Koman, M.- Vyšín, J.: *Malý výlet do moderní matematiky.* Druhé vydání, Praha, Mladá fronta, 1974, s. 192.

Divíšek, J.- Dřízal, V.- Koman, M.: *Matematika pro 5. ročník ZŠ (Doplňující text)*. Druhé vydání, Praha, Prometheus, 1994, s.103. ISBN 80-85849-19-4

Mäsiar, P.- Bureš, F.- Koman, M.: *Matematika pro 6. ročník základní školy (Doplňující text)*. První vydání, Praha, SPN, 1992. ISBN 85-04-25934-0

Šedivý, O., et al.: *Matematika pro 7. ročník základní školy II. díl (Doplňující text).* První vydání, Praha, SPN, 1987.

Müllerová, J.- Koman, M.: *Matematika pro 8. ročník základní školy II. díl (Doplňující text).* Druhé vydání, Praha, SPN, 1990. ISBN 80-04-24760-1

Bálint, L., et al.: *Matematika pro 3. ročník základní školy.* Druhé vydání, Praha, SPN, 1988.

Blažková, R.- Staudková, H., et al.: *Matematika pro 3. ročník základních škol 3. díl.* Druhé vydání, Všeň, Alter, 2004. ISBN 80-85775-77-8.

Blažková, R., et al.: *Matematika pro 3. ročník základní školy 2. díl.* Druhé vydání, Všeň,Alter, 2004. ISBN 80-85775-76-X.

Mikulenková, H.- Konečná, L.: *Matematika pro 3. ročník ZŠ 1. díl.* Olomouc, Prodos, 1993. ISBN 80-901297-8-1.

Molnár, J.- Mikulenková, H.: *Matematika pro 3. ročník 3. díl.* Olomouc, Prodos, 1993. ISBN 80-85806-00-2.

Divíšek, J., et al.: *Matematika pro 2. ročník základní školy.* Třetí vydání, Praha, SPN, 1988.

Melichar, J.- Kalná, V.- Koman, M.: *Sbírka úloh z matematiky pro 4. ročník ZŠ.* Druhé vydání, Praha, SPN, 1992. ISBN 80-04-26239-2.

Česenek, J., et al.: Sbírka *úloh z matematiky pro 6. ročník základní školy*. Druhé vydání, Praha, SPN ve spolupráci s nakladatelstvím Scientia, 1993. ISBN 80- 04-26247-3.

Molnár, J.- Mikulenková, H.: *Zajímavá matematika pro 4. ročník.* Olomouc, Prodos, 1996. ISBN 80-85806-36-3.

Farská, Jana: *Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek.* Praha. URL: http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/

Pavel: *Kombinatorika*. URL: http://mathes.cz/U%C4%8Debnice/Kombinatorika.aspx