Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

PREKONCEPTY POJMU ČÍSLO A ZÁKLADNÍCH ARITMETICKÝCH OPERACÍ NA 1. STUPNI ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí práce
doc. PhDr. Alena Hošpesová Ph.D.

Autorka práce
Hana Zemanová

2008

ANOTACE

V této práci se zabývám intuitivními přístupy žáků k řešení některých matematických úloh před tím, než je číselný obor a aritmetická operace potřebná pro jejich řešení uvedena ve škole.

Zpracování diplomového úkolu probíhalo ve třech fázích. Nejprve jsem vybrala takové úlohy, které měly děti podle osnov probírat zhruba až za 6 - 12 měsíců. Následovalo otestování žáků 1. - 3. třídy ZŠ v Nýrsku a v Českém Krumlově. Na závěr probíhalo zpracování těchto individuálních rozhovorů po kvantitativní a kvalitativní stránce.

Na základě analýzy výsledků jsem hledala odpovědi na následující tři otázky:
A) Jaká předkvantitativní schémata si žáci přinášejí do školy? B) Jak je možné jich využít při výkladu v matematice? C) Jak uvedené výsledky korespondují s porozuměním podstaty základních aritmetických operací.

ANNOTATION

In this diploma thesis I study intuitive ways of students´ solution of mathematical problems before specific procedure of counting or concept is introduced in mathematical lessons.

Elaborating the problem proceeded in three stages: (a) suitable set of problems were chosen, (b) individual testing (via individual interviews) of two groups of pupils aged 6 – 9 were realized, (c) individual interviews were analyzed qualitatively and quantitatively.

On the basis of the analysis of the results I examined three following questions:
A) Which protoquantitative schemas have children at the beginning of school attendance? B) Which way can be used in introducing new concepts in mathematics? C) How the results correspond with understanding the concept of basic arithmetical operations.

Děkuji vedoucí mé diplomové práce doc. PhDr. Aleně Hošpesové, Ph.D. za odborné vedení a motivaci.

Při zpracování diplomové práce jsem potkala mnoho vstřícných lidí, kteří mi pomáhali. Mé poděkování patří panu řediteli Mgr. Ivanu Pavlíkovi a paním učitelkám z 1. - 3. třídy Mgr. Janě Maškové, Mgr. Jindřišce Hvězdové, Mgr. Miroslavě Skalové, Mgr. Dagmaře Zborníkové ze ZŠ Komenského v Nýrsku, paní učitelce Mgr. Bohunce Matějů ze ZŠ Plešivec v Českém Krumlově za umožnění provedení výzkumu ve svých třídách a kamarádu Milanu Hošťálkovi za půjčení kamery a celkovou pomoc se zpracováním natočeného materiálu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně, a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

V Českých Budějovicích, 25. dubna 2008 ....

OBSAH

ANOTACE **2**

ANNOTATION **2**

OBSAH **5**

2. VÝCHODISKA DIPLOMOVÉ PRÁCE **7**

2.1 Předškolní výchova a matematika *7*

2.2 Teorie L. Resnickové *9*

2.3 Matematika pro děti *13*

2.4 Vyvození hypotéz *17*

3. POUŽITÉ METODY A POSTUPY **18**

3.1 Volba postupu *18*

3.2 Individuální pohovory *18*

3.3 Časový harmonogram testování *19*

3.4 Testované znalosti *20*

3.5 Strategie žáků při řešení *23*

3.6 Tvorba příkladů *25*

3.7 Videozáznamy *42*

4. VÝSLEDKY VÝZKUMU **45**

4.1 Kvantitativní zpracování *45*

4.2 Kvalitativní zpracování *55*

5. SHRNUTÍ **72**

5.1 Osobní zkušenosti žáků *72*

5.2 Schémata Resnickové ve výzkumu *74*

5.3 Teorie Montessori a Häsel – Weide *75*

5.5 Potvrzení výsledků a návrhů na souvislé praxi *76*

6. ZÁVĚR **78**

LITERATURA **79**

PŘÍLOHY **80**

1. ÚVOD

Při souvislé praxi jsem se mnohdy dostala do situace, kdy mě žáci překvapili svými vědomostmi o problému, který ještě neprobírali ve škole, a mně se následně rozpadla celá hodina, protože jsem nebyla připravena a neměla jsem „co nového“ děti naučit.

Ve třetím ročníku v předmětu Didaktika matematiky jsem si vyzkoušela natáčení pěti žáků 4. třídy. Děti řešily sice stejnou slovní úlohu, ovšem každý zcela jiným způsobem. V seminární práci jsme tehdy měli za úkol varianty postihnout a pokusit se je interpretovat. Tehdy jsem se sama sebe ptala, co může děti ovlivnit - zda má na žákovy postupy vliv rodinné prostředí, starší sourozenec, věková kategorie lidí, s nimiž se často setkává, nebo pouze intelekt.

Rozhodla jsem se proto věnovat svou diplomovou práci právě problematice *předmatematických* představ žáků. Nastudovala jsem různé literární prameny, které se touto problematikou zabývají, získané poznatky jsem shrnula a na jejich základě jsem formulovala dvě hypotézy. Ty se staly výchozím bodem pro praktickou část této práce, v níž jsem se zabývala nejrůznějšími variantami, které žáci používají při počítání neznámých úloh. Pokusila jsem se při tom proniknout do jejich myšlení a také do sociálního prostředí, které je velmi ovlivňuje před nástupem do školy.

Vyhodnocení praktické části mě přivedlo k několika úvahám týkajících se dosavadní výuky matematiky a změnám zařaditelných do vyučovacího procesu (viz diskuze). Poznání, které mi přineslo studium literatury i praktická část, jsem shrnula v závěru.

Diplomová práce mi přinesla částečný vhled do možných způsobů řešení některých příkladů z matematiky, s jejichž nejrůznějšími obdobami se mohu jako budoucí učitelka setkat na celém 1. stupni ZŠ. Mým cílem bylo zaujmout touto prací i jiné kolegy a kolegyně nejen z prvního stupně, protože uvědomění si individuality žáků je podle mě záležitostí všech učitelů.

Konkrétním i obecným cílem práce zároveň je analýza výsledků testování a ukázka možných způsobů řešení, které by si měl učitel uvědomovat a také je předkládat svým žákům jako různé varianty postupů a výpočtů. Předpokládám, že po přečtení této práce využijí tyto poznatky všichni čtenáři - učitelé alespoň pro zlepšení své výuky v matematice.

2. VÝCHODISKA DIPLOMOVÉ PRÁCE

Východiskem této diplomové práce bylo studium pramenů zabývajících se předškolními zkušenostmi dětí. Další text bude nejprve věnován obecně přijímaným požadavkům na děti při vstupu do školy, pak teoriím, které se pokoušejí vysvětlit povahu dětských předškolních zkušeností. Odkazy na literaturu uváděné v textech, z nichž jsem čerpala informace, jsem ponechala tak, jak byly v originále.

2.1 Předškolní výchova a matematika

Nikdo nepochybuje o tom, že dítě během prvních šesti let života získá množství zkušeností s kvantitami a jejich vztahy, prostorem a různými tvary. Úkolem školy je rozsah a obsah těchto zkušeností zjistit a vhodně jich využít. Učitelé by měli vědět, že během období před zahájením školní docházky si dítě obvykle vytváří neformální vědomosti o kvantitách a jejich vztazích:

- umí určit a vymodelovat zadaný počet předmětů,
- dovede porovnávat kvantity (i bez počítání),
- ví, že přidáním/ubráním se kvantity zvětší/zmenší, někdy dovede tuto zkušenost i kvantifikovat,
- má zkušenosti se spojováním částí v celek a oddělováním části od celku,
- orientuje se v prostoru i v rovině,
- rozpoznává geometrické tvary a manipuluje s nimi.

Mnohem větší pozornost se věnuje dovednostem v aritmetice. Při zápisu do školy se učitelky většinou dětí ptají, do kolika dovedou odříkat řadu názvů čísel, zjistit počet, sečíst a odečíst dvě čísla. Co se geometrie týká, obvykle se otázky týkají jen rozeznání geometrických tvarů a barev.

V posledním desetiletí nebyla výchova v mateřských školách řízena žádným normativem. Do r. 1989 měli pedagogové k dispozici přesně předepsané normativní osnovy, plány a metodické příručky. Snahou bylo co nejvíce sjednotit podobu škol, unifikovat práci pedagogů a normovat požadavky na děti.

Práce podle těchto materiálů, i když uznáváme tehdejší snahu pedagogů udělat pro děti co nejvíce, někdy omezovala aktivitu dítěte, málo respektovala jeho potřeby, zájmy a zkušenosti, opomíjela prožitky dítěte, nevnímala dostatečně jeho individuální předpoklady. (Hošpesová 2000)

Od 1. září 2002 měl být pro mateřské školy závazný Rámcový program pro předškolní vzdělávání (2001). Tento program neuvádí žádné konkrétní cíle, které by měly přímou návaznost na pozdější vyučování matematiky, ale je zcela jasné, že řešení úloh z oblasti matematiky může přispět k obecnějším cílům, které jsou zde definovány, např. „rozvíjení dítěte a jeho schopnosti učení“. (Rámcový program předškolního vzdělávání 2001)

Otázkou je, zda víme, co umí děti, když přicházejí do školy. Odpovědí může být výzkum, který proběhl v několika evropských zemích v roce 1995. Můžeme předpokládat, že se situace od té doby rapidně nezměnila. V publikaci od M. Tiché, A. Hošpesové a F. Kuřiny z roku 1995 se autoři zabývají tím, jaké jsou matematické zkušenosti našich dětí při vstupu do školy. Mluví se zde o testování žáků 1. třídy, které mělo prověřit, co z učiva 1. ročníku znají žáci již při vstupu do školy a zda představy expertů (učitelů testovaných tříd, ředitelů škol, učitelů matematiky, didaktiků) o znalostech dětí při vstupu do školy odpovídají realitě (nepodceňují je nebo naopak nepřeceňují). Skupina expertů byla požádána, aby odhadla, kolik procent dětí bude schopno správně vyřešit každou úlohu. Výsledky dětí byly až překvapivě dobré. Ve všech zúčastněných zemích (včetně České Republiky) se ale projevilo, že učitelé i další experti podceňují kompetence žáků a jejich matematické znalosti při vstupu do školy, případně o nich nemají žádnou představu.

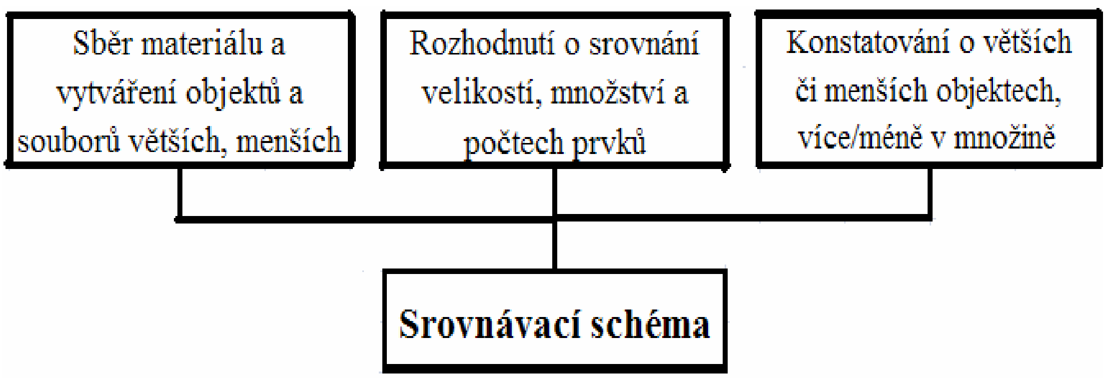
Mohlo by to znamenat, že nejsme zvyklí klást si otázky tohoto typu, že nepřemýšlíme o tom, co si děti přinášejí, čeho je možné využít a spoléháme se na jakési snad tradicí dané předpoklady. Ukazuje se, že experti mají jen velmi nepřesnou představu o tom, co umí žák přicházející do 1. třídy. (Hošpesová 2000)

2.2 Teorie L. Resnickové

Při svém hledání zdrojů, které se zabývají zkušenostmi dětí souvisejícími s počítáním a matematikou, jsem se setkala s publikací L. Resnickové, která popisuje schémata, pomocí nichž lze třídit předškolní zkušenosti dětí. Autorka tato schémata označuje termínem *protokvantitativní*, což je možné přeložit jako *předpočetní*, *předkvantitativní*. Resnicková vychází z konstruktivistického předpokladu o tom, jak se učíme matematice. To znamená, že předpokládá, že matematická znalost není přímo absorbovatelná, ale vytváří si ji každý jedinec sám. Autorka předpokládá mnohem větší matematické znalosti u malých dětí, než obvykle škola anticipuje, přičemž respektuje skutečnost, že některé znalosti dítě zná intuitivně a nedokáže je formulovat. Konstatuje, že dítě získává během předškolních let řadu zkušeností s tím, jak se chovají kvantity v reálné situaci. Tyto zkušenosti, získané manipulací a vyprávěním o skutečných věcech, dovolují dětem srovnávat velikosti a uvažovat o jejich změnách. Protože se toto rané uvažování může uskutečnit bez „měření" a přesné numerické kvantifikace, autorka je označuje pojmem *protokvantitativní uvažování*. Resnicková formulovala tři protokvantitativní schémata, která si dítě vytvoří během předškolních let.

2.2.1 Srovnávací schéma

První schéma zahrnuje schopnost srovnávat na základě přímého pozorování bez procesu měření. Vytváří základ pro eventuální numerické porovnávání kvantit. Jeho jednotlivé složky uvádí následující schéma.



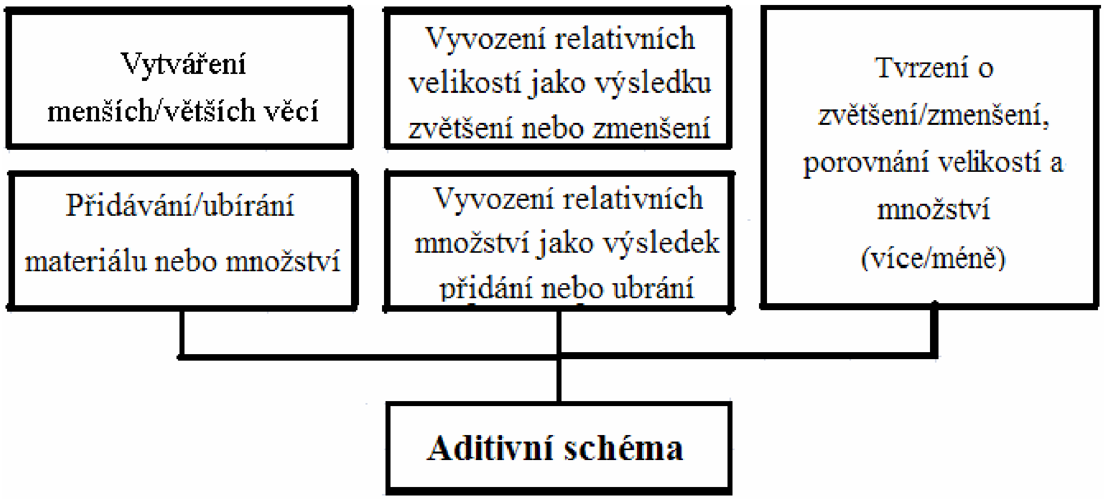
Toto myšlenkové schéma je základem pro vytváření jakékoli kvantitativní představy a pomáhá při matematizaci úloh, které jsou založeny na srovnání, a zřejmě i u ostatních úloh. Žák se o něj opírá při rozhodování o tom, která ze zadaných množin má nejvíce prvků. Toto rozhodnutí pak může být základem pro volbu početního výkonu. (Resnick 1989)

Je zajímavé, že žáci zpočátku nerozlišují porovnávání počtu a velikosti. Piaget se zabýval výzkumem malých dětí, v němž děti porovnávaly správně dvě identické množiny, ale když se roztáhly jejich prvky, považovaly za větší tu množinu, která zabírala více místa.

2.2.2 Aditivní schéma

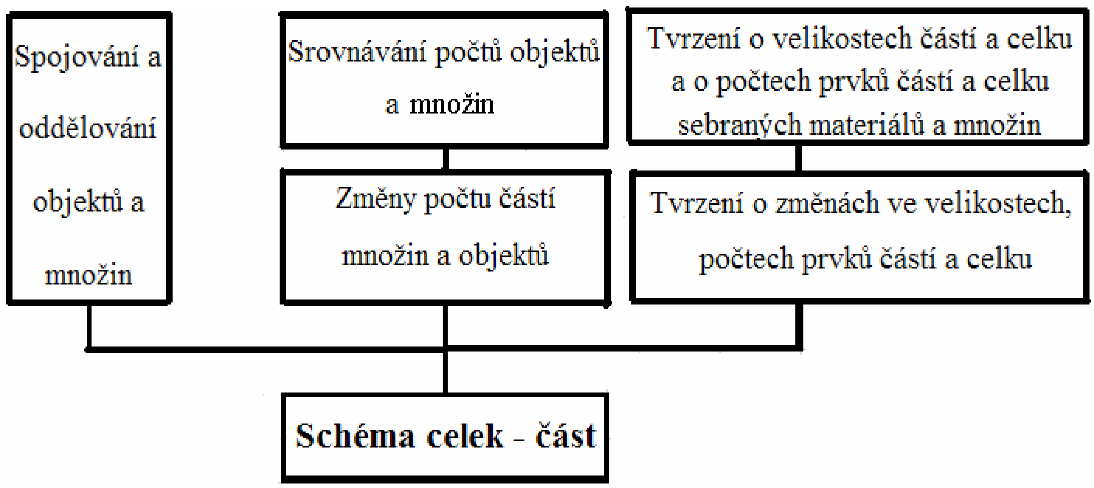
Autorka interpretuje toto schéma změny jako zvětšení a zmenšení kvantity. „Schéma dovoluje dětem již ve třech nebo čtyřech letech uvažovat o výsledcích přidávání nebo ubírání množství od počátečního stavu.“ (Resnick 1989)

Děti vědí, že bude více předmětů, než bylo, jestliže přidají k několika předmětům další. Jestliže naopak ubírají, mají předmětů méně než původně. Stejně důležité je chápání stejného množství v případě, kdy nedojde ke změně ubrání ani přidáním předmětů. „Děti považují za magické všechny změny, které nevidí. Obvykle se děti o těchto změnách neumí vyjádřit, ale přidání, ubrání a zachování množství chápou. Toto schéma je základem pro pochopení operace sčítání a odčítání.“ (Resnick 1989)



2.2.3 Schéma část - celek

Předchozí schéma je základem pro vytvoření schématu celek – část, které shrnuje představy dětí o tom, jak je možné věci kolem nich spojovat a oddělovat. Schéma je aditivní. To znamená, že množství můžeme rozdělit do částí, které po opětném spojení dají dohromady původní kvantitu. Tato znalost zahrnuje inkluzi tříd a pochopení vlivu změn velikosti částí na velikost celku. Dovoluje dětem rozhodnout o vztazích mezi částmi a celkem. Autorka předpokládá, „že je základem pro pozdější pochopení některých základních zákonů aritmetiky: komutativnosti a asociativity sčítání a inverzity sčítání a odčítání. Zajišťuje také základ pochopení principu poziční hodnoty číslice při zápisu čísla v poziční soustavě“. (Resnick 1989)



Problémy, které se vyskytují na počátku školní docházky v matematice, autorka vysvětluje tím, že existuje rozdíl mezi znalostí principů a dovedností vyjádřit určitou situaci, tj. matematizovat. „I když děti znají všechny potřebné principy pro počítání, nemusí mít znalosti počítání plně spojené s již vytvořenými schématy. To je nutně zdrojem potíží ve školní matematice a zároveň i zdrojem strachu z matematiky.“ (Resnick 1989)

Na základě průzkumů technik počítání vyslovuje autorka hypotézu o tom, jak se vyvíjí počítání u dítěte předškolního věku. „Nejdříve si děti vytvoří mentální řadu číslovek, která jim umožňuje rychlé porovnávání čísel a je součástí srovnávacího schématu. Následující vývoj probíhá jako integrace schématu část – celek a schématu zvětšení/zmenšení do již utvořené struktury znalostí. Jeví se, že tyto vědomosti jsou přítomny univerzálně, i když se zřejmě rozvinou do různé úrovně v závislosti na podmínkách stimulace v rodině. Určující je tu rozsah, v jakém se v každodenním životě dítě setkává s kvantifikací.“ (Resnick 1989)

Za důležitý zdroj informací týkajících se dětské interpretace aritmetiky považuje autorka způsob řešení slovních úloh. Konstatuje, že skupiny úloh se liší svou obtížností podle různé sémantiky. K těmto sémantickým kategoriím ale dodává údaje z experimentálního ověřování věku, ve kterém jsou děti schopny jednotlivé úlohy řešit. Za nejjednodušší považuje úlohy formulované inverzně (např. *Alena šla na nákup. Utratila 5 korun a zůstaly jí 3 koruny. Kolik měla, když se vydala na nákup?*). Podle autorky jen některé děti zvládnou tyto problémy plně před 8 – 9 lety. To je způsobeno tím, že není bezprostřední korespondence mezi situací a aritmetickou operací, která by problém v této formě řešila. Efektivní aritmetickou operací k řešení takového problému je sčítání, i když úloha je popisem odečítání od původního množství. Děti se postupně učí přeformulovat tuto situaci jako dělení celku na dvě části. To jim usnadní využití znalostí o aditivním rozkladu, který dále vede ke sčítání. Úlohu je také možné matematizovat implicitním zápisem: … – 5 = 3, kde místo teček je možné doplňovat různé počty tak dlouho, až žák narazí na správné řešení. Případně si žák může uvědomit, že číslo v rámečku označuje velikost celku, kterou je možné zjistit sečtením čísel označujících velikost částí.

Za obtížnější kategorii považuje Resnicková úlohy kombinující dvě statické kvantity do jiné nadřazené kategorie. Problémy mají děti tam, kde formulace úlohy znesnadňuje *přejmenování* celku. Tyto úlohy jsou v Piagetově teorii vymezovány jako spoluzahrnutí tříd a, jak již bylo uvedeno, je úspěšnost dětí při řešení těchto úloh ovlivněna perceptuálními a lingvistickými faktory. Rostoucí jistotu v řešení úloh tohoto typu můžeme považovat za indikátor uvědomění si a propojování schématu celek – část do systému stávajících znalostí.

Třetí kategorií je porovnávání dvou odlišných kvantit a číselné vyjadřování rozdílů mezi nimi. Obtížnost takových úloh tkví v požadavku vyjádřit vztah mezi dvěma množinami číselně. Tedy číslo jako výsledek úlohy není najednou samostatnou kvantitou, ale také vyjádřením vztahu. Ze zkušenosti se jeví, že úlohy tohoto typu jsou pro děti nejméně obtížné. Výhodou zde je, že je možné znázornit obě porovnávané kvantity a pak se rozhodnout o vztazích mezi nimi. Pokud žák při materiální činnosti pochopí podstatu úlohy, výpočet není problematický. V každém případě je úloha řešena odečítáním menšího čísla od většího.

Na základě těchto úvah vytvořila Resnicková s týmem spolupracovníků program matematického vyučování, který co nejvíce zhodnocuje dětské zkušenosti z životní praxe. Domnívala se, že tímto způsobem odstraní některé potíže žáků s matematikou. Výsledky jejího průzkumu nejsou vzhledem k problémům s měřením prokazatelné. Na tomto místě by bylo možné připomenout, že podobné snahy nejsou ničím novým. J. Libíček v *Pokusu metody přirozené a historické v prvopočátečním vyučování počtů* v roce 1900 (in Domin, Kopecký, 1935, str. 18) doporučuje: ***„Neučme děti dlouhým úsudkům, nýbrž učme jednoduchým soudům, čítejme a počítejme věci skutečné tak, jak žáci vidí v denním životě.“*** Přirozené metody počtů, jak byl tento směr nazván, doporučovaly upravit vyučování podle způsobu, kterým dítě dospívá k pochopení čísla a početních vztahů každodenní zkušeností v předškolním věku. Je ale potřeba si připomenout, že tento přístup nemusí v současné metodice znamenat podřízení práce ve škole jen blízkým cílům z oblasti finitní matematiky a nerespektování dlouhodobých perspektiv. I zde lze postupovat tak, aby se nevytvořily bariéry v chápání složitějších vztahů.“ (Resnick 1989)

2.3 Matematika pro děti

Dalším přínosným zdrojem informací byla knížka *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern* od autorek Petry Schererové a Dagmar Bönigové. Při čtení této publikace jsem pochopila, jak a kde děti získávají zkušenosti potřebné k pochopení matematiky. Také jsem získala informace důležité pro kvalitní zpracování praktické části – zejména při samotném testování žáků a interpretaci jejich výsledků.

Pro potřeby mé diplomové práce uvádím na následujících stránkách pouze překlad dvou článků ze třetí kapitoly.

2.3.1 Teorie Montessori

Claudia Hohmann-Busch se v článku *Multiplikation mit Perlenstäbchen und Schachbrett – Zum Einsatz von Montessori-Materialien im Mathematikunterricht* (in Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern, Scherer, P., Bönig D., 2004, str. 174-185) zabývá teorií a pedagogikou M. Montessori.

M. Montessori se zabývala matematickým vyučováním, protože utváření matematického ducha požaduje specifický přístup. Autorka tvrdí, že na rozdíl od jazyka, který se dítě učí jen pouhým vnímáním a vstřebáváním, potřebuje matematika jiné cesty a přístupy. Také říká, že utváření matematického ducha začíná u dětí již velice brzy, např. **zjišťováním shod a odlišností, pojmenováním vlastností a počítáním při každodenních činnostech**, a že již u malých dětí vzniká potřeba uspořádat si komplexní zkušenosti a dojmy z jejich okolí.

„Porozumět číselnému pojmu a získat početní dovednosti s ohledem na různé početní operace znamená pro dítě na základní škole mimořádný výkon v oblasti práce s abstrakcí, což může žák zvládnout tehdy, pokud si své myšlenkové struktury může vytvářet a rozvíjet rozmanitými konkrétními, aktivními zkušenostmi. Obzvlášť u matematických pomůcek je vidět, že děti přes uchopení dojdou k pochopení. Jednající konání předchází vždy myšlení, tudíž i učení.“ (in Mathematik für Kinder, Scherer, Bönig 2004, str. 174-185)

Dále se autorka zmiňuje o aktivním učení a principu samostatnosti, který uvolňuje celkový rozvoj dítěte v emocionální, kognitivní, jazykové a sociální oblasti. Děti, kterým je umožněno, aby dělaly věci samy, jsou schopny uvolnit své vnitřní tvořivé síly a rozvíjet tak svou osobnost. Rozhodující antropogenní faktory, které autorčinu koncepci vyučování opodstatňují, jsou smyslové a pohybové činnosti. „Pohyb není účel sám o sobě, smysl je mnohem hlubší, dotýká se nejen motorických funkcí našeho těla, ale ovládá celého člověka v jeho výrazových možnostech.“ (Montessori 1965, str. 16)

V souvislosti s pohybem hraje ve vývoji každého dítěte velkou roli ruka. Montessori poukazuje na to, že to, „čím se člověk liší od ostatních živých bytostí, je vedle jazyka schopnost užívat ruku jako činný nástroj své inteligence“. (Montessori 1978, str. 116)

V pedagogice, kterou Montessori předkládala, může dítě aktivně pracovat s každým oslovujícím materiálem z různých oblastí a při tom cíleně cvičit své smysly, svou motoriku a svou ruku. (in Mathematik für Kinder, Scherer, Bönig 2004, str. 174-185)

2.3.2 Neformální postupy

Doktorka Uta Häsel-Weide v článku *Auch Aufschreiben will gelernt sein! Probleme und Chancen bei der Notation von Rechnungen zu Sachaufgaben* (in Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern, Scherer, P., Bönig D., 2004, str. 187-195) nazvala následující způsoby a formy zápisu dětí *neformálními postupy*.

Podle autorky jednoznačně dokazují, že k dokumentaci výpočtu patří podstatně více než samotné řešení příkladu. I u úloh, ke kterým měla být zapsána jen rovnice, se objevil nespočet chybných zápisů. Ačkoliv děti často ignorovaly zákony matematiky a ze zápisu je zřejmé neporozumění, vypovídají i o mnoha správných úvahách a náznacích.

Myšlenky autorky mi pomohly při samotném testování. Při každém zápisu, který jsem si mohla vyložit různými způsoby, jsem žáky zastavila a požadovala vysvětlení. Mnohdy jsem tak zápis, který jsem původně považovala za chybný, přehodnocovala a zjistila jsem, že zápis není tak důležitý jako jeho vysvětlení.

Pouhý výsledek

Jsou žáci, kteří slovní úlohy vyřeší správně ve své hlavě, ale neví, co by kromě výsledku k tomu připsali. Výsledek u nich stojí ve středu pozornosti a nevyžaduje žádné další vysvětlení nebo písemné zaznamenání. I na výzvu, aby žáci napsali, jak došli k výsledku, reagovali s nepochopením a větou typu: „To jsem přeci udělal." Těmto dětem není jasný smysl požadovaného zápisu výpočtu ve vyučování matematiky, zvlášť když příklad zdánlivě v kontextu vyřešily, aniž by vědomě v matematické rovině abstrahovaly. To je potom samozřejmě obtížné aritmetickou rovnici zapsat.

„Pouhý výsledek" je možný jen u slovních úloh, při kterých není k řešení úlohy potřebný žádný zápis o úvahách, dílčích výsledcích nebo výpočtech, tedy u úloh, které mohou být spočítány jedním výpočtem bez dílčích výsledků. Zapsání výpočtu není v tomto případě pro děti nutné, ale jsou pouhým ústupkem (často nepochopitelným) požadavkům, které jsou ve vyučování kladeny.

Neúplné rovnice

Děti, které zapisují neúplné rovnice, se soustředí na vnější podobu rovnic či výpočtu z vyučování aritmetiky. Čísla zapisují v přibližně stejných odstupech vedle sebe a spojují je částečně operačními znaménky a/nebo rovnítkem. Těmto žákům je vnější podoba rovnic známá, jejich řešení a výpočty zkouší zapsat, ale porušují při tom zákonitosti rovnic.

To se projevuje např. tak, že u úloh typu: *„Stefanie dostala 50 Euro od své babičky. Koupí si plavky za 24 Euro. Kolik peněz jí ještě zůstane?*“ je nejprve zapsána zbytková suma 26 Euro. V dalším kroku je pak napsán výpočet a zkonstruována rovnice 26 – 24. Učitelka, která je s tímto výsledkem konfrontována, kdy nesledovala proces vzniku tohoto výsledku, musí vycházet z toho, že dítě zadání příkladu neporozumělo. Mohla by se sice domnívat, že 26 má být výsledek, ale ze způsobu zápisu to není patrné. Pokud se ještě k tomu dítě zmýlilo ve výpočtu samotném, už se nedá vysledovat, jaké potíže při řešení příkladů byly určující.

Další vývoj tohoto zápisu by byl možná zápis, ve kterém by výsledek a výpočet stály vedle sebe bez jakéhokoliv spojení. Žáci mohou zaznamenat všechna čísla, ale buď doplní špatná znaménka, nebo je zapíší v obráceném pořadí, nebo bez rovnítka jen za pomoci větší mezery mezi výsledkem a výpočtem.

Rovnice se špatným operačním znaménkem

Rovnice, ke kterým děti napíší při dodatečném zápisu špatné znaménko, přestože operaci provedly správně, jsou považovány za úplné. Žáci užijí např. znaménko pro sčítání, ačkoliv odčítali. Vedle strategie doplňování, které je znaménko plus blízké, to můžeme odůvodnit tím, že si děti při dodatečném zápisu již nevzpomenou, co přesně vlastně počítaly a potom zaznamenají znaménko, které znají nejlépe. Nezbytnost a pozice znaménka jim je ovšem známa.

Ve všech špatných, resp. neúplných zápisech žáků je možné vypozorovat jisté správné náznaky a úvahy, takže je nezbytné a důležité, aby se právě na ně ve výuce navázalo a dál se ve smyslu matematicky správného způsobu zápisu zdokonalovaly. Zpočátku mohou být tyto zápisy dětí povoleny. Také to znamená upustit od na první pohled usnadňujících rastrů řešení, které stanovují počet prvků eventuelně početních znamének, jež mají být zaznamenány. Právě tak je vhodné ustoupit od známých schémat řešení jako „otázka – výpočet – odpověď“. Již samotný pojem „výpočet“ se spojuje zápisem rovnice a tím se potlačují možnosti (i u řešení) aktivního hledání řešení a popisného zápisu. Musí být ovšem nalezeny cesty, které dále rozvíjí neformální zápisy dětí se zřetelem na matematicky korektní způsoby. (in Mathematik für Kinder, Scherer, Bönig 2004, str. 187-197)

2.4 Vyvození hypotéz

Předchozí ukázky jsem vybrala z toho důvodu, že mne přivedly k zamyšlení nad stávající situací ve školách. Autoři se zabývají přístupem učitelů k výuce matematiky a postojem žáků k řešení matematických úloh. Z ukázek jsem si tedy vzala ponaučení, že při hodinách matematiky by neměli učitelé jen předávat své znalosti a postupy řešení úloh žákům, ale měli by stavět výuku na tom, co si žáci přinesli z dosavadního života, o tyto jejich zkušenosti se opírat a dále je rozvíjet. Není to tedy učitel, ale právě spolupráce těchto dvou skupin, která dává vzniknout kvalitní hodině matematiky, při níž se mohou obě strany mnohému naučit.

Na základě uveřejněných myšlenek jsem formulovala následující dvě hypotézy:

Většinu předkvantitativních schémat si žáci vytvoří před zahájením školní docházky. Touto hypotézou jsem se zabývala v praktické části a v páté kapitole.

Existenci předkvantitativních schémat je možné prokázat rozborem žákovských řešení úloh. Tuto hypotézu jsem se pokusila rozebrat částečně v diskuzi kvalitativního zpracování a v páté kapitole této diplomové práce.

3. POUŽITÉ METODY A POSTUPY

3.1 Volba postupu

Při hledání odpovědí na výše uvedené otázky jsem se rozhodla, že provedu výzkum se žáky prvního stupně. Měla jsem v úmyslu předložit jim různé typy úloh, přičemž některé budou vycházet např. ze schémat popsaných L. Resnickovou. Prostudovala jsem učebnice Alter, které používají k výuce matematiky na Základní škole Komenského v Nýrsku, a podle tohoto vzoru jsem vytvořila vlastní úlohy. Původně jsem měla příklady pro předškolní děti a prvních pět ročníků ZŠ a to v takovém množství, abych postihla všechny typy, se kterými se žáci 1. stupně mohou setkat (viz kapitola Zkušební testy).

Po domluvě s vedoucí práce jsem pro naše potřeby vybrala úlohy jen pro první tři ročníky. Soustředila jsem se na tuto věkovou kategorii, protože nám šlo o zkoumání předpojmů. Z. Helus v přednáškách *Učitelství – rozporuplné povolání pod tlakem nových společenských nároků* (in Pedagogika, Časopis pro vědy o vzdělávání a výchově, Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, ročník LVII – 2007, č. 4) používá termínu *předvědění*, v angličtině *preconcept*. To znamená, že děti měly řešit úlohy předtím, než je proberou ve škole. Byly to úlohy s operacemi sčítání a odčítání, násobení a dělení, porovnávání, prostorově geometrické cítění, čtení větších čísel, slovní úlohy a zlomky.

3.2 Individuální pohovory

Vzhledem k možným potížím při interpretaci výsledků žáků (viz výše neformální postupy dětí), kterých bych se mohla dopustit při testování celé třídy, jsem záměrně zvolila metodu individuálního interview. Navíc jsem z pedagogické praxe věděla, že některé děti se „stydí“ projevit svoje myšlenky před známým kolektivem svých spolužáků, např. při vyvolání nebo u tabule. Doufala jsem, že žáci při rozhovoru pouze se mnou získají určitou dávku jistoty. Velkou pozornost jsem věnovala získání důvěry dětí. Na počátku rozhovoru jsem jim sdělila, že jsem studentka a potřebuji znát jejich řešení různých příkladů z matematiky. Jejich odpovědi zpracuji do diplomové práce. Tu musím zpracovat, abych mohla v budoucnu učit děti, jako jsou oni. Prvňáčci ani netušili, že budou něco počítat, nýbrž jen to, že si budeme „hrát s kolečky“.

Individuální pohovory probíhaly od září do prosince 2007 se žáky 1. – 3. třídy. Rozhovory probíhaly ve volné třídě (ZŠ Komenského v Nýrsku) a v kabinetu třídní učitelky (ZŠ Plešivec v Českém Krumlově). Jejich věk se pohyboval mezi 6 – 9 lety.

3.3 Časový harmonogram testování

Nejprve jsem vytvořila 2 zkušební testy pro pilotní testování, které jsem předložila dvěma dětem na konci letních prázdnin. Starší z nich, Honzík, právě dokončil 3. třídu. Mladší Martínek měl v září nastoupit do 1. třídy. Honzík pro mne představoval žáka, který i ty nejtěžší příklady zvládne, protože se s nimi ve výuce již setkal. Martínek byl opačný případ, nesetkal se do té doby s výukou matematiky vůbec.

Pilotní test ukázal, že připravený test je příliš časově náročný. Zmenšila jsem počet úloh o polovinu. Některé typy úloh jsem vypustila úplně. U těch úloh, které zůstaly, jsem snížila počet max. na 10 příkladů. S takto zkrácenou verzí jsem začala testovat děti na ZŠ Komenského v Nýrsku. Prvním dvěma dětem však vyřešení příkladů trvalo 45 minut, což představovalo jejich příliš dlouhou nepřítomnost ve vyučování. Ředitel této školy mi umožnil provádět testy v době výuky. Protože jsem nechtěla učitelkám příliš narušovat hodinu výměnou žáků, zúžila jsem testy po prvních dvou rozhovorech na max. 5 příkladů od jednoho typu. Doba testování jednoho žáka se pak pohybovala okolo 20-30 minut.

S testováním jsem chtěla začít až poslední týden v září. Děti si po letních prázdninách za tři týdny již zvykly na školní režim, tudíž se lépe soustředily i na netypickou činnost. Jakmile mi začala výuka v zimním semestru, mohla jsem se testování věnovat pouze v jediný volný den, a to v pátek. Testy jsem chtěla ukončit týden před Vánocemi. Musela jsem si tedy vytvořit časový harmonogram a pečlivě naplánovat průběh testování.

Během 13 dní, které jsem měla k dispozici, jsem hovořila s 91 žáky. Individuální pohovory probíhaly na Základní škole Komenského v Nýrsku ve všech třech ročnících a na Základní škole Plešivec v Českém Krumlově pouze v prvním ročníku. Testování jsem rozvrhla tak, aby probíhalo dříve, než se jejich učební obsahy proberou ve škole. Nejprve jsem testovala třetí ročník, následovaly druhé ročníky. Naposledy jsem testovala první ročníky, protože jsem chtěla mít jistotu, že již prošli počítáním alespoň do pěti, neboť příklady pro ně připravené se o tuto znalost opíraly. V době testování prvního ročníku v Nýrsku jsem od třídní učitelky věděla, že žáci již umí bezpečně počítat do sedmi a v současnosti probírají počítání do osmi. Když jsem dokončila interview v Nýrsku, přesunula jsem se na jeden den do třídy Mgr. Bohunky Matějů na Základní škole Plešivec v Českém Krumlově, kde se v polovině prosince dostali k počítání do pěti.

3.4 Testované znalosti

Důležitým bodem před přípravou samotných testů bylo uvědomění si a sepsání znalostí, které jsem u žáků předpokládala a chtěla jsem je testováním ověřit, případně vyvrátit. Zaznamenání těchto možných znalostí mi pomohlo při sestavení konkrétních příkladů, kterým jsem se věnovala v následující kapitole.

3.4.1 Znalosti prvního ročníku

Předpokládala jsem, že si děti již na počátku školní docházky přináší prekoncepty sčítání a odčítání. Jelikož otestování 1. ročníků bylo naplánováno až na prosinec, dalo se také předpokládat, že žáci za čtyři měsíce porozuměli i podstatě sčítání a odčítání.

Tento test probíhal v prvních ročnících v Nýrsku a v Českém Krumlově. Měla jsem tak příležitost porovnat dva různé typy výuky, navíc podpořené velmi odlišným prostředím. V Nýrsku výuka probíhala v třídě s 27 žáky, v Českém Krumlově bylo patnáct dětí (v průběhu roku se jejich počet snižoval kvůli stěhování a nemoci až na pouhých dvanáct dětí, které jsem testovala v prosinci). Technické moderní vybavení krumlovské třídy rozhodně předčilo zařízení v Nýrsku. I velikost místnosti (s ohledem na počet žáků) předčila tato třída tu nýrskou (nemají kvůli malému prostoru ani koberec, ani klavír). Obě třídy měly společné prakticky jen to, že složení třídy (ať už po stránce intelektu nebo národnostní) bylo velmi pestré – děti s jiným mateřským jazykem, děti z romských rodin a děti jiné národnosti než české.

Testovala jsem, zda žáci

- chápou, jaký je rozdíl mezi odčítáním a sčítáním v oboru do 100, v období počítání do 20 (např. 40 + 5)
- vyřeší praktickou úlohu, mají prostorovou představivost

- dokážou spravedlivě rozdělit objekty do několika stejně početných skupin (např. kamarádi mají stejnou částku a dohromady mají 12 Kč)
- častěji rozdělují po jedné, příp. po dvojicích či ojediněle po skupinkách (skupinu např. 12 koleček rozdělí zvoleným způsobem mezi 3 děti)

3.4.2 Znalosti druhého ročníku

Předpokládala jsem, že žáci druhého ročníku po 13 měsících školní docházky bez problémů zvládnou příklady, které prvňákům dělaly obtíže. Úlohy byly pro tuto třídu obdobné jako pro ně. Navíc jsem přidala příklad na čtení větších čísel. Velká čísla se pro žáky druhých ročníků pohybují v oboru do 100 a výše.

Záměrně jsem zvolila příklady stejné jako pro třídu první, abych zjistila, nakolik škola ovlivňuje matematické myšlení žáků a zda se tento vliv projeví v nechuti počítat neznámé, neprobrané příklady (tzv. závislost na výkladu učitele), nebo naopak chuť počítat „podle svého“ (odpor ke zmíněné závislosti).

Výhodou bylo, že právě druhé třídy jsem měla k dispozici dvě, tj. minimálně 35 dětí. V jedné třídě byl chlapec s tělesným postižením na vozíku, v druhé dívka (Holanďanka), která s neznámými lidmi nekomunikuje. Ovšem blok v komunikaci se projevuje i při výuce, tedy v již déle jak rok známém prostředí i kolektivu. Její třídní učitelka slavila úspěch (po 13 měsících školní docházky), když jí Cathlin přeříkala básničku alespoň v lavici. Před třídu k tabuli nepředstoupila.

Testovala jsem, zda žáci

- dokážou určit, které ze dvou čísel je větší/menší. Předpokládala jsem, že u dvojic, kde je rozdíl v počtu číslic, žáci určí bez problémů větší číslo. Na dvojicích čísel se stejným počtem číslic jsem si ověřila zkušenost dětí se srovnáváním nevelkých rozdílů a také jejich povědomí o řádech jednotek, desítek a stovek.
- ovládají početní operace sčítání, odčítání v oboru do 20. Dokážou pochopenou látku aplikovat i v číselném oboru do 100. Předpokládala jsem správný postup, ale výsledek často s numerickou chybou (zejména u dvojciferných čísel, které v řádu jednotek budou mít jiné číslo než nulu, a při počítání „s přechodem přes desítku“).

- příklady s násobením převedou na operaci sčítání.
- mají prostorově geometrické cítění. Předpokládala jsem méně než polovinu úspěšných řešení.

3.4.3 Znalosti třetího ročníku

Předpokládala jsem, že žáci 3. ročníku budou po 22 měsících školní docházky ovládat sčítání a odčítání do 100 a umět tyto zkušenosti aplikovat i do vyšších číselných oborů. Chyb jsem očekávala méně, a pokud by se jich děti měly dopustit, tak zejména při počítání „s přechodem přes desítku".

Vzorek testovaných byl menší než v jiných třídách, protože jsem měla k dispozici jedinou třídu s 21 žáky. Měla jsem možnost pozorovat ji při vyučování. Třída mi jako celek (schopnost žáků použít své znalosti a jejich intelekt jako takový) přišla nejvyrovnanější. Mohli bychom ji označit jako multikulturní, protože ji navštěvovali děti jiných národností (Vietnamka a Holanďan), dívku, která první dva roky chodila do školy v Německu, a chlapec, který první třídu absolvoval v domácím učení. Líbilo se mi, že v krizových situacích při sobě drželi jako parta kamarádů, což jsem v ostatních třídách nepozorovala. Mohu jen spekulovat, zda se právě toto klidné klima třídy projevilo na celkovém výsledku testů, které působily oproti 1. a 2. třídám vyrovnaněji.

Testovala jsem, zda žáci

- přirozeně chápou základy zlomků na geometrických obrazcích. Zejména pojmy čtvrtina a polovina;
- násobení a dělení dvouciferných čísel převádí na operaci sčítání (neočekávala jsem, že žáci budou umět aplikovat zkušenost s jednocifernými násobky 2 - 5 i na čísla, která spadají do vyššího číselného oboru);
- propojují znalosti ze života i z jiných předmětů s matematikou; předpokládala jsem, že slovní úlohy vyřeší většina dětí, pokud budou znát potřebné údaje; že jim sestavení rovnice nebo výpočtu s danými údaji nebude dělat problémy.

3.5 Strategie žáků při řešení

Krom záznamu možných znalostí bylo také potřeba uvědomit si, jaké strategie mohou žáci použít při výpočtech a sestavit vhodné příklady tak, aby tyto strategie byly zřejmé. Uvádím tedy na tomto místě strategie žáků při počítání, zejména při operacích sčítání a odčítání. Zdrojem informací mi byly přednášky doc. Hošpesové, které jsem navštěvovala v předmětu Didaktika matematiky ve třetím ročníku.

Strategie žáků je možné uspořádat do 5 skupin – stává se, že žák používá různé strategie.:

Strategie	**Příklad 28 + 35, 52 – 24**	
Počítání	počítání po jedné	např.: 28, 38, 48, 58, 59, 60, 61, 62, 63
	počítání po jedné zpět	52, 42, 32, 31, 30 29, 28
Rozklad na desítky a jednotky	nejdříve jednotky	8 + 5, 20 + 30
		12 – 4, 40 – 20
	nejdříve desítky	20 + 30, 8 + 5
		40 – 20, 12 – 4
Postupné přičítání/odčítání	nejdříve jednotky	28 + 5, 33 + 30
		52 – 4,48 – 20
	nejdříve desítky	28 + 30, 58 + 5
		52 – 20, 32 – 4
Tvůrčí	doplnění	30 + 35, 65 – 2
		52 – 30, 22 + 6
	vyvážení	30+33
		50 – 22

Metodika postupného přičítání a ubírání

Nejčastější způsob řešení obtížných součtů, který je žákům předkládán ve školách, je postupné přičítání. Děti tento způsob v jednodušší formě znají však mnohem dříve. Po nástupu do školy pomalu opouští počítání po jedné a od učitelů se dozvídají o již zmíněných rozkladech čísel, z nichž mohou složit číslo větší. Učí se sčítat a odčítat tyto dvojice, příp. trojice. Dalo by se říct, že postupné přičítání je vlastně rozklad jednoho ze sčítanců na řády. K druhému sčítanci přičítáme (od menšence ubíráme rozebraného menšitele) nejprve jednotky, pak desítky nebo naopak nejprve desítky a pak jednotky.

Např. 37 + 46 bychom postupně přičítali 37 + 6, 43 + 40 nebo 37 + 40, 77 + 6.

U příkladu s postupným ubíráním, např. 53 – 35, by byl postup zaznamenán takto:

53 – 5 = 48, 48 – 30 nebo 53 – 30, 23 – 5.

U tohoto způsobu je zajímavý postup, který se odehrává „v paměti“. Většina lidí sice používá „postupné přičítání“, ale ve své podstatě se v hlavě odehrává počítání po jedné, příp. dopočítávání, které nahrazuje odčítání.

Podrobný zápis postupu může mít u zmíněného příkladu různé varianty:

37 + 3, 40 + 3, 43 + 40

37 + 3, 40 + 3, 43 + 10, 53 + 10, 63 + 10, 73 + 10

37 + 3, 40 + 40, 80 + 3

46 + 4, 50 + 30, 80 + 3

40 + 30, 6 + 7, 70 + 13

40 + 30, 6 + 7, 70 + 10, 80 + 3

Je možné, že se dají vymyslet ještě další způsoby. Zmíněné dopočítávání uplatňují prodavačky. Pokud platím stokorunou nákup za 17 Kč, dostanu mince 1, 2, 10, 20 a 50. Prodavačka však některé spoje urychlí. Místo tohoto postupu:

17 + 1, 18 + 2, 20 + 10, 30 + 20, 50 + 50, uslyším „A tři je dvacet, a třicet je padesát, a padesát je sto.“

Při testování, když děti dospěly k výsledku, jsem po nich chtěla zpětně vysvětlit jejich postup. V následujících kapitolách o kvantitativním a kvalitativním zpracování se můžete přesvědčit, kterou variantu děti nejčastěji volily, zda byl zvolený způsob stejný jako ten, který jim předložila učitelka ve škole, nebo vymyslely svůj vlastní, originální způsob.

3.6 Tvorba příkladů

Na základě teorií jsem navrhla příklady pro celý první stupeň základní školy. Po domluvě s vedoucí práce jsem z nich vybrala úlohy pro první tři ročníky, které jsem na základě výše sepsaných znalostí upravila.

Inspirací pro prvotní verzi příkladů mi byly učebnice z vydavatelství Alter, které používají pro výuku matematiky na ZŠ Komenského v Nýrsku. Tyto učebnice mají 16 dílů, přičemž prvních 7 se využívá v 1. a 2. ročníku, pro 3. - 5. třídu jsou vždy 3 díly pro každý ročník. Tyto učebnice mi pomohly ve zjišťování, co se žáci učí v jednotlivých ročnících. Velmi mi byla nápomocna paní Mgr. Jana Sudová ze ZŠ Komenského v Nýrsku, v té době učitelka 4. třídy, která mi učebnice zapůjčila a přidala i své zkušenosti s časovým plánem uplatnění učebnic. Jak už jsem uvedla, příklady předkládané žákům se ve výuce měly objevit až za 6-12 měsíců po testování.

V testech jsem záměrně střídala lehký a těžký typ úloh. Za lehkou úlohu jsem považovala takovou, k jejímuž řešení byla potřebná látka, s níž se žáci při vyučování již setkali, nebo následovala v nejbližších hodinách (do jednoho měsíce) po testování. U těžkého typu úloh jsem dodržela min. půlroční odstup.

Prošla jsem si všechny díly zmíněných učebnic a pak jsem vybrala typy úloh, které jsem chtěla uvést v testu. Úlohy jsem sestavila sama. Snažila jsem se o to, aby se v rámci jednoho typu objevilo všech deset jednociferných čísel, která žáci znají. Ověřila jsem si tak, zda všechna čísla umí přečíst a zda je umí zapsat. V prvních třídách jsem od třídních učitelek věděla, že došli k počítání do pěti, resp. do osmi, a tak jsem měla možnost slyšet a vidět žáky, jak se potýkají s počítáním např. do dvanácti, dvaceti a dál. Úmyslně jsem jeden typ příkladů použila ve všech ročnících – sčítání a odčítání. Chtěla jsem zde příklady, kde je přechod přes desítku, v rámci jedné desítky, jedno číslo s nulou v řádu jednotek atd. Sčítání je vlastně první početní operace, kterou se děti učí, a také je to operace základní, s jejíž pomocí žáci vypočítají i příklady s jinými operacemi.

Žáky jsem podporovala v zápisu jakýchkoliv pomocných výpočtů, které by je mohly dovést k výsledku a pomohly by jim v orientaci ve výpočtech. Za prvé kvůli tomu, abych lépe pochopila jejich způsob řešení, za druhé proto, aby ztratili ostych a nebáli se říct i špatný výsledek. Za špatné výsledky jsem je nijak netrestala, ani se to neodrazilo ve známce z matematiky, jak se někteří obávali. Ať už byl výsledek jakýkoliv, byl to „jejich výsledek“, k němuž došli „svou cestou“, kterou byli schopni zdůvodnit.

K výpočtům mohli použít pomůcky, které jsem jim přinesla. Pastelky, papírové tvary (kolečka a obdélníky) a nůžky. Mnozí si pomáhali počítáním na prstech. Počítadlo jsem neměla k dispozici, nahradily jej prsty a papírová kolečka. Jedinou pomůcku jsem nechtěla před dětmi zmiňovat, avšak někteří z nich se po ní ptali. Byla to kalkulačka.

3.6.1 Testy pro první stupeň

Po domluvě s vedoucí práce jsem vybrala příklady pro 1. - 3. třídu:

1. ROČNÍK

- Zahradník bude vysazovat jabloňové stromky do ovocného sadu. Ty máš papír podobného tvaru, který má obdélníkový tvar. Jakým způsobem zahradník jablůňky vysadí, aby dobře rostly, má-li 12 stromků?
- Úlohy na násobení: Dva kamarádi (případně 3 nebo 4 kamarádi) počítají své úspory. Zjistili, že oba (všichni) mají stejnou částku: 2, 5, 10 korun. Kolik mají dohromady?
- Úlohy na počítání v oboru do 100 – předtím, než se učí ve škole (v období počítání do 20, v období počátků počítání do 100: 20 + 30, 50 – 10, 20 + 5, 26 - 6, 23 + 4, 27 – 3, 23 + 30, 56 – 20, 34 + 9, 42 – 9, 24 + 38, 63 – 25.
    - bez pomůcek
    - nabídnout počítání na počitadle
    - nabídnout peníze

2. ROČNÍK

- Úlohy na počítání v oboru do 100 – předtím, než se učí ve škole (v období počítání do 20, v období počátků počítání do 100: 20 + 30, 50 – 10, 20 + 5, 26 – 6, 23 + 4, 27 – 3, 23 + 30, 56 – 20, 34 + 9, 42 – 9, 24 + 38, 63 – 25.
    - bez pomůcek
    - nabídnout počítání na počitadle
    - nabídnout peníze

- Znalost větších čísel: přečti mi tato čísla: 24, 86, 100, 1000, 1000 000.
- Které číslo je větší? 12345 nebo 1234567, 45213 nebo 21, 9 nebo 19, 75 nebo 57, 654 nebo 655?

3. ROČNÍK

- Úlohy na počítání v oboru do 1000 – předtím, než se učí ve škole (v období počítání do 20, v období počátků počítání do 1000: 200 + 300, 500 – 100, 200 + 50, 260 – 60, 230 + 40, 230 + 300, 560 – 200, 340 + 90, 420 – 80, 240 + 380, 630 – 250, 423 – 3, 567 – 60, 941 – 500, 347 – 47, 286 + 104, 617 – 217, 236 + 5, 675 + 20, 419 + 300, 291 + 9, 842 – 374, 506 + 396
  - bez pomůcek
  - nabídnout počítání na počitadle
  - nabídnout peníze
- Rozděl koláč třem dětem, pěti dětem (znázornění – obdélník, kruh) – znázorni. Kolik dostal každý?
- Násobení a dělení: 50 . 3; 180 : 6; 180 : 60; 240 : 8; 60 . 4.
- Násobení dvou dvouciferných čísel: Kolik hodin má měsíc leden?

3.6.2 První zkušební verze

První zkušební varianta testů proběhla se dvěma žáky v srpnu 2007. Průběh interview jsem doslova ocitovala na následujících řádcích. (Použitá zkratka Exp. označuje mou osobu experimentátorky.)

Úlohy pro 3. ročník

1. úloha

Rozděl koláče 3 dětem. Koláč má tvar kruhu a obdélníku.

Rozděl koláče 5 dětem. Koláč má tvar kruhu a obdélníku.

2. úloha

Kolik hodin má měsíc leden?

3. úloha

50 . 3 = 150 | 180 : 6 = 30 | 180 : 60 = 3

4. úloha

200 + 300 = 500	230 + 40 = 270
500 – 100 = 400	340 + 90 = 430
200 + 5 = 205	842 – 374 = 468
260 – 60 = 200	506 + 396 = 902

HONZÍK

1 Exp.	Rozděl koláč třem dětem! Ten koláč bude mít tvar kruhu. Nakresli si kruh, ten bude představovat koláč. Tak a rozděl ho třem dětem. Každý má stejný díl. Kolik máš dílů?
2 Honzík	*Čtyři.*
3 Exp.	Jak to rozdělíš mezi 3 děti, když máš 4 díly? Vybarvi mi ty díly. Teď si nakresli jiný kláč, který by měl tvar obdélníku. Jako když peče babička buchtu… Teď ho rozděl třem dětem, aby dostali stejný díl…. Šlo by to i jinak rozdělit? Jiným stylem čar? Jako když krájí buchtu babička. Jaké má tvary nakrájený koláč?
4 Honzík	*Čtverečky.*
5 Exp.	A viděl jsi jí, jak to krájí?
6 Honzík	*Ne.*
7 Exp.	Takže je to jediný možný způsob, jak to jde rozdělit?
8 Honzík	*Hm.*
9 Exp.	Tak si nakresli ještě 1 kruh. A rozděl ho pro pět dětí, na pět dílů. Bezva. Vybarvi mi to. Teď si nakresli zase obdélník a rozděl mi ho pro pět dětí. Označ mi ho čísly. Napadne tě teď jiný způsob, jak by šel rozdělit ten první obdélník pro tři děti, když vidíš ten pro pět dětí?
10 Honzík	*Hm, takhle (naznačuje svislé čáry).*
11 Exp.	Proč tě to nenapadlo před tím?
12 Honzík	*(krčí rameny)*
13 Exp.	Když jsi kreslil pro 5 dětí, tak jsi hned začal pruhy. Proč?
14 Honzík	*Protože jsem to viděl u toho kulatýho koláče.*
15 Exp.	Kolik hodin má měsíc leden? Jak bys to spočítal? Pověz mi, jak bys to zjistil?

16 Honzík	*No, řekl bych si kolik má týdnů a kolik dnů. Podle dnů kolik má hodin bych si to spočítal.*
17 Exp.	Napiš mi postup, jak bys to počítal. Kolik má dnů měsíc leden. Víš to?
18 Honzík	*Ne.*
19 Exp.	Kolik mají dnů měsíce v roce?
20 Honzík	*31 nebo 30 a jeden má 28. A když je přestupný rok, tak má 29.*
21 Exp.	A leden má kolik - 31, 30 nebo 28?
22 Honzík	*Den má 24 hodin.* (Buď špatně rozuměl, nebo dokončil původní myšlenku - kolik mají dnů měsíce a kolik má den hodin.)
23 Exp.	No to má den. A leden? To je první měsíc v roce. Vzpomeneš si? Učili jste se to?
24 Honzík	(vrtí hlavou)
25 Exp.	Leden má 31 dnů. Pomůže ti to? Jak budeš počítat, když víš, kolik má dnů?
26 Honzík	*Třicet jedna krát dvacet čtyři.*
27 Exp.	Umíš to spočítat?
28 Honzík	*Ne.*
29 Exp.	Dva krát šest?
30 Honzík	*Dvanáct.*
31 Exp.	Tři krát dvacet?
32 Honzík	*Jo, šedesát.*
33 Exp.	Když víš 31 dnů a 24 hodin. Co z toho umíš spočítat? Můžeš si to nějak rozložit? Na menší, abys to zvládnul?
34 Honzík	*No 30 krát 2. Teda, 30 krát 20.*
35 Exp.	Rozlož si to, a napiš si to.
36 Honzík	*Dvacet krát 3 se rovná… 20 krát 30 se rovná…*
37 Exp.	Umíš z hlavy spočítat 20 krát 30?
38 Honzík	*Ne. Umim si rozložit 20 na dvě desítky, to už bych spočítal.*
39 Exp.	Musíš vědět, co rozkládáš a na co rozkládáš, abys to mohl zase složit zpátky. Tři krát deset krát dvě? Co sis rozložil?
40 Honzík	*Třicet je 3 krát 10.*
41 Exp.	A proč krát dvě?
42 Honzík	(zatím co povídám, Honzík spočetl 3 . 10 . 20 = 600 zpaměti)
43 Exp.	Tolik hodin má měsíc leden?
44 Honzík	*Ne. Ještě mi chybí 4 krát 1.*

45	Exp.	Tak to spočti. 601?
46	Honzík	*Hm.*
47	Exp.	Takže 4 krát 1 je 601?
48	Honzík	*Ne. 4 krát 1 je 4. Mhm 604.* (opravuje výsledek)
49	Exp.	Takže to je správný výsledek? Ale tys chtěl počítat 31 dnů, každý po 24 hodinách. Ale počítal jsi 30 dnů po 20 hodinách. Ale tak to není, ne?
50	Honzík	*Ne.*
51	Exp.	Každý den má 24 hodin. Ty sis rozložil 31 dnů na 30 a 1. Hodiny sis rozdělil na 20 a 4. A násobil jsi 20 . 30 a 4 . 1. To znamená, že 30 dnů v lednu trvá 20 hodin a 1 den, ten poslední, jednatřicátý, trvá 4 hodiny…. Rozumíš mi? Z toho by vyšlo, že leden má 604 hodin. Ale tak to přece není. Každý den má 24 hodin.
52	Honzík	*Hm.*
53	Exp.	(mám pocit, že moje shrnutí Honzík nevnímal) Takže si trváš na tom, že leden má 604 hodin, jo?
54	Honzík	*Hm.*
55	Exp.	Tak to podtrhni jako výsledek. Teď tu mám pár příkladů na násobení a dělení: 50 . 3 =
56	Honzík	*Sto padesát. (počítá v duchu, píše správný výsledek)*
57	Exp.	180 : 6 =
58	Honzík	*Třicet. (počítá v duchu, píše správný výsledek)*
59	Exp.	180 : 60 =
60	Honzík	*Tři.* (*napíše 30, pak škrtá nulu)*
61	Exp.	Spočítej mi tyhle příklady: 200 + 300 =
62	Honzík	*Pět set. To je jako 2 + 3 = 5.*
63	Exp.	500 - 100 =
64	Honzík	*Čtyři sta. To je jako 5 - 1 = 4.*
65	Exp.	200 + 50 =
66	Honzík	*Dvě stě padesát. To je jako 20 + 5 = 25.*
67	Exp.	260 - 60 =
68	Honzík	*Dvě stě. (přirovnává k počítání do 100)*
69	Exp.	230 + 40 = (270)
70	Honzík	*Sto devadesát. (zaměnil znaménka, když přečte daný příklad nahlas, opraví ihned chybu)*
71	Exp.	Umíš popsat, jaké to jsou řády? (stovky, desítky, jednotky)
72	Honzík	*Jo.*

73 Exp. 340 + 90 = (430)

74 Honzík *Dvě stě padesát. (opět záměna znamének)*

75 Exp. Jak jsi to spočítal? To tě jen tak napadlo?

76 Honzík *Hm.*

77 Exp. Rozděloval sis to?

78 Honzík *Ne, nerozděloval. (Stovky zapisuje jako první, přepisuje, když u desítek zjistí, že přešel přes desítku.)*

79 Exp. 842 - 374 =

80 Honzík *Čtyři sta šedesát osm.*

81 Exp. Jak jsi to počítal?

82 Honzík *Jsem si to pořád rozložoval.*

83 Exp. Jak sis to rozkládal.

84 Honzík *Já už nevim.*

85 Exp. 506 + 396 =

86 Honzík *Pět set plus tři sta se rovná osm…*

87 Exp. Cože?

88 Honzík *Mhm 800. 800 + 96 = 896… 896 + 6 se rovná 900… 902.*

89 Exp. Nerozkládal sis ještě v hlavě tu část 896 plus 6?

90 Honzík *Ne.*

Komentář:

Honzíkova maminka a i třídní učitelka tvrdí, že Honzík má „matematické vidění“. Zdá se, že výsledek „vidí“. Při počítání působí, jako když vůbec nepočítá a jen se vrtí na židli. Když na něj mluvíme ve snaze mu poradit, vypadá, že nevnímá a pak najednou píše výsledek.

Při tomto rozhovoru jsem si neuvědomila, že Honzíka směruji ke správným odpovědím. Např. v krocích: 21, 29, 31, 35, 39, 49 a 51 – při zjišťování odpovědi na otázku kolik hodin má měsíc leden, jsem se ho snažila dovést ke správnému výsledku tak, že jsem pokoušela upozornit na chybu. Sice použil správná čísla, tedy dvacet čtyři krát třicet jedna, ale ani po mém upozornění si neuvědomil, že po prvním správném kroku, kdy násobil mezi sebou jakoby řády desítek (20 . 30 = 600), vynásobil mezi sebou jednotky (4 . 1 = 1, pak oprava 4). Nepovedlo se mi vysvětlit ani v kroku 51, že by pak dny v měsíci nebyly stejně dlouhé.

Když jsem však rozhovor viděla na videu a přepisovala jsem jej, uvědomila jsem si, že je těžké při individuálních interview nenapovídat správné řešení. Zejména u mlčenlivých dětí, jako je Honzík. Možná právě proto, že Honzík nechtěl, nebo neuměl vyjádřit svoje myšlenky slovy, jeho odpovědi mne nutily k popisu postupu, který znal ze školy nebo z osobního života (příklad s koláčem – krájení podle babičky (krok 3).

Honzík často používá neformální postup, který Uta Häsel – Weide nazvala „pouhý výsledek" – např. krok 84 je jeho typickou odpovědí. Dostávalo se mi této odpovědi jak při hodinách souvislé praxe, tak i při počítání domácích úkolů.

Příklad pro 1. ročník

Maminka má 24 korun a chce je rozdělit mezi svoje 3 děti tak, aby měly stejně.

MARTÍNEK

1 Exp.	Maminka má 24 korun a chce je spravedlivě rozdělit mezi svoje 3 děti. Jak to budeš řešit?
2 Martínek	*Nevím.*
3 Exp.	Trochu ti pomůžu. Dej dohromady hromádku 24 korun. (K dispozici má desetikoruny, pětikoruny a koruny.)
4 Martínek	*To asi nedokážu.*
5 Exp.	Teď máš desetikorunu a pětikorunu. Kolik máš celkem? 10 a 5 to je…
6 Martínek	*Dvacet.*
7 Exp.	Ne, patnáct. 15 je víc než 24 nebo míň? Je to málo?
8 Martínek	*Hm. Míň.*
9 Exp.	Takže potřebuješ ještě něco… Přidal jsi korunu. Měl jsi 15 a teď máš?
10 Martínek	*Šestnáct.*
11 Exp.	Přidal jsi desetikorunu. Kolik máš? (Martínek krčí rameny) Je to víc nebo míň než 24?
12 Martínek	*Míň.*
13 Exp.	Martínku, je to víc než 24. Kolik potřebuješ ubrat, abys měl 24?
14 Martínek	*(Mlčí.)*

15 Exp. Pomoz si počítáním po řadě tak, jak to umíš 1, 2, 3 (začnu, on se přidá) … 23, 24. A tady máš 25, to je o 1 víc. Budeš muset vyměnit jednu minci. (Vyměním desetikorunu za dvě pětikoruny.) Teď máš pořád 25 korun. Mohla bych ti vyměnit pětikorunu, za 5 korunek. Co ty na to? (Provedu výměnu.) Pořád máš 25 korun, pomůže ti to, že bys nějak rozdělil to, co máš, abys měl 24 korun? (*Odstranil jednu korunu*.) Dal jsi na stranu 1 korunu, takže teď máš 10 + 5 = 15, 15 + 5 = 20, 20 + 1 = 21, 21 + 1 = 22, 22 + 1 = 23, 23 + 1 = 24. Máš stejně jako maminka. V tomto příkladu měla maminka tyhle peníze rozdělit mezi 3 děti. Rozděl mi to, aby 3 děti měli stejně. Kdybys potřeboval, můžu Ti vyměnit některé mince třeba pětikorunu za 5 korun, jako prve.

16 Martínek *(Dělá 3 hromádky: 10 + 5 + 5; 1; 1 + 1 + 1)*

17 Exp. Takhle to rozdělíš mezi 3 děti?

18 Martínek *Tak to asi nedokážu.*

19 Exp. Nevzdávej se. Můžu ti je rozměnit. Rozdělím ti papír na 3 části. Jeden bude Honzík, druhý Martínek a třetí Šárka. Teď máš 3 děti.

20 Martínek *(Začne korunami, každému dá jednu. Pak přidělí 5 + 1, 10 + 1, 1 + 1 a pětikorunu si nechá.)*

21 Exp. Teď mají stejný počet mincí. Tahle má 2 jedničky, tahle jedničku a desítku, tahle jedničku a pětku. Co když vyměníš tu pětikorunu za desetikorunu. Teď by měli Honzík a Martínek stejně – 6 korun. Dám ti za desetikorunu dvě pětikoruny.

22 Martínek *(Hned odstraní jednu korunu a dá místo ní pětikorunu.)*

23 Exp. Všichni mají 6 korun. A tobě ještě 6 korun zbylo. Jak těch 6 korun rozdělíš? Vyměním ti za ně 6 kusů korun. Teď máš tady 6 korunek, ty můžeš rozdělit na 3 díly.

24 Martínek *(Udělá sám.)*

25 Exp. Spočteš, kolik mají?

26 Martínek *To asi nespočtu.*

27 Exp. Ale spočteš, já ti pomůžu. Nezačneme od 1, ale od 5 a budeme počítat dál 5, 6, 7, 8, 9…

28 Martínek *(Ukazuje si, spočte 8.)*

29 Exp. Všichni mají stejně – pětikorunu a 3 kusy korun. 5 + 3 = 8. A kolik je 5 - 3?

30 Martínek *Dva.*

31 Exp. Aha. Za desetikorunu ti dám 2 pětikoruny. Pětikorunu ti můžu rozměnit na pět korun. Kolik dostaneš za 2 koruny?

32 Martínek *(Mne si oči.)*

33 Exp. Měli by stejně? (Vyměňuji 2 koruny za dvoukorunu: 5 + 2 + 1 a 5 + 1 + 1 + 1)

34 Martínek *Nevím. Jsem už unavenej.*

Komentář:

Martínek měl v září nastoupit do 1. třídy. Při tvoření příkladů jsem vycházela z učebnic Alter. Jelikož jsem chtěla pro všechny třídy vybrat příklady, které by žáci probírali ve škole až 6-12 měsíců po testování, narazila jsem hned u prvního předloženého příkladu Martínkovi na problém. Na základě tohoto zkušebního rozhovoru jsem příklady pro nejmladší žáky přeměnila tak, abych děti neodradila záludností, kterou pro ně představuje přepočítávání peněz. Upustila jsem od toho a dětem jsem předložila místo peněz kolečka.

3.6.3 Druhá zkušební verze

Tuto verzi řešili dva žáci 3. třídy – David a Pavlínka. Podle třídní učitelky to jsou dva nejšikovnějšími žáky na matematiku ve třídě. Jejich postupy při řešení uvádím dále.

Úlohy pro 3. ročník

1. úloha

200 – 5 = 150	486 + 104 = 590
930 + 10 = 940	647 – 47 = 600
174 – 32 = 142	8 + 392 = 400
90 + 340 = 430	842 – 291 = 551
720 – 80 = 640	506 + 396 = 902

2. úloha

Rozděl obdélník na čtvrtiny.	Rozděl koláč pro 8 dětí.
Rozděl obdélník na osminy.	Rozděl 5 pomerančů dvěma dětem.
Rozděl obdélník na šestiny.	Rozděl 4 koláče 3 děvčatům.
Rozděl koláč pro 4 děti.	Rozděl 6 jablek 4 chlapcům.

3. úloha

50 . 3 = 150 60 . 4 = 240

4. úloha

Kolik hodin má týden? Kolik hodin má měsíc leden?

DAVID

1 Exp.	200 – 50 = *150*
2 David	*To je jako, když si řeknu 100 – 50 je 50 a ještě si k tomu připočtu tu stovku.*
3 Exp.	930 + 10 =
4 David	(Neumí přečíst 930 – zkouší) *Devadesát, devět, devět set třicet plus deset. 940. To je jako 3, 30 + 10 je 40. A přidal sem si tu devítku.*
5 Exp.	174 – 32 =
6 David	*Sto sedmdesát čtyři se rovná 142.*
7 Exp.	Jak jsi došel k výsledku?
8 David	*40, 70 - 30 = 40, 4 - 2 = 2 a pak sem si přidal tu stovku.*
9 Exp.	90 + 340 =
10 David	Čtyři sta třicet. *Z 90 sem si tam dal 60 a pak mi zbylo 30, tak sem udělal 430.*
11 Exp.	720 – 80 =
12 David	*Sem si řek 80 – 20 = 60, tak jsem si řek – když je tuto (80) větší než tuto (20), tak se ještě odečte ta jedna desítka a vyjde to 660.*
13 Exp.	486 + 104 =
14 David	*Sem si řek 8, ale 40 + 10 je 50 a pak 86 + 4 je 90 a tam sem si dal ještě ty stovky a vyšlo 590.*
15 Exp.	647 – 47 =
16 David	To *bylo jednoduchý. Sem si řek 47 – 47 je nula, tak jsem tam dal 600.*
17 Exp.	8 + 392 =
18 David	*Sem si řek 300, eh 9, 92 + 8 je 100, 300 a 100 je 400.*
19 Exp.	842 – 291 =
20 David	*200 – 80 je 60, teď sem ten příklad, nevim…*
21 Exp.	Co z toho umíš odečíst?
22 David	*Těch 900, 90 a 40 je 50. A 2 a 1 je 1. 651.*
23 Exp.	506 + 396 =
24 David	*Sedum. Ne tady to už je chyba.*
25 Exp.	Tak to škrtni.

26 David *9, 2, 0 (920) Jsem si řek 50 + 30 je 80, pak jsem si řek 96 plus tuto (6) je 102 a pak jsem si přidal tu 100 k …*

27 Exp. Když tak si to napiš, to co víš, cos správně spočítal.

28 David *Ee. 102 Plus tich 80 je 90.* 80?

29 Exp. Tady máš 500 + 300, takže ne 80-…

30 David *80 + tu 100 je 90…*

31 Exp. Když si to rozepíšeš, třeba ti to pomůže-…

32 David *Tady to nebude 920, ale 902 ta 2 a 0 bude obráceně.*

33 Exp. Obdélník – rozděl mi ho na čtvrtiny. Víš, co to je čtvrtina?

34 David *Ehm, čtvrtka. Takhle ho přeložím.*

35 Exp. Hm, tak, aby byly všechny stejné. Takže tohle to je čtvrtka, co bude ten zbytek papíru?

36 David *Třičtvrtě.*

37 Exp. To znamená, kolik máš těch čtvrtin nebo čtvrtek, když máš tři čtvrtě?

38 David *Eště 2.*

39 Exp. Tak kolik?

40 David *Já jsem to udělal špatně. To mělo být takhle.*

41 Exp. Tak jak se dostaneš k té čtvrtině? Můžeš to třeba rozdělit na nějaký větší díl? Můžeš si nějak pomoc?

42 David *Já to neumim popsat.*

43 Exp. Tak zkus ten papír zohýbat tak, aby to byly jen čtvrtiny.

44 David *Takhle a ještě budou 2 čtvrtiny.*

45 Exp. Tak to tak udělej, zohýbej ten papír tak, aby tam byly samé čtvrtiny. Dobře, takže na kolik čtvrtin rozdělíš jeden celek, jeden papír. Spočítej mi je.

46 David *Na čtyři.*

47 Exp. Tak, jsou 4 díly, proto se jeden díl jmenuje čtvrtina. Teď si vezmi další papír a přelož mi ho na 8 stejných dílů. Tich je 6. Úžasně Ti to vyšlo přesně na 6 dílů. Jak by se nazýval ten jeden díl, jedna část? Když je jich šest…? Tady máš 4 díly, jeden se nazývá čtvrtina. Tady je jich šest, tak jedna část se bude jmenovat šestina. Zkus mi udělat teď těch dílů osm. Teď jich máš 9. Ne, 10 dokonce. Nevadí, když se teď podívám na ty 3 papírky. Tys hned věděl, že když máš papír přeložit místo na 4 díly na 6 dílů, tak ty dílky budou menší. Jak jsi na to přišel?

48 David *Aby se mi tam vešlo víc.*

49 Exp.	Dám ti koláč, rozděl mi ho pro 4 děti. (6 proužků) To vyšlo divně, viď? Nešlo by to přeložit nějak jinak? Viděl jsi mamku někdy krájet koláč?
50 David	*No, my to krájíme na víc dílů než na 4. Od středu.*
51 Exp.	Aha. Tak si vezmi jiný papír a rozděl mi ho na 8 dílů. Zkus to. Vzpomeň si na tvou maminka. Ta to krájí od středu.
52 David	*No, právě.*
53 Exp.	Když ho nakrájí, tak kde bude mít ten řez?
54 David	*Uprostřed.*
55 Exp.	Nebude mít třeba 2 řezy naproti sobě? Když to krájí do středu?
56 David	*Ne. Ona si ho otočí a krájí ho pořád stejně.*
57 Exp.	Směrem k sobě, viď?
58 David	*Hm.* (počítá překlady po 2.) 7.
59 Exp.	Tak to se nepovedlo.
60 David	*Hm, z těch koláčů je to těžký.*
61 Exp.	No a proč to překládáš stejným způsobem jako ty obdélníky? Tady je totiž problém v tom, že ten díl uprostřed má jiný tvar a velikost než ten na kraji. Zkus to přeložit tak, abys poznal, že jsou stejný.
62 David	*Nevím jak.*
63 Exp.	Rozděl pět pomerančů pro dvě děti.
64 David	*To vim, jeden bude mít dva a půl, a druhej taky dva a půl.* (Zápis: Jedno dítě bude mít 2 půl pomeranče.) *Tohle je ta půlka.*
65 Exp.	Co je půlka?
66 David	*Tohle a tohle*. (Ukazuje na svisle rozdělený kruh znázorňující prostřední pomeranč.)
67 Exp.	Takže 1 pomeranč má 2 půlky.
68 David	*Ne.*
69 Exp.	Vždyť jsi říkal, že máš 1 půlku a druhou půlku.
70 David	*Když se rozřízne, tak mi zbydou dvě půlky.*
71 Exp.	Rozděl 4 koláče 3 děvčatům. Půjde to? Tady máš 4 koláče (kolečka) a rozděl je pro 3 děvčata.
72 David	*Tahle jeden, tahle jeden, tahle jeden a z tu z toho se vezmou čtvrtky, po třech takhle* (svisle 2 čáry).
73 Exp.	Dobře takže mi to znázorni. Kolik dostane to jedno děvče?
74 David	*Jeden a čtvrť.*

75 Exp.	Rozděl 6 jablek 4 chlapcům.
76 David	*Takhle* (zakroužkuje 4 jablka) *si vemou jeden jedno jabko a tuty si rozdělí takhle tyhle na půlku* (zakroužkuje zbylá 2 jablka a svislou čarou je rozdělí na poloviny).
77 Exp.	Kolik dostane jeden chlapec?
78 David	*Jeden a půl.* (Vybarví zeleně danou část jablka.)
79 Exp.	Nenapadne tě teď jak rozdělit ten koláč na 8 dílů? Pomeranč jsi rozdělil na půl a vznikly ti 2 části, můžeš s těmi polovinami ještě něco udělat? Můžeš tu půlku rozdělit na jinou část. Kolik tam máš teď částí?
80 David	*Čtyři.*
81 Exp.	Takže máš čtyři čtvrtiny. Kolik jich máš teď?
82 David	Dva, čtyry, šest.
83 Exp.	Jsou všechny stejné?
84 David	*Ne, tyhle jsou větší. 8 dílů, ale tyhle jsou menší než tyhle*.
85 Exp.	Aha, takže, když jsi přeložil poprvé tak jsi měl 2 půlky.
86 David	*Hm.*
87 Exp.	Pak jsi ty půlky přeložil zase na půl. A měl jsi 1, 2, 3, 4 půlky. Ne, čtvrtky. No, a když potřebuju udělat za 4 dílů 8, co s tím udělám? Můžeš si pomoc třeba násobením?
88 David	*Takhle to ještě přeložím* (opět na půl).
89 Exp.	Aha, takže jsme to nakonec dali dohromady, viď?
90 David	*Hm.*
91 Exp.	Vy umíte malou násobilku, viď? Budeš si s tím vědět rady?
92 David	*Já nevim tuty na to dělení.*
93 Exp.	Nevadí. Spočti to, co umíš, s čím si budeš vědět rady.
94 David	50 . 3 = *50 + 50 + 50 = 100 + 50 = 150*
95 Exp.	60 . 4 =
96 David	*Jsem si řek 6 krát, 60 krát 4, jsem si řek 60 + 60 je 120. Plus, když je 120, tak ještě jednou 120, a 120 + 120 je 240.*
97 Exp.	Kolik hodin má týden?
98 David	*Jsem si řek: jeden den má 24 hodin. Tak jsem si spočítal ty dvacítky: 20 . 7.*
99 Exp.	To umíš spočítat?
100 David	*20, 40, 80 … 400* (20 + 20 + 20 atd.) *a pak ještě ty čtyřky – těch bude taky sedum.*
101 Exp.	Takže čtyři krát sedm. To je malá násobilka, to umíš spočítat, viď?

102 David *Hm, 28.*

103 Exp. Tak, co teď s tím?

104 David *428.*

105 Exp. Kolik hodin má měsíc leden?

106 David *Nevim.*

107 Exp. Můžeš si nějak pomoct? Tady ten týden sis rozkládal na dny, každý den má 24 hodin. Mohl bys to vypočítat, kdybys věděl, kolik dní má leden? Kdybych ti to řekla. Jak bys to počítal?

108 David *Jako tady, řek bych si 428 hodin je jeden týden, má 4 týdny ne…?*

109 Exp. To je kolik dní?

110 David *Dvacet osm.*

111 Exp. Leden má 31 dnů, ne jen 28.

112 David *Jo.*

113 Exp. Takže jak na to?

114 David *Musim si říct 4 krát tuto (428) … 400, 800, 1200, 1600… 80… a ještě osmičku… 32… 1600, 1712 hodin.*

115 Exp. Nechybí ti tam něco? Co jsi dělal tady s těmi třemi čísly?

116 David *Řek jsem si 80 + 32 je 102…* (zaražení)*… 172, 1702… sem počítal 102 + 1600 jako že 1600 + 100 je 170, 1700 a 2 je 1702.*

117 Exp. Co jsi teda prováděl za početní operaci s těmi třemi čísly?

118 David *Tady jsem násobil* (u týdne) *a tady je plus.*

119 Exp. Plus, aha, takže tys je sčítal. Tak mi tam to plus dopiš, protože takhle by mi ta čísla nic neřekla, víš.[1]

PAVLÍNKA

1 Pavlínka *200 – 50 = 150*

2 Exp. Proč?

3 Pavlínka *Protože…*

4 Exp. Pomohla by ti číselná řada?

5 Pavlínka *Hm. Že bych si našla tu 100, pak bych jim dala padesátku. A abych měla tich 200, tak tam musí být ještě jedna padesátka.*

6 Exp. 930 + 10 =

[1] Záznamový arch vyplněný Davidem viz příloha č. 1

7 Pavlínka	*Devět set čtyřicet se to rovná. 30 + 10 je 40… a když tady mam 930 a tich 30 a 10 je 40, tak je to 940. (Zápis: 30 + 10 = 40, 40 + 90 = 940)*
8 Exp.	174 – 32 =
9 Pavlínka	*Sto čtyřicet dva se to rovná. 74 jsem si nejdřív odečetla 30, místo tý dvojky jsem si dala nulu. To se rovná 44 – 2 = 42. A když k tomu dam tu stovku, tak se to rovná 142.*
10 Exp.	90 + 340 =
11 Pavlínka	(Dlouho přemýšlí.) *430, protože 90 + 40 je 130 a pak těch 300 + 130 je 430.*
12 Exp.	720 – 80 =
13 Pavlínka	*640. Jsem si řekla: 80 - 20 = 60, pak tich 700 minus tich 60.*
14 Exp.	486 + 104 =
15 Pavlínka	*400 + 100 = 500, 86 + 4 = 90. Tich 500 a 90 je 590.*
16 Exp.	647 – 47 =
17 Pavlínka	*47 - 47 je nula a když tady mam 600, tak přičtu tu nulu a je to 600.*
18 Exp.	8 + 392 =
19 Pavlínka	*8 + 92 = 100 a tich 300 + 100 = 400.*
20 Exp.	842 – 291 =
21 Pavlínka	*653. 800 – 200 = 600 a 91 - 42 se rovná. Já jsem na to přišla, že těch 90 - 40 je 50 a tich 2 + 1 je 53.*
22 Exp.	A proč plus? Vždyť to odčítáš! 647? Jak jsi na to přišla? Řády jednotek – ukaž mi je.
23 Pavlínka	*Tady ta dvojka a jednička.*
24 Exp.	Ano, a když je odečteš, 2 - 1 je kolik?
25 Pavlínka	*Jedna.*
26 Exp.	Aha, takže na konci nebude žádná sedmička, ale jednička. Co ty desítky a stovky? (mlčí) Od té 90 odečteme tu 40 a…
27 Pavlínka	*A zbyde mi 50.*
28 Exp.	Co teď s tím? Proč sis těch 90 rozdělila na 40 a 50? Napiš mi ten výsledek, já vidím, že výsledek víš, ale neumíš to vysvětlit, viď? Napiš mi ho.
29 Pavlínka	*649. (800 – 200 = 600, 90 – 40 = 50, 2 – 1 = 1, 50 – 1 = 49, 600 + 49 = 649)*
30 Exp.	506 + 396 =
31 Pavlínka	*506 + 300 = 806, 806 + 96 = 912.*[2]

[2] Záznamový arch vyplněný Pavlínkou viz příloha č. 2

Komentář:

David i Pavlínka neměli s vyřešením příkladů problémy. Komplikace nastaly ve chvíli, kdy jsem po žácích chtěla vysvětlení, jak se dostali k výsledkům - u Davida to byly kroky 8, 12, 14, 26, 114 a 116. Zdá se, že mu chyběl „odborný jazyk“, který se žáci učí během vyučování od svých učitelek. Jejich vlastní slovník jim nestačil na to, aby popsaly svůj postup. S tímto problémem jsem se setkala u všech dětí.

3.6.4 Úprava testu

Po otestování Pavlínky a Davida mě jejich třídní učitelka poprosila o zkrácení testu, protože jsem oba připravila o celou jednu vyučovací hodinu. Její žádosti jsem ráda vyhověla, protože testování by bylo příliš zdlouhavé.

Prošla jsem znovu všechny verze pro tři testované ročníky a typy příkladů jsem zkrátila na max. 5 příkladů. Tyto verze jsem dětem připravila tak, aby na předložených listech byl dostatečný prostor pro jejich poznámky a mezivýpočty.

Jelikož jsem tiskla testy na domácí nepříliš kvalitní tiskárně, došlo při testování k zajímavé situaci. Stalo se tak u žáků třetí třídy, kteří měli řešit úlohy s podělováním dětí – pomeranče, koláč a čokoláda. Tyto suroviny jsem dětem znázornila kruhy a obdélníkem, který se nevytiskl kvalitně, a děti úlohu nejprve odvozovaly od vzniklých mezer. Raději jsem si pro ně připravila náhradní řešení v podobě nastříhaných obdélníků z čistého papíru a tak žáci měli hned nový problém k řešení.[3]

ÚLOHY PRO 1. ROČNÍK

Po zkušební verzi jsem usoudila, že peníze nahradím papírovými kolečky. Tyto kolečka jsme při interview několikrát využily i u jiných příkladů. Následovaly slovní úlohy o spoření, které se nejjednodušeji daly vypočítat pomocí operace násobení. Chtěla jsem zjistit, jak si s takovou operací žáci 1. třídy poradí. Následující příklad spočíval v poznání geometrické představivosti dětí – slovní úloha se zahradníkem.

[3] *Pozn.: Verze pro jednotlivé třídy jsem otiskla v příloze (č. 3. – 5.), protože se jednalo o oboustranné archy formátu A4 a zmenšené fotokopie by nebyly přímo v textu diplomové práce čitelné.*

Považovala jsem tento příklad za lehký. Čtvrtou úlohou byly příklady na sčítání a odčítání v oboru do 100, přičemž děti dokončovaly počítání v oboru do 10. Záznamový arch viz příloha č. 3.

ÚLOHY PRO 2. ROČNÍK

Pro druhou třídu jsem záměrně zvolila 3 stejné typy úloh jako pro první třídu. Chtěla jsem se přesvědčit, zda bude znát nějaký pokrok na cestě od zadání k výsledku, a také jsem chtěla zjistit, čím je případný posun způsoben. K těmto úlohám jsem přidala ještě další dva lehké, oddychové typy. Jeden spočíval v porovnávání čísel, druhý ve čtení větších čísel, kde jsem záměrně nepoužila oddělování řádů tisíců a naopak zařadila velké množství nul. Nulu školáci často opomíjejí, i přesto že je to jedno z prvních čísel, které se malé děti naučí a poznají ji v libovolném textu, zejména mezi předškoláky je nula velmi oblíbená. Záznamový arch viz příloha č. 4.

ÚLOHY PRO 3. ROČNÍK

Od tohoto testu jsem si slibovala zjištění, jaké zlomky nebo základy k výuce zlomků si děti přináší z vlastních zkušeností. Stejně tak jsem chtěla zjistit, jak si dovedou poradit s aplikací zlomků na geometrických tvarech, kruhu a obdélníku. Dalším úloha se týkala operací sčítání a odčítání v oboru do 1000 před tím, než byl tento obor uveden ve výuce. Dále pak násobení a dělení dvouciferných a trojciferných čísel v době, kdy žáci probírají malou násobilku. Na závěr testu jsem žákům předložila dvě slovní úlohy, které se dají vyřešit dosazením čísel do rovnice. Dosazovaná čísla však děti musí vymyslet, lépe řečeno přenést z jiného předmětu nebo ze svých zkušeností. Byla jsem zvědavá, zda žáci dokážou propojit znalosti z prvouky nebo ze života se sestavením matematické rovnice. Záznamový arch viz příloha č. 5.

3.7 Videozáznamy

Na ZŠ Komenského v Nýrsku se děti setkají s videokamerou pouze první den v první třídě, při výuce se nevyužívá a děti na ní nejsou zvyklé. Požádala jsem tedy rodiče žáků o svolení k testování s použitím kamery. Nesouhlasilo 5 rodičů, jejichž děti jsem netestovala. Rodiče i žáci byli ubezpečeni, že záznam nebude veřejně použit, shlédnu ho pouze já a rozhovor bude jen písemně ocitován v mé diplomové práci.

S každým žákem probíhal individuální rozhovor ve třídě, která nebyla v té době používána pro výuku. Testování probíhalo v době výuky.

3.7.1 Natáčení videozáznamů

Při natáčení jsem pozorovala nejen to, jakou cestou se žáci vydali a jak popisovali svá řešení, ale i různý zápis „důležitých bodů“ v příkladu a samotný záznam výsledků. Zajímavostí bylo i chování žáků, když zjistili, že je budu natáčet. Každému dítěti jsem osobně vysvětlila, proč potřebuji jejich pomoc s různými příklady, a jen tak mimochodem jsem podotkla, že je budu natáčet na videokameru. Té si mohli samozřejmě všimnout hned po příchodu do třídy, kde rozhovory probíhaly. Na dětech po této informaci bylo vidět lehké zděšení. Když jsem je ujistila, že záznam „nebudu pouštět nikde na náměstí, uvidím ho jenom já“, žáci se uklidnili. Dodala jsem tedy jen toto: „Záznam potřebuji, abych si doma mohla náš rozhovor doslova přepsat, protože teď bych to nemusela stihnout. Některé děti totiž vysvětlují moc rychle a já tak rychle nepíšu.“ Žáci se poté uklidnili a rozhovor mohl začít.

Zajištění videonahrávek bylo důležité zejména pro zachycení drobných detailů a odchylek v odpovědích žáků, které jsem při samotném interview sama nepostřehla. Abych mohla z videozáznamu citovat odpovědi žáků, požádala jsem o pomoc kamaráda Milana Hošťálka, který zajišťoval technickou stránku natáčení a z videozáznamu mi vytvořil DVD.

3.7.2 Vliv videokamery

Kamera měla otočnou obrazovkou, na které jsem kontrolovala stav kazety. V Nýrsku nebyl žádný problém s natáčením, protože kameru jsem měla postavenou vedle sebe a děti na displej neviděly, protože seděly naproti mě. Většina nýrských dětí přestala během chvíle kameru úplně vnímat. Pokud se stalo, že jsem uprostřed rozhovoru musela vyměnit kazetu, přítomný žák se díval, jak s kamerou pracuji, a čekal na pokyn, po němž mohl začít opět mluvit.

Jiná situace byla v Českém Krumlově. Zdejší prostory kabinetu mi nedovolily posadit si žáka proti sobě, nýbrž vedle sebe, a tak kamera stála na stole a přímo proti nám. Při natáčení jsem proto měla problém s dětmi, které více než příklady zajímala videokamera, a proto nebylo snadné udržet jejich pozornost. Každé dítě se alespoň jednou podívalo na malou obrazovku. Několik žáků se „kontrolovalo“ v displeji častěji.

Vybavuji si zejména jednoho krumlovského hyperaktivního chlapce, který byl velmi roztěkaný a neustále sledoval kameru. Během testování se ptal: „To jsem já? A vy mě nahráváte? A proč?“ Zapomněl, že jsem mu přítomnost kamery vysvětlila hned na začátku, tudíž jsem mu důvod vysvětlovala během rozhovoru několikrát.

Přesto se dařilo projít všechny příklady relativně snadno. Jeden rozhovor trval průměrně 20-30 minut.

4. VÝSLEDKY VÝZKUMU

Tuto kapitolu jsem rozdělila na dvě části: kvantitativní zpracování výsledků žáků a kvalitativní zpracování.

4.1 Kvantitativní zpracování

V následující kapitole se zabývám kvantitativním zpracováním výsledků. Pro přehlednost jsem u některých příkladů vytvořila tabulky, které dokumentují množství způsobů u jednotlivých příkladů a zároveň ukazují četnost zvoleného řešení. Za samozřejmost jsem považovala ukázky příkladů, které názorně dokumentují různé varianty řešení, které však uvádím v příloze č. 6.

V jednotlivých názvech kapitol uvádím ročníky, ve kterých probíhal výzkum daného úlohy. Při zápisu variant používám následující zkratky:

1. N	1. ročník Nýrsko;
2. A, 2. B	2. ročníky Nýrsko;
3. N	3. ročník Nýrsko;
1. ČK nebo ČK	1. ročník Český Krumlov;
N 10/24	10 žáků zvolilo danou variantu/celkem 24 žáků ve třídě.

4.1.1 Rozděl 12 koleček 3 dětem – 1. ročník

- Děti rozdávaly do 3 skupin vždy po jednom kolečku N 10/24, ČK 8/12
- Děti rozdávaly po trojicích, někdy měly problém se 4 skupinami po třech kolečkách, pomáhala jsem jim N 10/24, ČK 4/12
- Děti rozdělovaly po dvojicích N 2/24
- Chyba v odpočtu 12 koleček a následná neschopnost rozdělit N 2/24

4.1.2 Kamarádi počítají své úspory 12 . 2; 8 . 3; 6 . 4 (1. a 2. ročník)

- Žáci po jedné odpočítají vždy danou skupinu 12, 8 nebo 6 korun a následně tuto dvojici, trojici nebo čtveřici shrnou v jednu velkou skupinu a znovu po jedné přepočítají všech 24 koleček (někdy s chybným výpočtem).
  - 12 + 12 = 24 1. N 20/24, 1. ČK 9/12
    2. B 9/14, 2. A 14/21

    - 8 + 8 + 8 = 24 1. N 22/24, 1. ČK 11/12
      2. B 13/14, 2. A 21/21
    - 6 + 6 + 6 + 6 = 24 1. N 18/24, 1. ČK 12/12
      2. B 8/14, 2. A 21/21

- Další varianty nevedly ke správnému výsledky a končily ve většině případů buď v nesprávném postupu, nebo si žáci vůbec nevěděli rady
    - Obtíže v počítání od 1 do 20 (12 + 12) 1. N 2/24, 1. ČK 3/12
    - Nedokončilo (8 + 8 + 8) 1. N 1/24
    - Postup 15 + 7 + 3, jiné postupy bez výsledku 1. N 1/24, 2. B 1/14
    - Sčítání čísel, která jsou v zadání např. 4 + 6 (počet dětí + počet hotovosti), s pomocí došli k prvnímu postupu nebo vůbec nedokončili (6 + 6 + 6 + 6)
      1. N 3/24, 2. B 2/14

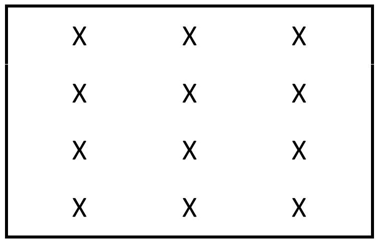
- Zápis postupu jako násobení, příp. následné převedení násobků na sčítance
    - 10 + 10 a 2 + 2 = 20 + 4 1. N 2/24, 2. A 7/21, 2. B 5/14
    - 3 . 8 = 24 1. ČK 1/12
    - 3 . 6 + 6 1. N 1/24, 2. B 3/14
    - 4 . 6 1. N 2/24, 2. B 1/14

4.1.3 Zahradník – 1. a 2. ročník

X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X

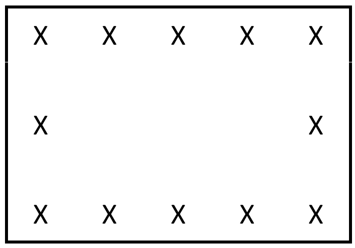
Varianta č. 1

Žák má vytvořeny některé prekoncepty dělení a stromy rozděluje do pravidelného tvaru 4 sloupců a 3 řádek. Tuto variantu zvolilo 8 žáků z 1. N, 3 žáci z Českého Krumlova a 1 žák z 2. A.



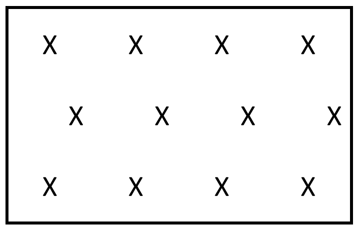
Varianta č. 2

Žáci zvolili obdobný postup jako u předchozí varianty, ale prvky rozmístili do 4 řádků a 3 sloupců. Takto rozmístili stromy pouze dva žáci – jeden z prvního krumlovského ročníku a druhý z 2. B.



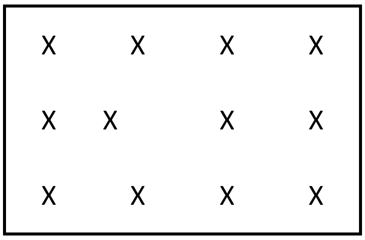
Varianta č. 3

Jediný krumlovský žák patrně vycházel ze zkušenosti s živým plotem, který se vysazuje po obvodu pozemku.



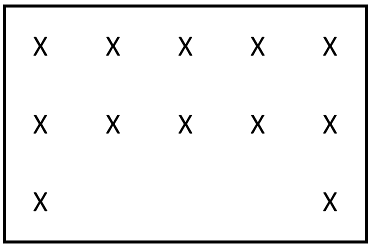
Varianta č. 4

Tato varianta se velmi podobá prvnímu způsobu, jen dětem v důsledku náhodného rozmísťování stromů vzniklo posunutí do strany u prostřední řady 4 stromů. Stalo se tak u 2 žáků prvního ročníku z Nýrska, u jednoho krumlovského žáka a u žáka 2. B.



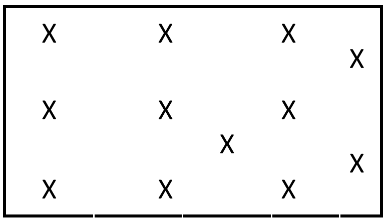
Varianta č. 5

V důsledku posouvání a vyrovnávání stromů vznikl jedné krumlovské žačce tvar připomínající také první variantu, ovšem jeden strom se vymyká jinak rovným liniím řádek a sloupců, přičemž se jednalo o jeden ze dvou vnitřních stromů.



Varianta č. 6

Krumlovský žák se dobral k zajímavému závěru tak, že skládal kolečka do řady. Jelikož kolečka byla velká a do jedné řady se jich vešlo jen pět, pokračoval na další řádce opět pěti kolečky a zbylá dvě umístil do rohů.



Varianta č. 7

Zajímavé řešení se podařilo jednomu nýrskému prvňákovi, stejně jako jednomu krumlovskému žákovi a dvěma dětem z 2. A. Náhodným rozmísťováním sestavili devět stromů do pravidelné formace 3 . 3, a zbylé 3 stromy vměstnali do mezer.

__Další varianty__

Poměrně častá varianta bylo řazení všech 12 stromů do jediné řady nejlépe se začátkem v levém horním rohu. Většinu žáků, kteří úlohu takto řešili, se mi povedlo přesvědčit, aby stromy alespoň trochu rozmístili do volného prostoru. Vznikaly tak různé skupiny po dvou, po třech stromech, některé připomínaly květiny, ale spíše působili neorganizovaně.

4.1.4 Sčítání a odčítání – 1. a 2. ročník

50 – 10 = 40

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady:
  1. N 12/23, 1. ČK 9/12, 2. A 2/21, 2. B 1/14
- Skupina správných postupů, částečných postupů, početní chyby (postup 5 – 1 = 4 a přidali nulu; přirovnání k 60 + 20 = 40; protože 40 + 10 = 50):
  1. N 11/23, ČK 3/12, 2. A 19/21, 2. B 13/14

40 + 5 = 45

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady:
  1. N 6/23, 1. ČK 3/12, 2. A 5/21, 2. B 3/14
- Skupina správných postupů, částečných postupů, početní chyby („protože to slyší“): 1. N 17/23, 1. ČK 9/12, 2. A 16/21, 2. B 11/14

56 – 20 = 36

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady:
  1. N 19/23, 1. ČK 11/12, 2. A 14/21, 2. B 8/14
- Skupina správných postupů, částečných postupů, početní chyby (postup 56 – 10 – 10; 56 – 6 – 6 – 6 – 2; 50 – 20 = 30; a když je 56, tak bude i 36):
  1. N 4/23, 1. ČK 1/12, 2. A 7/21, 2. B 6/14

24 + 38 = 62

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady:

  1. N 19/23, 1. ČK 9/12, 2. A 14/21, 2. B 6/14

- Skupina správných postupů, částečných postupů, početní chyby:

  1. N 4/23, 1. ČK 3/12, 2. A 7/21, 2. B 8/14

63 - 25 = 38

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady:

  1. N 18/23, 1. ČK 10/12, 2. A 16/21, 2. B 10/14

- Skupina správných postupů, částečných postupů, početní chyby:

  1. N 5/23, 1. ČK 2/12, 2. A 5/21, 2. B 4/14

4.1.5 Větší/menší – 2. ročník

VARIANTA	2. A	2. B
12345 < 1234567		
bez problémů určili (větší číslo má více číslic)	21	14
45213 > 21		
bez problémů určili (větší číslo má více číslic)	21	14
9 < 19		
bez problémů určili (větší číslo má více číslic)	21	14
75 > 57		
bez problémů určili (větší číslo má více číslic	17	13
rovnají se, jsou v nich stejné číslice (oprava*)	2	1
bez < / >, podtrhnutí celého většího čísla, nebo 1. dvě číslice	2	0
654 < 655		
protože je na konci 5, a to je větší než 4	21	13
protože je na konci 55, a to je větší než 54	0	1

4.1.6 Čtení větších čísel – 2. ročník

VARIANTA	**POČET ŽÁKŮ**	
	2. A	2. B
24		
bez problémů	21	14
86		
bez problémů	20	14
čte jako 76	1	
107		
bez problémů	13	9
čte jako 1, 0, 7	5	2
čte jako 10, 7	1	2
čte jako 170	1	1
Nepřečte	1	0
5009		
bez problémů	6	2
čte jako 5, 0, 0, 9	6	5
čte jako 159; pak 5, 0, 0, 9	1	1
čte jako 5, 0, 9; pak 5, 0, 0, 9	1	0
čte jako 509; příp. oprava 5, 0, 0, 9	3	4
čte jako 50, 0, 9	0	2
čte jako 5, 9	1	0
čte jako 5, 0, 0, 0, 9	1	0
Nepřečte	2	0
3000000		
bez problémů	8	1
čte jako 300	2	0
čte jako 30	1	0
čte jako 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0	8	9
Nepřečte	2	0
čte jako 3000	0	1
čte jako 30, 0, 0, 0, 0, 0	0	1
čte jako 30000; pak oprava 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0	0	1
zkouší milion; 3000; nekonečno; 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0	0	1
CELKEM ŽÁKŮ 35 VE TŘÍDĚ	21	14

4.1.7 Sčítání a odčítání – 3. ročník

8 + 392 = 400

- Jeden žák postupoval 8 + 39 = 37 + 2 = 39
- Správný postup a výsledek: 20/21

842 – 291 = 551

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady: 10/21
- Skupina alespoň částečně správných postupů, početní chyby: 11/21

486 + 104 = 590

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady: 2/21
- Skupina alespoň částečně správných postupů, početní chyby: 19/21

720 – 80 = 640

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady: 7/21
- Skupina alespoň částečně správných postupů, početní chyby: 14/21

506 + 396 = 902

- Skupina špatných postupů a následně i výsledků, nebo si nevěděli rady: 3/21
- Skupina alespoň částečně správných postupů, početní chyby: 18/21

Žáci ve všech úlohách s operací sčítání rozkládali čísla na jednotky, desítky a stovky. Dále sečetli jednotlivé řády a pak tyto výsledky dávali dohromady – bohužel v tomto kroku docházelo často k početním chybám. Často se vyskytly i chyby v zápisu, kdy si žáci chtěli ulehčit a stovky zapisovaly jako jednotky, ovšem pak je považovali právě za jednotky. Vznikaly tak „nesmyslné“ výsledky.

U operací odečítání žáci v několika případech zaměnili tuto operaci za sčítání. Většina chyb však vznikala při přechodu přes desítku, nebo z obdobných důvodů jako u sčítání – početní chyby a chyby v zápisu. Dalším problém nastával u rozkladu na řády, kdy žáci narazili na záporné číslo, které si „převedli“ na kladné, ovšem z neznalosti tak vznikaly chyby ve výsledku – např. postup 800 – 200 = 600; 91 – 42 = 51; 600 + 51 = 651.

Jako špatné postupy děti volily např. sčítání cifer (5 + 0 + 6 + 3 + 9 + 2) nebo zápis řádů a následné chyby ve výpočtu (506 + 396 = 5 + 3= 8; 6 + 6 = 12, 12 + 8 = 20; 20 - 9 = 11) atd. Úlohy na odčítání žáci v několika případech zcela vzdali, ojediněle se tak stalo i u sčítání – zejména u posledního příkladu.

4.1.8 Násobení a dělení – 3. ročník

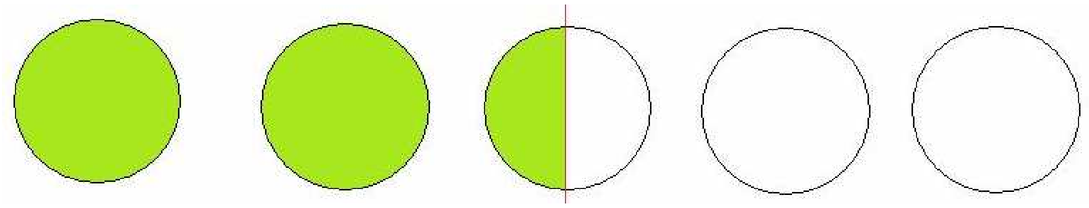
VARIANTA	POČET ŽÁKŮ
50 . 3 = 150	
50 + 50 + 50 = 150 (jeden zápis jako 1050)	15
5 . 3 = 15 + nula na konci jako u 50	1
500	1
Neví	4
180 : 6 = 30	
30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 (Vietnamka)	1
60 + 60 + 60	1
18	1
Neví	18
31 . 20 = 620	
dvě zkušební verze 60 . 4 = 240	2
správný postup 20 + 20… nebo 31 + 31…	4
záměna sčítání	2
špatné výsledky (61, 301, 320) nebo neví	12
30 . 20 + 1 . 20 = 620 (1. třída v dom. učení)	1
240 : 8 = 30	
30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30… (Vietnamka)	1
ví, že 40 : 8 = 5	1
špatné výsledky (16, 24, 406) nebo neví	19

4.1.9 Zlomky – 3. ročník

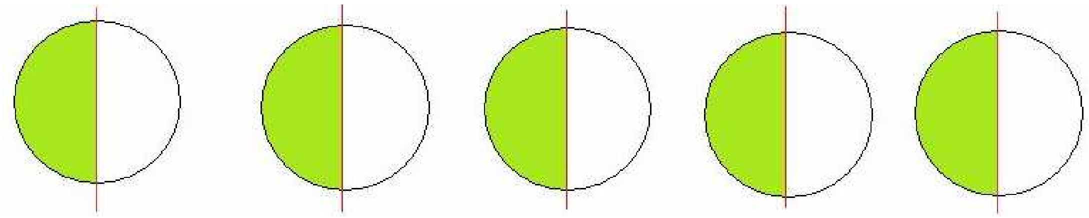
PŘÍKLAD	POČET ŽÁKŮ
	3. třída
Čokoláda	
Rolují papír na 6 dílů (3 děti), 8 dílů (4 děti), 9 dílů (1 žák) a 10 dílů (1 žák)	9
Rolují papír, ale stále nevychází, zmenšují, zvětšují, zmatek v přehybech	3
4 svislé přehyby, 1 vodorovný přehyb	3
Čáry svisle, vodorovně, většina přes celý papír, ale někdy zbývá volné místo, jednou nejsou dotažené čáry k okrajům – jakoby rozdělený vnitřek	6

PŘÍKLAD	POČET ŽÁKŮ
	3. třída
Pomeranče	
jeden rozpůlím a pak každý dostane dva	19
všechny rozdělím na půl a každý dostane 5 půlek	2

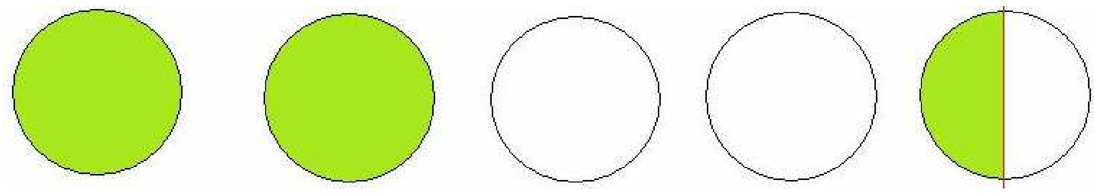
Pomeranče – grafické znázornění 4 variant



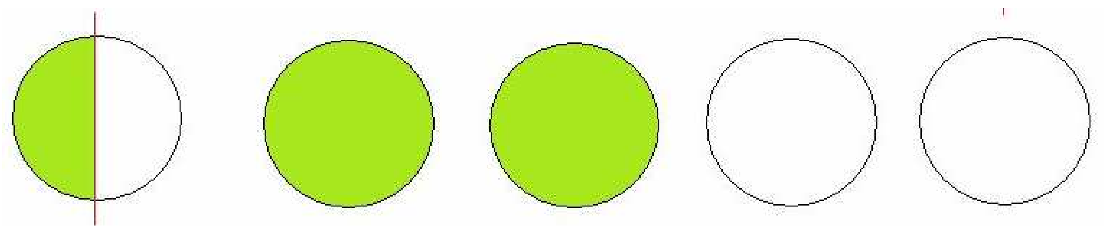
Rozdělení v polovině – nejčastější



Rozdělení na 5 polovin – dva žáci

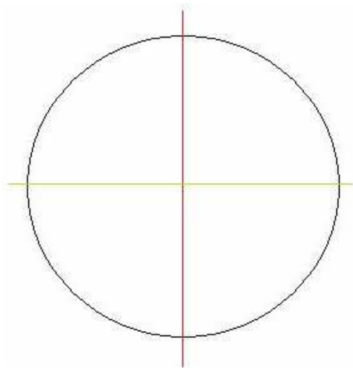


Rozdělení po dvojicích a poslední na polovinu – někteří z 19 dětí

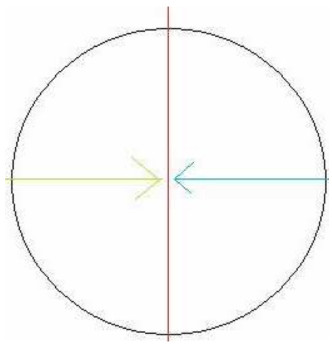


Rozdělení prvního pomeranče na polovinu a pak po dvojicích – 1 žák z 19

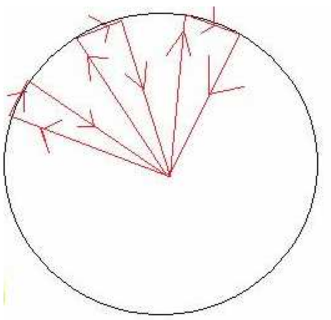
PŘÍKLAD	POČET ŽÁKŮ
	3. třída
Koláč	
1. varianta - svisle na 1/2, pak vodorovně na 1/2	19
2. varianta - od středu ke kraji, po kraji, ke středu - trojúhelníky, jako koláč	1
3. varianta - na 5 dílů od středu ke kraji	1



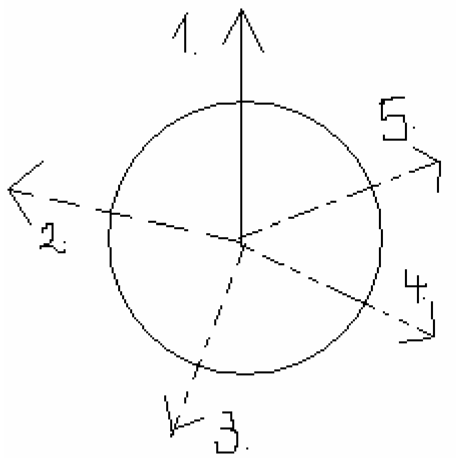
1. varianta



obdoba 1. varianty



2. varianta



3. varianta

4.2 Kvalitativní zpracování

V této kapitole uvádím shrnutí vždy daného typu příkladů, diskusi výsledků a popis řešení (názorné ukázky v příloze č. 6), která byla velmi originální v porovnání s výše uvedenými nejčastějšími. Při vyhodnocování jsem se opírala o kvantitativní zpracování a na jeho základě jsem pozorovala, co mají jednotlivé příklady společného, např. zda žáci začínají jednotkami, zda přičítají nebo ubírají postupně atd.

Také se zabývám vývojem strategií, které se projevily u příkladů, které byly společné více ročníkům.

4.2.1 Dvanáct koleček

Tuto úlohu děti plnily většinou úspěšně. Žáci dostali k dispozici 25 koleček a měli za úkol odpočítat 12 kusů. Většinou při počítání po jedné žáci zapomněli, kolik koleček mají odpočítat, a po dvanácti postupovali stále dál. Některé děti vynechávaly při počítání číslovky, nejčastěji čtrnáct a patnáct. Další chybou bylo ukončení počítání u desítky. Děti neuměly počítat dál po jedné. V takové situaci jsem jim pomohla. Buď jsem připomněla zadání, nebo počítala nahlas s nimi. „Po desítce přijde jaké číslo? Zase jakoby počítáš od jedné, ale vždy přidáš za to číslo koncovku –náct. Třeba jede-náct, dva-náct…“

Když jsme se s většími či menšími problémy dobrali požadovaného počtu koleček, žáci měli za úkol rozdělit tuto hromádku pro tři děti. Nejčastěji se objevovaly tři varianty:

- Děti po jedné přiřazovaly na 3 hromádky, dokud nerozdaly všechna kolečka.
- Děti vycházely z toho, že znají číslo 3 (3 lidi) a rozdělovaly po třech. Samozřejmě, že jim zbyla čtvrtá hromádka. Jejich postup se dá popsat takto:

Tři kolečka na jednu hromádku, 4. - 6. kolečko na druhou hromádku, 7. – 9. kolečko na třetí hromádku a 10. - 12. kolečko na čtvrtou hromádku. Na dotaz: *„Proč máš čtyři hromádky, když máš těch dvanáct koleček rozdělit mezi 3 děti?“* reagovaly děti různě. *„Tuhle si nechám.“* nebo *„Rozdělím mezi ty tři děti po jedné.“* nebo *„Tak to nevím, co s tím.“*

- Děti rozdělovaly po dvojicích. Zde se objevily různé postupy: jedna žákyně udělala 6 dvojic, z níž pak s mou pomocí vytvořila 3 čtveřice. Další žáci udělali 3 dvojice a zbytek rozdělili po jedné jako u první varianty.
- Do čtvrté varianty bych zařadila různé neúspěšné pokusy o rozdělení. Dětem jsem pomáhala konkrétním příkladem, např. kdy jsme určili dvě děti ze třídy a každou hromádku jsme podle daného žáka pojmenovali.

S touto názornou pomůckou neměly děti problém nalézt řešení. Jedna dívka popsala svůj postup takto:

Já dostanu jedno kolečko, Míša dostane druhé kolečko, Adélka třetí, já čtvrté, Míša páté, Adélka šesté…

Diskuze

Rozdělení skupiny předmětů na polovinu provádí děti zcela přirozeně „rozpočítáváním" a tomu odpovídající činností. Snad to pramení z životní zkušenosti – rozdělit se s maminkou, tatínkem, sourozencem, kamarádem…

Mezi dětmi, s nimiž jsem se setkala při testování, byly z tohoto pohledu velké rozdíly. Některým nedělalo potíže sčítat a odčítat. Jiné měly problémy i s počítáním po jedné v řadě do deseti a do dvaceti. Často se objevilo vynechání čísel 14, 15 a 19. Myslím si, že dětem dělají tato čísla problémy z toho důvodu, že všechna ostatní čísla 11-19 (koncovka –náct) začínají stejně jako čísla do deseti. Jeden-jedenáct, dva-dvanáct, tři-třináct, ale u dvojice čtyři-čtrnáct, pět-patnáct a devět-devatenáct je slyšitelný rozdíl. Všimla jsem si, že pokud děti i u dalšího příkladu počítaly do dvaceti, většinou vynechaly právě tato čísla, nebo alespoň jedno z nich. U psané podoby problém samozřejmě nebyl.

V první třídě je v celku logické, že děti volily nejčastěji variantu, kdy počítají a rozdělují po jedné. Toto řešení se opírá o jejich dosavadní zkušenosti: počítání členů rodiny, hraček atd. Každý rok děti o narozeninách přidávají jeden prst, když příbuzným ukazují svůj věk.

4.2.2 Úspory

Při této úloze jsem zjistila u několika dalších dětí z prvních tříd, že počítání v řadě do 20 (natož do 24) nezvládnou bez pomoci. Další potíže jsem pozorovala u žáků druhých tříd, kteří (snad z důvodů uvedených níže v diskuzi) vycházeli ze zvýrazněných důležitých čísel a doplnili mezi ně pouhé znaménko plus. Ve výše zobrazených variantách, které jsem dětem předkládala, si čtenář může všimnout zápisu příkladu:

2 kamarádi mají po 12,-

U žáků prvních tříd mne nepřekvapilo řešení: 2 + 12 = 14. V druhých třídách byla tato varianta překvapující, ale objevila se jen u dvou dětí.

Jelikož se v tomto typu objevily 3 obdobné příklady (jen jsem zaměnila čísla), zajímalo mne, zda si alespoň někteří žáci všimnou (pokud ovšem dojdou ke stejnému výsledku), že výsledek všech tří příkladů je 24. Úsměvnou reakcí byla odpověď krumlovské žákyně:

Exp. Všimla sis, že jsi vždy měla stejný počet koleček a jen jsi je přeskupila do větších či menších hromádek, a nikdy Ti žádné nezbylo ani nechybělo?

Žákyně *To je kouzlo!*

Pokusila jsem se o totéž i u další žákyně (učitelkou označená jako bystrá). Ta však na toto přeskupování vůbec nereagovala. A to ani po otázce, kolik měla koleček v předchozím příkladě, a zda jí kolečka nechyběla, nebo naopak nepřebývala, když je přeskupila místo do dvou do tří hromádek. U posledního příkladu jsem se zeptala:

Exp. Můžeš mi říct, kolik máš koleček, když jsi jich měla 24 a jen jsi vytvořila jiné skupinky, a žádné ti nechybělo ani nepřebývalo, aniž bys je počítala po jedné?

Žákyně *(Bez odpovědi - suverénní přepočítání 24 koleček po jedné.)*

Pokud mi žáci názorně ukázali, jak by vypadal jejich postup, nejčastěji psali součty daných úspor a počet sčítanců se odvíjel od množství kamarádů:

12 + 12, 8 + 8 + 8, 6 + 6 + 6 + 6

Děti v době testování byly zvyklé počítat se dvěma sčítanci. Proto se poměrně velké množství žáků pozastavilo nad situací, kdy jsem jim předložila otázku se třemi a pak se čtyřmi kamarády. Většina z nich totiž skončila právě u dvou sčítanců.

8 + 8 = 16, 6 + 6 = 12

Někteří žáci pak sami přišli na to, jak situaci vyřešit, jiným jsem i po upozornění, že mají 3 kamarády, musela poradit. Vznikaly tak následující záznamy.

8 + 8 = 16, 16 + 8 = 16 + 4 + 4, příp. 16 + 2 + 2 + 4

Je ovšem možný i způsob jiného žáčka, který měl patrně zafixovaný součet 3 + 5 = 8. Jeho zápis vypadal následovně:

3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5

Také došel ke správnému výsledku, ovšem za pomocí prstů. Pamatoval si vždy poslední výsledek a pak si na prstech ukazoval dalšího sčítance. Tedy 3 + 3 počítal jako 3 + 1 + 1 + 1 = 6. Dále 6 + 3 počítal jako 6 + 1 + 1 + 1 = 9, pak 9 + 5 jako 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14 atd.

Jedna žákyně měla také zvláštní řešení, nelogické jen na první pohled:

6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3, 15 + 7 + 3,

Někteří zpětně uváděli, jak postupovali, jak si čísla rozkládali. Jejich postup pak vypadal takto:

(10 + 10) + (2 + 2), 8 + 2 + 6 + 4 + 4, 6 + 6 + 6 + 2 + 4

Takový postup se volí i při výuce sčítání s přechodem přes desítku.

Zajímavé bylo, že variantu násobení napsalo více žáků první třídy než dětí z druhé třídy. Aby došli k výsledku, převedli si tuto operaci samozřejmě na sčítání, protože násobení neovládali.

Diskuze

Zadání příkladu jsem zvolila záměrně. Čekala jsem řešení, které se mi v prvním ročníku potvrdilo. Pokud je žákům předložena slovní úloha, z níž si mají sami vybrat „to důležité“, málokdy se stane, že dítě vymyslí jiný způsob. Čísla, která jsou v zadání, jednoduše sečte. Až s přibývajícími zkušenostmi, se žáci často ptají paní učitelky: „Je to na plus nebo na mínus?“ Žáci by měli sami přijít na odpověď, bohužel učitelé jim často odpovídají.

U těchto příkladů mi proto nešlo ani tak o to, zda si žáci dokážou uvědomit, že nelze jen sečíst čísla, která se sama nabízejí, ale především o pochopení příkladu.

Příklady jsem záměrně zvolila a napsala tak, aby děti mátly svým zadáním. Čísla se neměla sčítat, ale násobit (což samozřejmě v 1. a 2. třídě ještě neumí). To byl první problém. Další zajímavostí pro děti mohl být fakt, že výsledek byl vždy 24. I v tom však nastal mnohdy problém. Pro mne překvapující (alespoň u druhých tříd) byl i fakt, že děti si zbrkle ukazovaly na kolečkách a pak buď nějaké vynechaly, nebo naopak počítaly dvakrát. Samozřejmě se dostaly k jinému číslu než ke kýženému výsledku.

Dalším problémem, se kterým se na českých školách bojuje, je dostatek individuálního času pro vyřešení úlohy. Příprava hodiny matematiky, zejména pro tak rozdílnou třídu jako byl první ročník v Nýrsku, spočívá v dostatečném množství vhodných příkladů. Rychlejší žáci, kteří mají více zkušeností, vypočítají třeba deset příkladů za hodinu, zatímco děti, kterým dělá počítání potíže, spočítají podstatně méně. Je to samozřejmě na učitelce, kolik času přípravě věnuje, ale věřím, že tento čas jí může pomoci. Zbaví se tak potíží se „zlobivými" dětmi, které jsou již hotové nebo naopak příklady neřeší, protože neví jak.

Velmi se mi líbil přístup paní Mgr. Jany Sudové (ZŠ Komenského Nýrsko), která měla ve třídě téměř polovinu dětí s diagnostikovanou specifickou poruchou učení (SPU). Když měla předvést dětem nový typ příkladů, ukázala postup celé třídě nejprve sama. Pak si vzala k tabuli 2-3 šikovnější děti, které postup zopakovaly před spolužáky. Dál většina třídy počítala samostatně – v učebnicích, příp. na ofocených papírech z jiných učebnic nebo početnic. Zmíněná menšina s diagnostikovanou SPU se pak postupně vystřídala u tabule, kde jim paní učitelka pomáhala, když nevěděli jak dál.

Na tomto příkladu se mi potvrdila myšlenka, že děti se nenaučí vědomě počítat s čísly, která jim nic neříkají. Ke správnému zvolení čísel, matematické operace, zápisu a celkového postupu je pro ně velmi důležité vědět „o čem příklad je". Tím chci říct, že učitelka by měla žákům předkládat příklady, které děti znají z dosavadního života.

4.2.3 Zahradník

Tato úloha měla prokázat geometricky prostorové cítění žáků a zároveň ukázat, zda si žáci při řešení uvědomí, že je tato úloha předzvěstí násobení.

Domnívala jsem se, že více správných řešení bude ve vyšším ročníku, protože se žáci více blíží výkladu násobení a některé učitelky používají (i když po dětech nevyžadují) nejmenší násobky jako např. 2 x 2, 3 x 3, 5 x 5. Bylo pro mne překvapením, že ideálnímu řešení 3 x 4 se přiblížilo mnohem víc žáků z prvního ročníku.

Celkově se u žáků objevily 4 základní skupiny řešení:

- 3 x 4, nebo alespoň 3 x 3 a náhodně rozmístěné zbylé 3 – tento způsob jsem považovala za nejcennější řešení. Potvrdilo se mi, že děti mají zkušenosti s pravidelným rozmisťováním prvků do pravoúhelníka. Těchto řešení však bylo poměrně málo.

- Organizovaný zmatek – do této skupiny řadím řešení, kde se na první pohled projeví určitý systém ve výsadbě. Těchto řešení bylo zhruba stejně jako ze skupiny neorganizovaných způsobů. Zvolilo ho velké množství dětí.
- 12 v řadě – tento způsob děti často předělaly na jinou zmíněnou variantu. Ovšem až po mé otázce, zda by stromy mohly opravdu vyrůst, příp. po upozornění, že mají na zahradě ještě dost volného místa, proč ho tedy nevyužijí. Našli se však i žáci, kteří si na tomto řešení trvali.
- Náhodné rozmístění - způsob, který jsem původně přikládala za častější u prvních ročníků, volili při testování více žáci druhé třídy. Když jsem pozorovala na záznamech způsob, kterým postupně osazovali ovocný sad, všimla jsem si, že často jejich volba volného místa probíhala v jakýchsi kruzích, příp. řádcích či sloupcích. Žáci však poměrně stejně často volili místo zcela náhodně. Ve své podstatě v tom byl také jistý řád a to, posadit kolečko představující strom vždy co nejdál od předchozích. Samozřejmě čím víc bylo na papíře koleček, tím se vhodné místo hledalo hůře.

Diskuze

U tohoto příkladu jsem se sama sebe tázala, co vše může ovlivnit řešení. Stejně jako u předchozích úloh se mi potvrdilo, že děti jsou velmi ovlivněny svými dosavadními zkušenostmi. To, že se žáci prvního ročníku častěji opírali o zkušenost, nikoliv o způsoby řešení, které jsou jim předkládány ve škole (jako žáci druhého ročníku), bylo patrné na jejich odpovědích. Ptala jsem se, proč zvolili konkrétní způsob rozmístění, jestli ho nechtějí ještě vylepšit, zda jsou spokojeni, zda budou mít stromy i v budoucnu dost místa okolo sebe. Prvňáci mi často vyprávěli o sadu, který mají doma nebo u prarodičů, jak s maminkou nebo babičkou sází salát, rozsazují květiny apod. U žáků z druhých ročníků se projevovalo spíše „geometrické cítění“. Jakmile si mohli pomoci kolečky, zapomněli, jak znělo zadání, že kolečka jim jen nahrazují stromy, že mají myslet na budoucnost, zda budou mít stromy dost prostoru. Za rok a půl ve škole se naučili, jak mají slovní úlohy řešit. Úlohu si přečtou, udělají zápis, vypočtou a napíší odpověď. Při naučeném procesu však zapomínají na realitu, která se děje za okny školy. Proto se také děti často ubíraly špatnou cestou – nakreslit nebo vyrovnat řadu

12 koleček. Až když jsem jim připomněla, že strom roste a oni moc dobře vědí, jak velký může strom být, tento způsob předělali.

Pokud bych tuto úlohu měla předložit svým žákům, zavedla bych je např. v rámci přírodovědné procházky do ovocného sadu, aby si ho na vlastní oči prohlédli. Myslím si, že by jim to pro představu pomohlo.

4.2.4 Sčítání a odčítání

1. ročník

Sčítání je pro děti operace, která jim nedělá potíže. V první třídě se učí děti počítat v oboru do 20, někdy se část látky posouvá do druhého ročníku. Po předložení příkladů na sčítání v oboru do 100 se děti občas zalekly, ale přesto alespoň první úlohu úspěšně vyřešily. Tři žáci, patrně popleteni předcházejícím příkladem na odčítání, dospěli k výsledku 9, příp. devadesát. Ubrali nulu z prvního sčítance a přičetli druhého. Často jsem se také dozvěděla, že k vyřešení jim stačí říct si příklad nahlas:

Žák *40 + 5 = 45.*

Exp. Jak jsi na to přišel?

Žák *To přece slyším.*

Problém nastal u druhého příkladu s přechodem přes desítku, což se samozřejmě dalo očekávat. Ani jedna testovaná třída dosud tuto látku neprobírala. Žákům pomáhala kolečka, na kterých si příklad mohli znázornit. Přesto jen třetina nýrských dětí a čtvrtina krumlovských našla správný postup a pouhých 5 dětí ze všech testovaných došlo ke správnému výsledku.

Objevily se tvůrčí způsoby, ovšem vedoucí ke špatnému výsledku, jako sčítání všech číslic nebo řazení číslic za sebou.

Odčítání je už poněkud složitější operace. První příklad velmi často řešili takto:

Žák *50 - 10 to je jako 5 – 1 = 4, takže výsledek je 40.*

Exp. Proč se ti to zdá podobné?

Žák *Protože tady jsou nuly, ty jsem si zakryl a pak jsem jí přidal k výsledku.*

U dalšího příkladu došli k výsledku jen 4 žáci a poslední příklad nikdo nevyřešil. Pokud si žáci nevěděli rady s těmito příklady, stávalo se, že zaměňovali tuto operaci za sčítání. Jiní řekli, o jakou operaci se jedná, ale nevěděli jak na to. Našli se i tací, co u dvojciferných čísel použili např. jen desítky, nebo jen jednotky. Jedna žákyně si poradila tak, že čísla jednoduše seřadila za sebou, jen vynechala znaménko. Z příkladu 24 + 38 byl rázem výsledek 2438 a nezlomila jsem její přesvědčení ani tím, aby mi dané číslo přečetla: *„Dva čtyři tři osm – to je výsledek.“*

Diskuse

Obě operace jsou tedy pro děti jednoduché do doby, než přijde příklad s přechodem přes desítku. V prvním pololetí v první třídě se však častá odpověď „Nevím.“ dá pochopit. Pokud tato situace nastala, ptala jsem se, zda by alespoň věděli, jak na to. Většina dětí vyřešila první dvě lehčí úlohy (jeden sčítání, druhý odčítání) a pak mi žáci ukazovali, které příklady se řeší stejným způsobem. S přechodem přes desítku si zatím sice neporadí, ale mohu říci, že obě třídy plně chápaly rozdíl mezi sčítáním a odčítáním, a to nejen kvůli rozdílnému znaménku, ale již jsou ve fázi, kdy zcela porozuměly významu těchto dvou matematických operací.

2. ročník

Tito žáci dostali stejné příklady jako děti v prvním ročníku. Situace se u příkladů na sčítání opakovala – 29 (1. příklad) a 9 (2. příklad) správných řešení. A až na výjimky zbytek dětí nalezlo alespoň částečný postup, který by je dovedl k výsledku. Byl již cítit pokrok. Děti se již o přechodu přes desítku dozvěděly a uměly použít alespoň základ. Docházelo sice k početním chybám, ale postup žáci ovládali. Příklady s přechodem přes desítku neuměla řešit polovina otestovaných dětí. Ovšem sečetly třeba jen jednotky, nebo jen desítky. Osmnáct dětí si nevědělo rady s druhým příkladem vůbec. Na rozdíl od prvních ročníků jsem tedy mohla pozorovat postupy žáků při počítání. Děti nejčastěji postupovaly takto:

„Takže 24 + 38 si rozložím na 20 + 30, …to je 50. A 8 + 4, …to je dvanáct. A pak to sečtu, takže padesát plus dvanáct. To je 50 + 10, …to je šedesát, a + 2 je šedesát dva.“ Postup odpovídá výše zmíněnému počítání s řády – patrně díky stejnému postupu, který učí třídní učitelka.

Druhým způsobem bylo (částečné) postupné přičítání, které jsem spíš jen vytušila u dětí, které předchozí variantu zavrhly, ale svůj postup mi nedovedly vysvětlit, nebo ho jen částečně nastínily: „*No, já jsem postupoval tak, že jsem si řek 24 a 30 je padesát čtyři, a osm je dvanáct, a padesát je šedesát dva.*“

S odečítáním si poradilo u druhého příkladu celkem 9 dětí a dalších 5 žáků počítalo jen s desítkami, příp. s neúplnými menšenci či menšiteli. Více než polovina z 35 otestovaných vůbec netušila, jak se dobrat k výsledku. Jen pár dětí zkoušelo postupy, které vedly k chybnému výsledku, jako odečítání jednotlivých cifer ze zadání.

Diskuze

V druhém ročníku byl vidět posun, více zkušeností s počítáním oproti prvním ročníkům. Zejména znalost počítání s přechodem přes desítku žákům umožnila dojít blíže k výsledku. Podle mého soudu to potvrzuje důležitost školního výkladu, nutného výcviku v počítání a trpělivost učitelek.

3. ročník

Výše uvedené tři příklady s operací sčítání a dva příklady na odečítání žákům nedělaly větší potíže. Bravurně zvládli i přechod přes desítku v obou operacích ve všech příkladech. Svědčí o tom i fakt, že poslední příklad na sčítání nezvládl jen jediný žák, u odečítání nezvládli první příklad čtyři a druhý příklad dva žáci. Ostatní ať už s většími či menšími úspěchy nalezli alespoň částečně správné řešení, i když občas s početními chybami, nebo alespoň nastínili postup, jak by příklady počítali.

Žáci si většinou rozložili vícemístné číslo na stovky, desítky a jednotky a následné výsledky buď přičítali, nebo ubírali. Někteří různé postupy i zajímavě kombinovali. U prvního příkladu začínali jednotkami, protože sčítali trojciferné číslo pouze s jednociferným:

$2 + 8 = 10$, $10 + 90 = 100$, $100 + 300 = 400$

Na rozdíl od třetího příkladu, kde použili výše zmíněnou metodu postupného přičítání, začínali se stovkami, ke kterým přidali jednotky z druhého sčítance.

$486 + 100 = 586$, $586 + 4 = 580 + (6 + 4) = 500 + (80 + 10) = 590$

Obdobně vypadal i postup u posledního příkladu:

Buď ukázkové využití řádů:

500 + 300 = 800, 800 + 96 = 896, 896 + 6 = 890 + 12 = 890 + (10 + 2) = 902

Nebo postupné přičítání:

506 + 300 = 806, 806 + 96 = (890 + 12) = 902

Mohu tedy říct, že děti častěji dodržovaly postup, který se naučily ve škole (řády), přičemž někdy si ho vylepšily začátkem postupného přičítání. Někteří samozřejmě postup urychlili, protože „ví, že 6 + 4 = 10 a 6 + 6 = 12“, tudíž při zápisu detailního postupu vynechali mezikroky se závorkami. Odchylek od tohoto schématu tedy bylo jen velmi málo.

U příkladů s odčítáním se děti lišily více. Je to dáno tím, že tato operace je pro děti složitější. Některé děti si příklad detailně rozkládaly na jednotlivé řády, ve kterých počítaly odděleně, a poté výsledky „daly dohromady“. U prvního příkladu docházelo k časté numerické chybě v řádu desítek, protože děti neuměly vyřešit odčítání v řádu, kde měly odečíst větší číslo od menšího:

800 – 200 = 600, 40 – 90 = 90 – 40 = 50, 2 – 1 = 1, 600 + 50 + 1 = 651, nebo

600 - 50 – 1 = 549, nebo 600 – 50 + 1 = 551.

Objevené záporné číslo, se kterým neuměli žáci pracovat, příp. prohození čísel a následné zapomenutí, že měli odečítat a sčítali, žáky často dovedlo ke špatnému výsledku. Dalším, tentokrát však jednodušším, přehlednějším a také správným způsobem bylo, že od menšence odečítali postupně menšitele po stovkách, desítkách a jednotkách:

842 - 200 = 642, 642 – 90 = 552, 552 – 1 = 551

Tento způsob byl jistější a také častěji došli ke správnému výsledku. Samozřejmě z výše uvedené tabulky je zřejmé, že řešení nebyla jen dvě, avšak tyto dva způsoby byly nejčastější, a zmíněné jiné (většinou špatné) výsledky původně vycházely z jednoho z těchto řešení. Je to zřejmě způsobené podáním ve škole, kde se právě tyto dva postupy uvádějí.

Diskuze

Čím více příkladů žáci vyřešili a čím častěji se setkávali s přechodem přes desítku a učili se počítat s většími čísly, tím více zkušeností a jistoty mají. To se samozřejmě odrazí na počtu správných řešení a menšího strachu z neznámých velkých čísel.

Pokrok mezi ročníky byl znatelný. Příklady, které byly pro první ročníky neřešitelné, se v druhých ročnících staly méně náročnými a docházelo jen k početním chybám. Pro třetí ročník bylo počítání v oboru do 100 již banalitou a výsledek byl otázkou několika vteřin.

4.2.5 Větší čísla

Úloha, kterou jsem považovala za lehkou, se po prvních dvou až třech číslech změnila v obtížnou. Alespoň pro několik dětí. Přiznávám, že čísla byla záludně vybrána a ještě záludněji natištěna. Nechtěla jsem totiž dětem ani trochu ulehčit čtení více než trojciferných čísel tím, že bych je oddělila větší mezerou nebo tečkou, jak bývá zvykem např. v učebnicích. Záměr se mi vydařil a tak čísla, která děti doposud znaly – tedy obor do 100, příp. do 1000, jim nedělala problémy. Svědčí o tom fakt, že první dvě čísla přečetly všechny děti správně, až na jednu výjimku. Dotyčný žák přečetl natištěné číslo 86 jako 76.

První potíže nastaly u třetího čísla „107“ a následná čísla „5009“ a „3000000“ jen úspěšnost snižovala. Správně a na první pokus přečetlo čísla „107“ dvacet dva žáků, „5009“ osm žáků a „3000000“ devět žáků. Našlo se několik žáků, kteří četli tato čísla takto: „107“ jako sto sedmdesát, „5009“ jako sto padesát devět nebo pět set devět a „3000000“ jako třicet, tři sta, tři tisíce, jeden milion nebo nekonečno.

Pokud žáci neuměli číslo přečíst, uvedla jsem je do situace, jak by mi ho popsali, kdybych byla slepá, a číslo jsem neviděla. Velká většina dětí volila možnost číst po jednotlivých cifrách, tedy: jedna, nula, sedm; pět, nula, nula, devět a tři, nula, nula, nula, nula, nula a nula. Jen dva žáci si situaci zkrátili a čísla četli jako: deset, sedm; padesát, nula, devět a třicet, nula, nula, nula, nula, nula.

Ve správném čtení byli úspěšnější žáci 2. A. Na druhou stranu se však v této třídě vyskytly i dvě děti, které čtení čísel úplně vzdaly. V druhé třídě se všichni odhodlali alespoň k přečtení jednotlivých cifer.

Diskuze

Správné přečtení čísel se odvíjelo od zkušeností s většími čísly. Pokud si je žák jistý v oboru do 100, nebojí se přečíst číslo 107 jako deset a sedm. Pokud si žák jistý není, čte jednotlivé cifry.

Žáci mi dokázali, že cifry neboli jednociferná čísla 1-9 znají. Pokud rodiče svým ratolestem nepomáhají a neukazují větších čísla, je toto seznámení na učitelce. Ve své podstatě to není problém, protože děti se s většími čísly seznamují postupně při samotném počítání v jednotlivých oborech.

4.2.6 Větší a menší

Další lehčí úlohou pro druhý ročník bylo porovnávání čísel. Stejně jako u předchozího příkladu jsem zde záměrně neoddělila čísla mezerou po řádu stovek. Chtěla jsem vědět, zda si žáci dokážou všimnout (podle mne jemného rozdílu) v jiném počtu cifer v zadaných číslech. Znaménko nerovnosti měli doplnit sami. Dvě žákyně si na znaménka nerovnosti nevzpomněly a tak jedna větší číslo kroužkovala a druhá podtrhávala.

První tři dvojice čísel všichni rychle a správně porovnali s odůvodněním, že větší číslo je to, které má víc číslic. V 2. A správně určili i poslední dvojici. U dvojice 75 a 57 se v této třídě našli 3 žáci, kteří nejprve volili rovnítko. Na otázku, proč se u čísel 75 a 57 řídili 1. číslicí a u poslední dvojice 654 a 655 tou poslední, všichni odpověděli, i když někteří po delším vysvětlování, že řády stovek a desítek jsou stejné, liší se až u jednotek. U předchozího příkladu se liší už v řádu desítek, což je první číslice.

Zmínění tři žáci chvilku přemýšleli a následně se dva z nich opravili – jeden určil jako větší číslo 75, druhý 57. Žákyně si však trvala na svém označení, že čísla jsou stejná.

Ve třídě 2. B se také při porovnávání dvojice 75 a 57 objevilo rovnítko, ale pouze v jednom případě, a daný žák trval na svém řešení. Ostatní se řídili podle první číslice – tedy řádu desítek, *„protože už na začátku je rozdíl*“. U poslední dvojice se celá třída shodla na větším čísle 655. Třináct žáků toto rozhodnutí odůvodnilo podobnými slovy jako žáci s druhé třídy. Jediný žák se řídil poslední dvojicí čísel: *„Protože je na konci 55 a to je větší než 54.“*

Diskuze

Žáci nemají s porovnáváním čísel potíže, zejména pokud se jedná o rozdíl v počtu cifer. Porovnávali-li žáci dvě čísla se stejným počtem číslic, museli si uvědomit, že rozdíl je v samotné cifře.

4.2.7 Násobení a dělení

Při této úloze jsem pochopila, že stejně jako je pro děti jednodušší sčítání než odčítání, je pro ně lehčí dvě čísla násobit než dělit. U příkladů na dělení se pozastavil pouze zlomek dětí. I tito žáci však neměli ani tušení, jak se dělí, jen zkoušeli „hru s čísly“ a používali k tomu operaci sčítání nebo násobení. Využívali však pouze jednotlivé číslice. Stejně probíhaly příklady s násobením. Čtrnáct dětí z 21 si „hrálo“. Ostatní alespoň nastínily postup, samozřejmě nahradily násobení sčítáním.

Pouhé čtyři děti si s prvním příkladem 50 . 3 nevěděly vůbec rady a jeden žák došel k výsledku 500. Jediný chlapec, který první třídu absolvoval v domácím učení, násobil příklad 31 . 20. David s Pavlínkou (podle třídní učitelky nejšikovnější žáci na matematiku) příklad 60 . 4 vyřešili správně. Monika – Vietnamka, která má staršího bratra na stejné ZŠ – řešila příklad 31 . 20 sčítáním jednatřiceti dvacítek, jeden žák nastínil stejný postup, ale k výsledku nedošel. Další dva žáci sčítali dvacet jednatřicítek. Osm dětí tento příklad vzdalo a tři žáci se pokoušeli o různá řešení. Např. vynásobení nebo sečtení číslic v řádu desítek a přidání jednotky – výsledky 61 a 51. Zbytek došel pro mne utajeným způsobem k dalším špatným výsledkům uvedených v tabulce.

U dělení v prvním příkladu měly výsledek jen tři děti – jeden výsledek byl 18 (tedy pozměněné číslo ze zadání), druhý žák se pustil do dělení formou postupného odčítání dělitelů. Žákyně – Vietnamka - mi tuto operaci znázornila, stejně jako násobení, sčítáním. Druhý příklad vyřešila pouze Vietnamka sčítáním a jeden chlapec se pokusil o částečný výsledek:

240 : 8 = 200 + (40 : 8) – výsledek závorky umí.

Diskuze

Mohu říci, že násobení je dětmi snadněji přijímáno v období sčítání a odčítání, zejména pokud je zmiňováno učitelkou ihned s těmito operacemi jako „rychlejší forma počítání, kterou se později také naučí“ (cituji Mgr. Jindřišku Hvězdovou - třídní učitelka 2. A). Nemusí být samozřejmě v těchto počátcích vyžadováno. Tato zkušenost se projevila u prvního příkladu – většina dětí nezaváhala a příklad 50 . 3 sečetla. Od příkladu 31 . 20 je patrně odradilo množství sčítanců. Tři sčítance jsou přece jen kratší než dvacet nebo třicet jedna.

4.2.8 Zlomky

Osobní zkušenosti žáků třetí třídy se projevily v úlohách, kde rozdělovali pomeranče, koláč a čokoládu různému počtu dětí.

Pomeranče

Tento příklad dětem nedělal problém vyřešit během okamžiku. Bylo jen zajímavé sledovat, jaký způsob žáci zvolili, i když všichni měli výsledek správně. Celkem jsem očekávala, že děti rozdělí na dvě poloviny jedno z pěti nakreslených koleček - pomerančů, přesto jsem typovala, kolik různých variant se asi objeví.

Myslela jsem si, že většina dětí zvolí prostřední pomeranč, protože to je nejsnazší způsob, jak rozdělit jeden celek na dvě části. Dalo se čekat, že poměrně hodně dětí zvolí k rozdělení i ten poslední v řadě. Tyto dva způsoby byly opravdu nejčastější, až mě trochu překvapilo, že poměr první a druhé varianty byl poměrně vyrovnaný (11:7). Předpokládala jsem totiž, že druhá varianta bude více vyrovnaná s variantou třetí, a to rozdělením prvního pomeranče. Tento způsob však zvolil jen jediný žák. Vzhledem k tomu, že děti mají velmi dobře zažité rozdělování celku na dvě části tak, že buď rozdělí celek „napůl" (např. přeložení papíru) nebo „na dvě poloviny", byl můj předpoklad výběru nejčastější první varianty správný. Další čtyři varianty byly důkazem toho, že žáci rozdělují celek ne na dvě části, ale po dvou. Což většina dětí i znázornila na nabídnutých kruzích.

Zaujalo mě řešení pouhých dvou žáků (chlapec a děvče), kteří zvolili jako způsob rozdělení 5 polovin. Mohu jen předpokládat, že je k tomuto způsobu vedla buď osobní zkušenost (maminka rozkrojí pomeranč na polovinu, aby podělila 2 děti), nebo ve svém matematickém chápání nedošli do stádia, kdy si uvědomí, že 4 poloviny pomerančů jsou vlastně dva celé kusy tohoto ovoce.

Žáci tedy zvolili 4 různé způsoby. Na otázku jak rozdělí 5 pomerančů dvěma dětem, všichni shodně tvrdili, že každé dítě dostane půlku pomerančů. Automaticky použili zkušenost, kdy skupinu (celek) předmětů rozdělí na *dvě části*, tedy na *poloviny*. V grafickém řešení viz výše.

Na druhou otázku, kolik dostane jedno dítě, jsem od všech dětí dostala stejnou odpověď v různých obměnách: „Každé dítě dostane 2 a půl pomeranče."

Koláč

Předpokládala jsem, a snad i správně, že děti po zkušenosti z předchozí úlohy, automaticky udělají jako první dělení koláče svislou čáru, kterou si už vyzkoušely na pomeranči, a doplní ji čárou vodorovnou, aby dostaly čtvrtky. Z tohoto důvodu jsem měla připraveny 2 otázky. První dotaz zněl: Kolik dostane jedno dítě? Očekávala jsem odpověď *čtvrt* nebo *čtvrtku koláče*. Žáci mě však zaskočili odpovědí „trojúhelníček, trojúhelník“. Samozřejmě jejich geometrické znalosti dětem neumožnily posoudit rozdíl mezi výsečí a trojúhelníkem, protože za prvé kruhovou výseč neznají a za druhé trojúhelník je jim poměrně bližší než pojem čtvrtina. Tvarově se trojúhelníku také podobá, některým dětem může pojem čtvrtina připomínat spíše tvar čtverce. Odpověď jsem proto přijala jako správnou, pomineme-li předchozí „detail v nepřesném vyjádření“, měli pravdu.

Snažila jsem se otázkami dovést žáky k odpovědi „čtvrtina“. Ptala jsem se, kolik mají dílků po rozdělení, jakou část celku, nebo celého koláče dostane jedno dítě, jak jinak než trojúhelník můžeme jeden díl koláče nazvat. Jen u minima dětí jsem se dočkala vyslovení slova čtvrtina, čtvrt. A to až po nastínění jiné situace než krájení koláče. Ptala jsem se dětí, jestli jedí doma chleba, kupují-li celý bochník a zda ví, jak se říká těm kusům chleba, když by maminka nechtěla koupit celý chléb. Po té jsem se dočkala odpovědí typu půlka, čtvrtka a vzápětí jsme se dostali zpět ke koláči a ujasnili jsme si pojem čtvrtina – část, kterou dostane jedno dítě.

Všechny děti se dostaly ke správnému výsledku, ale opět se individuálně lišily v grafickém znázornění. Osmnáct dětí z 21 zvolilo mnou předpokládanou nejčastější variantu, přičemž jeden z těchto žáků vedl vodorovnou čáru od krajů ke středové svislé čáře. Předpokládala jsem také, že jako jinou variantu zvolí děti stejné rozdělení jen v opačném pořadí. Překvapilo mě, že tento způsob zvolil jen jediný žák (udělal nejprve vodorovnou čáru a až v zápětí svislou).

Další dva žáci opět patrně vycházeli ze zkušenosti, přesto každý zvolil jiný grafický záznam. První chlapec „krájel koláč“ opravdu tak, jak je většina lidí krájí, tedy od kraje ke středu. Ovšem při „krájení“ zapomněl, kolik dětí má podělit a tak mu vzniklo 5 částí místo 4 požadovaných. Druhý chlapec chtěl poctivě rozlišit části a tak postupoval od středu ke kraji, pak po okraji a zpět ke středu – jakoby obkresloval jeden díl. Takto znázornil čtyři díly, které na celém koláči zabíraly sotva třetinu plochy. Grafické znázornění viz výše.

Čokoláda

U tohoto příkladu jsem mylně předpokládala, že děti snadno přeloží papír 3x za sebou na polovinu, vzniknou tak nejprve poloviny, pak čtvrtiny a na závěr osminy. Děti však na rozdíl ode mne nemají zkušenost ani se zlomky, natož s japonskými skládačkami – origami. Proto mne velmi zaskočilo 12 dětí z 21, které zvolily nějakou velikost dílu a pak postupně překládáním tvořily další stejné díly. Samozřejmě jim jen ve dvou případech čirou náhodou vyšlo 8 dílů. Často vzniklo dílů pouze 6, jednou 9 nebo 10 a další děti se nevzdávaly a přehýbaly dál, až se samy nevyznaly, které dílky vlastně platí a kolik jich má být.

Šest dětí nevyužilo možnosti přehýbat papír. Vzaly tužku a dělaly čáry, kterými oddělily nestejně velké díly, mnohdy i nesprávný počet.

Pouhé tři děti použily výše uvedené přehýbání. Všichni žáci začali svislým přepůlením. Pak pokračoval jeden z nich svislým přehybem na čtvrtky, aby získal osminy, přehnul v dalším kroku papír vodorovně. Druhý žák získal čtvrtky přehnutím papíru od krajů ke středu, pak opět papír rozložil a vodorovným přehybem dostal osminy. Třetí žák složené půlky přeložil svisle na čtvrtky a pak vodorovně na osminy (viz příloha).

Diskuze

Mohu říct, že žákům nedělalo problém vyhledat polovinu a čtvrtinu. Se zlomky s jiným číslem ve jmenovateli než je dvojka nebo čtyřka však zatím pracovat neumí. Možná proto, že tyto díly děti nepoužívají v praxi tak často, aby si je dovedly představit.

5. SHRNUTÍ

V této kapitole jsem porovnala teorii z úvodních kapitol se samotným výzkumem. Také jsem se zde zabývala tím, co mi výzkum přinesl, a jak bych tyto zkušenosti mohla využít v praxi. Na základě analýzy výsledků jsem hledala odpovědi na následující tři otázky: A) Jaká předkvantitativní schémata si žáci přinášejí do školy? B) Jak je možné jich využít při výkladu v matematice? C) Jak uvedené výsledky korespondují s porozuměním podstaty základních aritmetických operací?

5.1 Osobní zkušenosti žáků

Při testování jsem se setkala s žákem 3. třídy, který první třídu absolvoval v domácím učení. Tento žák měl „bohatší" zkušenosti než ostatní děti. Projevilo se to např. dovedností vysvětlit postup při počítání příkladů (sčítání, odčítání, násobení, dělení), což jiným žákům činilo zjevné potíže. Buď neuměli svůj postup popsat z důvodu nedostatečné slovní zásoby (slova běžného jazyka i jazyka používaného v matematickém vyučování), nebo jim postup připadal tak jednoduchý, že nepokládali za důležité ho popisovat. Zmíněný chlapec měl v porovnání se spolužáky ohromnou slovní zásobu, a to nejen v oblasti matematiky. Dále byl jedním ze tří žáků, kteří dokázali rozdělit čokoládu osmi dětem tak, že se lehce dalo ověřit, že všechny díly jsou stejně velké. Dalšími takovými řešiteli byly 2 dívky – Monika je vietnamské národnosti a Cornelie má národnost slovenskou, ale rodiče pochází z Moldávie, tato dívenka první dva ročníky ZŠ navštěvovala v Německu.

Jak jsem již zmínila, krumlovským žákům jsem představila možnost znázornění příkladů na sčítání a odčítání pomocí množin. Mám za to, že právě množiny jsou názornou ukázkou pochopení částí a celku. V první třídě jsem však s touto metodou neuspěla.

Zkušenosti žáků třetí třídy se projevily v úlohách, kde rozdělovali pomeranče, koláč a čokoládu různému počtu dětí. Jeden příklad za všechny bylo řešení Davida, který viděl maminku při krájení koláče:

1 Exp.	Dám ti koláč, rozděl mi ho pro 4 děti. Viděl jsi mamku někdy krájet koláč?
2 David	*No, my to krájíme na víc dílů než na 4. Od středu.*
3 Exp.	Aha. Tak si vezmi jiný papír a rozděl mi ho na 8 dílů. Zkus to. Vzpomeň si na tvou maminka. Ta to krájí od středu.
4 David	*No, právě.*
5 Exp.	Když ho nakrájí, tak kde bude mít ten řez?
6 David	*Uprostřed.*
7 Exp.	Nebude mít třeba 2 řezy naproti sobě? Když to krájí do středu?
8 David	*Ne. Ona si ho otočí a krájí ho pořád stejně.*
9 Exp.	Směrem k sobě, viď?

Zkušenosti se však projevily i jinde, např. u dětí, které měly za úkol vysázet stromy. Některé děti projevily větší zkušenosti než ostatní. Vládík, který první třídu měl v domácím učení. Cornelie, která první dva ročníky navštěvovala školu v Německu. Holandský chlapec Colin, který sice bojoval s pochopením látky v češtině, ale na rozdíl od své mladší sestry Cathlin, jejíž velký strach z lidí byl problémem v komunikaci mezi učitelkou a žačkou, projevoval zájem o úlohy. Vietnamka Monika, která vynikala svým prospěchem ve třídě, zejména v matematice. Všichni jmenovaní žáci se opírali o zkušenosti, které získali buď stylem předchozí výuky (a používali proto jiné, zajímavé způsoby řešení), nebo od svých starších sourozenců. Několik z nich se mi přiznalo, že už umí základy násobilky, protože se to doma učí starší bratr nebo sestra.

Zanedbatelné nejsou ani zkušenosti, které se však při mém výzkumu neprojevily, ale setkala jsem se s nimi později na souvislé praxi, třeba při pracovním vyučování. V žácích často dřímaly vědomosti a znalosti, které učitel mnohokrát bohužel neobjeví a přitom by jich mohl využít při výuce.

5.2 Schémata Resnickové ve výzkumu

Srovnávací schéma používali všichni žáci. V druhém ročníku u příkladu větší/menší, ve třetím ročníku v úloze se zlomky – zejména příklad s čokoládou, v prvních dvou ročnících v příkladu s úsporami, atd. Výzkum mi potvrdil, že děti umí porovnávat jak množství, tak velikost předmětů, příp. skupin předmětů. Děti poznaly rozdíl mezi velikostí jednotlivých dílků čokolády a tak si ověřovaly správnost řešení. Při počítání úspor si byli žáci vědomi toho, že pokud 2 kamarádi mají každý 12 korun v hromádce, bude tato hromádka větší než hromádka jednoho z 3 kamarádů, který má pouhých 8 korun. Také u příkladu s hodinami, žáci podvědomě cítili, že měsíc leden bude mít více hodin než jeden týden a tak někteří vycházeli právě z tohoto výsledku, který v daném poměru zvětšili. Porovnávání žáci tedy ovládají ještě před nástupem do školy.

Stejně tak používají i aditivní schéma – tedy na základě porovnání si poradí s přidáváním a ubíráním. Na úspory se tedy můžeme podívat i z jiného úhlu. Žáci chápou, že musí z hromádky 12 korun ubrat určitý počet tak, aby jim v hromádce zbylo 8 korun, to provedou i u druhého kamaráda. Také vědí, že ze zbylých korun mohou vytvořit další hromádku a tak k jedné čtveřici přidají tu druhou. Aditivní schéma je ve své podstatě základem pro pochopení početních operací sčítání a odčítání a žáci již před příchodem do první třídy ovládají systém přidávání a ubírání předmětů.

Užívání schématu část – celek jsem měla příležitost pozorovat např. v úloze se zlomky. Příkladem, kolik a jak velkých částí se nám vejde do celku, jsem ověřovala míru pochopení tohoto schématu. Všichni žáci chápali princip, ovšem samotné uchopení a provedení úkolu bylo problémovější, jak uvádí i Resnicková. Projevilo se to zejména u zmíněného dělení čokolády. Žáci viděli, jak velký mají celek a kolik mají mít částí, ovšem velikost jednotlivých dílků museli určit sami. A tak se stávalo, že většina dětí znovu a znovu překládala papír znázorňující čokoládu a správnou velikost nemohla najít. Uplatňovaly alespoň aditivní a srovnávací schéma. Pokud jim vyšlo pouhých 6 dílů, věděly, že musí dílky zmenšit, aby dostaly dílů více. Podle mne je tedy schéma část – celek nejtěžším schématem. Snad i z toho důvodu, že děti jsou schopni abstrakce až ve vyšších třídách, zařazují se zlomky do výuky nejdříve na přelomu 4. a 5. ročníku.

V jiných předmětech, např. v propojení prvouky a češtiny, je pochopení schématu stále využívané. Výrazy jako jsou slovo nadřazené a podřazené (český jazyk) se děti učí používat na konkrétních příkladech z prvouky: Ovoce je jablko, hruška, třešně atd. To děti většinou znají již před nástupem do školy.

Po zpracování výzkumu mohu konstatovat, že teorie L. Resnickové jsou pravdivé, a žáci si do školy přinášejí alespoň základ schémat, která tato autorka popsala. Ať už se jedná o schéma aditivní, část-celek nebo srovnávací schéma.

Stejně jako teorie L. Resnickové se mi potvrdily i myšlenky doc. Hošpesové, které se týkali individuality každého žáka a nutnosti předkládat dětem ve výuce všechny možné způsoby řešení matematických příkladů.

5.3 Teorie Montessori a Häsel – Weide

Co se týká teorie Montessori zmíněné v druhé kapitole, nezbývá mi než souhlasit. Jak jsem si mohla při testování a také při souvislé praxi ověřit, děti si musí vše sami osahat a vyzkoušet, aby danou věc pochopily. Jejich myšlenky mohou na učitele působit, jako že nesouvisí s tématem, ale odpověď není radno zanedbat. Dítěti mnohdy pomůže maličkost k propojení vlastních zkušeností s předkládanými způsoby řešení.

Neformální postupy Häsel – Weide se objevily při testování. Výsledků, ke kterým jsem vyžadovala další vysvětlení, bylo požehnaně. Rovnic, kde chyběla znaménka, bylo také mnoho. Mnohý zápis, který bych jinak považovala za nesprávný nebo neúplný, se díky slovnímu vysvětlování zdál zcela pochopitelný, Rovnice, v nichž děti zaměnily znaménka, se nevyskytovaly příliš často. Zato bylo překvapující, že se tak stane i u žáka třetího ročníku, navíc třídní učitelkou považovaného za „nadaného matematika“. Patrně došlo k záměně operace odečítání za sčítání díky nepozornosti nebo nervozitě, kterou natáčení žákům přineslo.

Ve své podstatě většina dětí si poradila svým specifickým způsobem se všemi příklady. Některé sice potřebovaly názornou pomůcku nebo mou pomoc, jiným pomohly k výsledku doplňující otázky.

Pokrok v jednotlivých ročnících byl patrný zejména u příkladů, s nimiž se žáci nesetkali v předškolním věku. Slovní úlohy, které naopak z jejich dosavadních zkušeností vycházely, se řešily hůře ve vyšších ročnících (např. příklad se zahradníkem). Je tedy otázkou, jak kvalitně vyučovat, abychom dětem jejich zkušenosti nevzali, a zároveň je naučili novým vědomostem.

5.4 Návrhy pro praxi

Poslední otázkou jsem se podrobně zabývala již v diskuzích u jednotlivých typů příkladů v předchozí kapitole kvalitativního zpracování výzkumu. Většina dětí nemá problémy s poznáním a osvojením matematických operací sčítání a odčítání. Vnímají rozdíl v těchto dvou operacích už na počátku první třídy. Znají situace ze života, které by se daly takovými příklady matematizovat, např. přidávání a ubírání předmětů, odchody a příchody osob. Tyto zkušenosti jim pomáhají v průběhu výuky a učitelé by neměli zapomínat jejich zkušenosti využívat. Příklady ze života, příklady prakticky znázorněné na známých situacích, žáci snáze pochopí a zároveň budou mít pocit, že matematika není jen nutné školní zlo, ale může být i pro ně samotné užitečná.

Stále častěji se přesvědčuji o tom, že děti znají řadu věcí z matematiky ještě před vstupem do školy. Bohužel musím konstatovat, že učitelky, které ještě nezačaly využívat možnosti Rámcového vzdělávacího programu, a u nichž jsem měla možnost osobně sledovat jejich výuku, zdaleka nevyužívají potenciálu svých žáků. Na praxi jsem se mnohokrát setkala se situací, kdy učitelky předkládají svým žákům jedinou variantu řešení úloh v matematice. Mnohdy to není úplně jen jejich vina, protože ani učebnice nenabízejí více možností. Je tedy na učitelce, jak získá dosavadní znalosti ze svých žáků a jestli se o tyto vědomosti umí opřít a využít je co nejlépe ve výuce.

Je nepochybné, že matematika by měla vycházet z toho, co děti znají z dosavadní životní praxe. Nesou si s sebou zkušenosti, o které se mohou opřít a rozšiřovat je. Pokud učitelka vyloží novou látku na příkladě, který dětem není blízký, ba spíše velmi vzdálený, poměrně rychle zjistí, že její výklad nebyl dětmi akceptován, že látku nepochopily. V lepším případě budou reprodukovat do slova naučenou látku. Pokud k takovéto situaci dojde, je velmi těžké stavět na těchto nekvalitních základech další výklad.

5.5 Potvrzení výsledků a návrhů na souvislé praxi

Testováním jsem si ověřila, že každý žák je individualista a „správná učitelka“ by měla nabídnout několik možností, ze kterých si žáci sami vyberou tu nejvhodnější. Tuto zkušenost jsem velmi ocenila jak na praxi v průběhu testování, tak především na souvislé praxi na přelomu února a března. Paní učitelka Mgr. Jaroslava Osvaldová, která mě na praxi uváděla, se mne ptala, zda jí stejně jako mně dělá potíže při výuce

„vyhýbat se“ vyvolávání těch nejlepších žáků, a to zejména v okamžiku, kdy potřebovala probrat novou látku a ostatní děti „odmítaly spolupracovat“. Svou chybu si uvědomila v okamžiku, kdy seděla v poslední lavici a pozorovala hodinu, kterou jsem vedla já. I přes to, že má za sebou mnohaletou praxi, zkušenosti a úžasné „nadání motivovat“ děti i k činnosti, která je nezajímá a kterou pro některé žáky byla právě matematika. Vymyslely jsme proto způsob, jak se tomuto nedostatku vyhnout. Po prvním týdnu jsem si do příprav na hodinu začala psát i jména žáků, abych nemusela při výuce přemýšlet nad tím, koho jsem už vyvolala, jestli ten či onen žák daný příklad zvládne vypočítat, a abych se zejména u slabších žáků ujistila, že novou látku pochopili. Přestože jsem mohla určitým chybám předejít právě díky testování, měla jsem po celou dobu praxe na paměti, že spěch ve školním vyučování s sebou přináší velké nebezpečí vzniku formálně naučených vědomostí. Znázorňování úloh a diskuse různých řešení mohou těmto problémům předejít. Přesto i ty čtyři týdny byla velmi krátká doba na to, abych „své žáky“ poznala natolik, abych tušila dopředu, co jim bude dělat potíže pochopit a co naopak vstřebají velmi rychle.

Nejen při hodinách matematiky jsem zahajovala hodinu zjišťováním informací od dětí. Pokud jsme měli řešit úlohy, které se týkaly převodů jednotek (pro děti náročná látka), nejprve jsme si s dětmi připomněli, jaké znají jednotky např. délky. Jelikož jsem měla od třídní učitelky informace, že děti tuto látku jen opakují, ovšem po delší době, chtěla jsem si jejich paměť ověřit. Na jednotky si děti pamatovaly, ovšem převádění jim příliš nešlo. A tak jsem žáky vyzvala, aby jmenovaly předměty, které můžeme použít pro měření délky a co vše jimi můžeme změřit. Následně si žáci vyzkoušeli porovnávání a následné řazení od nejmenší jednotky po největší a také jejich zaznamenávání na různá měřítka. Na základě těchto zkušeností jsme si příklady na převody vysvětlovali na konkrétních situacích. Některé jsme si ukazovaly na předmětech ve třídě. Větší rozměry, např. vzdálenost jednoho kilometru, jsme si vytyčili mezi místy, které děti znají ve městě a blízkém okolí.

6. ZÁVĚR

Byla jsem velmi spokojena, že mi tato diplomová práce přinesla alespoň částečný vhled do možných způsobů řešení některých příkladů z matematiky, s jejichž nejrůznějšími obdobami se mohu jako budoucí učitelka setkat v průběhu výuky matematiky na celém 1. stupni ZŠ.

Přesvědčila jsem se o tom, že i učitel se od svých svěřenců mnohdy může dozvědět zajímavé věci a sám se naučit něco nového. Jde jen o to, jak je učitel vnímavý a zda tohoto způsobu „celoživotního vzdělávání“ využije ve svůj prospěch a zpětně i ve prospěch svých žáků.

LITERATURA

Häsel-Weide, U.: *Auch Aufschreiben will gelernt sein! Probleme und Chancen bei der Notation von Rechnungen zu Sachaufgaben* in Scherer, P., Bönig, D. (Eds.) (2004): *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern.* Frankfurt am Main: Grundschulverband, str.187-197. ISBN 3-930024-86-1

Helus, Z. (2007): *Učitelství – rozporuplné povolání pod tlakem nových společenských nároků*, Pedagogika, Časopis pro vědy o vzdělávání a výchově, Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, ročník LVII - 2007, č. 4, ISSN 0031-3815.

Hohmann-Busch, C.: *Multiplikation mit Perlenstäbchen und Schachbrett – Zum Einsatz von Montessori-Materialien im Mathematikunterricht* in Scherer, P., Bönig, D. (Eds.) (2004): *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern.* Frankfurt am Main: Grundschulverband, str. 174-185. ISBN 3-930024-86-1

Hošpesová, A. (2000): *Žák na počátku školní docházky. Pojem číslo. Desítková soustava a řády. Sčítání a odčítání.* (Přednášky pro 3. ročník studia učitelství pro 1. stupeň.) www.pf.jcu.cz/amos

Hošpesová, A., Kuřina, F., Tichá, M. (1995): Jaké jsou matematické zkušenosti našich dětí při vstupu do školy? *Obecná/občanská škola,* ročník 1, 4/95, str. 69.

Resnick, L., B. (1989): *Developing Mathematical knowledge.* American Psychologist, 44, 162-169.

RVP pro předškolní vzdělávání, www.vuppraha.cz

RVP pro základní vzdělávání, www.vuppraha.cz

Učebnice matematiky pro 1. – 5. ročník ZŠ

PŘÍLOHY

Příloha č. 1 - záznamový arch přepisovaného rozhovoru s Davidem

Příloha č. 2 - záznamový arch přepisovaného rozhovoru s Pavlínkou

Příloha č. 3 - verze k testování 1. ročník

Příloha č. 4 - verze k testování 2. ročník

Příloha č. 5 - verze k testování 3. ročník

Příloha č. 6 - ukázky různých řešení