

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Matematika a biologie

Diplomová práce

Vedoucí práce

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Vypracovala

Pavla Sobotková

Abstrakt

Tématem této diplomové práce je propojení matematiky a biologie. Zaměřuje se na aplikaci matematiky v biologii s důrazem na její praktické využití.

Jednotlivé kapitoly ukazují, jak lze matematiku využít v ekologii, lékařství, genetice, fyziologii, mineralogii a botanice.

V závěru práce je provedeno celkové zhodnocení.

Abstract

The topic of this diploma is the connection between mathematics and biology.

It concentrates on using mathematics in biology especially in a practical way.

Different capitols show application of maths in ecology, medicine, genetic science, physiology, mineralogy and botanics.

The last part contains conclusion of all the facts.

OBSAH

1. ÚVOD A CÍL PRÁCE.....	5
1.1 Úvod.....	5
1.2 Cíl práce.....	6
2. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	7
2.1 Růstové modely	7
2.2 Model samočištění jezera.....	10
2.2.1 Využití modelu samočištění jezera v praxi.....	11
2.3 Model radioaktivního rozpadu.....	13
2.3.1 Využití modelu radioaktivního rozpadu v praxi	14
2.4 Pohyb léků v organismu	17
2.4.1 Využití metabolismu léků v praxi.....	19
3. GENETIKA	21
3.1 Vymezení obecných pojmů	21
3.1.1 Genetika	21
3.1.2 Chromozomy a dělení buněk	21
3.1.3 Lidský genom	22
3.1.4 Alely.....	23
3.2 Křížení druhů	27
3.2.1 Monohybridní křížení	27
3.2.2 Dihybridní křížení.....	32
3.2.3 Polyhybridní křížení	34
3.3 Hardy – Weinbergův zákon	35
3.3.1 Užití Hardy-Weinbergova zákona v praxi	36
3.3.2 Odvození Hardy-Weinbergova zákona.....	38
3.3.3 Testování Hardy-Weinbergovy rovnováhy	40
4. FYZIOLOGIE.....	44
4.1 Vitální kapacita plic	44
4.1.1 Využití vitální kapacity plic v praxi	44

5. STŘEDOVÁ, OSOVÁ, ROVINNÁ SOUMĚRNOST.....	50
5.1 Vymezení pojmů.....	50
5.1.1 Středová souměrnost se středem S	50
5.1.2 Osová souměrnost s osou o	50
5.1.3 Rovinová souměrnost s rovinou ρ	51
5.2 Určení krystalových soustav	52
5.2.1 Přehled krystalových soustav.....	53
5.2.2 Přehled prvků souměrnosti jednotlivých soustav	55
5.3 Botanika – souměrnost květů.....	56
6. ZÁVĚR	58
7. POUŽITÁ LITERATURA	59
a) Knižní publikace	59
b) Internetové zdroje.....	57
PŘEHLED TABULEK A GRAFŮ	61
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	62

1. ÚVOD A CÍL PRÁCE

1.1 Úvod

„O významu matematiky v takové přesné vědě jako je fyzika nikdo nepochybuje, avšak význam použití matematiky v méně přesných vědách jako je ekologie, biologie a medicína, je velmi často zpochybňován.“

N. T. J. Bailey

Pokud si otevřeme některou biologickou knihu a nebudeme se snažit nic matematického hledat, tak ať chceme nebo ne stejně k matematice dojdeme. V botanice najdeme rostliny jako devětsil lékařský nebo sedmikráska obecná, u kterých se můžeme jen dohadovat, kde ke svému jménu přišli. Naproti tomu u jiných rostlin jako jinan dvoulaločnatý, vraní oko čtyřlísté, vemeník dvoulistý, můžeme z názvu vyvodit něco o vzhledu dané rostliny. Stejně tak se můžeme dočíst, že daná rostlina má pětičetný květ, čtyřčetný květ apod., kde nám číslice udává v jakém počtu nalezneme korunní, kališní nebo okvětní lístky, pestíky a tyčinky.

Pokud dáme přednost zoologii a anatomii, najdeme zde např. slunéčko sedmítečné, zjistíme, že při rýhování vajíčka z jedné buňky vzniknou dvě, ty se dále rozdělí na dvě atd., čili počet buněk roste $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots 2^n$. Páteř člověka se skládá ze 7 obratlů krčních, 12 hrudních, 5 bederních, kosti křížové, která vzniká srůstem 5 obratlů křížových a 4 - 5 obratlů kostrčních, které srůstají v kost kostrční.

Chceme-li například studovat znečištěné jezero, otázek nás napadne spousta. Kolik je tam nečistot? Jak došlo k znečištění jezera? Jak můžeme znečištění zabránit? Najít odpověď na podobné otázky můžeme pomocí měření, experimentů, pozorování, studiem literatury. Na druhou stranu ptáme-li se za

jak dlouho se jezero samo vyčistí při daném přítoku, odtoku a velikosti jezera, pak s pouhým pozorováním nevystačíme a můžeme začít zapojovat naše matematické myšlení.

Pokud bychom nepoužívali matematiku, nedovedu si představit, jak bychom si podobné informace sdělovali.

1.2 Cíl práce

Cílem této diplomové práce je ukázat praktické využití matematiky v biologii a jí příbuzných oborech, jako je lékařství atd. Ve své práci se proto kromě výše uvedeného samočištění jezera zaměřím na to, jak se dá s využitím matematiky určit stáří nálezů organického původu (kosti, uhlí, zbytky rostlin a plodů), zda je důležité, jak velkou první dávku léku dostane pacient, pokud ho bude brát dlouhodobě. V další části se zaměřím na využití matematiky v genetice, kde nám pomáhá zodpovědět celou řadu otázek o lidském životě, na užití ve fyziologii člověka, kde díky ní můžeme zmatematizovat sníženou vitální kapacitu plic kuřáků, užití prvků souměrnosti pro zařazení nerostů a rostlin do systému.

2. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

2.1 Růstové modely

V biologii rozumíme pod pojmem populace soubor jedinců téhož druhu, nacházejících se v jednom určitém místě v jednom určitém čase.

Populaci v této práci chápeme nejen jako společenstvo živých organismů (lidí, zvířat, rostlin), ale i souhrn částic látky, které znečišťují vodní plochu, ovzduší, souhrn atomů radioaktivních látek, biologickou hmotu rostoucích rostlin.

Číselnou míru velikosti určité populace v čase t , označujeme $x(t)$. Touto mírou rozumíme počet tisíců lidí žijících v daném městě, množství částic v gramech na metr krychlový znečišťující jezero, tuny hmotnosti sušiny rostliny, apod.

Populace se během času mění, rodí se noví jedinci, zvětšuje se znečištění nebo roste biomasa. Míru přidávání jednotek k populaci za jednotku času na každou jednotku populace uvažovanou v čase t označíme $b(t,x)$.

Musíme vzít v úvahu, že daná populace se nejen zvětšuje, ale také se zmenšuje s úmrtím jedinců, odstraňují se jedinci apod. Míru snižování jednotek v populaci za jednotku času na každou jednotku populace uvažovanou v čase t označíme $d(t,x)$.

Pokud si to shrneme, tak $x(t)$ značí číselnou míru populace v čase, $b(t,x)$ jakousi rychlost růstu populace na jednu jednotku populace, $d(t,x)$ rychlost snižování populace na jednu jednotku populace.

Dále budeme předpokládat, že $b(t,x)$, $d(t,x)$ jsou spojité nezáporné funkce a velikost populace $x = x(t)$ je diferencovatelná funkce.

Příklad č. 1

Máme populaci 100 jedinců, ve které se ročně 10 jedinců narodí a 6 umře.

Pak:

$$x(0) = 100,$$

$$x(1) = 100 + 10 - 6 = 104,$$

$$x(t) = 100 + 4t$$

$$b(t,x) = 10/x = 10/(100 + 4t),$$

$$d(t,x) = 6/(100 + 4t).$$

- **Odvození používaného vzorce**

Protože se populace mění v čase, zavedeme interval $\langle t, t + \Delta t \rangle$, kde Δt je velmi malé.

Vzhledem k předpokladům lze přirozeným způsobem vytvořit rovnici, která nám vyjádří změny v populaci ve výše daném časovém intervalu.

(1)

$$x(t + \Delta t) - x(t) = [b(t, x(t)) + o(1)]\Delta t [x(t) + o(1)] - [d(t, x(t)) + o(1)]\Delta t [x(t) + o(1)]$$

kde $o(1)$ značí libovolnou funkci konvergující k 0 pro $\Delta t \rightarrow 0$.

Vydělíme-li rovnici (1) Δt , dostáváme rovnici:

(2)

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = [b(t, x(t)) + o(1)] \cdot [x(t) + o(1)] - [d(t, x(t)) + o(1)] \cdot [x(t) + o(1)]$$

Limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ obdržíme diferenciální rovnici

(3)

$$\frac{dx}{dt} = b(t, x)x - d(t, x)x$$

$$\frac{dx}{dt} = \mu(t, x)x$$

Kde $\mu(t, x) = b(t, x) - d(t, x)$ je tzv. **specifická míra růstu**, která může obecně záviset nejen na t a x , ale na řadě dalších proměnných a parametrů. Rovnice číslo (3) se stává matematickým modelem až po stanovení předpokladů kladených na specifickou míru růstu $\mu(t, x)$.

Tyto růstové modely se dají mimo jiné použít jako model samočištění jezera, model radioaktivního rozpadu, model růstu rostlin atd.

Příklad č. 2

Ukážeme, že daná rovnice funguje v situaci z Příkladu č.1:

- Užití derivace

$$x'(t) = (100 + 4t)'$$

$$x'(t) = 4$$

- Dle vzorce

$$x'(t) = [b(t, x) - d(t, x)]x$$

$$x'(t) = [10/(100 + 4t) - 6/(100 + 4t)] * (100 + 4t)$$

$$x'(t) = 4$$

2.2 Model samočištění jezera

V tomto případě je sledovanou populací populace částic kontaminujících jezero. Vezmeme si jezero, u kterého předpokládáme, že má stabilní objem V (m^3), voda je dobře míchána, což nám zajišťuje stejnoměrnou kontaminaci. Velikost populace znečišťujících látek - míra obsahu nečistot, bereme v jednotce počtu gramů kontaminantu na m^3 vody. Tuto velikost označíme jako $x(t)$. Rychlost odtoku vody z jezera v m^3 za den označíme r .

Protože V a r jsou konstantní, musí být i přítok vody do jezera konstantní. Předpokládáme, že znečišťování bylo zastaveno a nadále již k znečišťování nedochází.

Zajímá nás matematický model postupného čištění jezera vlivem výměny vody v jezeře způsobené přítokem a odtokem. Dostáváme speciální případ rovnice (3).

Protože předpokládáme, že znečišťování bylo zastaveno a nadále již k znečišťování nedochází, dosazujeme $b(t, x) = 0$.

Dále dosadíme $d(t, x) = \frac{r}{V} = \frac{rx}{Vx}$.

Pak se rovnice (3) stává matematickým modelem a rovnici lze upravit na tvar

$$x' = -\frac{r}{V}x$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{V}x$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{r}{V} dt$$

$$\ln|x| = -\frac{r}{V}t + c$$

$$|x| = e^{-\frac{r}{V}t+c}$$

$$x = \pm e^c e^{-\frac{r}{V}t}$$

$\pm e^c = C = x(0)$ je počáteční podmínka pro $t = 0$,

odtud dostáváme (4)

$$x(t) = x(0)e^{-\frac{r}{V}t}$$

Musíme si však uvědomit, že tento model je dosti zjednodušený, protože v přírodě odtok často sezónně kolísá. Vedle toho může být velikost kontaminace závislá na poloze v jezeře, nedochází-li k dostatečnému promíchávání.

2.2.1 Využití modelu samočištění jezera v praxi

Máme jezero o objemu vody $V = 132\,696\,000 \text{ m}^3$, odtok vody $r = 12 \text{ m}^3/\text{s}$ = $1\,036\,800 \text{ m}^3/\text{den}$, organické znečištění je $x(0) = 150 \text{ g}/\text{m}^3$. Za jakou dobu t se množství znečištění sníží na polovinu, tj. $x(t) = 75 \text{ g}/\text{m}^3$?

- Řešíme rovnici

$$x(t) = x(0)e^{-\frac{r}{V}t}$$

$$x(t)/x(0) = e^{-\frac{r}{V}t}$$

$$\ln \frac{x(t)}{x(0)} = -\frac{r}{V}t$$

$$-\frac{V}{r} \ln \frac{x(t)}{x(0)} = t$$

Po dosazení hodnot dostáváme:

$$-\frac{132696000}{1036800} \ln \frac{75}{150} = t$$
$$88,7 = t$$

Znečištění jezera se samočištěním sníží na polovinu asi za 89 dní.

Příklad č. 2

Vycházíme ze stejného zadání jako v příkladu č. 1. Na kolik by se musel zvýšit odtok vody, aby se jezero na polovinu vyčistilo za 1 měsíc ($t = 30$)?

- Z rovnice (4) dostáváme:

$$-\frac{V}{t} \ln \frac{x(t)}{x(0)} = r$$
$$-\frac{132696000}{30} \ln \frac{75}{150} = r$$
$$3065928 = r$$

Odtok vody by se musel zvýšit asi na $3\,065\,928 \text{ m}^3/\text{den}$, tj. odtok $35 \text{ m}^3/\text{s}$, aby se jezero vyčistilo na polovinu za 30 dní.

Příklad č. 3

Opět vycházíme ze zadání příkladu č. 1. O kolik procent se toto jezero vyčistí za 4 měsíce?

- Řešíme rovnici

$$x(t) = x(0)e^{-\frac{r}{V}t}$$

$$x(t) = 150e^{-\frac{1036800}{132696000}t}$$

$$x(t) = 58,7 \text{ g/m}^3$$

$$100\% \dots\dots\dots 150 \text{ g/m}^3$$

$$p \% \dots\dots\dots 58,7 \text{ g/m}^3$$

$$p = \frac{58,7}{150} 100$$

$$p = 39,1$$

Za čtyři měsíce bude znečištění $58,7 \text{ g/m}^3$. Jezero se tedy vyčistí o $60,9 \%$.

2.3 Model radioaktivního rozpadu

V tomto případě nám za populaci slouží množství radioaktivních atomů v nějakém izotopu chemického prvku. Tyto atomy obsahují daný počet neutronů v atomovém jádře – izotopy daného prvku se liší právě v počtu neutronů. Jako míru velikosti populace v čase t bereme počet přítomných atomů. Tento počet označíme jako $N(t)$.

Radioaktivita je přirozený, nebo uměle navozený samovolný rozpad, případně přeměna atomového jádra. Při rozpadu se uvolňuje radioaktivní záření. E. Rutherford dokázal, že rychlost rozpadu je přímo úměrná počtu atomů příslušného prvku. Proto můžeme využít rovnici (3) předchozí kapitoly.

Do rovnice dosazujeme: $x(t) = N(t)$, $b(t, x) = 0$, $d(t, x) = \lambda$, kde $\lambda > 0$ je přeměnová – rozpadová konstanta prvku.

Po dosazení do rovnice (3) dostáváme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými

$$N' = -\lambda N$$

řešením je

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \text{ kde } N(0) \text{ je počet jader v čase } 0.$$

Často se místo přeměnové konstanty udává poločas rozpadu prvku $T_{1/2}$, což je doba, za kterou se rozpadne polovina původního počtu jader.

Odvodíme si tedy vztah mezi $T_{1/2}$ a λ :

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, t = T_{1/2}$$

$$\frac{N(t)}{N(0)} = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$2 = e^{\lambda T_{1/2}}$$

$$\ln 2 = \lambda T_{1/2}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

2.3.1 Využití modelu radioaktivního rozpadu v praxi

V biologii se tento model radioaktivního rozpadu užívá pro určování stáří archeologických nálezů. Jedná se o tzv. **uhlíkovou metodu**. V této metodě využíváme toho, že kosmické záření dopadající do zemské atmosféry produkuje neutrony, které v kombinaci s dusíkem dávají vzniku radioaktivního izotopu uhlíku ^{14}C . Izotop je prvek se stejným počtem protonů ale různým počtem neutronů v atomovém jádře.

Život na této planetě je založen na uhlíku. Rostliny absorbují uhlík z atmosféry v podobě CO_2 , ten se pak dále dostává do tkání živočichů spolu s potravou.

Protože atmosféra obsahuje určitý poměr radioaktivního ^{14}C k běžnému ^{12}C , je stejný poměr zachovávan i v těle rostlin, zvířat a lidí. Jedinou podmínkou zachování tohoto poměru je žití živočicha nebo rostliny. Po smrti organismu již nedochází k přijímání dalších izotopů, a tak množství izotopu začne vlivem rozpadu klesat.

Budeme-li předpokládat, že aktivita kosmického záření byla stále stejná, můžeme usuzovat, že množství izotopu ^{14}C v organismech žijících před tisíci lety, bylo stejné jako u organismů žijících dnes. Poločas rozpadu izotopu ^{14}C se obvykle udává 5 730 let.

Poměr počtu částic lze zaměnit za poměr hmotností, poměr aktivit nebo poměr procentních zastoupení, dle toho, jaká hodnota je k dispozici.

Příklad č. 1

Ve zkoumaném vzorku kosti je zastoupení uhlíku ^{14}C desetkrát menší než v čerstvé kosti stejného živočicha. Jaké je stáří kosti?

$$N = 0,1N_0, T = 5\,730 \text{ let}, \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 0,00012097$$

$$N/N_0 = e^{-\lambda t}$$

$$\ln(N/N_0) = -\lambda t$$

$$\frac{\ln(N/N_0)}{-\lambda} = t$$

$$\frac{\ln(0,1)}{-0,0001297} = t$$

$$19034 = t$$

Kost je ze zvířete, které žilo na Zemi před 19 034 lety.

Příklad č. 2

Dřevěné uhlí z osídlení jeskyně v Lascaux vykazovalo v roce 1950 měrnou aktivitu $a_1=0,97$ za minutu na jeden gram vzorku. Živé dřevo má měrnou aktivitu $a_0=6,68$. Určete přibližnou dobu vzniku kreseb v jeskyni.

Protože můžeme místo poměru částic použít měrnou aktivitu, řešíme rovnici:

$$a_1 = a_0 e^{-\lambda t}$$

$$\ln(a_1/a_0) = -\lambda t$$

$$\frac{\ln(0,97/6,68)}{-0,0001297} = t$$

$$14\ 877 = t$$

Kresby v jeskyni jsou staré 14 877 let, tzn. že vznikly asi 12 927 let př. n. l.

Příklad č. 3

Zkoumaný vzorek kosti je starý přibližně 11 600 let. Jaký je poměr částic ve vzorku ku počtu částic v čerstvé kosti stejného živočicha?

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-0,0001297 \cdot 11600}$$

$$\frac{N}{N_0} = 0,25$$

Poměr částic v kosti mrtvého živočicha a žijícího živočicha stejného druhu je asi 1 : 4.

V důsledku změn zemského magnetického pole, které ovlivňuje pronikání kosmického záření do atmosféry, se však mění intenzita kosmického záření dopadajícího do atmosféry. Radiokarbonová metoda je proto použitelná maximálně do stáří asi 40 000 let. Je třeba také brát v úvahu, že od roku 1950 vlivem zkoušek jaderných zbraní podstatně vzrostlo množství radioaktivního uhlíku v atmosféře. Proto tato metoda není zcela přesná a je lepší pro ověření stáří použít i nějakou další metodu.

2.4 Pohyb léků v organismu

Součástí obecnější teorie metabolismu jsou matematické modely jevů spojených s pohybem léků v organismu. Přestože léky nejsou typické metabolity, produkované nebo spotřebované organismem, přímo i nepřímo různé metabolické procesy ovlivňují.

Podobně jako obecná teorie metabolismu, řeší teorie jevů spojených s dynamikou léků v organismu dvě důležité úlohy, a to distribuci léků v organismu a problémy biochemické kinetiky interakce léků s různými složkami organismu a také otázky mechanismů metabolismu.

Předpokládáme, že vylučování léků lze pomocí kompartmentového přístupu reprezentovat v nejjednodušší podobě lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

$$C'(t) = -kC(t)$$

$C(t)$ udává koncentraci sledovaného léku v organismu, k je rychlostní konstanta vylučování léku.

Pokud tuto rovnici vyřešíme, dostáváme řešení ve tvaru

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

kde $C_0 = C(0)$ je počáteční výchozí koncentrace léku.

Tato koncentrace je dosažena bezprostředně po podání léku. Hodnota rychlostní konstanty k vylučování léku závisí nejen na druhu léku, ale též na stavu organismu a může být určena experimentálně.

Otázkou je, za jak dlouho se lék vyloučí z těla, pokud dostaneme pouze jednu dávku.

V čase $t_k = 1/k$ je koncentrace léku v těle pacienta rovna

$$C(t_k) = C_0/e \approx C_0/2,718 \approx 0,37C_0$$

To znamená, že v tomto čase je z organismu vyloučeno přibližně 63 % léku.

V čase $t_{2k} = 2/k$ je koncentrace $C(t_{2k}) = C_0/e^2$, v tomto případě je vyloučeno téměř 87 % léku a při $t_{3k} = 3/k$ téměř 95 % léku.

Nyní předpokládejme, že lék je podáván v pravidelných intervalech o délce T .

Po podání první dávky je koncentrace léku C_0

po podání druhé dávky je $C_1 = C_0 + C_0 e^{-kT}$

po podání třetí dávky $C_2 = C_0 + (C_0 + C_0 e^{-kT})e^{-kT} = C_0 + C_0 e^{-kT} + C_0 e^{-2kT}$

po podání n-té dávky je $C_{n-1} = C_0 + C_0 e^{-kT} + \dots + C_0 e^{-(n-1)kT}$

Podíváme-li se na jednotlivé dávky, zjistíme, že nám tvoří členy geometrické posloupnosti kde $a_1 = C_0$, $q = e^{-kT}$.

Protože pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí

$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, je koncentrace léku po podání n-té dávky rovna

$$C_{n-1} = C_0 \frac{e^{-nkT} - 1}{e^{-kT} - 1}$$

S rostoucím počtem dávek $n \rightarrow \infty$ se koncentrace blíží rovnovážné hodnotě

$$C_\infty = \frac{C_0}{1 - e^{-kT}}$$

2.4.1 Využití metabolismu léků v praxi

Příklad č. 1

Ovlivní koncentraci léků v těle pacienta po n dávkách to, jak byla silná první dávka c_1 , pokud ostatní dávky měly již stejnou sílu C_0 ?

Koncentrace po první dávce je c_1

Koncentrace po druhé dávce je $C_1 = C_0 + c_1 e^{-kT}$

Po třetí dávce je $C_2 = C_0 + (C_0 + c_1 e^{-kT})e^{-kT} = C_0 + C_0 e^{-kT} + c_1 e^{-2kT}$

Po n-té dávce je $C_{n-1} = c_1 e^{-(n-1)kT} + C_0 e^{-(n-2)kT} + \dots + C_0$

A pro $n \rightarrow \infty$ je $C_\infty \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{C_0 [1 + e^{-kT} + \dots + e^{-(n-2)kT}] + c_1 e^{-(n-1)kT}\}$
opět mimo jiné s užitím vzorce pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti dostáváme

$$C_\infty = \frac{C_0}{1 - e^{-kT}}$$

Všimněme si, že nám vyšla tatáž hodnota jako v případě, kdy mají všechny dávky léku, včetně první, stejnou koncentraci. Z tohoto zjištění vyplývá, že výsledná koncentrace léků v těle pacienta, při velkém počtu dávek, nezávisí na velikosti první dávky.

3. GENETIKA

3.1 Vymezení obecných pojmů

3.1.1 Genetika

Budeme-li se zabývat genetikou a využitím matematiky v ní, zjistíme, že zde nepotřebujeme žádnou složitou matematiku. Zároveň si však uvědomíme, jak zrovna tady je matematika důležitá. Pomáhá nám mimo jiné ukázat, proč dva jedinci nemohou mít stejnou genetickou výbavu, jaká je pravděpodobnost výskytu nemoci u potomka, jaká je šance, že dítě zdědí barvu očí po otci a tak podobně. Než se do této problematiky pustíme, je dobré ujasnit si několik základních pojmů.

Genetika je nauka o dědičnosti a proměnlivosti. Sleduje, do jaké míry mají potomci shodné znaky s rodiči a do jaké míry se od nich liší. To, co rodiče předávají potomkům, nejsou jednotlivé znaky jako takové, ale faktory, které řídí vznik těchto znaků. Tyto faktory označujeme jako geny.

Základem všeho je molekula DNA - deoxyribonukleová kyselina, složená z cukru, fosfátu a dusíkatých bází. Gen je úsek molekuly DNA, která nese genetickou informaci a tvoří spolu s histony (typ bílkovin) chromozom.

3.1.2 Chromozomy a dělení buněk

Chromozomy jsou uloženy v jádře buňky. Jejich počet a tvar je pro každý druh organismu charakteristický a konstantní. V jádře tělní buňky jsou vždy dvojice zcela stejné, mají stejný tvar, velikost a obsahují stejné geny. Označují se jako homologické chromozomy a buňka se nazývá diploidní.

Pohlavní buňky mají v jádře vždy pouze jeden chromozom z páru. Takovéto buňky se nazývají haploidní.

Aby docházelo k přenosu genetické informace, musí se buňky dělit. Tady mají dvě cesty dělení.

Tělní buňky se dělí **mitoticky**, což znamená, že nově vzniklé buňky jsou plně totožné s buňkami z nichž vznikly - mají stejné chromozomy a tím genetickou informaci. Při dělení nedochází k rozchodu chromozomových párů, zůstává zachován počet chromozomů. Buňky se nazývají diploidní.

Pohlavní buňky prochází **miózou**, tzv. redukčním dělením. Zde dochází, při vzniku vajíček nebo spermií, k rozchodu chromozomů. To chápeme tak, že z jedné mateřské buňky diploidní vzniknou dvě dceřiné buňky haploidní - každá má pouze jeden z páru chromozomů. Takto vzniklé buňky nazýváme gamety (vajíčka u žen, spermie u mužů).

3.1.3 Lidský genom¹

Zde si můžeme odpovědět na otázku, proč dva jedinci nemohou mít zcela stejnou genetickou výbavu.

Počet párů chromozomů v buňce je typický pro každý rostlinný i živočišný druh. Například lidský genom, podle posledních vědeckých studií, obsahuje 20 – 25 000 genů, které jsou umístěny na 23 párech chromozomů. Člověk má tedy v každé buňce 23 párů chromozomů. A každý chromozom je nositelem jiných genů.

¹ Lidský genom = veškerý soubor genetického materiálu

Při meióze a následném vzniku haploidních gamet, se každý z páru homologních chromozomů dostane do jiné gamety. To znamená, že člověk může vzniknout 2^{23} rozličných druhů gamet.

Při pohlavním rozmnožování, kdy dochází ke spojení dvou gamet za vzniku zygoty, můžeme vytvořit $2^{23} * 2^{23} = 2^{46} = 7,037 * 10^{13}$ různých typů zygot, tedy geneticky odlišných jedinců (ve skutečnosti je toto číslo mnohokrát větší – neuvažujeme crossing over – výměna části chromozomu při meióze).

Nyní určíme, jaká je pravděpodobnost najít dva geneticky totožné jedince, víme-li, že na světě žije 6,5 mld. lidí.

Dáme-li do poměru počet lidí na světě s počtem možností kombinací genetické informace u jednoho člověka, dostáváme poměr $1 : 10\ 826 = 0,0000924$. Ve skutečnosti je toto číslo ještě menší.

Na světě proto nemohou být dva zcela geneticky totožní jedinci s výjimkou identických - jednovaječných dvojčat, která vznikají rozpadem jedné zygoty.

3.1.4 Alely

Pro další příklady je nutné vědět, že jednotlivé geny jsou reprezentovány párem alel. Alela je jedna z různých forem genu nebo sekvence DNA, která může existovat na jednom lokusu lišícím se v DNA sekvenci a ovlivňuje funkčnost jednoho produktu (RNA nebo protein). Různé alely téhož genu podmiňují rozdílný projev téhož znaku (např. výskyt dvou barev žluté a zelené u semen hrachu setého). Alely nacházející se v lokusech homologických chromozomů tvoří alelický pár.

Při dělení pohlavních buněk tedy z mateřské buňky, která obsahovala (celý) pár alel, vzniknou dvě dceřiné buňky, které si pár „rozdělily mezi sebe“. Každá dceřiná buňka tedy obsahuje jenom jednu alelu z páru. Druhou alelu získává až při splynutí se spermií při pohlavním rozmnožování.

Alely mohou být různorodé. Pokud je alelický pár tvořen stejnými alelami nazývá se homozygotní, je-li tvořen různými alelami, nazývá se heterozygotní.

Dominantní alela je taková, která se projeví v homozygotní i heterozygotní formě. Recesivní se projeví pouze ve formě homozygotní. Zjednodušeně řečeno, pokud se v páru objeví pohromadě dominantní a recesivní alela, ta dominantní vždy „vyhraje“, mluvíme o úplné dominanci.

Zvláštním případem dědičnosti je např. neúplná dominance a kodominance. Při neúplné dominanci dominantní alela nepotlačí zcela recesivní alelu a ta se může částečně projevit, při kodominanci se obě alely projeví nezávisle na sobě.

Dominantní alely se značí velkým písmenem abecedy, recesivní alely se značí písmeny malými.

Příklady:

Například alela A bude nositelem žluté barvy semen, alela a zelené barvy.

Tyto dvě alely mohou vytvořit následující páry: AA , Aa , aa .

Potom homozygotní jedinec AA bude tvořit žlutá semena, homozygotní jedinec aa zelená semena, heterozygotní jedinec Aa také žlutá semena.

U člověka si můžeme vzít například barvu očí – dominantní alela A nese hnědou barvu, recesivní alela a nese modrou barvu. Pokud má jedinec sestavu

alel AA je hnědooký, Aa je hnědooký – dominantní alela potlačí vliv recesivní. Pokud se ale sejdou alely aa , je potomek modroooký.

Pro příklad neúplné dominance si můžeme vzít dědičnost barvy srsti u shorthornského skotu. Křížíme-li bílé krávy AA s červenými býky aa téhož plemene, jsou potom heterozygotní potomci Aa červenobíle prokvetlí (zbarvení ron).

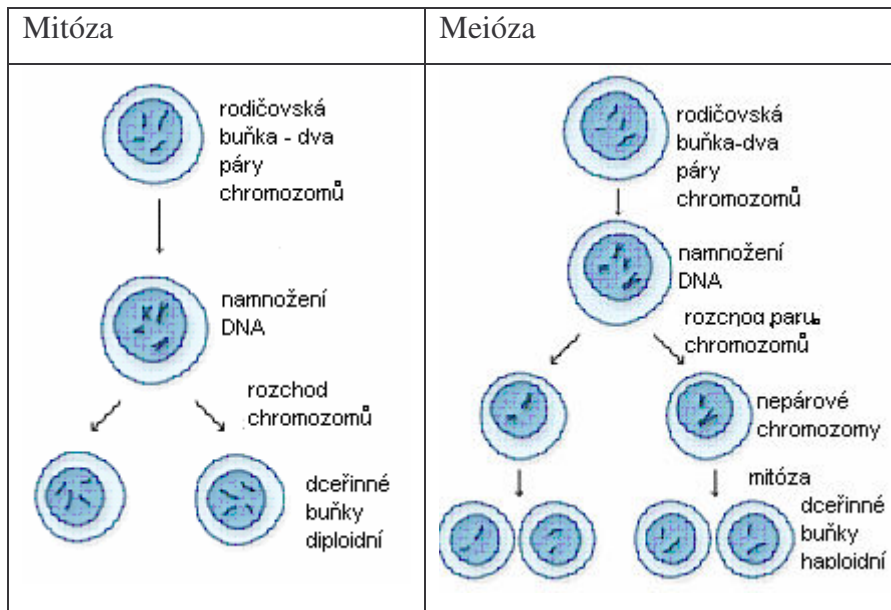
Příklad kodominance si můžeme ilustrovat na dědičnosti krevních skupin. Tímto případem se budu zabývat dále v další kapitole.

To, zda nastane neúplná dominance, kodominance nebo jiný typ dědičnosti je, záleží na živočišném nebo rostlinném druhu, na znaku který zkoumám a podobně. O který typ dědičnosti se jedná v konkrétním případě, lze zjistit jen pokusy a pozorováním.

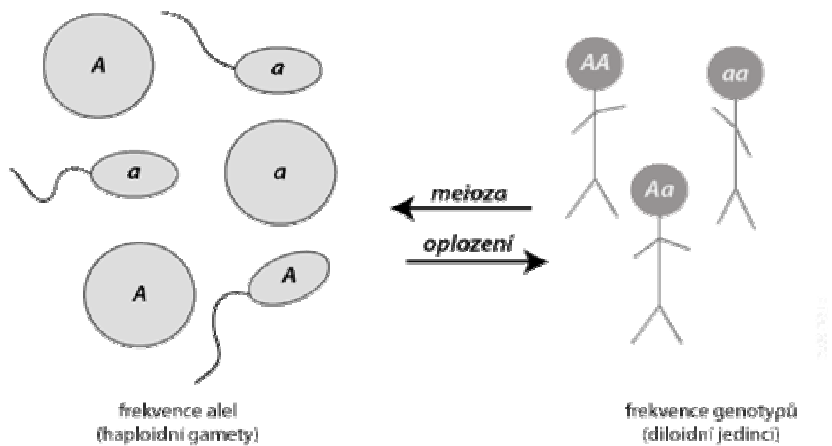
Poznámka č. 1

Dceřiné buňky se obvykle ještě jednou mitoticky rozdělí za konečného vzniku čtyř buněk tzv. gamet. Tyto buňky jsou haploidní - nesou od každého páru chromozomů jeden.

Tab. č. 1 Srovnání mitózy a meiózy



Obr. č. 1 Pohlavní rozmnožování



Dále budu v práci uvažovat jen pohlavní rozmnožování jedinců, budu se tedy zabývat pouze meiózou.

3.2 Křížení druhů

Jak je uvedeno výše, genetika se zabývá dědičností - přenos znaků z rodičů na potomky. Základní studijní a pracovní metodou v genetice je **křížení** - pohlavní spojování organismů odlišných alespoň v jednom alelickém páru = jedinců s různými genotypy. Tím, jak získá jedinec od každého z rodičů po jednom chromozomu (v rámci chromozomového páru), získá od každého z rodičů po jedné alele (v rámci jednoho genu). Díky tomu můžeme zkoumat přenos znaků z rodičů na potomky.

Zákony dědičnosti, kdy se zabýváme geny lokalizovanými na různých chromozomových párech, jako první uvedl J. G. Mendel a z nich budeme vycházet.

Jsou to *1. Zákon o uniformitě jedinců v první generaci potomků*

2. Zákon o čistotě vloh a jejich štěpení

3. Zákon o volné kombinovatelnosti vloh

Pokud by někoho zajímaly podrobněji, může si je najít v odborné literatuře, např. [5]

Křížíme-li dva jedince, můžeme se zaměřit na dědičnost jednoho znaku, dvou znaků nebo více znaků. Potom mluvíme o monohybridním křížení, dihybridním křížení a polyhybridním křížení.

3.2.1 Monohybridní křížení

Při **monohybridním křížení** křížíme dva jedince lišící se v jednom znaku. Budeme-li křížit dva homozygotní jedince lišící se v tomto znaku ($AA \times aa$),

budou jejich potomci heterozygotní (Aa). Takovéhoho potomka nazýváme monohybridem, který tvoří dva typy gamet $\rightarrow A, a$.

Příklad č. 1

U některých plemen skotu je bezrohost dominantní A nad rohatostí a . Jaké bude potomstvo

- a) křížíme-li krávu AA s býkem aa
- b) křížíme-li jejich potomky.

- **Řešení**

Nejprve si musíme určit, jaké gamety mohou rodiče tvořit. Poté pomocí kombinačního čtverce určíme možné genotypy potomků.

a) **býk aa** \rightarrow gamety a, a (1 typ gamet)

kráva AA \rightarrow gamety A, A

Tab. č. 2 **Genotyp potomků**

$\text{♀} \backslash \text{♂}$	a	a
A	Aa	Aa
A	Aa	Aa

Vidíme, že všichni jedinci jsou stejní, tzv. uniformní. Všichni potomci budou mít stejný genotyp Aa a stejný fenotyp, což je projev genotypu navenek, nebo-li všichni budou bezrozí.

Tento výsledek o uniformitě první generace vychází ze zákonů dědičnosti od J.G.Mendela.

b) potomci jsou Aa

býk Aa → gamety A, a (2 typy gamet)

kráva Aa → gamety A, a

Tab. č. 3 **Genotyp potomků**

♀\♂	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Potomstvo bude v poměru 3 : 1, tedy tři bezrozí a jeden rohatý.

Příklad č. 2

Hnědooký muž se oženil s hnědookou ženou. Jakou barvu očí budou mít děti z tohoto manželství?

Jestliže nevíme nic víc o genotypu rodičů, musíme si uvědomit, že mohou nastat tři situace. A to:

- a) oba rodiče jsou homozygotní AA
- b) oba rodiče jsou heterozygotní Aa
- c) jeden rodič je heterozygotní a druhý homozygotní

a) oba rodiče jsou homozygotní

Otec: AA → gamety A, A

Matka: AA → gamety A, A

Tab. č. 4 **Genotyp potomků**

♀\♂	A	A
A	AA	AA
A	AA	AA

Všichni potomci budou hnědoocí.

b) oba rodiče jsou heterozygotní

Otec: Aa → gamety A, a

Matka: Aa → gamety A, a

Tab. č. 5 **Genotyp potomků**

♀ \ ♂	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Vidíme, že poměr hnědookých ku modroookých je 3 : 1, tzn., že je 75 procentní pravděpodobnost, že narozené dítě bude mít hnědé oči.

c) jeden rodič je heterozygotní a druhý homozygotní

Otec: Aa → gamety A, a

Matka: AA → gamety A, A

Tab. č. 6 **Genotyp potomků**

♀ \ ♂	A	a
A	AA	Aa
A	AA	Aa

V tomto případě budou opět všichni potomci hnědoocí.

Pokud se na tento příklad podíváme ještě jednou, zjistíme, že pravděpodobnost, že by hnědoocí rodiče měli modroooké dítě je značně malá, ale není to vyloučené.

Příklad č. 3

Jakou barvu očí budou mít potomci modrookých rodičů.

Modroocí rodiče mohou mít jen genotyp aa.

Otec: aa → gamety a, a

Matka:aa → gamety a, a

Tab. č. 7 **Genotyp potomků**

♀ \ ♂	a	a
a	aa	aa
a	aa	aa

Potomci modrookých rodičů budou mít vždy modré oči.

V rámci monohybridismu bychom neměli opomenout dědičnost krevních skupin.

Krevní skupiny člověka jsou podmíněny jedním genem, proto se na ně můžeme zaměřit v rámci monohybridního křížení. Krevní skupiny 0, A, B, AB jsou podmíněny přítomností či nepřítomností určitých bílkovin – aglutinogenu A, aglutinogenu B – v červených krvinkách.

Alely A a B jsou kodominantní (projeví se obě nezávisle na sobě), alela 0 je vůči nim recesivní.

Člověk s krevní skupinou A může mít tedy jeden z genotypů AA,A0, Krevní skupiny B – BB, B0, krevní skupiny AB pouze AB, krevní skupiny 0 pouze 00.

Příklad č. 4

Jaké krevní skupiny mohou zdědit děti, víme-li, že oba rodiče jsou heterozygotní, otec má krevní skupinu A, matka má krevní skupinu B?

Otec: A0 → gamety A, 0

Matka: B0 → gamety B, 0

Tab. č. 8 **Genotyp potomků**

♀♂	A	0
B	AB	B0
0	A0	00

Potomci mohou mít kteroukoli krevní skupinu. A nemusí se tedy shodovat ani s jedním z rodičů.

Budeme-li tedy zkoumat dědičnost jednoho znaku, mluvíme o monohybridním křížení. Heterozygotní potomek Aa, pak tvoří dva typy gamet – A, a.

Podobně, jako u monohybridního křížení, vše funguje, budeme-li se zabývat více znaky zároveň.

3.2.2 Dihybridní křížení

Budeme-li zkoumat dva znaky A, B, kdy každý je lokalizován na jiném chromozomu mluvíme o **dihybridním křížení**. Heterozygot v obou znacích tvoří čtyři druhy gamet: AaBb → Ab, Aa, ab, AB.

Příklad č. 1

Křížíme dvě rostliny hrachu setého. Tvar semen může být kulatý, podmíněný alelou A, nebo svaštělý, podmíněný alelou a. Barva semen je pro žlutou barvu podmíněna alelou B, pro zelenou barvu alelou b. Víme, že rodičovské rostliny jsou homozygotní, jedna má sestavu AABB, druhá aabb.

Zjistěte:

- a) jaký genotyp budou mít potomci
- b) co se stane zkřížíme-li dva takto vzniklé potomky

a) **Samčí rostlina: aabb** → gamety ab, ab

Samičí rostlina: AABB → gamety AB, AB

Tab. č. 9 **Genotyp potomků**

















♀ \ ♂	ab	ab
AB	AaBb	AaBb
AB	AaBb	AaBb

Všichni potomci budou dihybridi s genotypem AaBb a tudíž budou tvořit žlutá kulatá semena.

b) **Samičí rostlina: AaBb** → gamety AB, Ab, aB, ab (4 typy gamet)

Samčí rostlina: AaBb → gamety AB, Ab, aB, ab

Tab. č. 10 Genotyp potomků

♀ \ ♂	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB 	AABb 	AaBB 	AaBb 
Ab	AABb 	AAbb 	AaBb 	Aabb 
aB	AaBB 	AaBb 	aaBB 	aaBb 
ab	AaBb 	Aabb 	aaBb 	aabb 

Nyní jsou $\frac{3}{4}$ semen kulatá (zelená i žlutá), $\frac{1}{4}$ semen svraštělá (zelená i žlutá). Stejně je to i při hodnocení druhého znaku, kdy $\frac{3}{4}$ semen jsou žlutá (kulatá i svraštělá) a $\frac{1}{4}$ semen je zelená (kulatá i svraštělá). Můžeme tady oba sledované znaky posuzovat samostatně nezávisle na druhém. Proto zde můžeme užít podmíněnou pravděpodobnost. Rostlin se žlutými kulatými semeny získáme 9 ($\frac{3}{4} * \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$), se semeny žlutými a svraštělými 3 ($\frac{3}{4} * \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$), zelenými kulatými 3 a se semeny zelenými a svraštělými pouze 1. Takže fenotypový štěpný poměr je 9 : 3 : 3 : 1.

3.2.3 Polyhybridní křížení

Trihybridní křížení. Zkoumáme tři znaky. Trihybrid je AaBbCc → počet gamet je 8.

Počet gametických sestav, které heterozygotní jedinec produkuje stoupá exponenciálně s počtem znaků, ve kterých se odlišovali jeho rodiče homozygotní.

Monohybrid tvoří 2 typy gamet, dihybrid 4 typy gamet, trihybrid 8, tetrahybrid 16, atd. Polyhybrid obecně 2^n , kde n je počet znaků, ve kterých je hybrid heterozygotní.

3.3 Hardy – Weinbergův zákon

Nyní ukážeme dva příklady z teorie populací, co všechno se dá matematicky vypočítat s relativně malého počtu dat. K výpočtu je potřeba tzv. Hardy – Weinbergův zákon, který nejprve pouze ocitujeme. Podrobně odvozen bude v závěru kapitoly.

Populace = skupina organismů žijících na společném území, ve stejném čase a mohou se mezi sebou volně křížit.

Nejčastěji uvažujeme panmiktickou populaci - má nekonečný počet jedinců neomezeně se pářících mezi sebou, neexistuje zde mutace a migrace. Reálně ale neexistuje čistě panmiktická populace, proto všechna pravidla popsaná u ideální panmiktické populace nemohou fungovat úplně přesně.

V panmiktické populaci se udržuje konstantní poměr mezi jedinci jednotlivých genotypů = rovnováha v populaci. Byl-li například v určité populaci podíl heterozygotů 1 %, pak v dalších generacích se tato hodnota nemění. Tato rovnováha mezi homozygotně dominantními (AA), heterozygotními (Aa) a homozygotně recesivními jedinci (aa) se označuje jako Hardy-Weinbergův zákon.

- **Matematické vyjádření**

$$p^2(AA) + 2pq(Aa) + q^2 = 1$$

3.3.1 Užití Hardy-Weinbergova zákona v praxi

Příklad č. 1

U člověka je například albinismus (neschopnost tvorby pigmentů) stav homozygotně recesivní. To znamená, že albín má genotyp aa. Ve zkoumané populaci 250 000 jedinců se nachází 25 albínů.

Určete:

- na kolik lidí v dané populaci připadá jeden nemocný
- počet přenašečů této nemoci v populaci
- podíl alel v populaci.

• **Řešení:**

a) nemocní : všem

$$25 : 250\,000 = 1 : 10\,000$$

b) přenašeči jsou albíni a heterozygoti

$$25 \text{ albínů} = 25 \text{ recesivních homozygotů} = q^2 * 250\,000$$

$$q^2 = 25 : 250\,000 = 0,0001$$

$$q = 0,01$$

$$\text{Platí: } p + q = 1$$

$$p = 1 - q$$

$$p = 0,99$$

$$\begin{aligned} \text{počet heterozygotů} &= 2pq * 250\,000 = 2 * 0,99 * 0,01 * 250\,000 = \\ &0,0198 * 250\,000 = 4\,950 \end{aligned}$$

$$\text{počet přenašečů} = 25 + 4\,950 = 4\,975$$

c) podíl alel v populaci

$$p : q = 0,99 : 0,01 = 99 : 1$$

V populaci je poměr albínů 1 : 10 000, 4 975 přenašečů, což představuje asi 2 % populace. Poměr zastoupení alel v populaci je 99 : 1 ve prospěch dominantních.

Příklad č. 2

V populaci 125 000 lidí je 112 500 praváků. Určete kolik z nich je homozygotů a kolik heterozygotů, když víte, že pravorukost je dominantní nad levorukostí.

• **Řešení:**

$$\text{počet praváků} = 112\,500 = \text{homozygoti} + \text{heterozygoti}$$

$$112\,500 : 125\,000 = p^2 + 2pq$$

$$0,9 = p^2 + 2pq$$

$$\text{Platí: } q^2 + 2pq + p^2 = 1$$

$$q^2 = 0,1$$

$$q = 0,316$$

$$\text{Platí: } p + q = 1$$

$$p = 0,684$$

$$\text{počet homozygotů} = p^2 * 125\,000 = 58\,500$$

$$\text{počet heterozygotů} = 2pq * 125\,000 = 54\,000$$

V populaci je 58 500 praváků homozygotních a 54 000 praváků heterozygotních. V populaci potom zbývá 12 500 leváků, což představuje 10 procent populace.

Kdo chce znát podrobně teorii, jak jsme k těmto výpočtům došli, musí si prostudovat zbytek kapitoly.

3.3.2 Odvození Hardy-Weinbergova zákona

- **Odvození zákona**

Frekvence alely A = p,

$$a = q,$$

a zároveň platí $p + q = 1$.

Frekvence genotypů AA = P = p^2 , (pravděpodobnost setkání dvou dominantních alel = $P(A) * P(A) = p^2$)

Aa = M = $2pq$, (pravděpodobnost setkání dominantní a recesivní alely = $P(A) * P(a) + P(a) * P(A) = 2pq$)

aa = Q = q^2 , (pravděpodobnost setkání dvou recesivních alel = $P(a) * P(a) = q^2$),

platí: $P + M + Q = 1$,

po dosazení dostáváme: $p^2 + 2pq + q^2 = 1$

Kombinační (Punnetův) čtverec ukazuje frekvence genotypů při náhodném páření 2 alel jednoho lokusu

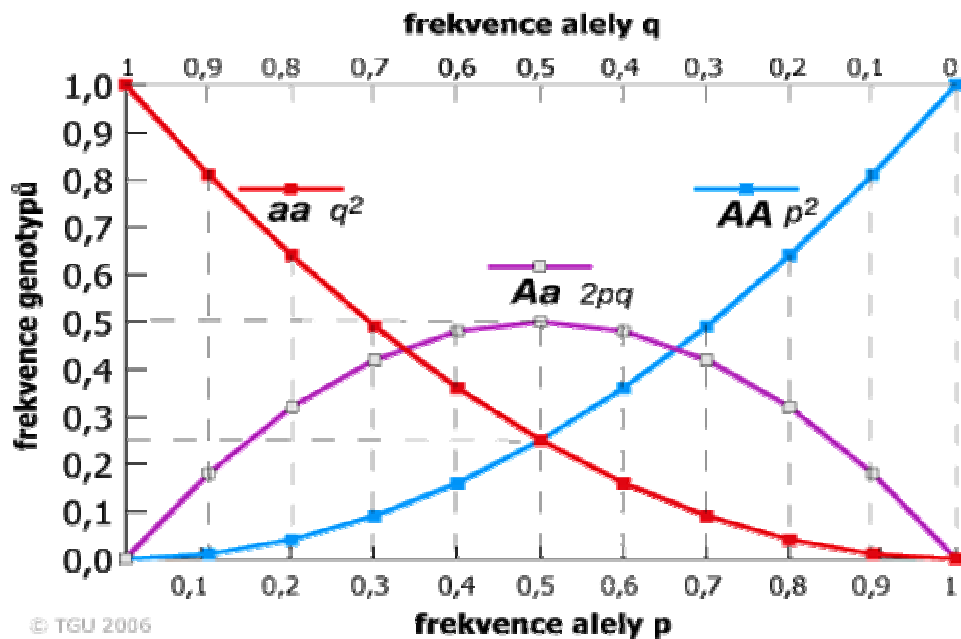
Tab. č. 11 **Kombinační čtverec**

$\text{♂} \backslash \text{♀}$	A(p)	a(q)
A(p)	AA(p^2)	Aa(pq)
a(q)	Aa(pq)	aa(q^2)

Pokud se pravděpodobnost párování kteréhokoli genotypu s kterýmkoli jiným z generace na generaci nemění, nemění se ani genotypové složení populace.

Rovnováha v populaci se může narušit mutacemi organismů. Tento zákon také neplatí v malých populacích, kde je malé množství potomků, a proto některé alely nejsou předány do další generace a jiná převládne. Můžeme se na to podívat z hlediska pravděpodobnosti v matematice. Hodíme-li mincí 1000 krát, poměr mezi dopadem mince rubem nahoru ku lícem nahoru se bude blížit $500 : 500 = 1 : 1$. Hodíme-li mincí pouze 10 krát, pak bude pravděpodobnost, že všech deset vrhů bude „lícových“ či naopak „rubových“ podstatně vyšší.

Graf č. 1 Závislost genotypových frekvencí na frekvenci alel



Z grafu si můžeme zjistit:

- je-li frekvence alel v rozmezí $1/3 - 2/3$, převažují v populaci heterozygoti
- je-li jedna alela vzácná, je zastoupena výhradně heterozygoty
- jestliže $p = q = 0,5$, je počet heterozygotů maximální

3.3.3 Testování Hardy-Weinbergovy rovnováhy

Nyní máme příklad, kdy známe počty jednotlivých genotypů. A otázka zní, zda je tato populace s těmito genotypy v rovnováze dle Hardy-Weinbergova zákona.

Populace je v genetické rovnováze, pokud se skutečná frekvence genotypů statisticky neliší od frekvence genotypů za genetické rovnováhy.

Na vyhodnocení se užívá χ^2 test:

$$\chi^2 = \sum \frac{d^2}{o}$$

Kde:

d – rozdíl mezi skutečným a očekávaným počtem potomků v jednotlivých třídách

o – očekávaný počet potomků v jednotlivých třídách

Vypočítaná hodnota χ^2 se porovnává s tabulkovou hodnotou pro příslušnou pravděpodobnost (95 a 99 %) a stupně volnosti. Stupně volnosti $f = k - 1$, kde k je počet tříd.

Je-li:

$\chi_{tab.}^2 > \chi_{vyp.}^2$ je shoda mezi pozorovanými a očekávanými četnostmi a hypotéza H_0 se nezamítá, populace pro daný gen je tedy v rovnováze

$\chi_{tab.}^2 < \chi_{vyp.}^2$ je průkazný rozdíl mezi pozorovanými a očekávanými četnostmi a hypotéza H_0 se zamítá, populace není v rovnováze

Příklad č. 1

U andaluského plemene slepic podmiňuje alela A černou barvu peří, alela a bílou barvu peří, heterozygotní jedinci Aa jsou ocelově modří (neúplná dominance).

Pářením heterozygotních slepic s kohouty stejného genotypu (Aa×Aa) bylo získáno 320 jedinců černých (AA), 72 ocelově modrých (Aa) a 8 bílých (aa). Je tato populace v rovnováze?

a) je třeba získat relativní frekvence alel

musíme si uvědomit, že barva je určena podvojně, tudíž 320 jedinců černých má 2 * 320 alel pro černou barvu + 72 alel u heterozygotů. Stejně zjistíme počet alel pro bílou barvu. Celkový počet všech alel je 800.

potom:

$$p = (2 * 320 + 72)/800 = 0,89$$

$$q = (2 * 8 + 72)/800 = 0,11$$

b) získáme frekvence genotypů, jejich vynásobením počtem jedinců v populaci získáme očekávané počty genotypů za genetické rovnováhy.

Tab. č. 12 **Řešení příkladu**

	AA (p ²)	Aa (2pq)	aa (q ²)	Σ
Pozorované počty (absolutní)	320	72	8	400
Očekávané frekvence (relativní)	0,79	0,10	0,01	1,00
Očekávané počty (absolutní)	316,84	78,32	4,84	400
D	3,16	-6,32	3,16	
$\chi^2 = \frac{d^2}{o}$	0,03	0,51	2,06	2,60

Stupeň volnosti pro gen se třemi genotypy, 3 třídami $f = 3 - 1 = 2$

Tab. č. 13 Hodnoty chí kvadrátu

Hladina významnosti	Stupně volnosti	
	1	2
0,05	3,84	5,99
0,01	6,63	9,21

- **Závěr**

$$5,99 > 2,6$$

$$\chi^2_{tab.} > \chi^2_{vyp.}$$

Populace je pro daný znak v rovnováze dle Hardy-Weinbergova zákona.

4. FYZIOLOGIE

4.1 Vitální kapacita plic

Vitální kapacitou plic rozumíme maximální možný objem vzduchu, který je vypuzen z plic usilovným výdechem po předchozím maximálním nádechu. U mužů se jeho hodnota pohybuje mezi hodnotami 3 500 - 5 000 ml, u žen je nižší a nabývá hodnot 2 500 – 4 000 ml. Velikost vitální kapacity plic závisí na výšce, hmotnosti, věku a pohlaví. Na těchto údajích závisí i hodnota náležitého bazálního metabolismu. Jeho příslušné hodnoty najdeme v tabulkách. **Bazální metabolismus - BM** je energetický výdej odpovídající základní látkové přeměně, nezbytné k udržení základních životních funkcí.

Hodnotu vitální kapacity plic měříme **spirometrem**. Spirometr se skládá z náustku a počítačového zařízení, které je schopno změřit rychlost vydechovaného vzduchu za určitou časovou jednotku a přepočítat ji na objem. Takto získaná hodnota sama o sobě nemá příliš vysokou výpovědní hodnotu, proto se obvykle srovnává s **hodnotou náležitou – n VC**, která odpovídá průměrné normě populace.

4.1.1 Využití vitální kapacity plic v praxi

Danou problematiku můžeme využít, pokud budeme chtít srovnávat jak se liší splnění normy vitální kapacity plic u kuřáků a nekuřáků, aktivních sportovců od běžné populace a podobně.

Pro názorný příklad, jsem si vybrala skupinu deseti dívek stejné věkové kategorie. Uvědomuji si, že abych mohla vyvodit nějaké obecně platné výsledky, musela by moje skupina obsahovat alespoň sto dívek. Přesto i na této

malé skupině lze sledovat rozdíl ve vitální kapacitě v procentech normy mezi kuřáky a nekuřáky.

Takto si můžeme zmatematizovat problematiku kouření, dosadit do rovnic, vyřešit je a dojít k závěrům. Musíme si ale uvědomit, že biologie je složitější než matematika. Najdeme zde spoustu dalších faktorů, které ovlivňují výsledky. Vedle kouření může o kapacitě plic rozhodovat aktivita jedince – věnuje-li se sportu, a pokud bychom vybrali skupinku sportujících kuřáků a nekuřáků najdeme další faktor, který nám ovlivní výsledky. Jako ilustrace nám může posloužit dívka číslo 2, která nekouří a přesto má kapacitu menší než dívka kuřačka číslo 8.

Abych mohla provést mnou vybrané měření, změřila jsem si vitální kapacitu plic pomocí spirometru, zjistila parametry dívek a vypočetla náležitou vitální kapacitu pomocí matematických vzorců. Poté jsem si zjistila kolik procent normy každá dívka splňuje a vyvodila závěr.

Příklad č. 1Tab. č. 14 **Základní parametry sledovaných dívek**

Osoba	Kuřák	Věk	Výška (cm)	Povrch těla (m²)	Naměřená vitální kapacita (ml)
1	ne	23	167	1,66	3300
2	ne	23	165	1,58	2650
3	ne	24	169	1,80	3200
4	ne	23	176	1,74	3400
5	ne	24	172	1,69	3000
6	ano	23	178	1,95	3200
7	ano	22	169	1,65	2650
8	ano	23	162	1,57	2900
9	ano	24	168	1,67	2950
10	ano	23	175	1,70	3000

a) Náležitá vitální kapacita plic dle povrchu těla

- Vzorec:

$$nVC \text{ muže} = \text{povrch} * 2,5 * 1000$$

$$nVC \text{ ženy} = \text{povrch} * 2 * 1000$$

Tab. č. 15 **Řešení**

Osoba	Povrch těla (m²)	nVC (ml)
1	1,66	3320
2	1,58	3160
3	1,80	3600
4	1,74	3480
5	1,69	3380
6	1,95	3900
7	1,65	3300
8	1,57	3140
9	1,67	3340
10	1,70	3400

Počítáme-li vitální kapacitu plic podle tohoto vzorce, dojdeme k závěru, že s rostoucím povrchem těla se zvyšuje vitální kapacita plic.

b) Náležitá vitální kapacita plic dle věku a výšky

- Vzorec:

$$nVC \text{ muže} = \{27,63 - (0,112 * \text{věk})\} * \text{výška}$$

$$nVC \text{ ženy} = \{21,78 - (0,101 * \text{věk})\} * \text{výška}$$

Tab. č. 16 Řešení

Osoba	Věk	Výška (cm)	nVC (ml)
1	23	167	3249,32
2	23	165	3210,41
3	24	169	3271,16
4	23	176	3424,43
5	24	172	3329,23
6	23	178	3463,35
7	22	169	3305,30
8	23	162	3152,03
9	24	168	3251,81
10	23	175	3404,98

Z výsledků výše uvedené tabulky není na první pohled zcela patrné co ovlivňuje vitální kapacitu plic. Podíváme-li se ale na konstrukci vzorce, dojdeme k závěru, že se vitální kapacita plic zvyšuje s rostoucí výškou, ale zároveň snižuje s rostoucím věkem (pro srovnání dívka č. 3 a 7)².

² Tento závěr nemůže zcela aplikovat na mladistvé. Jejich vitální kapacita se naopak s věkem narůstá.

Vitální kapacitu plic v % normy

Protože naměřená hodnota vitální kapacity plic nemá sama o sobě příliš vysokou vypovídací hodnotu, srovnává se s hodnotou náležitou, která odpovídá průměrné normě populace.

- Vzorec:

$$\% \text{ normy} = (\text{naměřená VC} / \text{nVC}) * 100$$

Čím více se blížíme hodnotě 100 %, tím lépe splňujeme normu.

Tab. č. 17 Řešení

Osoba	Kuřák	Naměřená hodnota	Výsledky (ml)		Průměrná vypočítaná hodnota (ml)	Procenta normy
			věk a výška	povrch těla		
1	ne	3300	3249,32	3320	3284,66	100,47
2	ne	2650	3210,41	3160	3185,21	83,20
3	ne	3200	3271,16	3600	3435,58	93,14
4	ne	3400	3424,43	3480	3452,22	98,49
5	ne	3000	3329,23	3380	3354,62	89,43
6	ano	3200	3463,35	3900	3681,68	86,92
7	ano	2650	3305,3	3300	3302,65	80,24
8	ano	2900	3152,03	3140	3146,02	92,18
9	ano	2950	3251,81	3340	3295,91	89,51
10	ano	3000	3404,98	3400	3402,49	88,17

Závěr

Pokud se podíváme na výsledky v pravém sloupci tabulky, zjistíme, že nekuřačky splňují normu více než kuřačky. Navíc jestliže se podíváme na jednotlivé dílčí výsledky, můžeme si všimnout, že náležitá vitální kapacita plic roste s povrchem těla a výškou, a naopak klesá s věkem.

5. STŘEDOVÁ, OSOVÁ, ROVINNÁ SOUMĚRNOST

V biologii se poměrně často využívá souměrnost. Bez ní bychom nemohli zařadit nerosty do soustav, špatně by se nám zařazovaly i květiny do systémů. Při zařazování využíváme středovou souměrnost, osovou souměrnost a souměrnost dle roviny.

5.1 Vymezení pojmů

5.1.1 Středová souměrnost se středem S

V rovině je přímá shodnost, která přiřazuje středu souměrnosti S týž bod $S' = S$ a každému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje obraz X' takový, že platí:

- a) bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX ,
- b) $|SX'| = |SX|$.

Středová souměrnost je speciálním případem otočení o úhel velikosti $\alpha = 180^\circ$. Je jednoznačně určena středem souměrnosti S .

Samodružným bodem středové souměrnosti je právě jen střed souměrnosti S . Jejimi samodružnými přímkami jsou všechny přímky procházející tímto bodem S .

5.1.2 Osová souměrnost s osou o

V rovině je nepřímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje X' takový, že platí:

- a) bod $X' = X$, právě když $X \in o$, kde o je daná přímka v rovině, zvaná osa souměrnosti,
- b) bod X' leží na kolmici k ose o vedené bodem X ,

c) $|PX| = |PX'|$, kde P je pata této kolmice na ose o .

Osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti o .

Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě jen všechny body osy o .
Jejími samodružnými přímkami jsou v dané rovině osa o a všechny přímky k ní kolmé.

5.1.3 Rovinová souměrnost s rovinou ρ

Je shodné zobrazení, které každému bodu X prostoru přiřazuje obraz X' takový, že platí:

- a) bod $X = X'$, právě když $X \in \rho$, kde ρ je daná rovina, zvaná rovina souměrnosti,
- b) bod X' leží na kolmici k rovině ρ vedené bodem X ,
- c) $|PX| = |PX'|$, kde P je pata této kolmice k rovině ρ .

Rovinová souměrnost je jednoznačně určena rovinou souměrnosti ρ .

Samodružnými body rovinové souměrnosti jsou právě jen všechny body roviny souměrnosti ρ , samodružnými přímkami jsou všechny přímky roviny ρ a všechny přímky k ρ kolmé, samodružnými rovinami jsou rovina ρ a všechny roviny k ní kolmé.

5.2 Určení krystalových soustav

Krystal = pevná látka, v níž jsou stavební prvky – atomy, molekuly, ionty, pravidelně uspořádány v opakujícím se vzoru.

Jeho vnější vzhled a souměrnost je odrazem jeho vnitřní stavby. Krystaly bývají souměrné dle středu, os a rovin souměrnosti. Můžeme najít i nesouměrné krystaly, ale je jich velmi málo.

Okem lze souměrnost pozorovat u dobře vyvinutých krystalů blížících se ideálnímu tvaru.

Prvky souměrnosti zjednodušeně:

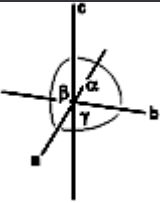
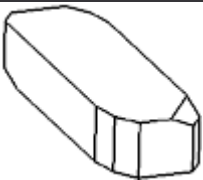
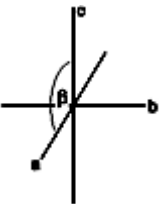
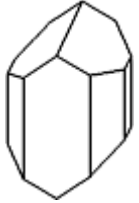
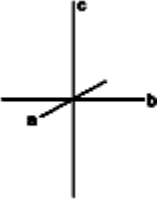
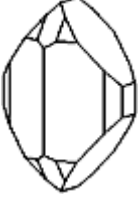


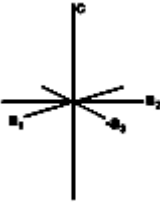
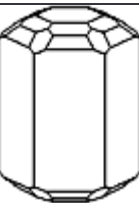
- **Střed souměrnosti:** je myšlený bod ležící zpravidla uprostřed krystalu. Přitom každá plocha má odpovídající protiplochu, která je s ní shodná a rovnoběžná a je otočená kolem myšleného středu o 180°
- **Osa souměrnosti:** Myšlená přímka vedená středem krystalu. Pokud budeme otáčet krystal kolem této osy o 360° , dostane se do své výchozí polohy. Dle toho kolikrát se během rotace o 360° dostane do polohy shodné s výchozí, rozeznáváme dvojčetné, trojčetné, čtyřčetné a šestičetné osy souměrnosti.
- **Rovina souměrnosti:** myšlená rovina, která rozděluje krystal na dvě zrcadlově stejné části.

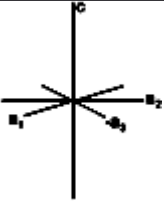
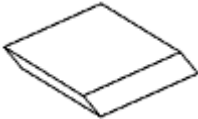

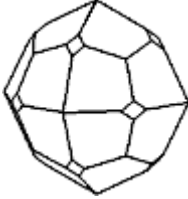
Neméně důležitý, pro zařazení krystalu do krystalové soustavy, je osní kříž.

- **Osní kříž:** je tvořen krystalovými osami, které prochází středem krystalu. Pro každou krystalovou soustavu je charakteristická délka os, počet os a úhly, které mezi sebou jednotlivé osy svírají.

5.2.1 Přehled krystalových soustav

Tab. č. 18 Přehled krystalových soustav

Soustava	Osní kříž	Vlastnosti kříže	Možný vzhled krystalu
<i>Trojklonná</i> = triklinická		$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	 Chalkantit
<i>Jednoklonná</i> = monoklinická		$a = b \neq c$ $a \perp b$ $\beta \neq 90^\circ$	 augit
<i>Kosočtverečná</i> <i>á</i> = rombická		$a \neq b \neq c$ $a \perp b \perp c$	 olivín
<i>Čtverečná</i> = tetragonální		$a_1 = a_2 \neq c$ $a_1 \perp a_2 \perp c$	 rutil
<i>Šesterečná</i> = hexagonální		$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $c \perp a_1, a_2, a_3$	 beryl

<p><i>Klencová</i> = trizonální</p>		<p>$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $c \perp a_1, a_2, a_3$</p>	 <p>kalцит</p>
<p><i>Krychlová</i> = kubická</p>		<p>$a_1 = a_2 = a_3$ $a_1 \perp a_2 \perp a_3$</p>	 <p>granát</p>

5.2.2 Přehled prvků souměrnosti jednotlivých soustav

Tab. č. 19 Přehled souměrnosti soustav

Soustava	Prvky souměrnosti		
	střed	Osa	rovina
<i>Trojklonná</i> = triklinická	0 nebo 1	0	0
<i>Jednoklonná</i> = monoklinická	1	1 dvojčetná	1
<i>Kosočtverečná</i> = rombická	1	3 dvojčetné	3
<i>Čtverečná</i> = Tetragonální	1	4 dvojčetné 1 čtyřčetná	5
<i>Šesterečná</i> = hexagonální	1	6 dvojčetné 1 šestičetná	7
<i>Klencová</i> = trizonální	1	3 dvojčetné 1 trojčetná	3
<i>Krychlová</i> = kubická	1	6 dvojčetné 4 trojčetné 3 čtyřčetné	9

5.3 Botanika – souměrnost květů

Systém rostlin je složitý a rozsáhlý. Jedním ze znaků, které nám mohou pomoci rostliny do systému zařadit, je souměrnost květů. K jejímu určení používáme rovinovou souměrnost.

Dle počtu rovin souměrnosti rozlišujeme květy:

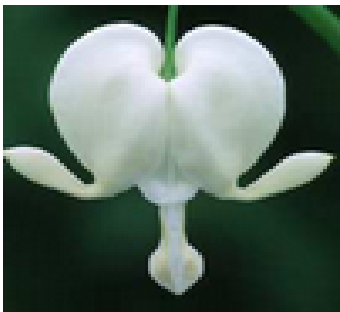
- **Asymetrické** - bez roviny souměrnosti
- **Zygomorfní** = symetrické = souměrné – jedna rovina souměrnosti
například: netýkavkovité, bobovité, violkovité

Obr. č. 2 Netýkavka žláznatá



- **Bisymetrické** = dvoustranně souměrné - dvě roviny souměrnosti
například: srdcovka

Obr. č. 3 Srdcovka nádherná



- **Aktinomorfní** = pravidelné = radiální = paprscitě souměrné - více jak dvě roviny souměrnosti - například: Inovité, šřavelovité

Obr. č. 4 **Jaterník podléška**



Obr. č. 5 **Drchnička rolní**



6. ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo ukázat na příkladech praktické využití matematiky v biologii a jí příbuzných oborech.

Většina z nás má za to, že matematika a biologie jsou něco jako dvě naprosto oddělené nádoby, které spolu nemají nic společného. Málokdo z nás si ale uvědomuje, že tzv. základní matematiku ve spojení s biologií využívá i ve svém běžném životě pro pojmenování a rozlišení rostlin, živočichů, pro určení pravosti některých nerostů.

Není nic snazšího než srovnávat u zvířat počet noh, křídel a očí, článků tykadel, u rostlin počet tyčinek, květů nebo dokonce okvětních lístků.

Ve své práci jsem se proto zaměřila na využití tzv. vyšší matematiky v jednotlivých biologických disciplínách. Na praktických příkladech jsme si ukázali její využití v medicíně, archeologii, genetice nebo při zařazování rostlin do systému. Zjistili jsme, že je třeba diferenciální počet na řešení biologických modelů, rovnic různého typu a stupně, pravděpodobnosti a statistiky, jak jsme si ukázali v genetice a částečně i ve fyziologii. Bez znalostí geometrie a souměrnosti bychom jen těžko mohli hledat nějaký systém v nerostech.

Došli jsme k závěru, že matematika je jedním ze základních východisek mnoha biologických disciplín a o její rostoucí důležitosti svědčí i rozvoj nových oborů jakými jsou matematická biologie a biologická matematika.

7. POUŽITÁ LITERATURA

a) Knižní publikace

1. KALAS, J., POSPÍŠIL, Z.: *Spojité modely v biologii*. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2001. 256 s. ISBN 80-210-2626-X.
2. GLASER, R.: *Biologie trochu jinak*. Praha: Panorama, 1979. 181 s.
3. NEČÁSEK, J., CETL, I.: *Obecná genetik*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. 565 s.
4. POLÁK, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 2005. 608 s. ISBN 80-7196-267-8.
5. ŘEHOUT, V., a kol.: *Genetika I*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích Zemědělská fakulta, 2000. 256 s. ISBN 80-7040-405-1.
6. SEMIGINOVSKÝ, B., a kol.: *Praktická cvičení z fyziologie člověka*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 1984. 171 s. ISBN 17-047-84.
7. PECHAROVÁ, E., HEJNÝ, S.: *Botanika I*. České Budějovice: Dona. 164 s. ISBN 80-85463-28-8.
8. ZAPLETAL, J., a kol.: *Přírodopis 9*. Olomouc: Pedagogické nakladatelství PRODOS, 1991. 96 s. ISBN 80-7230-069-5.
9. KALAS, J., RÁB, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2001. 207 s. ISBN 80-2102-589-1.
10. JELÍNEK, J., ZICHÁČEK, V., a kol.: *Biologie pro gymnázia*. Olomouc: Nakladatelství Olomouc, 2000. 559 s. ISBN 80-7182-107-1.

b) Internetové zdroje

1. *Vlastnosti minerálů* [online] [cit. 20. února 2008]. Dostupný na URL <<http://www.mineraly.net/vlastnosti.php#ks>>
2. *Geologie* [online] [cit. 20. února 2008]. Dostupný na URL <<http://www.kbi.zcu.cz/studium/geo/mino.htm>>

3. *Mineralogie – základy pro mineralogické nadšence* [online] [cit. 5. března 2008]. Dostupný na URL <<http://home.gli.cas.cz/filippi/pwww/mineralogie/encyklopedie.html>>
4. *Genetika populací – organizace genetické variability* [online] [cit. 5. března 2008]. Dostupný na URL <<http://old.mendelu.cz/~agro/af/genetika/vsg3/pop/popul4.html>>
5. *Mitoza a meioza - zjednodušeně*[online] [cit. 10. dubna 2008]. Dostupný na URL <<http://genetika.wz.cz/bunka.htm> >
6. *Test – mineralogie* [online] [cit. 10. dubna 2008]. Dostupný na URL <http://www.minerally.sk/files/zau/021_test/test.htm>
7. *Netýkavka žlaznatá* [online] [cit. 10. dubna 2008]. Dostupný na URL <http://rostliny.prirodou.cz/?nazvy=cs&rostlina=anagallis_arvensis>
8. *Srdcovka nádherná* [online] [cit. 10. dubna 2008]. Dostupný na URL <<http://fotka.atlasrostlin.cz/srdcovka-nadherna/fotky-pridane-uzivateli-1405>>
9. *Jaterník podléška* [online] [cit. 10. dubna 2008]. Dostupný na URL <http://rostliny.prirodou.cz/?nazvy=cs&rostlina=hepatica_nobilis>
10. *Drchnička rolní* [online] [cit. 10. dubna 2008]. Dostupný na URL <http://rostliny.prirodou.cz/?nazvy=cs&rostlina=anagallis_arvensis>

PŘEHLED TABULEK A GRAFŮ

Tab. č. 1 Srovnání mitózy a meiózy	26
Tab. č. 2 Genotyp potomků	28
Tab. č. 3 Genotyp potomků	29
Tab. č. 4 Genotyp potomků	29
Tab. č. 5 Genotyp potomků	30
Tab. č. 6 Genotyp potomků	30
Tab. č. 7 Genotyp potomků	31
Tab. č. 8 Genotyp potomků	32
Tab. č. 9 Genotyp potomků	33
Tab. č. 10 Genotyp potomků	34
Tab. č. 11 Kombinační čtverec	39
Tab. č. 12 Řešení příkladu	42
Tab. č. 13 Hodnoty chí kvadrátu.....	43
Tab. č. 14 Základní parametry sledovaných dívek	46
Tab. č. 15 Řešení	47
Tab. č. 16 Řešení	48
Tab. č. 17 Řešení	49
Tab. č. 18 Přehled krystalových soustav	53
Tab. č. 19 Přehled souměrnosti soustav.....	55
Graf č. 1 Závislost genotypových frekvencí na frekvenci alel	40

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. č. 1 Pohlavní rozmnožování	26
Obr. č. 2 Netýkavka žlaznatá	56
Obr. č. 3 Srdcovka	56
Obr. č. 4 Jaterník podléška	57
Obr. č. 5 Drchnička rolní	57