Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

PRACOVNÍ LISTY Z MATEMATIKY V DERIVE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Hana LUKŠOVÁ

České Budějovice, duben 2009

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

. . . . .2009 . . . .

Anotace

Cílem diplomové práce je vytvoření pracovních listů pro podporu výuky matematiky na základní škole. Zaměřením těchto dokumentů je tematický celek funkce. Pracovní listy by měly najít uplatnění při výuce matematiky na základních školách – při samotné výuce a zejména při následném procvičování. Nutnou pomůckou k jejich aplikaci je matematický program *Derive*, ve kterém jsou všechny pracovní listy vytvořeny. Snahou mé práce je dosáhnout vyšší efektivity výuky matematiky a její přiblížení žákům základních škol.

Annotation

The aim of this thesis is worksheets creation that can support the mathematics education at the primary school. These documents are focused on the thematic complex of function. Worksheets should find the use of mathematics education at primary school – at separate education and especially at subsequent practise. Necessary tool to their application is mathematical program *Derive*, in which all worksheets are created. Endeavour of this work is achieving higher effectiveness of mathematics education and its approach to the pupils of primary school.

Poděkování:

Děkuji panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., vedoucímu mé diplomové práce, za jeho odborné vedení, cenné rady a připomínky, kterými mi pomohl při jejím vypracování.

Děkuji Základní škole T.G.M. v Suchdole nad Lužnicí, paní Mgr. Aleně Ficalové a celému devátému ročníku, za možnost uskutečnění projektu pro tuto diplomovou práci.

Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za jejich podporu při studiu

Obsah:

1. Úvod

Žijeme v době, kdy se výpočetní technika stala nezbytnou součástí našeho běžného života. Mnozí z nás si již existenci bez počítače nedokáží představit. Znalost práce s počítačem se stala pro lidi samozřejmostí a nutným vzděláním. Počítače jsou v současnosti propojeny snad se všemi obory a druhy lidské činnosti, používáme je od vědních oborů až po každodenní život. Výpočetní technika se stává v mnoha oborech prostředkem k novému poznání. Stejně tak v matematice. Logický důsledek této situace představuje začlenění výpočetní techniky i do výuky matematiky.

Možnosti počítačů a vývoj softwaru nabízí stále širší uplatnění a tedy i různorodé začlenění do výuky (v rámci matematiky se nabízí např. rýsování, řešení složitých výpočtů, vykreslování průběhu funkcí). Využití výukového programu musí být rozhodně smysluplné a přínosné. Hlavním cílem aplikace softwaru ve školách je pomoci žákům k lepšímu pochopení učiva a celkově zvýšit efektivnost výuky, mezi další výhody patří zvyšování motivace žáků i zpestření výuky.

Dobrým pomocníkem v hodinách matematiky je program *Derive 6*, na který se v této práci zaměřuji. Jedná se o tzv. počítačový algebraický systém (CAS, computer algebra system). V současnosti je nabízena široká škála programů, které se dají využít ve výuce, např. Maple, Mathematica, Cabri.

Cílem práce je vytvoření pracovních listů, které pokrývají tematický celek funkce. Tyto listy jsou především pomůckou, případně příkladem využití programu *Derive 6*, pro učitele při výuce matematiky.

Využití dokumentů si představuji zejména v hodinách, které probíhají v počítačové učebně, kde má každý žák k dispozici vlastní počítač a může pracovat samostatně. Pokud není k dispozici počítačová učebna, ale učitel může využít jeden počítač a propojit jej s data-projektorem, nabízí se druhá možnost aplikace. Učitel demonstruje celé třídě novou látku, v celku funkce to bude zejména průběh jednotlivých funkcí.

Uvědomuji si, že vybavenost českých škol je různá. Na některých školách učebny výpočetní techniky neposkytují dostatečné možnosti k využití mimo hodiny informatiky. Doufám, že se tato situace bude v budoucnosti zlepšovat a na školách se odborné učebny zpřístupní i pro běžnou výuku dalších předmětů.

V diplomové práci se nejprve věnuji celkovému seznámení s programem *Derive 6*, tj. informace od principu počítačového algebraického systému (CAS), přes historii *Derive* až po jeho současné využití ve světě. Zabývám se výhodami a nevýhodami jeho použití a tím, jak s *Derive* pracovat.

Zásadní část práce obsahuje popis samotného sestavení pracovních listů a jejich vzorová řešení. Pracovní listy jsem ověřila na Základní škole T.G.M. v Suchdole nad Lužnicí. Pracovala jsem konkrétně se žáky 9. ročníku. Čtvrtá kapitola je věnována popisu průběhu celého projektu, praktickou část přibližují a dokumentují přiložené fotografie (viz Obr. 8.3).

V závěru práce jsem praktické ověření zhodnotila. Uvádím zjištěné klady a zápory a z nich vyplývající možné způsoby vylepšení jednotlivých dokumentů. Některá vylepšení jsem stihla provést (např. podrobněji zpracovaná nápověda k řešení jednotlivých úkolů, jasné formulace úkolů).

1.1 Cíle

Cílem diplomové práce je ověřit možnost začlenění programu *Derive* do výuky matematiky na základní škole jako pomůcku pro tvorbu i praktické využití pracovních listů. Uvedené interaktivní pracovní listy z matematiky (viz přílohy) jsou koncipovány pro použití při výuce matematiky na základní nebo střední škole.

Pro dosažení cíle jsem splnila následující úkoly (uvedeny v pořadí, podle kterého jsem postupovala):

- důkladné seznámení s *Derive 6*,
- výběr vhodného tématu,
- vypracování série pracovních listů,
- vypracování vzorových řešení,
- uvedení zásad tvorby těchto dokumentů,
- ověření pracovních listů v praxi a
- zhodnocení získaných zkušeností.

1.2 Předpoklady úspěšného použití *Derive 6*

Pro úspěšné praktické použití je důležité splnit následující předpoklady. V první řadě je to dostatečné seznámení se s *Derive* samotným učitelem i žáky. Program vyniká snadným ovládáním a lze s ním pracovat spontánně, bez předchozího vysvětlení.

Proto doporučuji žákům podat instrukce během jedné hodiny, formou demonstrace učitelem. Učitel předvede fungování programu na několika odlišných příkladech, žáci si následně nově získané informace vyzkoušejí vlastní samostatnou činností. V další hodině jsou schopni pracovat samostatně, na základě pokynů u jednotlivých příkladů. Stejný postup jsem aplikovala v praxi a dovoluji si tvrdit, že je dostatečný.

Na učitele kladu nepatrně vyšší nároky. V průběhu výuky by měl být schopen pomoci žákům s jejich individuálními problémy (setkala jsem se s problémem např. při vykreslování grafů - žáci zapomínají zvýraznit požadovaný výraz v algebraickém okně). V případě, že učitel použije předložené pracovní listy a nezamýšlí vytvářet vlastní dokumenty, není nutná hlubší znalost *Derive 6*. V opačném případě doporučuji čerpat z publikace [5].

Pro práci s výukovými listy je vhodná, ne nezbytná, znalost předcházejícího učiva. Stejně jako při klasické výuce je důležité, mít na co navázat. Ovšem při využití pracovních listů, sloužících k procvičování, je znalost nového učiva až na výjimku (více dále) nutná. Například: V pracovním listě věnujícímu se základním poznatkům o funkcích (viz Příloha č. 3) je nezbytné, aby žák věděl co je to funkce, co rozumíme pod pojmy definiční obor a obor hodnot. V opačném případě mu software při plnění úkolů nebude příliš užitečný. Naopak pracovní list zabývající se grafem lineární funkce (viz Příloha č. 5), slouží k samotnému objevování souvislostí mezi funkčním předpisem a průběhem grafu. Pokud již žák tyto znalosti má, dokument mu slouží k jejich ověření a snadnějšímu zapamatování .

1.2 Předpokládané budoucí využití práce

Využití pracovních listů předpokládám zejména v 9. ročníku základní školy. Pracovní listy jsou dvojího druhu: 1) výukové – slouží k samotné výuce nového učiva,

2) pracovní – vhodné pro ujasnění a fixaci nově probraného učiva, procvičení. Příklady v těchto dokumentech přispívají k prohloubení již získaných poznatků. Po splnění předpokladu, že jsou žáci seznámeni s ovládáním programu a mají i vlastní praktické zkušenosti, lze pracovní listy použít ke klasifikovanému opakování.

Přínos začlenění pracovních listů do výuky vidím také u nižších ročníků střední školy při opakování a následném rozšiřování již známého učiva. Hlavně při rozšiřování tématu „kvadratické funkce“ využijeme pracovního listu (viz Příloha č. 9). Během této činnosti si žáci zopakují nabyté znalosti. Ti, kteří se s tématem na ZŠ nesetkali, mají možnost vlastní prací objevit nové poznatky.

Pracovní listy mohou být pouhým doplněním tradiční výuky nebo naopak mohou tvořit základní kámen v hodinách matematiky. Ve druhém případě, je nutné práci se softwarem dostatečně doplňovat tradičním způsobem řešení bez pomoci jakýchkoliv programů. Škola má žákům pomoci získat základní poznatky a schopnosti v oblasti matematiky a v podstatě není reálné, že bude mít žák vždy k dispozici vhodný matematický program. Propojením tradičního a počítačového způsobu řešení získá žák schopnost vyřešit příklad vzhledem k okolnostem (buď s pomocí *Derive* nebo samostatně).

2. Co je *Derive 6*?

Derive 6 je program typu CAS (computer algebra system), tedy počítačový algebraický systém, ve kterém je možné provádět symbolické i numerické výpočty, zobrazovat výrazy pomocí dvourozměrných a třírozměrných grafů v různých systémech souřadnic. Program nabízí široké možnosti, lze v něm pracovat s algebraickými proměnnými, výrazy, rovnicemi, funkcemi, vektory, maticemi i logickými výrazy. Pro výpočty je možné využít některou funkci z nabídky programu, případně si naprogramovat vlastní.

Vzhledem ke snadnému ovládání, široké nabídce funkcí a možnosti propojení výpočtů s vykreslováním grafů *Derive 6* představuje vhodný nástroj pro studium, učení i praktickou aplikaci matematiky.

2.1 Historie

Programu *Derive* předcházel program muMATH vydaný již v roce 1979. První verze *Derive* byla vydána v roce 1988 pro prostředí operačního systému DOS. V roce 1996 byla firmou Texas Instruments vydána i verze pro systém Windows. Verze *Derive 6.1* (dále pouze *Derive*), se kterou pracuji ve své diplomové práci, je určena pro operační systémy Windows 98, Windows ME, Windows 2000 a Windows XP. Česká verze programu *Derive 6.1* byla vydána na podzim roku 2004 a čeština se tak stala devátým světovým jazykem, v němž je program *Derive* veřejnosti nabízen. Tato verze nově nabízí také přenos dat mezi programem a CAS kalkulačkami TI-89, TI-89 Titanium, TI-92+ a Voyage 200 TI.

2.2 Současnost ve světě

V současné době je program využíván na řadě středních i vysokých škol v USA a v Evropě. V některých zemích je *Derive* oficiálním programem pro podporu výuky matematiky na školách, například v Rakousku nebo na Slovensku. Uplatnění má i mimo vzdělávací oblast, v inženýrské praxi ([4], s. 5).

2.3 Uplatnění počítače a matematického softwaru ve výuce

Užití počítačů v matematice zaznamenává v posledních letech silný vzestup. Na rozdíl od tradičního vyučování přináší značné výhody, např. urychlení zdlouhavých výpočtů, důraz na vlastní činnost žáků, větší motivaci žáků. Ale na straně druhé může být více náročné na přípravu učitele (vypracovat vhodné a přínosné materiály). Mění formu práce žáků a zvyšuje jejich aktivitu. Pro efektivitu vyučování je nezbytné správné vedení učitelem.

Matematický software můžeme využít několika způsoby. Práce žáků může být samostatná i skupinová, nabízí se aktivní či spíše pasivnější forma použití. Přednost by měla dostat aktivní činnost žáků - vlastní objevování nových poznatků, ověřování domněnek nebo samotné procvičování již nabytých znalostí.

U matematického softwaru nelze opomenout přínos ve zkrácení zdlouhavých výpočtů, vykreslování grafů, snadné vytváření množství různých variant atd.

2.3.1 Výhody *Derive*

Program *Derive* považuji za vhodný nástroj pro výuku matematiky i její samostudium. Výhodou programu je schopnost rychle a jednoduše propojit numerické výpočty a grafické zobrazení. Přínos vidím též ve zefektivnění práce. Vhodné je využití při řešení náročnějších úloh, kde nám místo zdlouhavých výpočtů postačí jednou stisknout klávesu a získáme okamžitě výsledek. Žáci takto mohou svou pozornost místo na mechanické výpočty zaměřit hlouběji na daný problém a lépe porozumět jednotlivým matematickým pojmům.

Využití programu v souvislosti s učivem základní školy nevyžaduje, aby žáci měli důkladné znalosti o fungování programu a o provádění jednotlivých příkazů. Jedná se o program, který má jednoduché ovládání, jež je známé i běžným uživatelům systému Windows. Vyšší nároky jsou samozřejmě kladeny na učitele, kteří by měli program znát důkladněji, aby mohli žáky během práce podle potřeby vést, případně i připravovat vlastní kvalitní podklady pro výuku.

Derive můžeme mezi matematickými programy upřednostnit nejen z důvodu jeho rychlosti a snadného ovládání, ale pro českého uživatele je neméně důležité, že je mu předkládán v češtině. Tato verze *Derive* je nabízena mimo různých světových jazyků také v jazyce českém. V češtině je psána též nápověda a celková dostupnost odborné literatury je velmi dobrá.

2.3.2 Nevýhody *Derive*

Nevýhodu v užívání programu veřejností a zejména ve školách vidím v tom, že je volně přístupná pouze demoverze programu (více např. na www.derive.com). Tato verze nabízí všechny standardní funkce, ale je omezena k používání pouze po dobu 30 dnů.

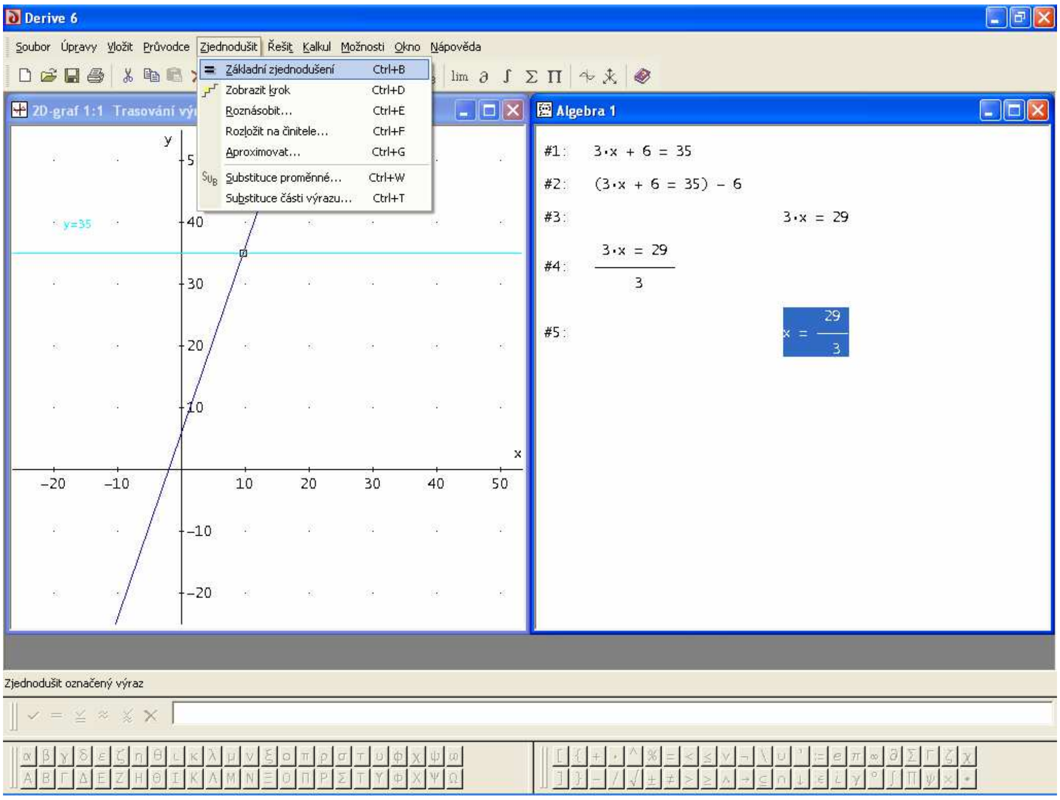
Pokud chceme program *Derive* plně a dlouhodobě využívat, musíme si jej zakoupit. Cena licence záleží na jejím typu (pro českou verzi *Derive 6.1* více na www.europeon.cz). Cena softwaru není zanedbatelná, několikrát jsem se setkala s názorem, že se tento program nevyužívá zejména proto, že nejsou dostatečné finanční prostředky k jeho zakoupení. Z jiných zdrojů (např. www.slunecnice.cz) lze získat obdobné programy se stejnými či podobnými funkcemi za nižší cenu nebo zdarma ve freeware verzi. Jedná se například o programy voFCE1.2f (www.abidan.sk), Matematika 3.4 (http://www.instaluj.cz/matematika-3-4) nebo Math Studio 1.5 (http://math.pomeranc.cz)

Při posuzování atraktivnosti softwaru pro žáky vidím nevýhodu v grafickém zpracování. Grafika programu jistě nebude důvod, který by zvýšil zájem o jeho používání. Spíše naopak. Ve srovnání s nabídkou konkurence je toto slabší místo programu. Jiné matematické softwary mají již modernější a mnohdy i barevnější formu, která je zejména pro mladší žáky zajímavější. Předpokládám, že pokud by žáci měli možnost volby, dali by přednost programu graficky poutavějšímu před tím, který vyniká po technické stránce, ale zaostává v grafice.

3. Práce s *Derive 6*

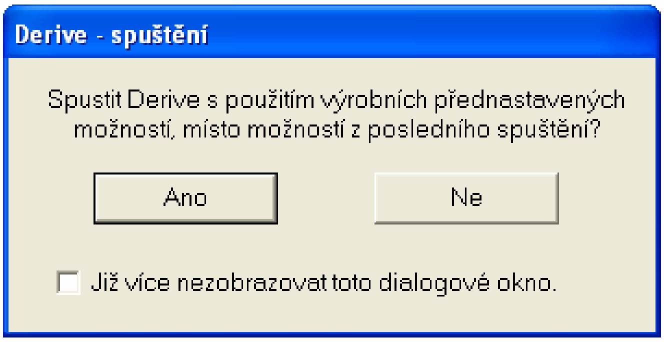
Program *Derive* využívá podobné prostředí jako operační systém Windows. Použití tohoto softwaru je jednoduché, lze jej ovládat intuitivně a zvládne jej i ten, kdo s ním dříve nepracoval. Není nutné znát určitý programovací jazyk, postačuje nabídkové menu a jednotlivá dialogová okna.

3.1 Prostředí programu



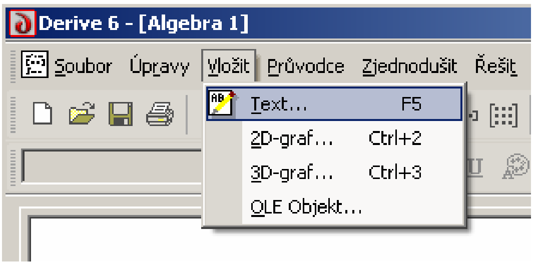
Obr. 3.1 - Grafické rozhraní *Derive 6*

Program spustíme dvoj-klikem na ikonu programu nebo prostřednictvím nabídky Start (*Start* $\rightarrow$ *Programy* $\rightarrow$ *Derive*). Nejprve se většinou zobrazí dialogové okno (viz Obr. 3.2) – nabízí se možnost nastavení. Vhodné je použít vždy výrobní přednastavené možnosti. Samotný program se následně zobrazí v novém prázdném okně (viz Obr. 3.1).



Obr. 3.2

S programem komunikujeme prostřednictvím grafického rozhraní. Zde můžeme využít panelu nabídek (tj. druhý řádek). V roletovém menu si vybereme konkrétní příkaz (např. na Obr. 3.3 *Text…*). Některé příkazy můžeme zadat také prostřednictvím ikony, funkční klávesy nebo specifické klávesové zkratky, tyto možnosti se zobrazují s názvem příkazu ve stejném řádku. Např. Text můžeme vložit stisknutím ikony  nebo klávesou **EcRF.=**



Obr. 3.3

Vybereme-li myší libovolný příkaz, ve stavovém řádku (tj. úzký šedý pruh mezi pracovní plochou a příkazovým řádkem), se zobrazí jeho stručná charakteristika (např na Obr. 3.1 *Zjednodušit označený výraz*). Pro rychlejší ovládání programu můžeme využít ikony v jednotlivých panelech nástrojů. Pro vkládání matematických symbolů a znaků využijeme panely nástrojů ve spodní části okna. Nalezneme zde písmena řecké abecedy a matematické symboly. *Poznámka: Zadáváme-li ve výrazu mocninu, zapisujeme ji pomocí symbolu ^ (např. x^2 odpovídá x^2).*

Vzhled celého rozhraní můžeme změnit pomocí *Okno* $\rightarrow$ *Přizpůsobit…*

3.2 Nápověda

Nápovědu programu vyvoláme stisknutím klávesy **EcNF**, výběrem nabídky *Nápověda* → *Témata nápovědy* nebo použitím ikony  .

Nápověda programu nabízí přehled všech funkcí programu a příklady jejich použití. To oceníme zejména u méně používaných příkazů. Nejjednodušším vyhledáváním se jeví zvolení rejstříku (příp. indexu) klíčových slov. Do určeného pole vepíšeme hledané heslo nebo jeho část. Zobrazí se široká nabídka souvisejících témat. Vhodné téma vybereme dvoj-klikem na výraz nebo tlačítkem zobrazit.

Pokud chceme použít příkaz, který jsme si právě zobrazili, můžeme jej do příkazového řádku v *Derive* zkopírovat. Požadovanou část textu vyznačíme, zkopírujeme do schránky (**E`íêäF**+**E`F**) a vložíme (**E`íêäF**+**EsF**) do příkazového řádku. Upravíme jej podle konkrétních požadavků a odešleme na pracovní plochu.

3.3 Vstup a editace výrazů

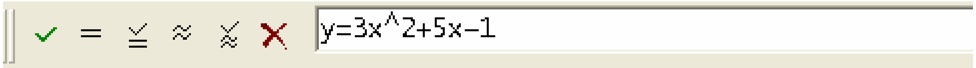
Výrazy do programu vkládáme a následně je editujeme pomocí příkazového (vstupního) řádku (tj. úzký bílý řádek mezi pracovní plochou a panely symbolů).
Do tohoto řádku výraz napíšeme a potvrdíme klávesou **EbåíÉêF** nebo tlačítkem  (nalezneme jej nalevo od příkazového řádku).

Po potvrzení se výraz přesune na pracovní plochu do okna Algebra. Každý výraz se zobrazuje se „svým“ číslem (např. # 1). Toto číslo označuje řádek a může sloužit i jako proměnná (pomocí # 1 program odkážeme na výraz, jemuž dané číslo odpovídá).

Výrazy nemusíme psát opakovaně, lze je zkopírovat. Označíme výraz nebo jeho část a pomocí klávesy **EcPF** (tvar výrazu se nezmění) nebo **EcQF** (výraz bude uzavřen v závorce) jej přeneseme do příkazového řádku. Zadaný výraz můžeme jakkoliv upravovat pomocí *Úpravy* → *Výraz…*

Potřebujeme-li zvýraznit pouze část výrazu, musíme opakovaně klikat myší nad příslušnou částí výrazu (v tomto případě musí mít samotná část smysl jako výraz) nebo ji zvýrazníme pomocí kláves **EpÜáÑíF** + **E ‹ F**, **EÃF**,=**E□F**=nebo **E□F** .

Práci s výrazy lze značně zrychlit a zjednodušit pomocí ikon vlevo od příkazového řádku (viz Obr. 3.4). Ikony jsou řazeny následovně: zobrazit výraz na pracovní ploše, zjednodušit výraz a výsledek zobrazit na ploše, zobrazit výraz i jeho zjednodušení na ploše, aproximovat výraz, zobrazit výraz i jeho aproximaci na ploše, odstranit všechen text. Tyto příkazy můžeme samozřejmě vyvolat také z hlavního menu.



Obr. 3.4

3.4 Pracovní plocha

Největší část okna zaujímá pracovní plocha. Zaznamenává se zde celá naše práce. Vstupovat do pracovní plochy můžeme pomocí příkazového řádku. Každý výraz je zde zapsán se svým číslem (např. #3). Toto číslo může sloužit také jako proměnná. Pokud potřebujeme pracovat se stejným výrazem, stačí psát pouze #3. Pokud nám tato čísla překáží, máme možnost je skrýt (*Možnost* $\rightarrow$ *Skrýt* $\rightarrow$ *Označení*).

Po pracovní ploše se pohybujeme pomocí myši nebo kláves **E□F**, **E□F**. Výrazy lze po ploše libovolně přemisťovat a měnit jejich pořadí. Postačí výraz pouze uchopit myší a přesunout na žádané místo. Pokud změníme pořadí, může dojít ke změně jejich původních čísel nebo je lze zachovat, nastavení provedeme následovně: *Možnosti* $\rightarrow$ *Zobrazení* $\rightarrow$ *Přečíslovat výrazy*.

Budeme-li přecházet mezi pracovní plochou a vstupním řádkem, můžeme využít místo klikání myši kláves **EbëÅF** (ze vstupního řádku do pracovní plochy) a **EcOF** (opačně).

Pokud budeme přecházet mezi algebraickými a grafickými okny, lze využít ikon:  (přechod do algebraického okna), možno i pomocí kláves **E`íêäF**+**ENF**,  (přechod do 2D-grafického okna) a  (přechod do 3D-grafického okna). Můžeme použít samozřejmě také menu Okno.

3.5 Tvorba dokumentů

Program umožňuje zobrazovat na pracovní ploše nejen výrazy, výpočty či grafy. Lze vložit libovolný text (*Vložit* $\rightarrow$ *Text…*) nebo tzv. OLE objekty (*Vložit* $\rightarrow$ *OLE Objekt…*). OLE objekty rozumíme objekty různých aplikací, např. obrázky, objekty dokumentů ve formátu .pdf a další.

Vkládáme-li text, můžeme jej běžným způsobem upravovat. V tomto případě použijeme panel nástrojů *Formátování* (viz Obr. 3.5). Lze upravovat velikost, typ a barvu písma, zarovnání, vložit odrážky.

Obr. 3.5 - Panel formátování

Derive nabízí možnost tvořit plnohodnotné dokumenty na úrovni textového editoru. Vytvořený dokument lze převést do jiného formátu (např. .pdf). Program umožňuje uložit dokument přímo ve formátu .rtf (*Soubor* $\rightarrow$ *Exportovat* $\rightarrow$ *RTF…*) a tak jej můžeme dále upravovat i v různých textových editorech (např. ve Wordu).

Pochopitelně program neslouží k editaci dokumentů, jeho základní funkcí jsou různé matematické výpočty. Značnou nevýhodou při vytváření dokumentů je řádkový režim programu. Výrazy či objekty nelze libovolně přemisťovat po ploše a řadit je ve vodorovném směru. I přes tento nedostatek je možné vytvořit v *Derive* hodnotný dokument splňující základní vlastnosti na stránku informační i grafickou.

3.6 Import dat

Program v menu Soubor nabízí funkce *Importovat, Exportovat* a *TI kalkulátor,* které umožňují přenášet data nebo přímo celé soubory, případně převod dokumentu do jiného jazyka.

Derive umožňuje načtení dat z tzv. datového souboru (tj. data jsou uspořádána do tabulky, takový soubor lze vytvořit v poznámkovém bloku s použitím oddělovačů - mezera nebo tabulátor - na řádku), lze použít data z tabulkového procesoru, pokud jsou uložena jako textový soubor s výše uvedenými oddělovači. Vhodná přípona souboru je .dat, načíst lze též soubory formátu .txt a .prn.

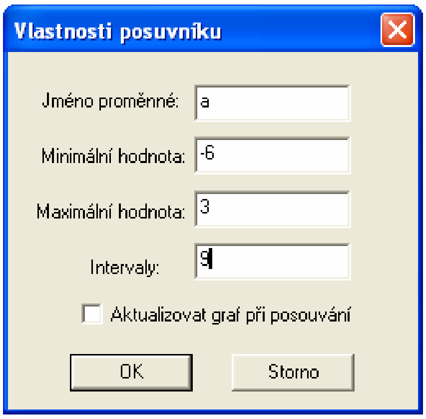
V určitých případech se jeví jako vhodné použít k vytvoření datového souboru grafické kalkulačky a následný přenos do počítače pomocí datového kabelu. O těchto možnostech se dočteme podrobněji v odborné literatuře.

3.7 Tvorba grafu

3.7.1 Grafy 2D

Pro zobrazení rovinných grafů nejprve otevřeme okno pro 2D grafiku. Je výhodné mít při práci vedle sebe otevřené grafické i algebraické okno, použijeme proto uspořádání vertikální (*Okno* → *Vertikální dlaždice*). V aktivním grafickém okně se mění aktuální nabídka, pomocí níž můžeme měnit měřítka souřadnicových os, polohu počátku soustavy souřadné nebo trasovat graf.

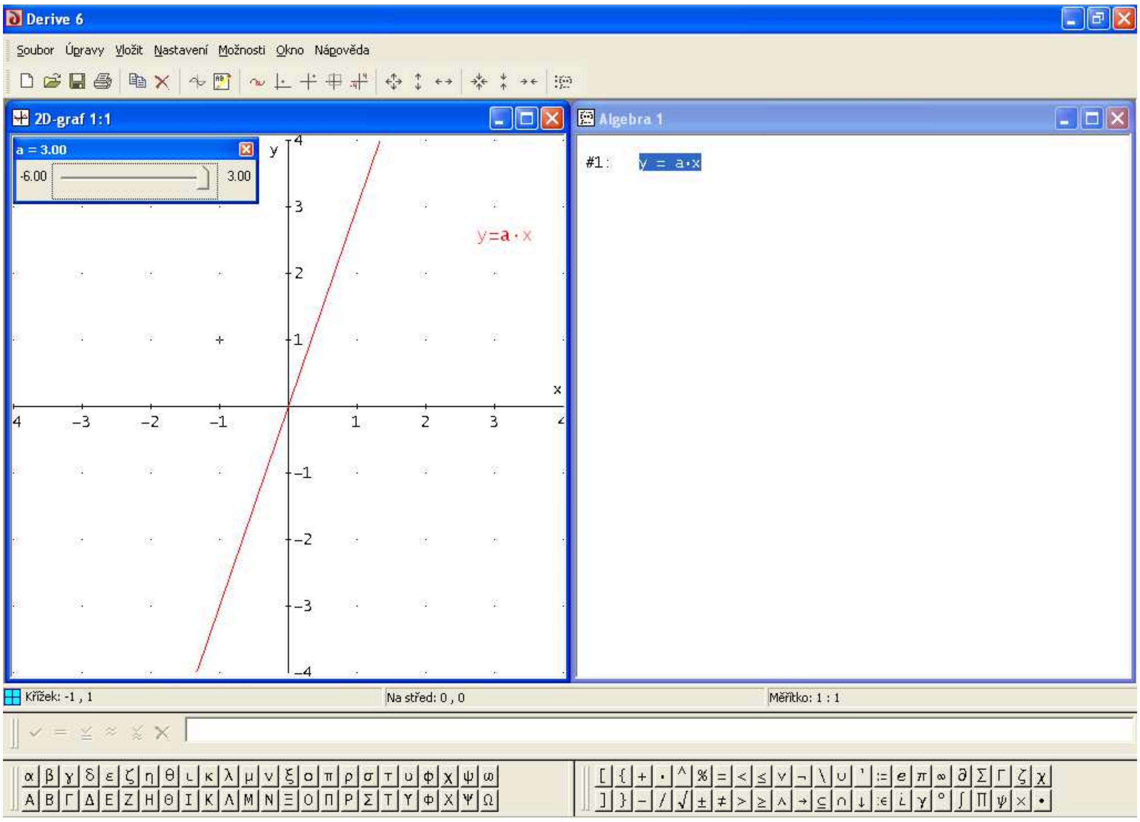
Graf křivky nakreslíme následovně: V algebraickém okně označíme požadovaný funkční předpis, přesuneme se do grafického okna (vybereme si jednu z možností: ikona  nebo *Okno* → *Nové 2D-grafické okno*) a zvolíme možnost *Vložit* → *Graf* .



Obr. 3.6 – Vlastnosti posuvníku

Užitečným nástrojem pro zkoumání vlivu parametrů na graf funkce je **posuvník**. Posuvník umožňuje pouhým pohybem myši měnit hodnoty parametru daného výrazu a okamžitě zobrazovat grafy příslušných funkcí. Zvýrazníme výraz v algebra okně a přemístíme se do grafického okna. Následně zvolíme příkaz *Vložit* → *Posuvník…*, objeví se dialogové okno (viz Obr. 3.6), v němž vyplníme potřebné údaje.

Po potvrzení se objeví posuvník (viz Obr. 3.7). Teprve poté vykreslíme graf a sledujeme, jak se pohybem posuvníku mění jeho průběh v závislosti na odpovídající hodnotě parametru. Nevýhoda posuvníku je, že se při přemístění grafu do algebraického okna nezachovává.



Obr. 3.7 - Posuvník

3.7.2 Grafy 3D

Pro zobrazení trojrozměrných grafů je třeba nejprve otevřít okno pro 3D-grafy (*Okno* → *Nové 3D-grafické okno* nebo pomocí ikony ). Dále postupujeme stejně jako při vykreslování 2D-grafů

3D-grafické okno můžeme použít např. pro grafické znázornění řešení soustav lineárních rovnic o třech neznámých. Roviny zadané obecnými rovnicemi jednu po druhé vykreslíme v grafickém okně. Průsečnice, pokud existuje, je daná parametrickou rovnicí.

3.5 Deklarace proměnných

Pokud pracujeme delší dobu s jedním dokumentem, ve kterém průběžně měníme nastavení hodnot a definičního oboru proměnných, můžeme si svou činnost zkomplikovat, když hodnoty použijeme nechtěně znovu. Těchto problémů se můžeme vyvarovat, pokud používáme vždy nový soubor s firemním nastavením (načítá se z inicializačního souboru *Derive6.ini*). Jestliže toto z jakéhokoliv důvodu nelze dodržet, ověříme si vždy správné hodnoty a definiční obory proměnných (*Průvodce* $\rightarrow$ *Hodnota proměnné…, příp. Definiční obor proměnné…*).

Jinou možností je samotná deklarace každé proměnné, tedy vymezení jejího oboru nebo hodnot. Např. pokud nechceme proměnné A přiřadit žádné hodnoty, použijeme prázdný příkaz A: .

3.6 Další možnosti programu

Do programu je možné přidávat další funkce z konkrétních balíčků nebo si naprogramovat funkce vlastní. Jelikož pro mou práci není programování nezbytně nutné, nebudu se jím podrobně zabývat. Zájemcům jsou k dispozici odborné publikace zabývající se hlouběji i touto problematikou.

4. Metodika práce

V následující kapitole se věnuji způsobu vypracování jednotlivých pracovních listů. Popisuji způsob výběru tématu, vhodných učebnic a jednotlivých příkladů. Sestavení pracovních listů je popsáno s důrazem na didaktickou část. Součástí jsou vzorová řešení pracovních listů.

4.1 Výběr tématu

Program *Derive* jsem si pro svou práci zvolila z několika důvodů. Tím hlavním je, že jsem se s *Derive* v minulosti setkala a věděla, co od něj mohu očekávat. V první řadě jsem ocenila jeho jednoduché ovládání, dále názornost, široké grafické možnosti a možnost propojit algebraické výpočty s grafickým zobrazením. Ovšem nezohlednila jsem nízkou dostupnost programu na jednotlivých základních školách. Doufám, že se tento nedostatek postupem času odstraní. Na základě vlastní zkušenosti jsem shledala tento program jako ideální k použití ve výuce a je škoda, že je prozatím tolik opomíjen.

Při výběru tématu jsem kladla důraz na využití *Derive* po grafické stránce. Pro žáky může být v tomto směru program přínosem při fixaci poznatků nebo při různých experimentálních řešeních. Po zkušenostech získaných nejen v rámci pedagogické praxe, jsem dospěla k názoru, že představivost a schopnost aplikace poznatků je u žáků celkově velmi omezená. Domnívám se, že k tomu významně přispívá nedostatečně názorná výuka. Svými pracovními listy usiluji o odstranění tohoto nedostatku u tématu funkce. Zejména možností vykreslování různých variant. Např. učiníme-li pouze drobnou změnu v původním zadání, díky počítači lze získat téměř okamžitě ilustraci toho, co se změnilo.

Grafické možnosti programu *Derive* nabízejí různorodé využití ve výuce. Např. již zmiňované vykreslování grafů, odvozování funkčních předpisů různých křivek, vykreslováním grafů funkcí můžeme dokonce vytvořit obrázky (o tomto více *Emil Calda: Z umělecké dílny profesora Ypsilona, Rozhledy M-F, č.9-10, 1983*). Pro účely základní školy uvažuji především o práci s grafy dvojrozměrnými, pro střední školy i s trojrozměrnými.

Z učiva základní školy se pro zpracování jevilo vhodné učivo 7. ročníku - přímá a nepřímá úměrnost, učivo 8. ročníku - lineární rovnice a učivo 9. ročníku - lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli, soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými a funkce. Rozhodla jsem se vytvořit pracovní listy pokrývající tematický celek funkce.

Funkce jsem zvolila proto, že navazují na ostatní výše zmiňované učivo. Jsou zařazovány v devátém ročníku, kdy u žáků v souvislosti s ukončením základní školní docházky celkově upadá zájem o školu a výuku. Důležitým faktorem je také širší uplatnění. Pracovní listy je vhodné použít pro budoucí rozšiřování znalostí a při opakování učiva i v nižších ročnících střední školy.

4.2 Výběr podkladů

4.2.1 Výběr vhodných příkladů

Při výběru příkladů, jsem kladla důraz na takové, pro které program *Derive* nabízí originální či jinak zajímavé způsoby provedení. Dále na příklady, u kterých usnadní řešení (početní či grafické) a tím je žákům ponecháno více prostoru pro hlubší zamyšlení nad daným problémem.

Prvotním cílem je taková volba příkladů, která žákům umožňuje zrychlení mechanického výpočtu, zrychlení zdlouhavého vykreslování průběhu funkcí a zároveň nabízí možnost hledat souvislosti mezi naučenými poznatky a jejich využitím. Mechanické výpočty nebo vykreslování průběhu funkce i bez použití softwaru jsou nutné znalosti, proto je důležité jejich nedostatek při použití programu kompenzovat. Proto by měla být činnost s programem dostatečně doplněna samostatnou aktivitou v sešitě.

Kombinace příkladů odpovídá průběhu výuky, schopnostem žáků a zahrnuje širokou škálu typů úloh.

4.2.2 Zhodnocení učebnic

Při výběru konkrétních příkladů jsem čerpala zejména ze současné nabídky učebnic pro základní školy a sbírek úloh. Některé úlohy jsou vytvořeny speciálně pro tyto pracovní listy.

Příklady v učebnicích a cvičebnicích matematiky hodnotím jako typově podobné až stejné. Nově vydávané knihy se po obsahové stránce příliš neliší od starších vydání. Autoři se snaží obsáhnout základní znalosti žáků, volí různé alternativy řešení jednoho příkladu a snaží se ukázat, že je možné řešit příklad z několika různých stran. Největší rozdíl mezi jednotlivými učebnicemi je množství příkladů určených k opakování a vizuální stránka. V současnosti se učebnice často doplňují samostatnou sbírkou úloh a zvyšuje se důraz kladený na přehlednost, barevnost a celkový vizuální efekt.

Ke své práci jsem si vybrala učebnice matematiky od autorů Oldřich Odvárko a Jiří Kadleček [6] a sbírku úloh [1]. Tyto knihy jsem zvolila vzhledem k jejich zpracování. Druhým důležitým faktorem bylo, že jsem se v praxi shledala s tím, že tyto knihy jsou nejčastěji využívány a jsou velmi rozšířeny na českých základních školách. Příklady jsem doplnila ze sbírky úloh [3] a matematiky v kostce [2].

4.3 Sestavení jednotlivých pracovních listů

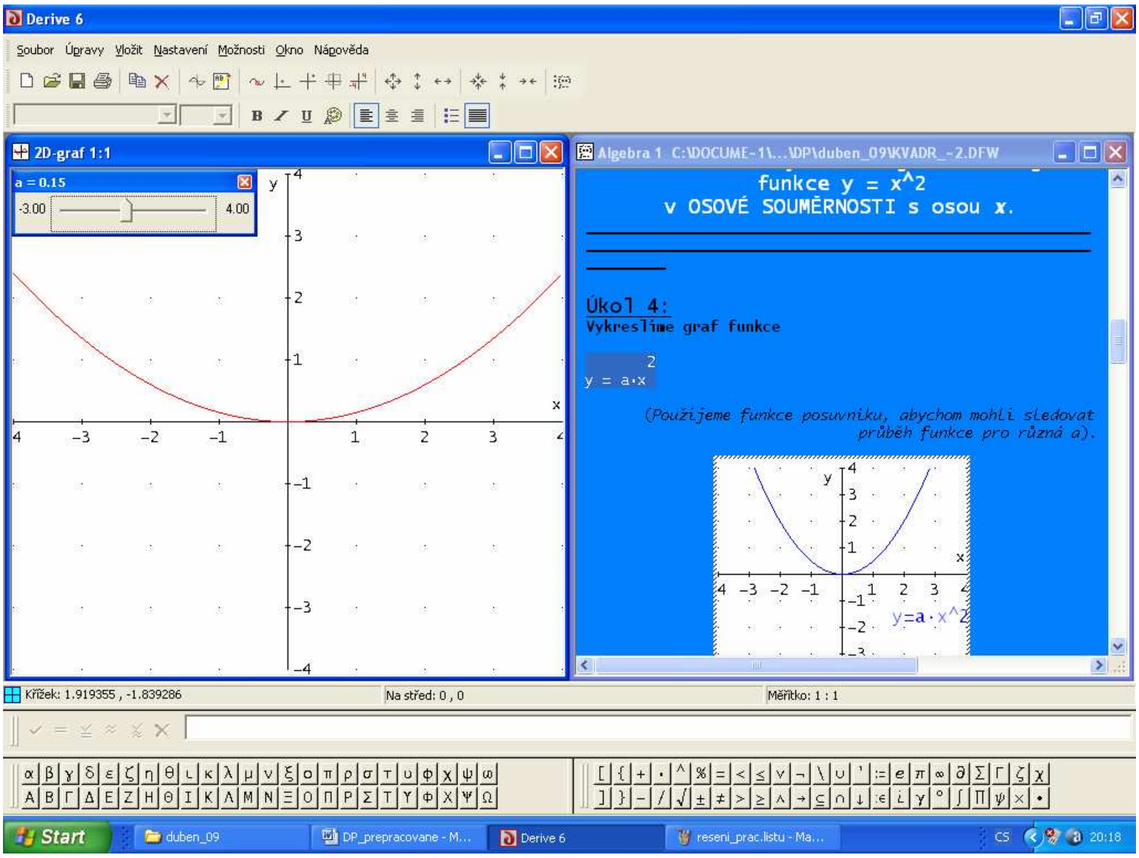
Pracovní listy tvoří kombinace příkladů, které podporují průběh výuky a při samostatné práci s programem umožňují žákům procvičování naučeného i objevování nových poznatků.

Příklady jsou řazeny logicky, vzhledem k návaznosti učiva. Do jednotlivých pracovních listů jsou rozděleny podle typu funkce. Snažím se z tématu pokrýt co nejširší část vyučovanou na základní škole. Předkládané pracovní listy mají dvě formy:
1) **výukové listy** pro samotnou výuku nového tématu (viz Přílohy č. 2, 4, 7 a 8) a
2) **pracovní listy** určené zejména pro následné procvičování (viz Přílohy č. 3, 5, 6 a 9).

4.4 Vzorová řešení pracovních listů

Uváděná řešení jsou pouze ukázkou, jak je možné pracovní listy, resp. jednotlivé příklady, řešit. Pokud se nabízí více možností, snažím se je uvádět. Nevylučuji samozřejmě možnost zcela odlišného, originálního způsobu řešení.

Vzorová řešení jsou vypracována v *Derive* a následně z programu importována do tohoto dokumentu.

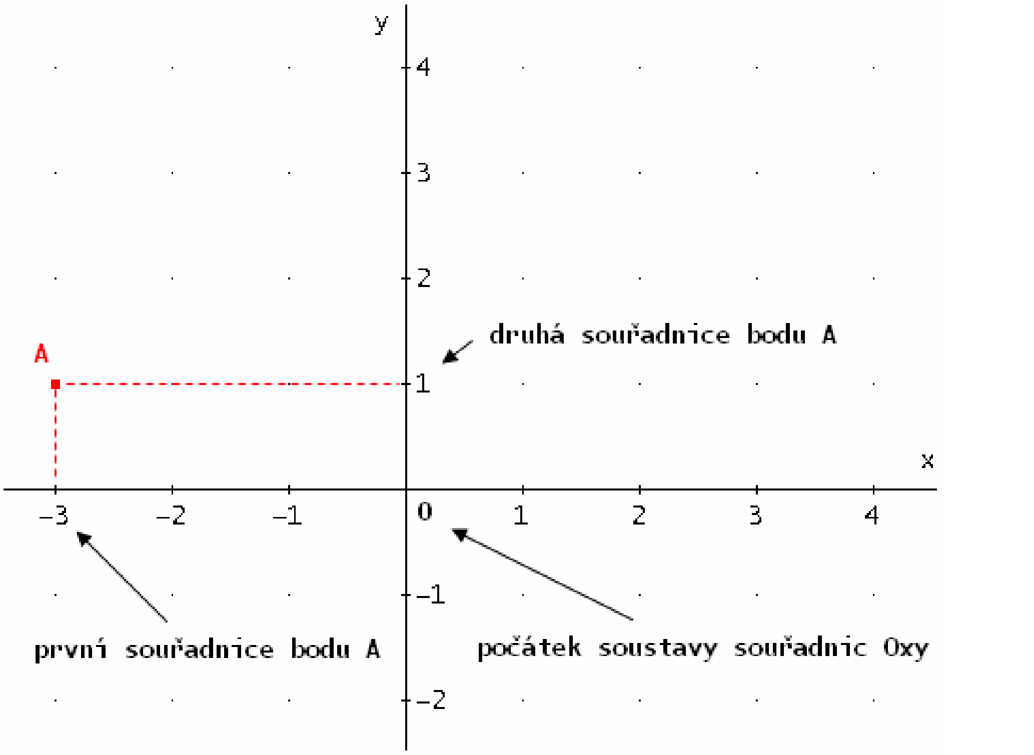


Obr. 4.1 – Ukázka řešení pracovního listu v Derive

4.4.1 Výukový list: Funkce

Funkce

• <u>**Souřadnice bodu**</u>



(Převzato z publikace [6], s. 3)

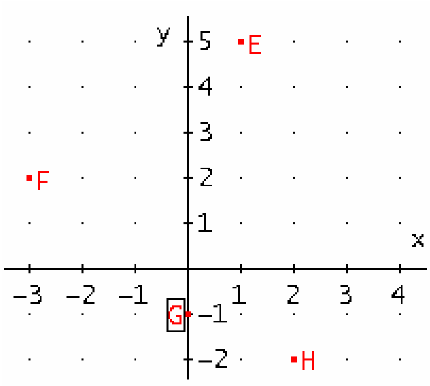
Bod A má souřadnice **−3** na ose **x** a **1** na ose y.

! Zapisujeme takto: **A = [−3;1]** nebo **A [−3;1]**

<u>**Úkol 1:**</u>

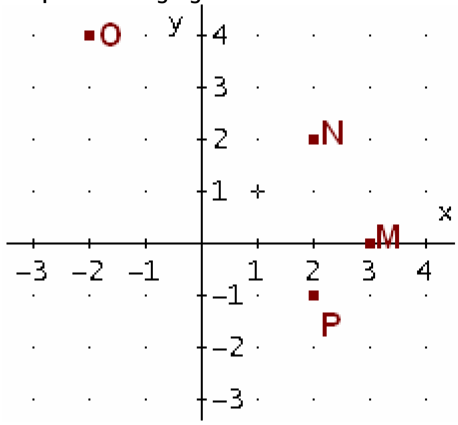
Zapiš body E [1,5], F [−3,2], G [0,−1] a H [2,−2] do soustavy souřadnic.

E := [1, 5]
F := [−3, 2]
G := [0, −1]
H := [2, −2]



Úkol 2:

Zapiš body M, N, O a P pomocí jejich souřadnic.



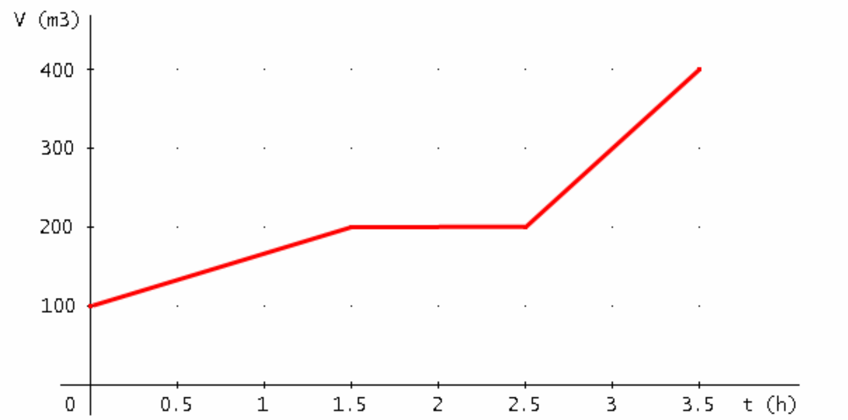
Řešení:

M = [3,0]
N = [2,2]
O = [−2,4]
P = [2,−1]

! **Délky jednotek na první a druhé ose nemusí být stejné.**

Úkol 3: Plnění bazénu

Na obrázku vidíš grafické znázornění závislosti objemu vody na počátku doplňování bazénu vodou.



a) Kolik krychlových metrů vody bylo v bazénu na začátku plnění?
b) Kolik krychlových metrů bylo v bazénu za 1,5 hodiny od počátku doplňování?
c) Na jak dlouho bylo plnění bazénu přerušeno?
d) Kolik krychlových metrů přiteklo do bazénu za poslední hodinu plnění?
e) Kolik krychlových metrů vody je v bazénu celkem?

(Převzato z publikace [6], s. 5, př. 5)

Řešení:

a) 100 m^3
b) 200 m^3
c) na 1 hodinu

d) 200 m^3
e) 400 m^3

Úkol 4:

Ověř, že v následující tabulce je každému číslu v prvním řádku (*x*) přiřazen jeho trojnásobek ve druhém řádku (*y*).

x	1	2	3,5	4,5	6	7
y	3	6	10,5	13,5	18	21

U následující tabulky zkus objevit, jaká závislost ***y* na *x*** je vyjádřena.

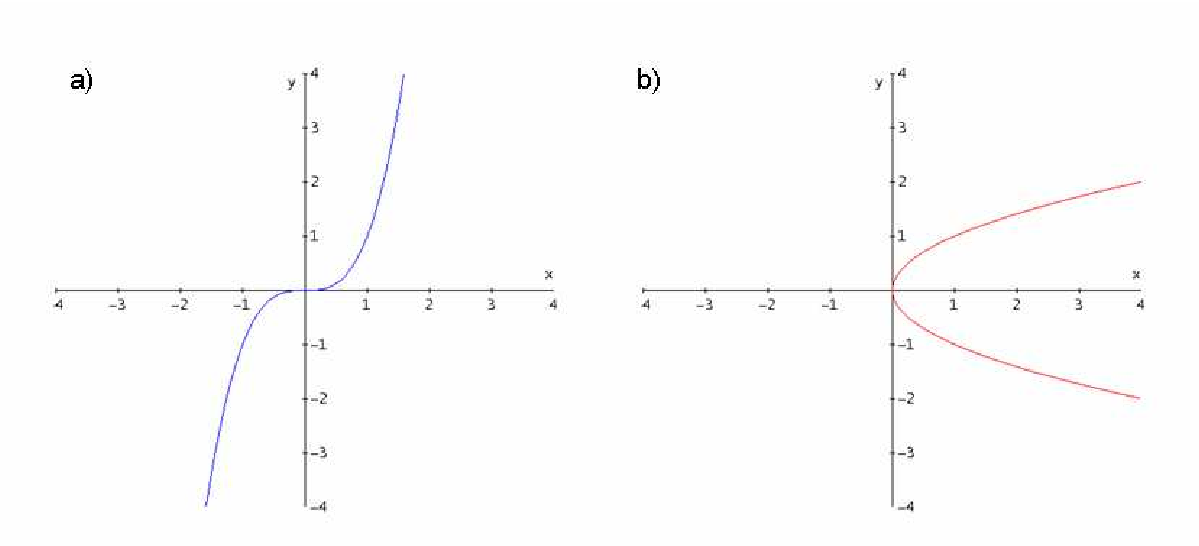
x	1	2	3,5	4,5	6	7
y	4	6	11,5	14,5	19	22

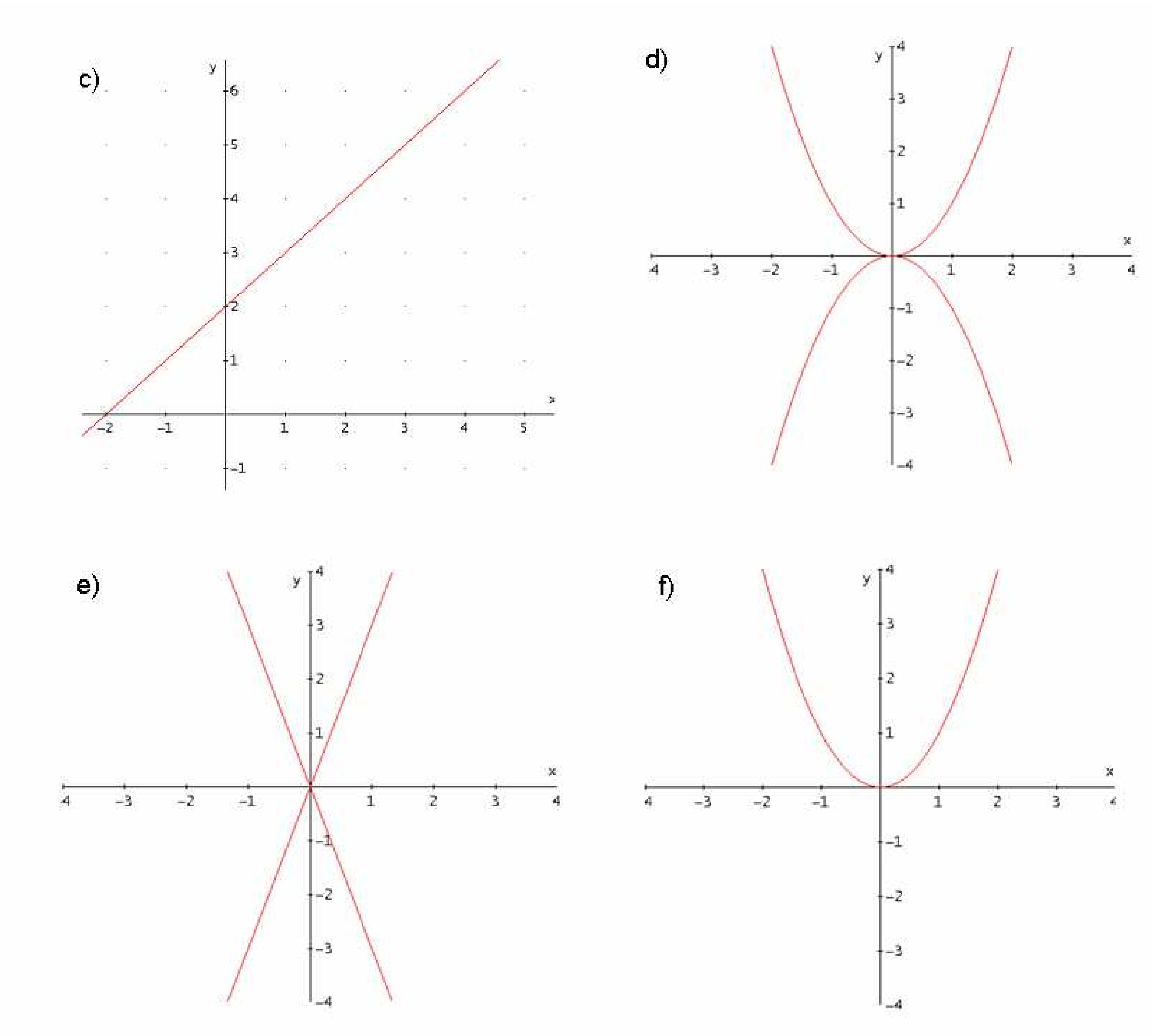
Řešení: Srovnáme–li obě tabulky, zjistíme, že závislost je takováto: *y* je trojnásobkem *x* ke kterému jsme přičetli *1*, tedy $y = 3x + 1$.

! **Funkce je předpis,**
podle kterého je KAŽDÉMU číslu přiřazeno NEJVÝŠE JEDNO ČÍSLO
(tzn. buď jedno číslo nebo žádné číslo)
(Převzato z publikace [6], s. 8)

Úkol 5:

Urči, na kterém obrázku je zakreslena funkce. Proč?





Řešení:

Funkce jsou na obrázku: a), c) a f)

Funkce nejsou na obrázku: b), d) a e)

Proč? Není dodržena podmínka, že každému *x* je přiřazeno **maximálně** jedno *y*.

Úkol 6a:

Pracuj s následujícím grafem:

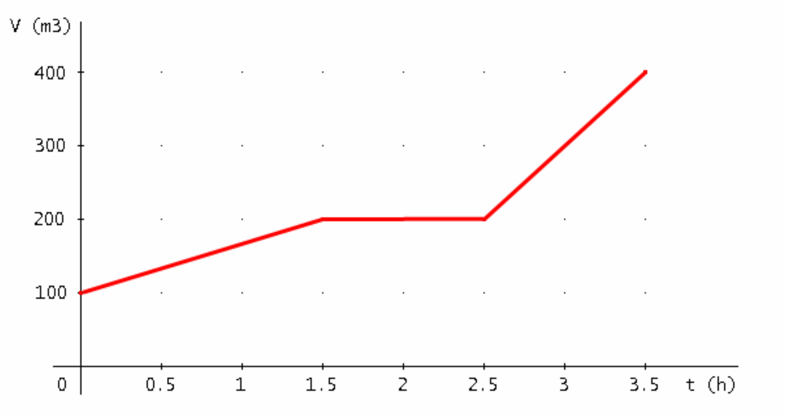
a) Která čísla jsou přiřazena číslu 3? Odpověď: 300

b) Která čísla jsou přiřazena číslu 0? Odpověď: 100

c) Kterým číslům je přiřazeno jedno číslo? Odpověď: $0 \leq x \leq 3,5$

d) Kterým číslům není přiřazeno žádné číslo? Odpověď: $x < 0$ a $x > 3,5$

e) Kterým číslům je přiřazena hodnota 200? Odpověď: $1,5 \leq x \leq 2,5$



- **Definiční obor**

! **Všechna čísla, kterým je funkcí přiřazeno nějaké číslo, tvoří DEFINIČNÍ OBOR funkce.**

! **Funkce je předpis, podle kterého je každému číslu z jejího DEFINIČNÍHO OBORU přiřazeno JEDNO číslo.**

- **Obor hodnot**

! **Hodnota, která je přiřazena číslu z definičního oboru se nazývá HODNOTA funkce.**
Všechny hodnoty funkce tvoří OBOR HODNOT funkce.

Úkol 6b:
Vrať se k předchozímu úkolu a urči, jaký má tato funkce
- definiční obor: $\mathbf{0 \le x \le 3{,}5}$
- obor hodnot: $\mathbf{100 \le y \le 400}$

Závislá a nezávislá proměnná

př. Hmotnost člověka se mění s jeho věkem
(= je závislá na jeho věku)
Teplota vzduchu se mění v průběhu dne
(= je závislá na denní době)
Petr dostal od maminky 100,- na nákup jablek. Jeden kilogram jablek stojí 25,-Kč. Kolik kilogramů jablek bude moci koupit?
(= cena jablek nezávisí na tom, kolik má Petr peněz, ale počet kilogramů, které koupí, závisí na tom, kolik peněz má)

! **Říkáme, že *y* je funkcí *x*, kde *x* je závisle proměnná a *y* je nezávisle proměnná.**

Úkol 7:

Urči, která proměnná je závislá (Z) a která nezávislá (N):

1) Každému přirozenému číslu je přiřazeno číslo, které je počtem všech jeho dělitelů.
2) Objem vody v bazénu v době jeho napouštění.
3) Při odeslání balíku je cena 15 Kč za každý kilogram.
4) Počet návštěvníků na všech 8 představeních v tomto měsíci.
5) Počet vyrobených součástek se mění s v průběhu pracovní doby

Řešení:
1) přirozená čísla (N), všichni dělitelé (Z)
2) objem vody (Z), čas (N)
3) cena (Z), váha (N)
4) celkový počet návštěvníků (Z), počet představení (N)
5) počet součástek (Z), čas (N)

Cvičení na závěr:

1) Doplň chybějící údaje:

x	1	2	4	5	8	11
$y = 2x$						

2) Která tabulka nezobrazuje funkci? Proč?

a)

x	0	1	2	3	4
y	5	2	–1	2	5

b)

x	0	1	2	3	4
y	5	2	–1	–4	–7

c)

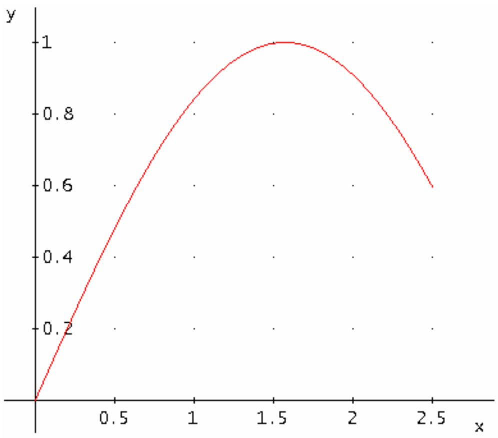
x	0	1	2	1	4
y	5	6	7	8	9

3) Urči definiční obor a obor hodnot funkce

$$y = x^2$$

4) Urči definiční obor a obor hodnot funkce z příkladu 1).

5) Pro které číslo z definičního oboru je hodnota funkce největší a pro které nejmenší?



4.4.2 Pracovní list: Funkce

Pracovní list: *FUNKCE*

Příklad 1:

Urči, **zda se jedná** o graf funkce.
Pokud ano, přiřaď správný funkční předpis ze seznamu uvedeného na řádcích níže (předpisy 1) – 7)).

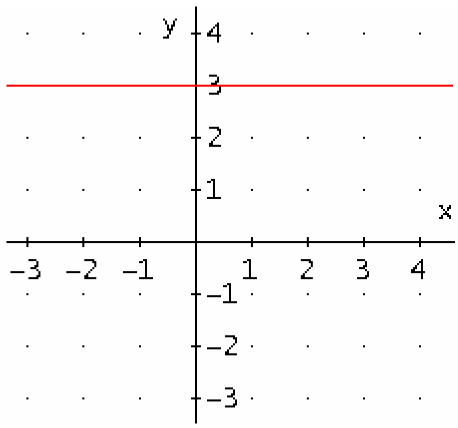
!!! Pozn. Ne všechny uvedené funkční předpisy jsou níže vykresleny grafem.

1) y=x   2) y=x^2   3) y=2x+5   4) y=3
5) y=3x   6) y=−2x   7) y=5x+2

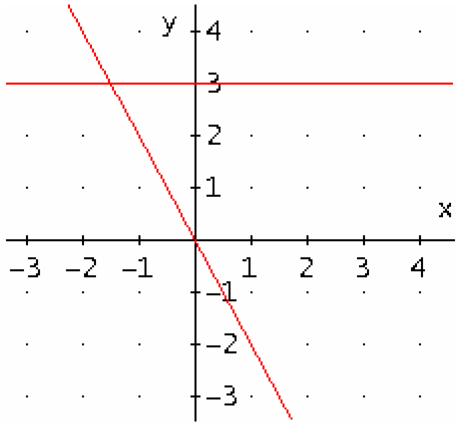
Řešení:

Při řešení tohoto příkladu očekávám, že pokud řešitel nedokáže správně určit funkční předpis nebo si není jistý svou odpovědí, použije ověření vykreslením grafů výše uvedených funkcí.

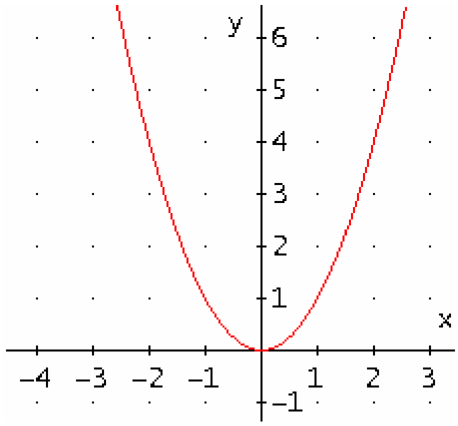
a) Jedná se o graf funkce? **Ano**/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis: **y=3**



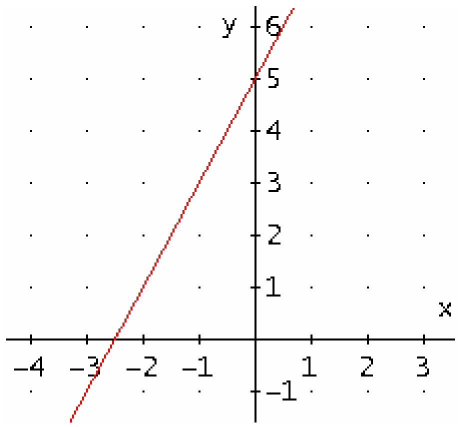
b) Jedná se o graf funkce? Ano/**Ne** (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



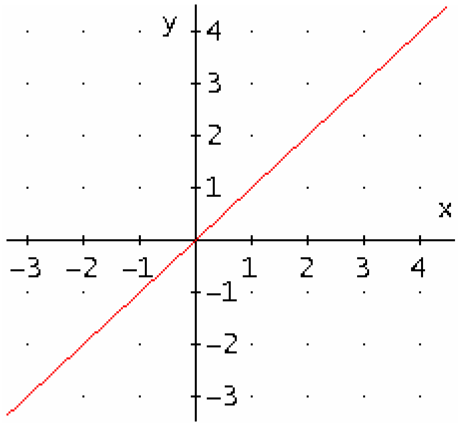
c) Jedná se o graf funkce? **<u>Ano</u>**/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis: **<u>y=x^2</u>**



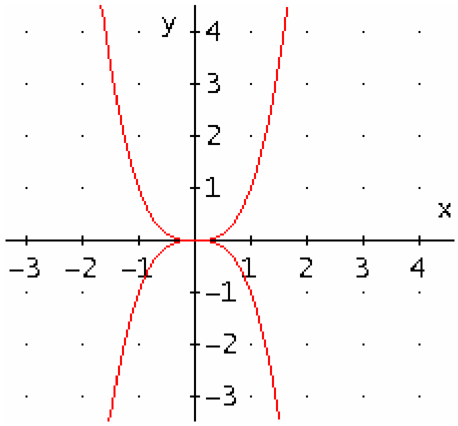
d) Jedná se o graf funkce? **<u>Ano</u>**/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis: **<u>y=2x+5</u>**



e) Jedná se o graf funkce? **<u>Ano</u>**/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:**<u>y=x</u>**



f) Jedná se o graf funkce? Ano/**Ne** (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



Příklad 2:

Funkce je dána grafem (uveden níže):

a) Zapiš, která čísla tvoří definiční obor této funkce.
Odpověď: $-2 \leq x \leq 3$

b) Zapiš hodnotu funkce, která je přiřazena číslu 0.
Odpověď: -3

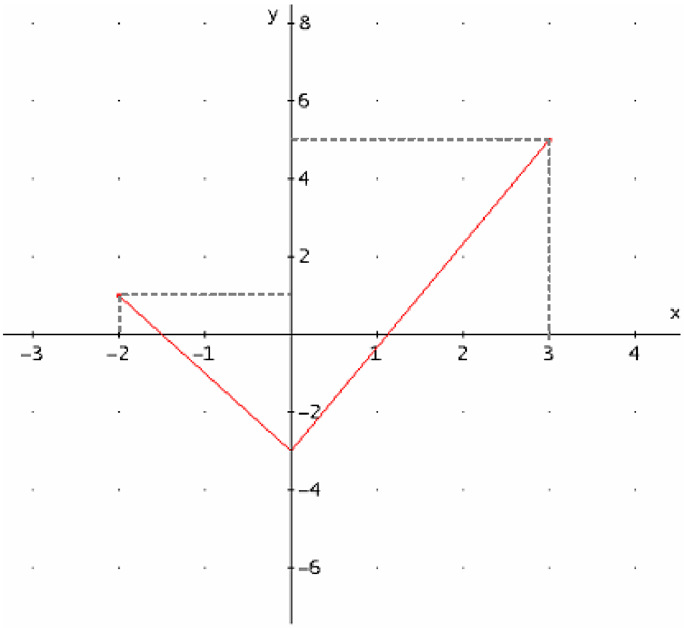
c) Zapiš hodnotu funkce pro číslo 3.
Odpověď: 5

d) Pro které číslo z definičního oboru je hodnota funkce největší?
Odpověď: pro 3

e) Pro které číslo z definičního oboru je hodnota funkce nejmenší?
Odpověď: pro 0

f) Zapiš, která čísla tvoří obor hodnot funkce.
Odpověď: $-3 \leq x \leq 5$

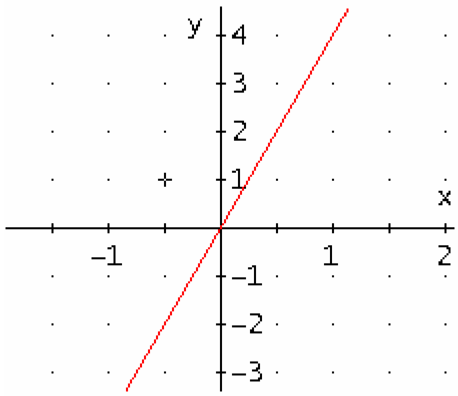
(Převzato z publikace [6], s. 13, úloha A: př. 5.–10.)



Příklad 3:
Sestroj graf závislosti strany čtverce na jeho obvodu.

Řešení:
Nápověda:
- *uvědom si, jak počítáme obvod čtverce a urči požadovanou závislost*
- *zapiš závislost vzorcem (uprav níže umístěný předpis y=0, použij možnosti Úpravy -> Výraz)*
- *otevři dvoj-klikem grafické okno umístěné níže*
- *vykresli graf(Vložit -> Graf)*
- *graf umístěný v tomto okně aktualizuj (Soubor -> Aktualizovat)*

$y = 4 \cdot x$



Příklad 4:
Nádrž na vodu má objem 80 m^3. Otevřením přívodu přibývá 0,4 m^3 za čtvrt hodiny. Napiš rovnici funkce, která vyjadřuje závislost množství vody *y* (v metrech krychlových) na čase *x* (v hodinách),

jestliže při otevření přívodu nádrže:
a) byla nádrž prázdná,
b) byla nádrž již naplněna 300 hl vody.
(Převzato z publikace [1], s. 191, př. 22)

Řešení:

Nápověda:

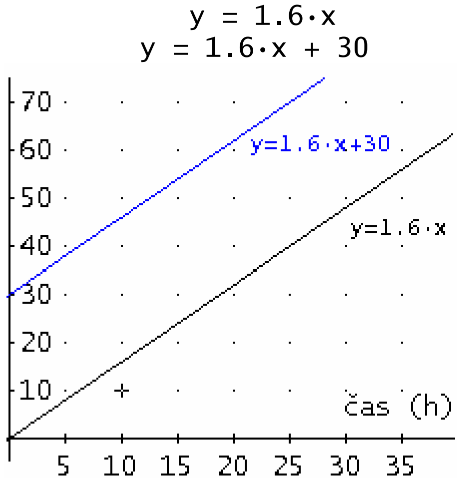
- *sestav dvě rovnice*
- *pro kontrolu vykresli oba grafy*
  - *do jednoho obrázku (použij grafické okno umístěné níže, postup stejný jako u předchozích příkladů)*
  - *osy x a y popiš jako množství (m krychlové) a čas (hodiny)(Možnosti -> Zobrazení... -> záložka Osy -> Označení os)*
  - *grafy zakresli různými barvami (Možnosti -> Zobrazení... -> záložka Barva)a*
  - *připoj funkční předpisy obou grafů (Možnosti -> Popsat nové grafy)*

a)

0,4 m^3 … 1/4 hod. (= *15 min.*)
x m^3 … 1 hod.
x = 0,4 · 4 = 1,6
y = 1,6 x

b)

y = 1,6 x + 300 hl
300 hl = 30 m^3
y = 1,6 x + 30



Odpověď:

a) Závislost v případě prázdné nádrže je y = 1,6 x.
b) Pokud je naplněná 300 hl tak je závislost y = 1,6x + 30.

4.4.3 Výukový list: Lineární funkce

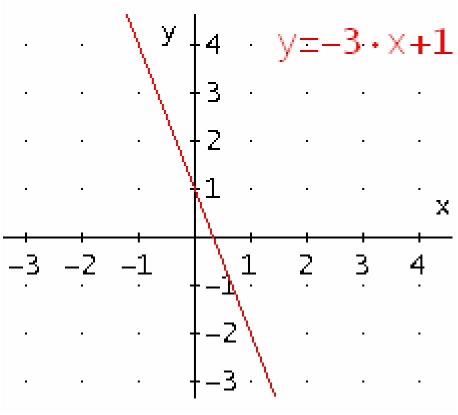
Lineární funkce

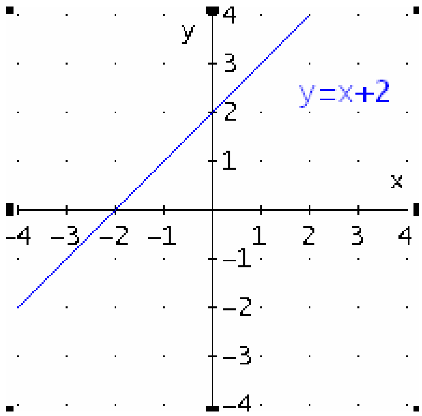
Úkol 1:

Sestroj graf funkce, jejíž definiční obor tvoří všechna čísla a která je vyjádřena následovně:

a)
$y = x + 2$

b)
$y = -3 \cdot x + 1$





Z obrázků vidíme, že grafem lineární funkce je **přímka**.

Lineární funkce je dána předpisem

$$y = kx + q,$$

k a q jsou libovolná čísla.
Definiční obor funkce tvoří všechna čísla, není-li určeno jinak.

Δ Pracuj s pracovním listem Graf lineární funkce a zjisti, jak ovlivní průběh funkce parametr k a jak parametr q.

k **... určuje směr funkce (ovlivňuje sklon grafu k ose x)**
a>0 funkce rostoucí
a<0 funkce klesající
q **... určuje posunutí po ose** ***y***

Úkol 2:

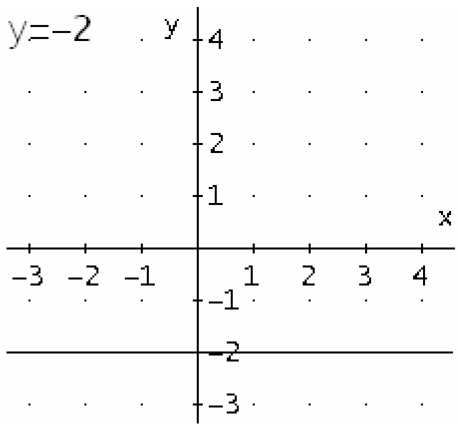
Kolik bodů nám stačí znát, abychom sestrojili graf lineární funkce?
Odpověď: Stačí 2 body.

Speciální případy lineární funkce:

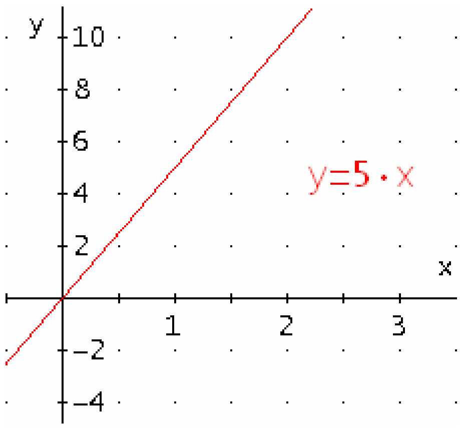
Úkol 3:

Zakresli graf libovolné lineární funkce pro případ:
a) $k = 0$
b) $q = 0$
Zapiš také jejich funkční předpisy.

a)
$y = -2$



b)
$y = 5 \cdot x$



!!! Budeme se bavit o
PŘÍMÉ ÚMĚRNOSTI a KONSTANTNÍ FUNKCI.

Úloha 4:

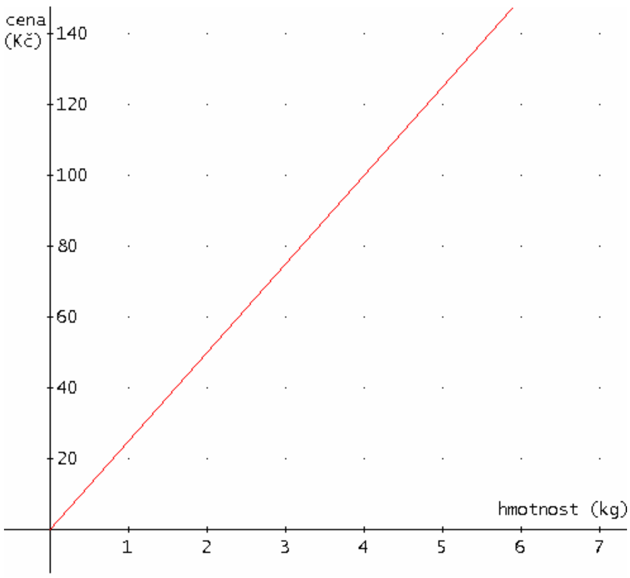
Cena za 1 kilogram pomerančů je 25 Kč. Sestav vzorec, který vyjadřuje závislost ceny pomerančů na jejich hmotnosti.

!! Kolikrát se zvětší hmotnost, tolikrát se zvětší cena !!

Cena je <u>přímo úměrná</u> hmotnosti.

Na obrázku je zobrazen graf přímé úměrnosti, která znázorňuje závislost ceny pomerančů na jejich hmotnosti.

- *Zjisti z grafu, kolik kilogramů pomerančů, si můžeš koupit za 125 Kč.* <u>Odpověď</u>: <u>5 kg.</u>
- *Urči z grafu, kolik stojí 4 kg pomerančů?* *<u>Odpověď</u>:* <u>**100 Kč.**</u>



<u>Úkol 5:</u>

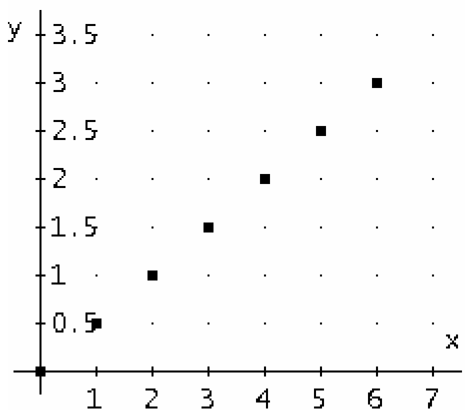
Urči z obrázku přímé úměrnosti:

a) Definiční obor této funkce.
  <u>Odpověď</u>: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

b) Zapiš pomocí souřadnic všechny body grafu této funkce.
  <u>Odpověď</u>: [0,0]; [1, 0.5]; [2,1]; [3,1.5]; [4,2];[5,2.5]; [6,3]

c) Zapiš vzorec, kterým je funkce vyjádřena.
  <u>Odpověď</u>: y = 0.5 x

(Převzato z publikace [6], s. 14, př. 2)

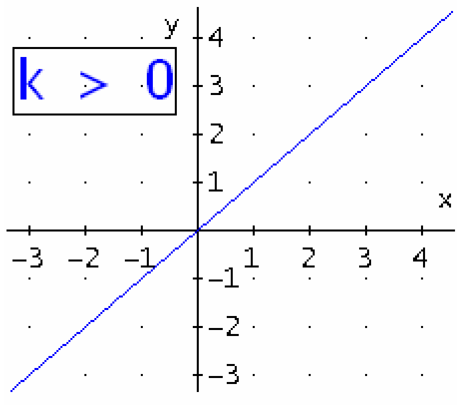


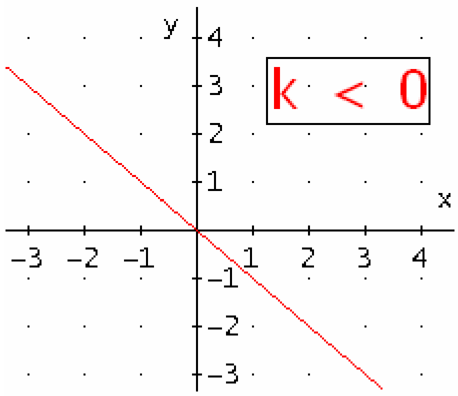
- ## Přímá úměrnost

Vyjadřujeme ji vzorcem **$y = kx$**,
k je libovolné číslo různé od nuly.

Je to speciální případ lineární funkce: ***q = 0 a zároveň k ≠ 0.***
Přímá úměrnost vyjadřuje závislost jedné veličiny na druhé.
Pokud se jedna veličina zvětší, druhá veličina se také zvětší.

Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem soustavy souřadné.





Úkol 6:

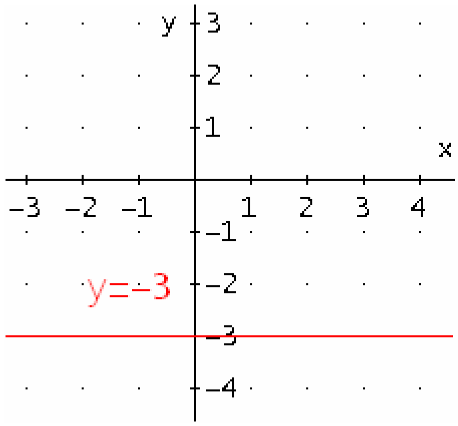
Kolik bodů nám stačí k tomu, abychom dokázali zakreslit graf přímé úměrnosti? **Odpověď**: Stačí pouze **jeden** bod.

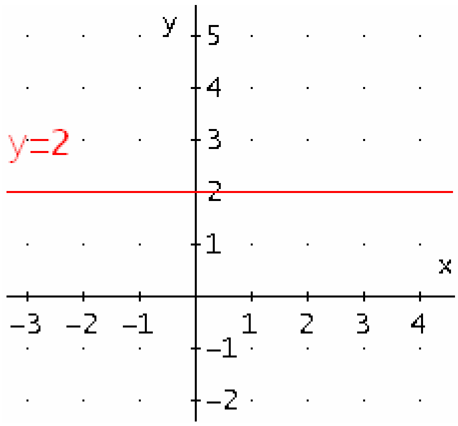
- ## Konstantní funkce

Vyjadřujeme ji vzorcem **$y = q$**, ***q*** je libovolné číslo.

Je to speciální případ lineární funkce: ***q ≠ 0 a zároveň k = 0.***
Do oboru hodnot patří pouze číslo q.

Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou *x*.





Úkol 7:

Kolik bodů stačí k sestrojení grafu konstantní funkce?

Odpověď: Pouze **jeden** bod.

Úlohy na závěr:

1) Zakresli graf přímé úměrnosti
- **a)** $y = 2{,}5\ x$
- **b)** $y = -\ 5\ x$

2) Rychlík jede průměrnou rychlostí 72 km za hodinu z místa A do místa B.
- **a)** Sestrojte graf závislosti dráhy na čase.
- **b)** Určete, jaká je vzdálenost míst A a B, jestliže do místa B dojel rychlík za 1 hodinu 25 minut.

(Převzato z publikace [1], s. 190, př. 20)

3) Může být grafem lineární funkce
- **a)** rovnoběžka s osou x?
- **b)** rovnoběžka s osou y?

4) Sestroj graf lineární funkce y = 2x – 3. Pak z něho zjisti všechna x, pro která platí:

a) 2x–3=0
b) 2x–3=3
c) 2x–3=–5

(Převzato z publikace [6], s. 25, př. 2)

5) Řeš graficky soustavy rovnic:

a) $4x + 3y = 6$
$2x + y = 4$

b) $3x - 5y = 11$
$6x - 10y = 22$

(Převzato z publikace [1], s. 189, př. 10b) a 11a))

4.4.4 Pracovní list: Lineární funkce

Pracovní list: *Lineární funkce*

Příklad 1:

Z následujících funkcí vyber ty, jejichž grafy jsou rovnoběžné přímky ($x \in R$).

$y = x - 5$

$y = -3 \cdot x + 2$

$y = -x + 5$

$y = x + 2$

$y = 5 \cdot x - 5$

Výsledek ověř graficky.

(Převzato z publikace [3], s. 56, př. 13)

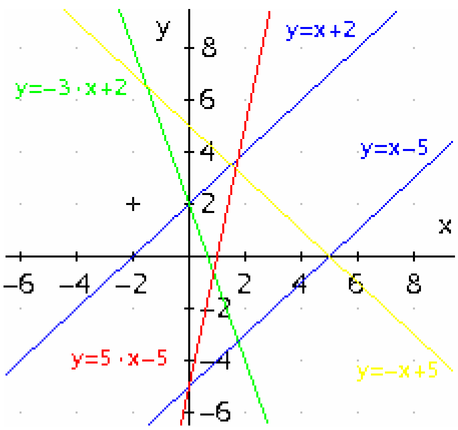
Řešení:

Odpověď:

Rovnoběžné jsou grafy pouze těchto dvou funkcí: **y = x + 5** a **y= x + 2**. Grafy ostatních funkcí nejsou s žádným dalším rovnoběžné.

Nápověda ke grafickému ověření:

- *Dvoj-klikem otevři níže zobrazené grafické okno.*
- *Vykresli grafy (Vložit -> Graf)*
- *Nezapomeň, že nejdříve musíš v algebraickém okně označit výraz, který chceš vykreslit.*
- *Až svou práci dokončíš, přenes grafické okno zpět do tohoto dokumentu příkazem Soubor -> Aktualizovat.*
- *Pokud potřebuješ vložit další (nový) graf použij příkaz Soubor -> Přemístit.*



Příklad 2:

Urči, pro které hodnoty proměnné *x* bude mít funkce:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + 3$$

a) kladné hodnoty,

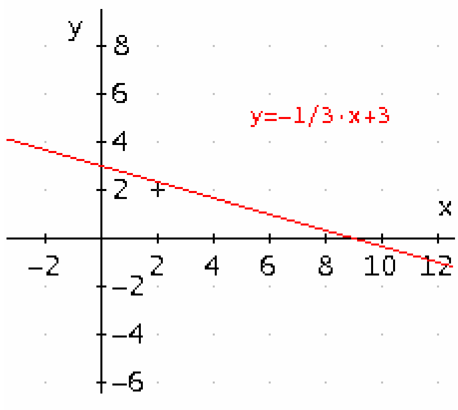
b) záporné hodnoty?

(Převzato z publikace [1], s. 190, př. 19)

Řešení:

Nápověda:

•*Zkoumej graf funkce.*



Odpověď:

Graf protíná osu x v bodě [9,0]:
a) kladné hodnoty má funkce pro x < 9
b) záporné hodnoty má funkce pro x > 9

Příklad 3:

Uveď aspoň dvě lineární funkce, pro které platí: Hodnota funkce přiřazená číslu 2 je 3.

(Převzato z publikace [6], s. 19, př. 4)

Řešení:

Odpověď:

Předpis lineární funkce je:
y=ax+b,
doplním tedy *x=2* a *y=3*.
Následně budu řešit rovnici o dvou neznámých. Vyjádřím si např. *b* (pomocí *a*). A libovolně dosadím.

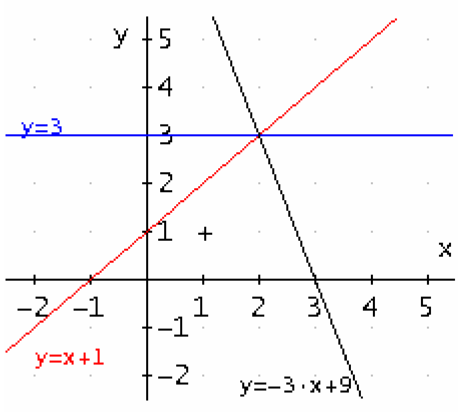
Vyšlo mi např. a = 1 => b = 1 ... **y = x + 1**
a = 0 => b = 3 ... **y = 3**
a = −3 => b = 9 ... **y = −3x + 9**

Pomocné výpočty:

3 = 2·a + b
SOLVE(3 = 2·a + b, b)
b = 3 − 2·a

$$y = x + 1$$
$$y = 3$$
$$y = -3\cdot x + 9$$

Svoje řešení ověř graficky.



Příklad 4:

Řeš soustavu rovnic:
$2 \cdot x - y = 2$
$2 \cdot x + 3 \cdot y - 6 = 0$
Řešení proveď graficky i početně.

(Převzato z publikace [1], s. 186, př. 2)

Řešení početní:

Nápověda:

- *Pro rychlé řešení použij Řešit -> Soustavu rovnic...*

SOLVE([2·x − y = 2, 2·x + 3·y − 6 = 0], [x, y])

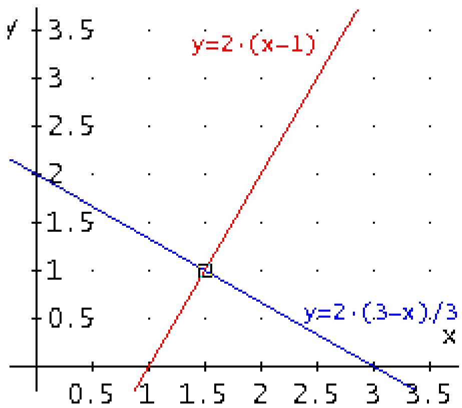
$$\left[x = \frac{3}{2} \wedge y = 1\right]$$

Řešením soustavy rovnic je bod [1,5;1].

Řešení grafické:

Nápověda:

- *Vykresli grafy a použij funkce trasovat graf.*
- *Pro zjištění souřadnic průsečíku lze využít příkazů hCross a vCross.*



$$\text{hCross} = \frac{3}{2}$$

vCross = 1

Příklad 5:

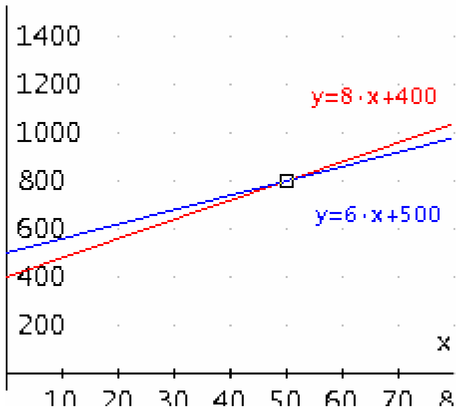
V půjčovně ALFA pronajímají Fabii za denní paušál 400 Kč a navíc se platí 8 Kč za každý ujetý kilometr. V půjčovně BETA je Fabia pronajímána za denní poplatek 500 Kč plus 6 Kč za každý kilometr. Při jakém počtu ujetých kilometrů je finančně výhodnější pronajmout Fabii na jeden den v půjčovně BETA?

(Převzato z publikace [6], s. 26, př. B)

Řešení:

Nápověda:

- *Ujasni si jaké znáš údaje a pokud potřebuješ, vypiš si je.*
- *K vyřešení úlohy využij grafické znázornění(pracuj s následujícím grafickým oknem).*



	Alfa	**Beta**
Denní paušál	400	500
Poplatek za 1 km	8	6
Poplatek za x km	8x	6x
Celkem platba za den	**400+8x**	**500+6x**

Nyní již známe dvě funkce:
$y = 8 \cdot x + 400$
$y = 6 \cdot x + 500$
a ty zakreslíme do jedné soustavy souřadnic (viz výše).
! Definičním oborem jsou všechna $x \geq 0$, nelze ujet záporný počet kilometrů.
Využitím funkce trasování grafu, příp. následným použitím příkazů hCross a vCross, zjistíme souřadnice průsečíku.
Průsečík má hodnotu x = 50. Můžeme tedy odvodit odpověď.

Odpověď:
Při pronájmu automobilu na jeden den je půjčovna BETA výhodnější při **více než 50 ujetých kilometrech**.

4.4.5 Pracovní list: Graf lineární funkce

Pracovní list: *Graf lineární funkce*

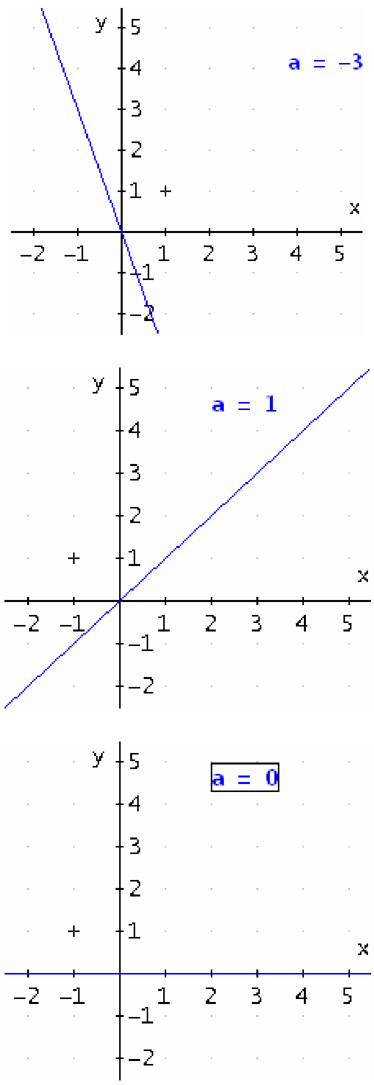
Úkol 1:

Zjisti, jak ovlivní velikost parametru *a* průběh funkce
y = a·x

Řešeni:

Nápověda:

- *Pro práci využij níže umístěné grafické okno (aktivuješ jej dvoj-klikem).*
- *Vykresli graf (nezapomeň, že musíš mít v algebraickém okně označený výraz, který chceš vykreslit).*
- *Použij posuvník (Vložit -> Posuvník...).*
- *Zkoumej změnu grafu vhodným zvolením parametru **a** (např. -2, 0, 2).*
- *Až budeš s řešením hotov/a, přemísti grafické okno zpět (Soubor -> Aktualizovat).*



Závěr:
Velikost parametru ***a*** určuje sklon grafu funkce k osám ***x*** a ***y***.

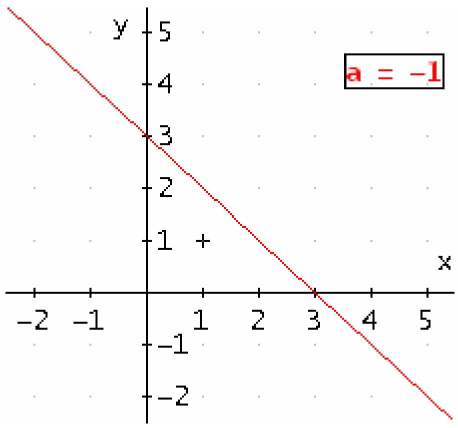
Bude-li a=0 graf funkce bude totožný s osou ***x***.
Čím bude mít ***a*** vyšší hodnotu, tím se bude graf více přibližovat k ose ***y***.
Zároveň záleží na znaménku hodnoty ***a***, bude-li ***a*** kladné (tj. a>0) jedná se o funkci rostoucí, bude-li záporné (tj. a<0) jedná se o funkci klesající.
Graf v každém případě prochází počátkem soustavy souřadné (tj. bodem 0 = [0,0]).

Úkol 2:

Jaká změna (oproti předchozímu úkolu) nastane, pokud budeš zkoumat funkci
y = a·x + 3

Řešení:

Nápověda:
- *Postupuj jako v předchozím úkolu.*



Závěr:
Oproti předchozímu úkolu graf neprochází v žádném případě počátkem (bodem 0 = [0,0]), ale pokaždé bodem [0,3].
Graf je posunut po ose ***y*** o přidanou hodnotu (tj. 3).

Úkol 3:

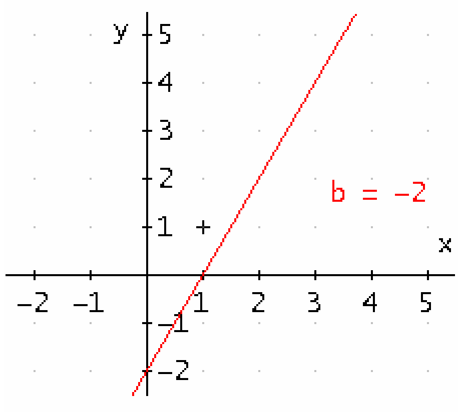
Dokážeš říci na základě předchozích příkladů, příp. s využitím svých znalostí, jaký závěr bude u funkce
y = a·x - 3

Závěr:
Graf bude protínat osu ***y*** v bodě [0,-3].
Odpověď jsem si ověřila graficky a je správná.

Úkol 4:

Zkoumej vliv parametru *b* na průběh funkce
y = 2·x + b
K jaké dochází změně oproti předchozím případům?

Řešení:



Závěr:
Graf se posunuje horizontálně, hodnota ***b*** určuje, v jakém bodě graf protíná osu ***y*** (průsečíkem je bod [?,b]).

Úkol 5:

Mějme funkční předpis
y = k·x + q
***k*, *q* jsou libovolná čísla.**
Zhodnoť, jak graf ovlivňuje číslo *k* a jak číslo *q*.

Nápověda: *Vycházej z předchozích úkolů.*

Závěr:
Parametr ***k*** ovlivňuje směr grafu funkce (tj. rostoucí, klesající nebo ani rostoucí ani klesající) a sklon vzhledem k osám ***x*** a ***y***.
Parametr ***q*** má vliv na polohu grafu vzhledem k ose ***y***, bod [0,q] je vždy průsečíkem grafu a osy ***y.***

4.4.6 Výukový list: Kvadratická funkce

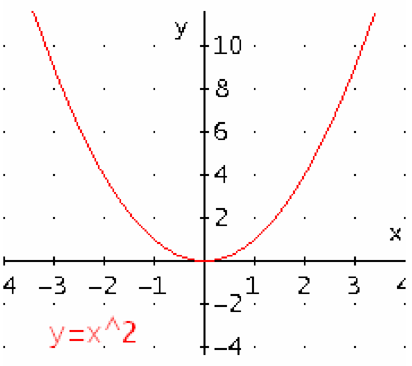
Kvadratická funkce

Úkol 1:

Vykresli graf funkce

$y = x^2$

jejíž definiční obor tvoří čísla 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3; –0,5; –1; –1,5; –2 a –3.



Všimni si, jaké jsou hodnoty pro navzájem opačná čísla (1 a –1, 2 a –2 atd.).

!!! Hodnoty funkce jsou pro navzájem opačná čísla (tj. např. 1 a –1) STEJNÉ.

Je graf funkce souměrný podle některé přímky?

!!! Graf funkce je OSOVĚ SOUMĚRNÝ podle osy *y*.

(Převzato z publikace [6], s. 31, př. A)

Úkol 2:

Urči z grafu (pracuj s grafem z úkolu 1):

a) Pro které *x* je hodnota funkce nejmenší?

Odpověď: pro x = 0

b) Jaká je hodnota funkce pro x = 2,5?

Odpověď: 6,25

c) Jaká je hodnota funkce pro x = – 2,5?

Odpověď: 6,25

d) Pro která *x* je hodnota funkce rovna číslu 9?

Odpověď: pro x = –3 a x = 3

(Převzato z publikace [6], s. 31, př. 1 a), b), c))

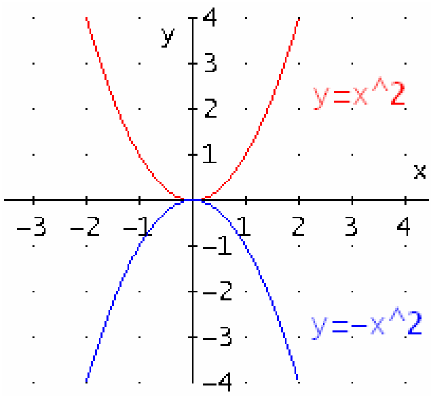
Úkol 3:
Co mají společného grafy následujících funkcí?

$$y = x^2$$

a

$$y = -x^2$$

Grafy sestrojíme do jednoho obrázku. Popíšeme je a zvolíme pro ně různé barvy.

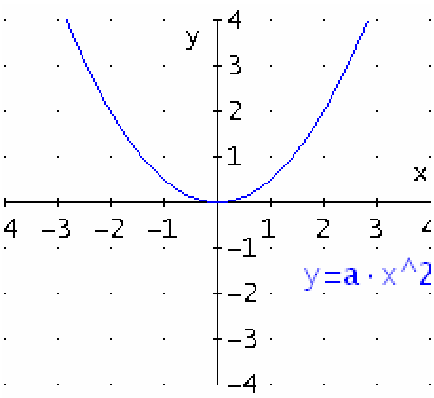


!!! Graf funkce y = –x^2 je obrazem grafu funkce y = x^2 v OSOVÉ SOUMĚRNOSTI s osou *x*.

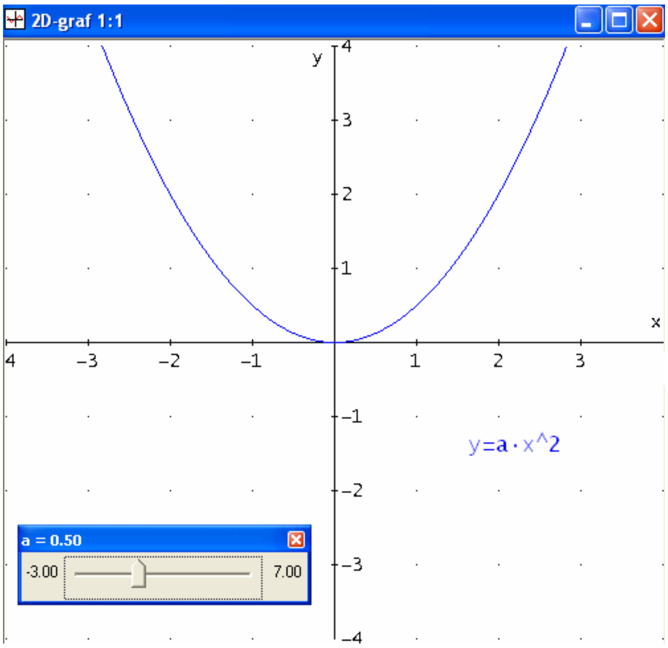
Úkol 4:
Vykreslíme graf funkce

$$y = a \cdot x^2$$

(Použijeme funkce posuvníku, abychom mohli sledovat průběh funkce pro různá a).



Následující graf odpovídá předchozímu, byl – z důvodu zachování posuvníku – zkopírován v průběhu práce z Derive.



Závěr:
Čím menší je absolutní hodnota *a*, tím je parabola více otevřená.
(Př. Parabola funkce x = 2x^2 a x = –2x^2 jsou rozevřeny stejně.)

!!! KVADRATICKÁ funkce:

je dána předpisem:

$$y = a \cdot x^2,$$

pro $a \neq 0$.

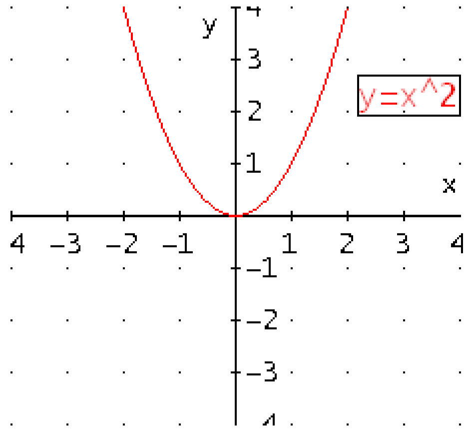
(některé složitější kvadratické funkce mohou mít tvar:
y = ax^2 + bx + c nebo y = ax^2 + c).

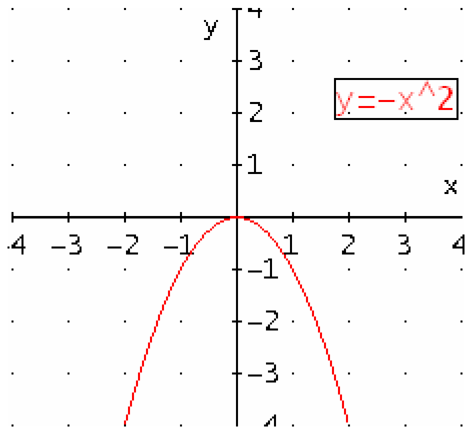
!!! Graf kvadratické funkce dané předpisem $y = ax^2$ vždy prochází počátkem soustavy souřadné (tj. bodem 0 = [0,0]). V počátku má vrchol.

!!! Grafem kvadratické funkce je křivka, kterou budeme nazývat PARABOLA.

Úkol 5:

Jak hodnota parametru *a* mění průběh funkce?





Z grafů urči:

<u>definiční obor</u>: všechna čísla
<u>obor hodnot</u> pro **a>0**: čísla ≥ 0
<u>obor hodnot</u> pro **a<0**: čísla ≤ 0

!!! <u>Definiční obor</u> kvadratické funkce tvoří všechna čísla
(není-li určeno jinak).

!!! <u>Obor hodnot</u> kvadratické funkce tvoří:

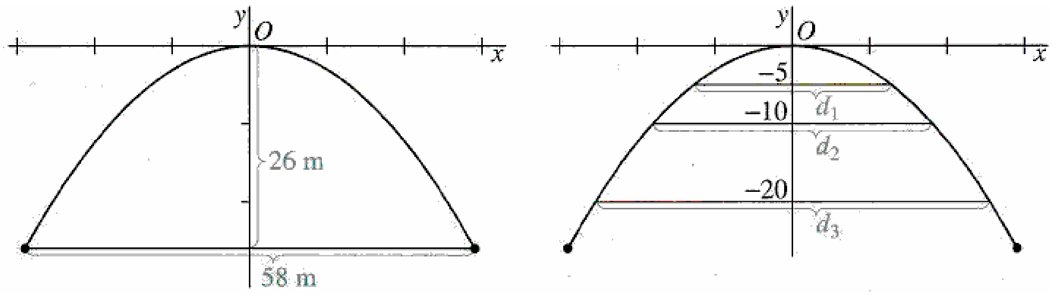
- **pro a>0: všechna čísla větší nebo rovna 0**
- **pro a<0: všechna čísla menší nebo rovna 0**

<u>Úlohy na závěr:</u>

1) Načrtni graf funkce, který vyjadřuje závislost obsahu kruhu na jeho poloměru ($S = \pi r^2$). !Poloměr kruhu je kladné číslo!

(Převzato z publikace [6], s. 33, př. 7)

2) ***Oblouky pro náročnější***
Architekt navrhuje lávku pro pěší. Stavitel lávky požaduje podrobnější informace o nosných obloucích.
Architekt předpokládá nákres nosného oblouku a doplňuje údaje: "Oblouk má rozpětí 58 metrů a výšku 26 metrů. V soustavě souřadné na obrázku vlevo jde o část paraboly, která je grafem kvadratické funkce y = ax^2."



a) Urči ve vzorci y = ax^2, kterým je tato kvadratická funkce vyjádřena hodnotu *a*.
b) Vypočítej pro stavitele délky *d1, d2, d3,* které vyznačil v obrázku vpravo.
(Převzato z publikace [6], s. 34, př. 9)

3) Sestrojte graf funkce

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x^2$$

Jaký bude graf, pokud omezíme definiční obor: $-3 \leq x < 2$.
(Převzato z publikace [2], s. 88, př. 119 c), d))

4) Urči průsečíky grafů funkcí

$$y = -x^2$$

a

$$y = x-2$$

(Převzato z publikace [1], s. 192, př. 3)

5) Určete konstantu *a* v rovnici kvadratické funkce y=ax^2, prochází-li graf této funkce bodem: [-2,-8].
(Převzato z publikace [1], s. 194, př. 34 c))

6) Zapište předpis kvadratické funkce, jejíž graf má maximum pro x=2.

4.4.7 Výukový list: Nepřímá úměrnost

Nepřímá úměrnost

Pavel pomáhal tatínkovi odvážet dřevo. Tatínek by sám odvezl všechno dřevo za 3 hodiny. Jak dlouho by jim to trvalo, kdyby přišel na pomoc ještě dědeček, strýc a soused?

Uvažujme nad úlohou:
– tatínek sám by odvozil dřevo za 3 hodiny
– s pomocí syna by se určitě doba práce zkrátila (o polovinu – uvažujme, že všichni pracují stejně výkonně)
– s každým dalším pomocníkem by byla doba práce opět kratší a kratší

Najde zde již někdo nějakou souvislost?
Jak se mění počet pracovníků a doba práce?

Čím více pracovníků bude pracovat, tím kratší dobu jim bude práce trvat!!!

Sestavme tabulku:

Počet pracovníků	1	2	3	4	5
Doba odvozu (minuty)	180	90	60	45	36

A vykresleme graf pomocí následujících bodů:

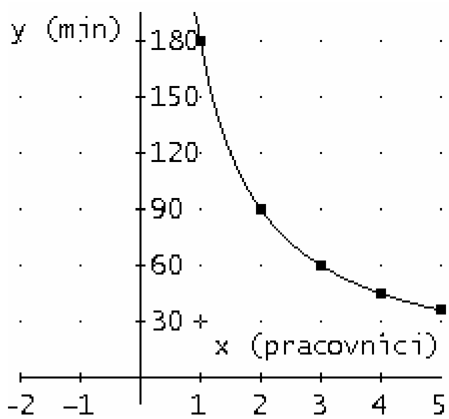
[1, 180]

[2, 90]

[3, 60]

[4, 45]

[5, 36]



Všimni si, že grafem nepřímé úměrnosti není přímka, ale křivka!

A jak bude v tomto případě vypadat funkční předpis?

Ze zadání víme, že jeden pracovník odveze dřevo za **180 min.**

Dva pracovníci by dřevo odvezli za polovinu původní doby, to je **180 : 2 = 90 min.**

Třem pracovníkům by odvoz trval třetinu původní doby, to je **180 : 3 = 60 min. atd.**

Označíme-li počet pracovníků *x* a čas *y*, pak

$$y = \frac{180}{x}$$

Z tohoto zápisu odvodíme obecný tvar rovnice nepřímé úměrnosti.

$$y = \frac{k}{x}$$

x ... nezávisle proměnná ($x \neq 0$)
y ... závisle proměnná
k ... koeficient nepřímé úměrnosti ($k \neq 0$)

Úkol 1

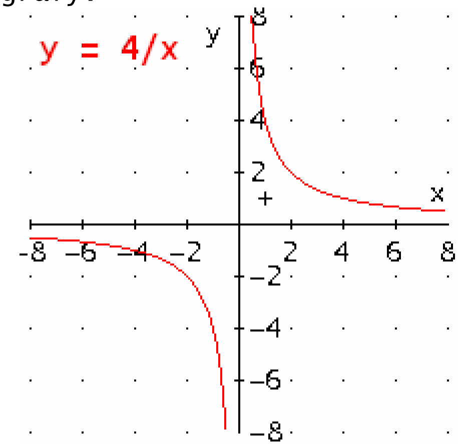
Rozhodni, ve kterém případě se jedná o nepřímou úměrnost:

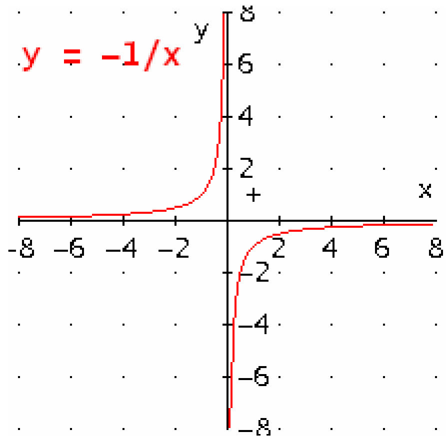
1) Závislost celkové sklizené plochy obilí za jednotku času na počtu kombajnů.
2) Závislost sklizené plochy obilí jedním kombajnem na počtu kombajnů.
3) Závislost doby sklizně na počtu lidí.
4) Závislost velikosti získaného kousku dortu na počtu lidí, jež ho budou jíst.
5) Závislost ujeté dráhy na počtu otáček kola.
6) Závislost hustoty tělesa na jeho hmotnosti.
7) Závislost obsahu čtverce na délce jeho strany.
8) Závislost množství vody v bazénu na množství připuštěné vody.
9) Závislost hustoty tělesa na jeho objemu (při konstantní hmotnosti tělesa).
10) Závislost hmotnosti výrobku na hustotě použitého materiálu.
11) Závislost celkové spotřeby energie na počtu elektrospotřebičů.
12) Závislost odporu vodiče na protékajícím proudu při stálém napětí.
13) Závislost velikosti síly, kterou je těleso nadlehčováno v kapalině, na hustotě kapaliny.

Řešení: **1)** Ne, **2)** Ano, **3)** Ano, **4)** Ano, **5)** Ne, **6)** Ne, **7)** Ne, **8)** Ne, **9)** Ano, **10)** Ne, **11)** Ne, **12)** Ano, **13)** Ne

Graf nepřímé úměrnosti

Srovnej následující grafy:





Dokážeš říci, co tvoří graf a podle čeho je souměrný?

! Grafem nepřímé úměrnosti je křivka, kterou budeme nazývat **HYPERBOLA nebo její část.**

Tato křivka neprochází počátkem soustavy souřadnic – je **středově souměrná podle počátku.**

Úkol 2

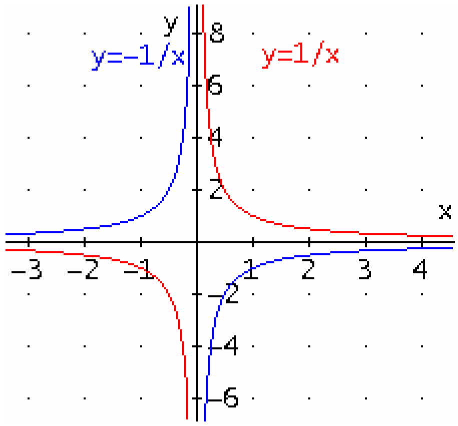
Sestroj grafy funkcí:

$$y = \frac{1}{x}$$

a

$$y = -\frac{1}{x}$$

do jednoho obrázku. Podle které osy jsou souměrné?



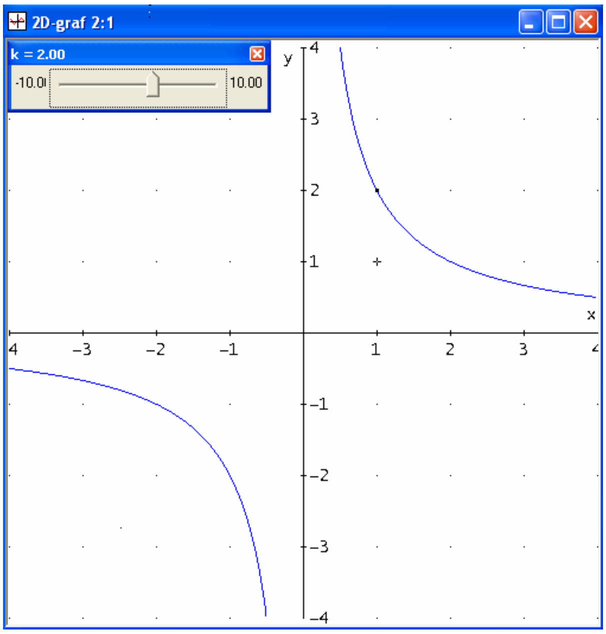
Odpověď: Grafy jsou vzájemně souměrné podle osy x i podle osy y. Každá hyperbola je souměrná podle počátku soustavy souřadnic.

Úkol 3

Urči konstantu *k* v rovnici funkce

$$y = \frac{k}{x}$$

(x≠0), jestliže její graf prochází bodem
a = [1, 2]
a sestroj její graf.



Řešení: Konstanta **k=2**.

Pochopili jste z předchozího úkolu, co ovlivňuje polohu grafu? Co ovlivňuje, zda leží graf v I. a III. kvadrantu nebo v II. a IV. kvadrantu?

! Je–li koeficient rovnice y = k/x

k > 0 (kladný), leží graf v **I. a III. kvadrantu**
k < 0 (záporný), leží graf ve **II. a IV. kvadrantu**

! Vlastnosti funkce:

Na základě předchozích grafů zkus říci jaké má funkce vlastnosti. Tj. definiční obor, obor hodnot a kde je klesající nebo rostoucí. Pokud si nejsi jistý (jistá), ověř si své výsledky dalším obrázkem.

Definičním oborem jsou všechna čísla různá od nuly, tj. **R – {0}**

Oborem hodnot jsou všechna čísla různá od nuly, tj. **R – {0}**

Je **klesající** nebo **rostoucí** v **(– ∞, 0)** v **(0, + ∞)**

Úlohy na závěr:

1) Zapiš vzorcem nepřímou úměrnost, do jejíhož grafu patří bod A = [2,–3].

2) Nakresli graf nepřímé úměrnosti

$$y = \frac{5}{x}$$

3) Může být druhá souřadnice některého bodu, který patří do grafu nepřímé úměrnosti, rovna nule?

(Převzato z publikace [6], s. 38, př. 7)

4) Urči všechna čísla, pro která je hodnota funkce

$$y = \frac{1}{x}$$

a) rovna 1000
b) menší než 1000
c) větší než 1000.

(Převzato z publikace [6], s. 38, př. 10)

5) Rozhodni, které z bodů [2;4], [3;4], [–1;–8], [0;0] nepatří do grafu funkce

$$y = \frac{8}{x}$$

(Převzato z publikace [6], s. 38, př. 9)

4.4.8 Pracovní list: Nelineární funkce

Pracovní list: *Nelineární funkce*

Příklad 1:

Zapiš vzorcem nepřímou úměrnost, do jejíhož grafu patří bod A = [3,4].

(Převzato z publikace [6], s. 38, př. 8)

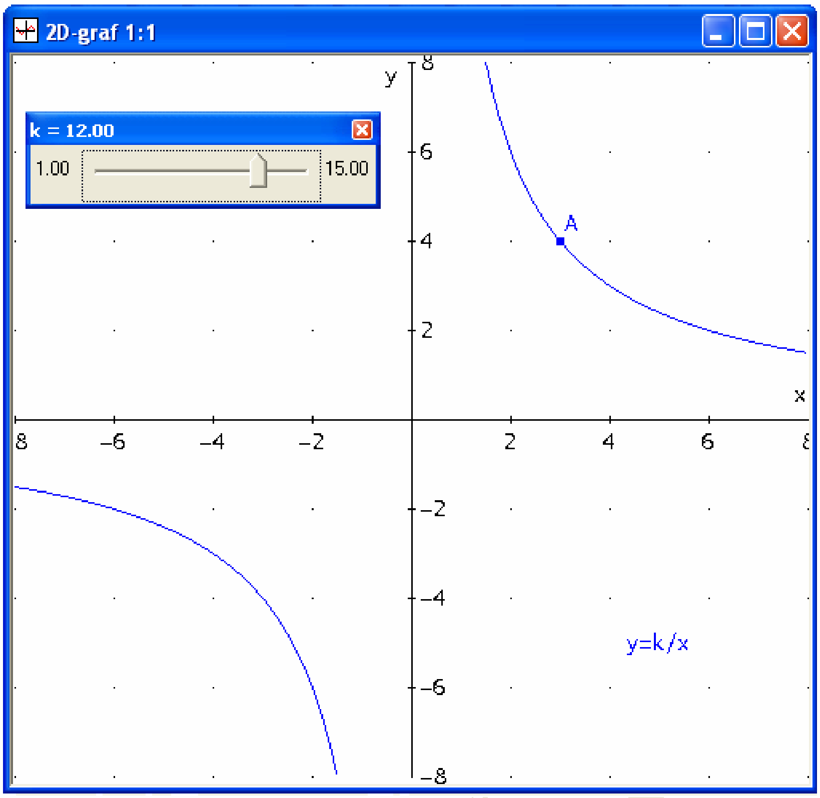
Řešení:

Nápověda:

- *využij možnosti posuvníku*
- *vykresli bod A a obecnou rovnici nepřímé úměrnosti*
- *vhodným zvolením parametru posuň graf nepřímé úměrnosti až do bodu A*
- *poté urči správný předpis dané funkce*

A := [3, 4]

$$y = \frac{k}{x}$$



Odpověď:

Bodem A prochází graf funkce zadané předpisem y = 12/x.

Příklad 2:
Zapiš závislost obsahu čtverce na jeho straně.

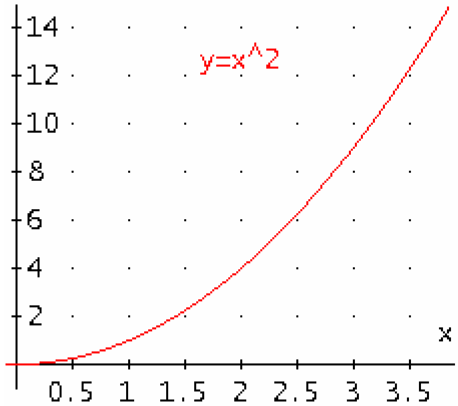
Řešení:

Nápověda:
- *nejprve urči vzorec výpočtu obsahu čtverce*
- *poté zapiš funkční předpis*
- *výsledek ověř graficky*

! Obsah i strana čtverce jsou kladná čísla !

Stranu čtverce označím *x*, obsah čtverce *y:*

$$y = x^2$$



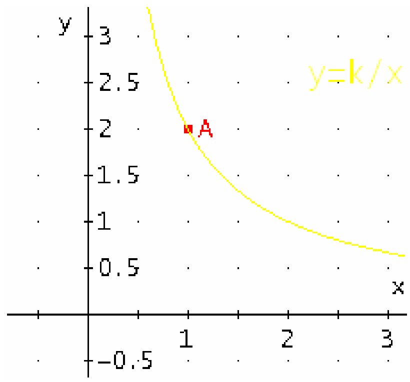
Příklad 3:
Urči konstantu *k* v rovnici funkce y=k/x (x≠0), jestliže její graf prochází bodem A=[1,2] a sestrojte její graf.

Řešení:

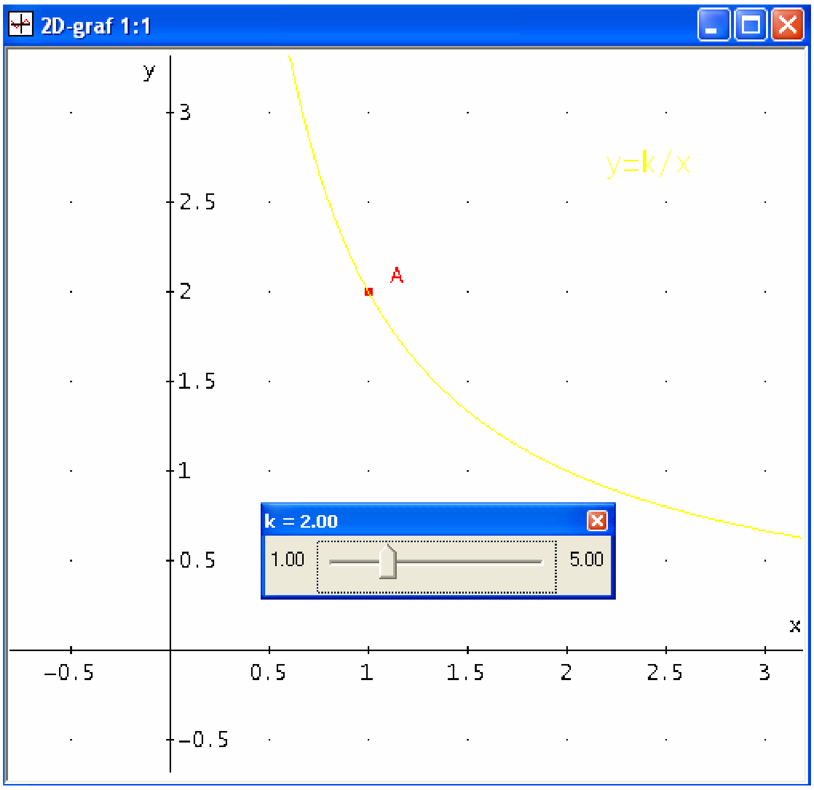
Nápověda:
- *Postup obdobný jako u příkladu 1.*

$$y = \frac{k}{x}$$

$$A := [1, 2]$$



S vloženým a aktivním posuvníkem vypadá řešení následovně:



Odpověď:
Konstanta **k = 2**.

Příklad 4:

Které z bodů
A := [-1, 0.5]
B := [0, 0]
C := [2, 2]
D := [2, -1]
E := [-2, 2]
leží na grafu funkce

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x$$

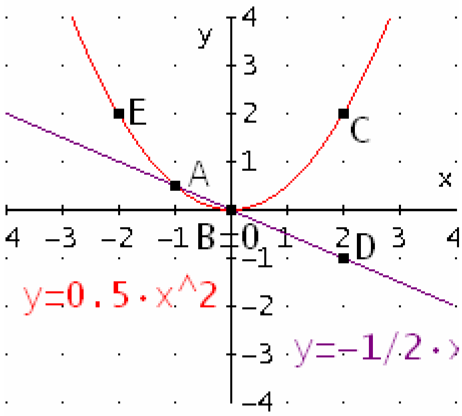
a které na grafu funkce

$$y = 0.5\cdot x^2$$

Řešení proveď ***graficky***.

Řešení:

Nápověda:
- *vykresli grafy i body a urči odpověď*



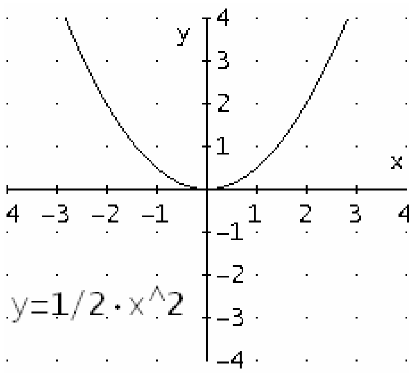
Odpověď:
Na grafu funkce y=−1/2x leží body: **A, B a D.**
Na grafu funkce y=0.5x^2 leží body: **A, B, E a C.**

Příklad 5:

Pro která x jsou dané funkce rostoucí?

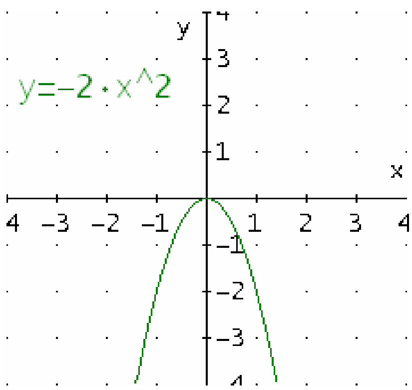
a) **Odpověď**: x>0

$$y = \frac{1}{2} \cdot x^2$$



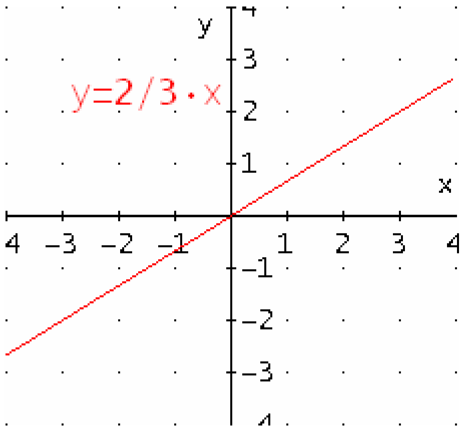
b) **Odpověď**: x<0

$$y = -2 \cdot x^2$$



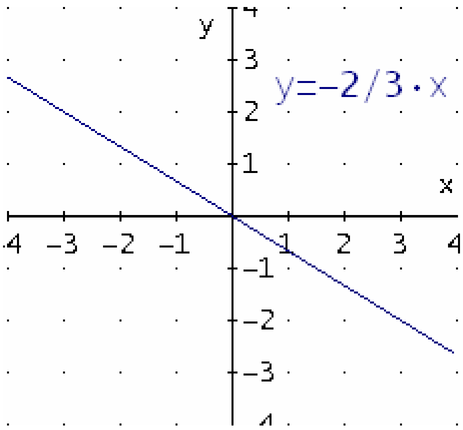
c) **Odpověď**: pro všechna x

$$y = \frac{2}{3} \cdot x$$



d) **Odpověď**: funkce není v žádném případě rostoucí

$$y = -\frac{2}{3} \cdot x$$



(Převzato z publikace [1], s.195, př. 36 c), d))

4.6 Dotazník

Nedílným prvkem při tvoření výukových materiálů je zjistit od žáků a učitelů pracujících s *Derive* a s předkládanými pracovními listy určité informace. Jedná se o důležitý prvek při jejich hodnocení. Měly by poskytnout zpětnou vazbu učiteli a následně pomoci zlepšit používání matematického softwaru při výuce. V mé práci k tomuto slouží dotazník.

Otázky, které je třeba žákům položit jsou zpracovány do tohoto dotazníku (viz Příloha č. 10). Kvůli co největší objektivitě by měl být vyplněn okamžitě po vyřešení úkolů a odevzdán společně s pracovním listem.

Za důležité považuji zjistit vztah žáků k matematice a výpočetní technice celkově. Předpokládám, že žáci, kteří mají rádi (příp. neradi) oba dva předměty, budou pracovat velmi dobře (příp. špatně). Ovšem pokud v matematice nevynikají, ale rádi pracují s počítačem, očekávám alespoň minimální zlepšení v matematické oblasti, případně větší zájem o práci.

Pro zjištění kvality pracovních listů jsem zjišťovala, zda žáci hodnotí příklady jako lehké nebo těžké a jaký byl případně důvod nevyřešení příkladu.

Za neméně důležité považuji vyjádření žáků k programu *Derive*. Jak jsou s ním spokojeni a zda by jej chtěli do budoucna využívat. Je to důležitý údaj nejen pro mne, ale také pro ostatní vyučující. Pokud se žákům program z jakéhokoliv důvodu nelíbí a nebudou s ním chtít pracovat, těžko docílíme jeho použitím při výuce větší efektivnosti a zvýšení zájmu žáků o matematiku.

Žákům je při vyjádření dána volnost, svůj názor mohou uvést na zadní část dotazníku. Stejně tak jakékoli dotazy, připomínky či náměty. Všechny informace získané z dotazníkového šetření mi sloužily při závěrečném hodnocení projektu.

4.7 Zhodnocení uskutečněného projektu

V závěrečném zhodnocení projektu zohledňuji jak pohled svůj, tak z důvodu větší objektivnosti, názor všech zúčastněných žáků. K tomuto účelu slouží vyplněné dotazníky.

Vyhodnocení úspěšnosti u jednotlivých příkladů pomůže při zhodnocení kvality a obtížnosti úloh. Vycházím ze znalostí při vyhodnocování didaktického testu, pro jehož sestavení považujeme za vhodnou úspěšnost 30 – 70 %. Pokud bude úspěšnost menší, jedná se o příliš složité úlohy, pokud vyšší, jedná se o úlohy lehké.

Z důvodu zpětné vazby pro jednotlivé žáky považuji za nezbytné vyhodnotit jejich úspěšnost. Pro toto hodnocení nepovažuji tradičně používanou klasifikační stupnici 1 – 5 jako ideální. Z důvodu malého rozpětí čísel nejsem přesvědčená, že by tato škála měla dostatečně vypovídající hodnotu. Zvolila jsem proto ukazatel dosažené úspěšnosti v procentech. Pokud stanovíme konkrétní klíč, můžeme procenta následně na známky převést.

S výsledky projektu byli seznámeni všichni účastníci, zejména žáci, ale i jejich vyučující matematiky. Považuji za nutné a motivující, aby aktivně se podílející žáci byli seznámeni se svými výsledky a vhodně odměněni. I když se jedná pouze o ověření nových materiálů v praxi, neměl by u žáků vzniknout pocit, že jejich práce byla zbytečná a nepodstatná.

8. Projekt

V této kapitole se snažím vylíčit a shrnout průběh celého projektu.

Praktická činnost proběhla ve 4 hodinách matematiky na Základní škole T.G.M. v Suchdole nad Lužnicí. S pracovními listy pracovali žáci 9. ročníku pod mým vedením. Jejich vyučující matematiky paní Mgr. Alena Ficalová byla pouze seznámena s pracovní náplní v daných hodinách a s výsledky.

Třída se kterou jsem pracovala se dá charakterizovat jako průměrná (vzhledem ke znalostem a schopnostem nejen v hodinách matematiky). K ověřování pracovních listů došlo ve druhém pololetí školního roku. Žáci jsou v této době již velmi málo motivováni činností na základní škole. Nikdo z této třídy není nucen dělat přijímací zkoušky na střední školu z matematiky, jejich zájem o předmět proto upadá.

8.1 Hodina č. 1 – Úvod, seznámení se s programem

První hodina byla informativního charakteru.

- V první části hodiny byli žáci informováni o důvodu, způsobu a konečném vyhodnocení následující činnosti.
- Druhá část hodiny byla praktické povahy. Žákům byl představen program *Derive.* Na základě pracovního listu (viz Příloha č. 1) bylo žákům vysvětleno rozvržení pracovního prostředí programu, ukázány jeho základní funkce a možnosti řešení příkladů v *Derive*. Na konci hodiny žáci měli čas na samostatnou práci s programem a na řešení ukázkového pracovního listu.

Při samostatné činnosti žáků s programem vzniklo několik problémů a nejasností při jeho použití, např. vykreslování grafů, pochopení rozdílu mezi algebraickým a grafickým oknem. Objevilo se i hodně zvídavých dotazů, např. jak změnit barvu pozadí pracovní plochy. Abych předešla opakování stejných dotazů a komplikací, byly všechny rady a další informace sděleny současně celé třídě.

Během hodiny jsem se setkala s různými názory na projekt i samotnou činnost. Z počátku se hodně opakovala negativní kritika *Derive*, zejména jeho obtížnosti, případně doslovná žádost: „Já chci zpátky sešit a tužku.“ Postupem času se uvažování většiny žáků změnilo. V průběhu vlastní práce s programem jsem slyšela spíše reakce typu: „Vždyť ono je to docela jednoduché.“ „Je to snadné, jen je třeba se to naučit.“

Překvapujícím zjištěním, bohužel spíše negativním, byla značně rozdílná úroveň znalosti práce s počítačem.

8.2 Hodiny č. 2-4 – Řešení pracovních listů

Po úvodním seznámení s *Derive* byli žáci schopni řešit dané pracovní listy. Podstatný byl samozřejmě individuální přístup každého z nich. Kdo věnoval dostatečnou pozornost a snahu v první hodině, neměl s řešením výrazné problémy. Pracovní listy následovaly vzhledem k posloupnosti učiva o funkcích.

Řešení jednotlivých listů bylo v závěru doplněno o vypracování dotazníku. Žáci program a pracovní listy hodnotili následovně:

- Práce s programem *Derive* jim připadala převážně lehká, příp. středně těžká.
- Pozitiva *Derive* žáci spatřují ve zpestření výuky a usnadnění práce. V negativech se objevil názor na složitost obsluhy *Derive* a potřeby více času.
- Řešené úlohy byly pro některé žáky lehké, pro některé těžké.
- Hlavním důvodem toho, že nebyly některé příklady řešeny, byl nedostatek času, příp. neznalost potřebného učiva.
- Pozitivní bylo zjištění, že žáci mají matematiku spíše rádi, ve dvou případech dokonce velmi rádi.
- Práce s počítačem všechny žáky až na jednu výjimku baví.
- Program by nadpoloviční většina chtěla využívat ve škole při výuce, nikoliv doma.

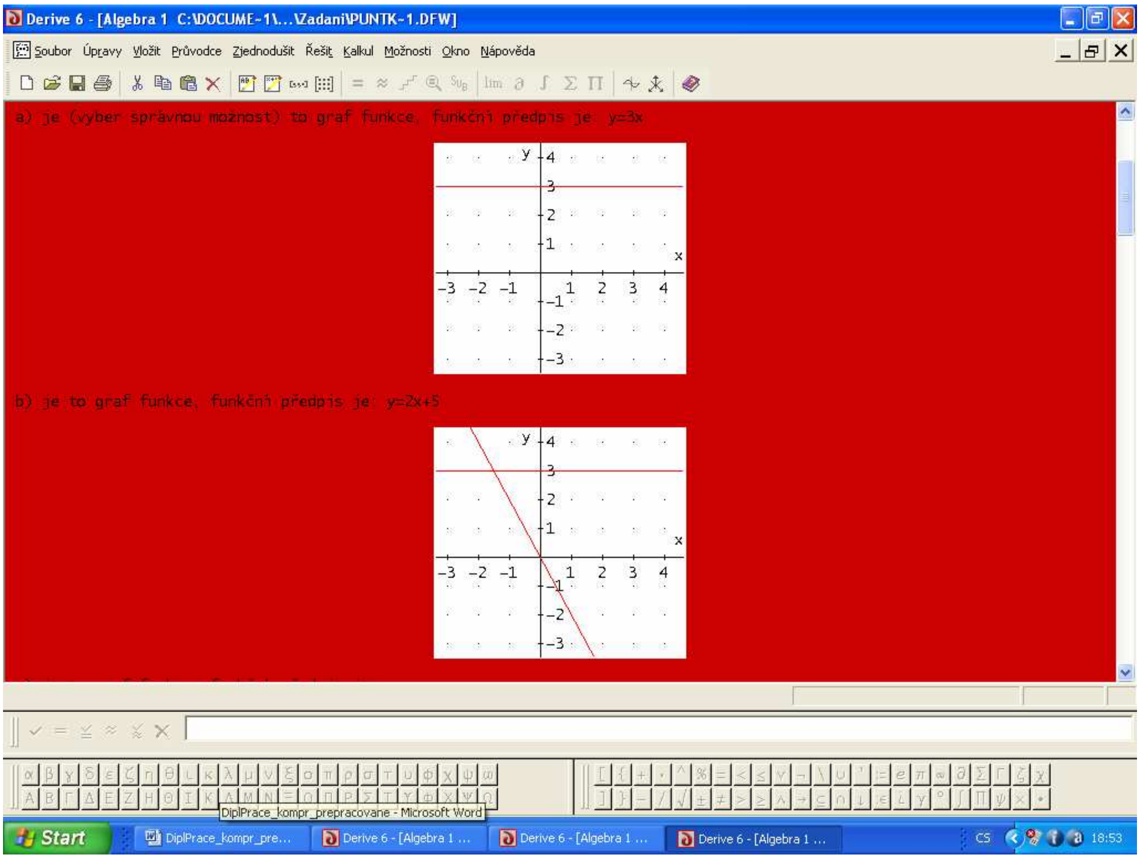
8.2.1 Pracovní list: Funkce

Nejprve byl řešen pracovní list Funkce (viz Příloha č. 3). S řešením příkladů nebyly výrazné potíže. Za největší nedostatek ze strany žáků považuji nedostatečné znalosti učiva (příklad uveden na Obr. 8.1). Nebo u příkladu č. 4 žáci při grafickém zobrazení nepřemýšleli o definičním oboru a uváděli objem v záporných hodnotách (příklad na Obr. 8.2).

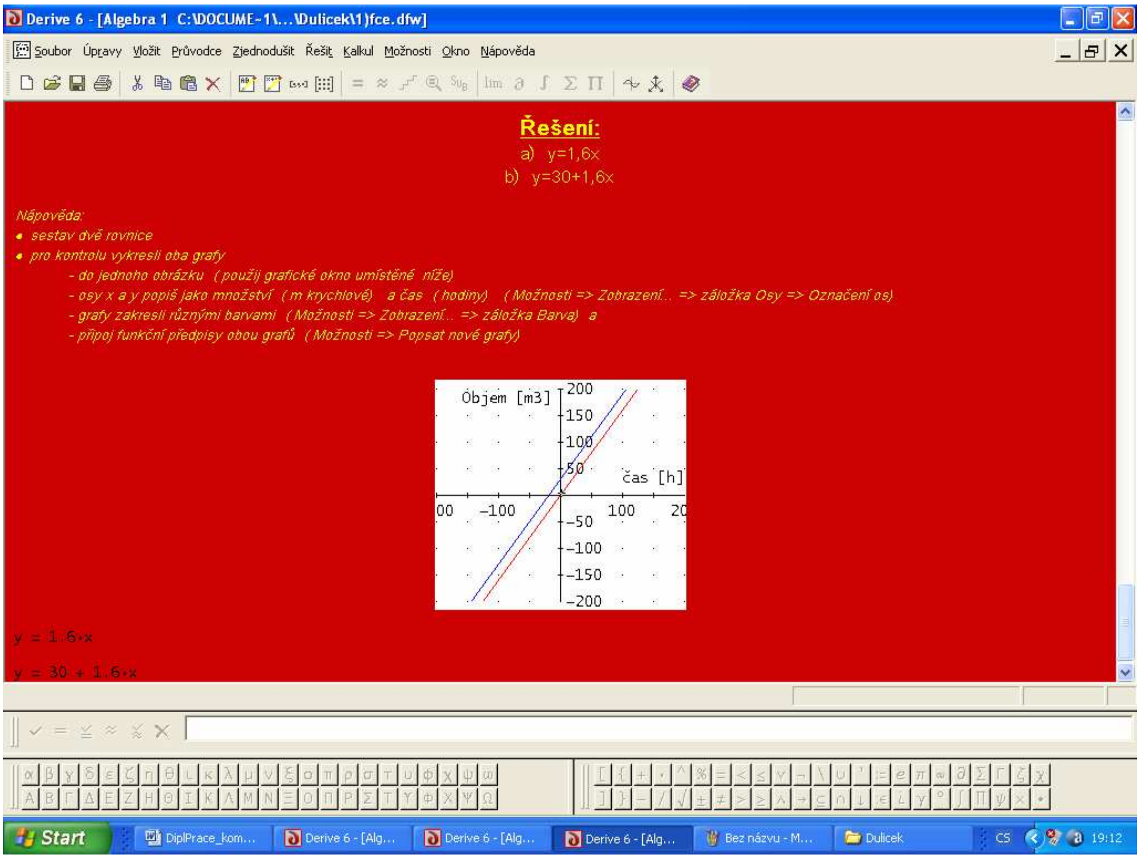
Příklad	*Úspěšnost řešitelů*
1	35 %
2	50 %
3	19 %
4	69 %

Tab. 8.1 – Úspěšnost řešitelů pracovního listu: Funkce

Celkově tento list hodnotím jako vhodný. Většina příkladů měla úspěšnost řešení v rozmezí 30 – 70 %. Největším problémem se jevil příklad č. 3 (viz Tab. 8.1). Nedostatkem z mé strany byla formulace příkladu č. 1. Většina žáků nepochopila zadání a způsob zapsání odpovědi, proto jsem znění tohoto příkladu upravila do současné podoby.



Obr. 8.1 – Ukázka žákovské řešení příkladu 1



Obr. 8.2 – Ukázka žákovského řešení příkladu 4

8.2.2 Pracovní list: Graf lineární funkce

Při řešení pracovního listu Graf lineární funkce (viz Příloha č. 5) jsem se snažila předejít problémům při vkládání posuvníku. Proto jsme první úkol řešili společně. Pomocí data-projektoru byl žákům demonstrován celý postup práce s posuvníkem. Formulace odpovědi již byla na žácích samotných.

Příklad	*Úspěšnost řešitelů*
1	Společné řešení
2	50 %
3	35 %
4	45 %
5	20 %

Tab. 8.1 – Úspěšnost řešitelů pracovního listu: Graf lineární funkce

U tohoto pracovního listu se mi částečně potvrdil předpoklad, že žáci s neúplnými znalostmi si pomocí *Derive* dokáží vztahy odvodit. Největší slabinu pozoruji ve formulaci odpovědi, která často i úplně chybí. Od tohoto se odvíjí celkově nízká úspěšnost řešitelů.

8.2.3 Pracovní list: Lineární funkce

V poslední hodině žáci řešili pracovní list Lineární funkce (viz Příloha č. 6). Znalost programu již byla dobrá a bez výrazných potíží. Úspěšnost řešitelů u příkladu č. 1 byla 80 %, tento příklad se proto s využitím *Derive* jeví příliš snadným. Největším problémem byl příklad č. 3. V průběhu řešení slovní úlohy (příklad č. 5) jsem si všimla častého používání sešitu pro zapsání důležitých údajů ze zadání. Žáci dosud používají program spíše jako pomůcku pro zrychlení a zjednodušení řešení než jako plnohodnotný pracovní list.

Příklad	***Úspěšnost řešitelů***
1	80 %
2	67 %
3	30 %
4	59 %
5	73 %

Tab. 8.1 – Úspěšnost řešitelů pracovního listu: Lineární funkce

Obr. 8.3 - Fotodokumentace praktické činnosti

9. Závěr

Cílem mé práce bylo ověřit použitelnost programu *Derive* na základní škole. Bylo nutné vytvořit takové pracovní listy, které by bylo možné použít při výuce matematiky na základní škole a uvést jejich vzorová řešení. V této části práce zmiňuji čeho se jsem dosáhla, co se mi podařilo a co naopak nepodařilo.

Prvotní práce zahrnovala důkladné seznámení se s programem, což usnadnila dostupná literatura v českém jazyce. Volba vhodné tématu nebyla snadná. Chtěla jsem, aby vytvořené listy posloužily co největšímu množství žáků při pochopení a procvičování nové látky a aby je mohl využít každý učitel pro demonstraci při výuce. Vytvořila jsem materiály vhodné k samotné výuce i k následnému procvičování. Nezaměřovala jsem se na tvorbu více variant stejné látky. Zpracovala jsem tematický celek funkce. Důraz jsem kladla na grafickou stránku – zejména vykreslování průběhu funkcí. Snahou bylo vytvořit takový materiál, který by žákům přiblížil učivo pro ně složité a obtížné na pochopení.

Alespoň některé pracovní listy jsem měla možnost ověřit v praxi. Při tomto projektu jsem zjistila několik chyb, kterých jsem se dopustila a snažila jsem se je opravit. Je důležité jasně popsat, co je u kterého úkolu požadováno při jeho řešení. Pro použití složitějších funkcí je nutné blíže popsat postup řešení. Domnívám se, že množství a obtížnost úkolů byla zvolena vhodně. Čas věnovaný na řešení příkladů byl až na výjimky dostatečný a u žádného příkladu se nestalo, že by jej nedokázala řešit většina žáků. Seznámení se s programem by bylo vhodné se věnovat intenzivněji, ale v praxi jsem ověřila, že i jedna hodina postačuje k základnímu ovládnutí programu.

Ověřila jsem, že je možné program *Derive* využít při výuce na základní škole a že žáci zvládnou práci s programem snadno. Z dotazníkového šetření jsem shledala, že nadpoloviční většinu žáků práce s počítači baví a že by *Derive* nebo podobný software ve škole při výuce uvítali. Co nejvíce žáky na programu zaujalo, bylo zjednodušení práce s výpočty a vykreslováním grafů.

Podařilo se mi vytvořit několik pracovních listů týkajících se pouze zlomku učiva z matematiky, které je vhodné zpracovat v *Derive*. Byla bych ráda, kdyby se v budoucnu objevili studenti, kteří by v této práci pokračovali a doplnili tyto materiály o další nejen pro ně zajímavá témata.

Důležitým předpokladem pro uplatnění takovýchto materiálů je širší zpřístupnění počítačových učeben i v ostatních předmětech než je výpočetní technika a odpovídající softwarové vybavení. Doufám, že se tato situace bude v budoucnu stále zlepšovat.

Vytvořila jsem novou pomůcku, která by měla pomoci žákům zvýšit jejich představivost, zrychlit řešení příkladů a usnadnit pochopení nového učiva. Ulehčit práci by měla také učitelům zvýšením efektivnosti výuky a větší motivací žáků. Byla bych samozřejmě ráda, pokud by přispěla k většímu zájmu žáků o matematiku.

Literatura:

[1] Běloun, Fr. a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: Prometheus, 1998.

[2] Eisler, J.: *Matematika v kostce (pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií).* Havlíčkův Brod: Fragment, 2006.

[3] Frýzek, M, Müllerová, J.: *Sbírka úloh z matematiky (pro bystré hlavy).* Praha: Fortuna, 1992.

[4] Hašek, R.: *Užití Derive ve výuce matematiky.* České Budějovice: Pedagogická fakulta, 2007.

[5] Kutzler, B. a Kokol-Voljc, V.: *Úvod do Derive 6. Pokročilá matematika pro vaše PC.* Texas Instruments, 2003.

[6] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika 2 pro 9. ročník základní školy (Funkce, podobnost, goniometrické funkce).* Praha: Prometheus, 2000.

Přílohy:

1. Pracovní list: První kroky s *Derive*
2. Výukový list: Funkce
3. Pracovní list: Funkce
4. Výukový list: Lineární funkce
5. Pracovní list: Graf lineární funkce
6. Pracovní list: Lineární funkce
7. Výukový list: Nepřímá úměrnost
8. Výukový list: Kvadratická funkce
9. Pracovní list: Nelineární funkce
10. Dotazník
11. CD

Pracovní list:
První kroky s Derive

Program Derive:

Umožňuje:
- počítat,
- vykreslovat grafy,
- psát text,
- vkládat obrázky, ...

Ovládání je jednoduché:
- v horní části okna najdeme nabídku všech základních funkcí,
- největší část (uprostřed okna) zaujímá pracovní plocha – zobrazuje historii celé naší práce,
- v šedém pruhu pod plochou se zobrazuje nápověda k aktuálním funkcím,
- pod ním nalezneme příkazový řádek – pomocí něho komunikujeme s programem a matematické výrazy vkládáme na plochu (bílý řádek)
- pod příkazovým řádkem se nacházejí panely nástrojů obsahující různé matematické symboly a písmena řecké abecedy

Nejlépe program pochopíme při samotné činnosti, takže si ovládání Derive předvedeme na několika jednoduchých úkolech...

Úkol 1:
Zapišme do do tohoto okna výraz

! ***V Derive se mocnina zapisuje pomocí znaku ^***
tedy zapíšeme-li do příkazového řádku x^3, na ploše se zobrazí jako:

$$x^3$$

! ***Výraz se ti zobrazí na konci plochy.***
Pokud jej chceš libovolně přemístit (nahoru, dolu) označ jej myší a přetáhni kam potřebuješ.

– Zadaný výraz můžeš upravit: Úpravy -> Výraz...

Přepišme zadaný výraz na jiný:

Úkol 2:
Zapiš výraz 2,5x + 6 = –3.

! ***Pokud zapíšeš číslo 2,5 s desetinnou čárkou, program ti sdělí zprávu: neočekávaný oddělovač.***

Desetinná čísla zapisujeme s **desetinnou tečkou,** ***ne čárkou.***

Úkol 3:
Vepiš libovolný text do nového pole, které umístíš přímo pod toto.

Úkol 4:
Vykreslíme graf funkce:

$7 \cdot x - 9 = y$

Nejprve musíme otevřít grafické okno (Okno -> Nové 2D grafické okno).
Poté je vhodné si umístit grafické a algebraické okno vedle sebe (Okno -> Vertikální dlaždice).

– Teď vidíme, že máme zvlášť okno pro vykreslování grafů a zvlášť okno pro výpočty a zobrazení všech informací. Obě okna jsou vzájemně propojena, pro vstup do grafického využijeme okno algebraické.

Označíme si požadovaný výraz v algebraickém okně.
Přesuneme se do grafického okna.
Použijeme volbu Vložit -> Graf a graf se následně vykreslí.

– Graf můžeme popisovat, měnit jeho barvu, tloušťku, ...
– Stejně tak můžeme měnit měřítko, popis aj. soustavy souřadnic.

Zachování grafického okna provedeme tak, že graf přemístíme do algebraického okna (Soubor -> Přemístit).
Pokud již vytvořený graf umístěný v algebraickém okně chceme upravit, otevřeme jej dvoj-klikem (zobrazí se velké grafické okno), graf upravíme a použijeme funkce Soubor -> Aktualizovat).

Úkol 5:
Přemístíme vytvořený graf do algebraického okna.

Úkol 6:
Zjisti a vyzkoušej, jaké možnosti se při zobrazení grafu dají

použít (Možnosti -> Zobrazení).

Úkol 7:

Zvláštní funkcí u vykreslování grafů je posuvník a trasování. Najdi si v nápovědě jakým způsobem se dají použít a udělej to.

Úkoly na závěr:

1) ***Zapiš výraz y=2x. Vykresli graf. Graf přemísti do tohoto okna.***

2) ***Vyřeš soustavu 2 rovnic:***

$x + y - z = 32$

$x - y + z = 8$

Použij: *Řešit -> Soustavu rovnic...*

3) ***Zakresli do jednoho obrázku grafy funkcí ($x \in R$):***

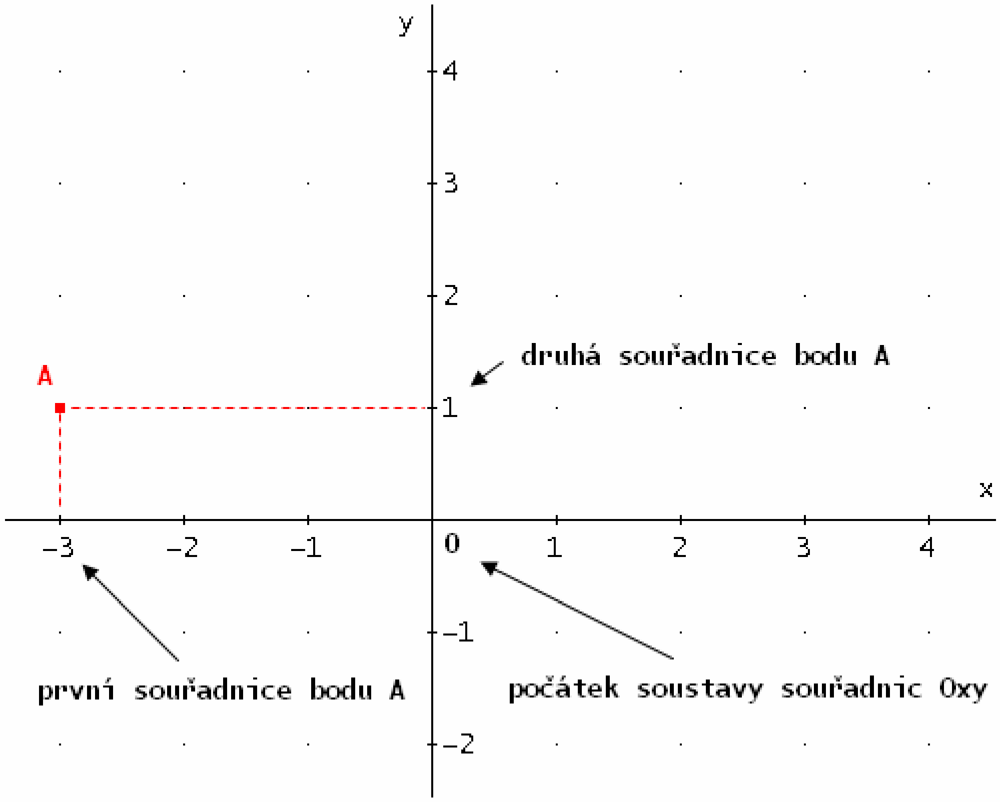
$y = x$

$y = 4 \cdot x$

$$y = \frac{2}{3} \cdot x$$

Funkce

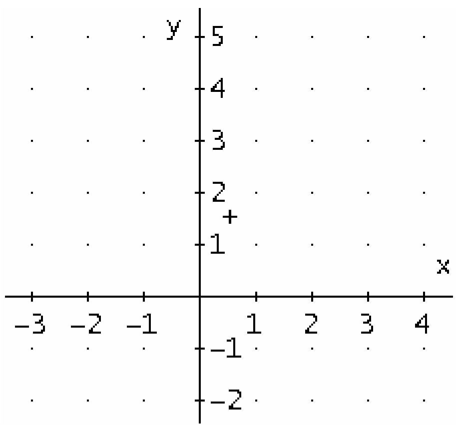
•Souřadnice bodu



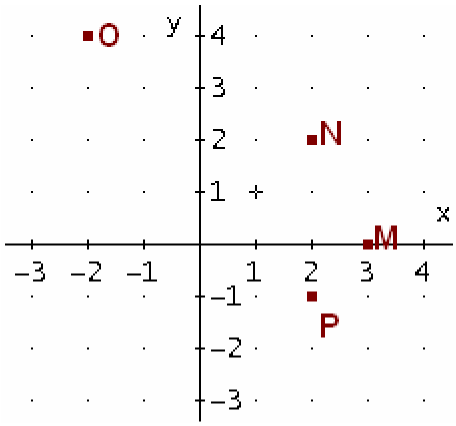
Bod A má souřadnice **–3** na ose **x** a **1** na ose y.

! Zapisujeme takto: **A = [–3;1]** nebo **A [–3;1]**

Úkol 1:
Zapiš body E [1,5], F [–3,2], G [0,–1] a H [2,–2] do soustavy souřadnic.



Úkol 2:
Zapiš body M, N, O a P pomocí jejich souřadnic.

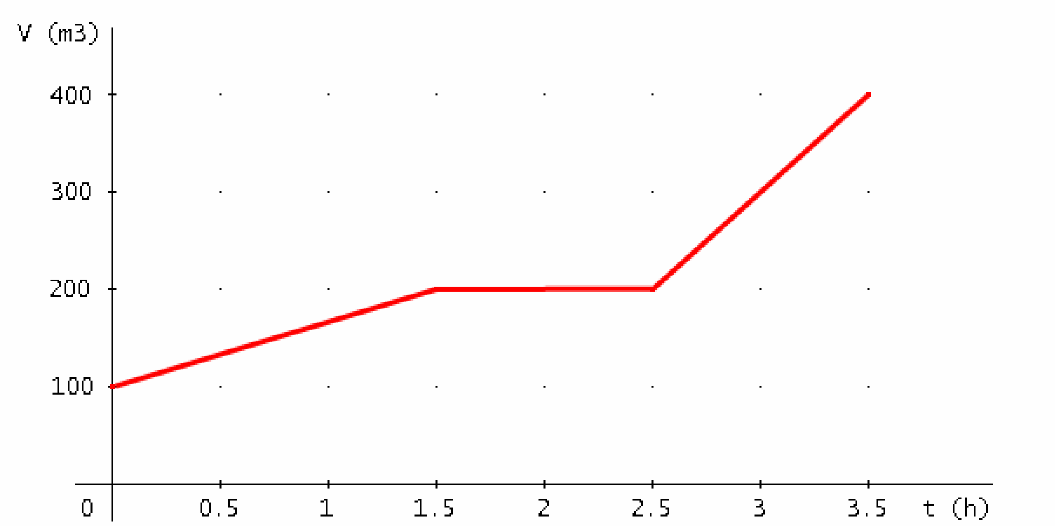


Řešeni:

! **Délky jednotek na první a druhé ose nemusí být stejné.**

Úkol 3: Plnění bazénu

Na obrázku vidíš grafické znázornění závislosti objemu vody na počátku doplňování bazénu vodou.



a) Kolik krychlových metrů vody bylo v bazénu na začátku plnění?
b) Kolik krychlových metrů bylo v bazénu za 1,5 hodiny od počátku doplňování?
c) Na jak dlouho bylo plnění bazénu přerušeno?
d) Kolik krychlových metrů přiteklo do bazénu za poslední hodinu plnění?
e) Kolik krychlových metrů vody je v bazénu celkem?

Řešení:
a)
b)
c)
d)
e)

Úkol 4:

Ověř, že v následující tabulce je každému číslu v prvním řádku (x) přiřazen jeho trojnásobek ve druhém řádku (y).

x	1	2	3,5	4,5	6	7
y	3	6	10,5	13,5	18	21

U následující tabulky zkus objevit, jaká závislost ***y* na *x*** je vyjádřena.

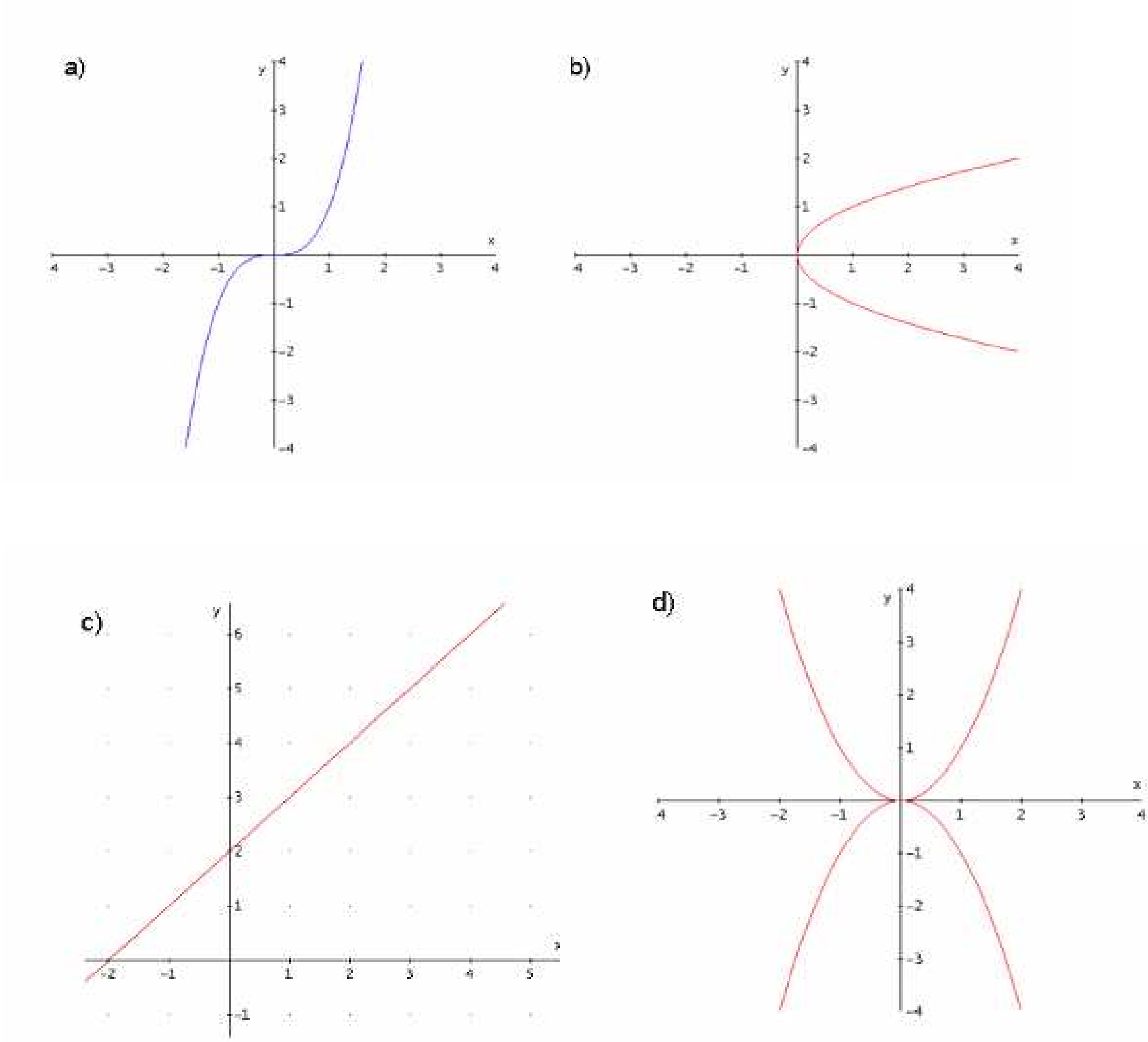
x	1	2	3,5	4,5	6	7
y	4	6	11,5	14,5	19	22

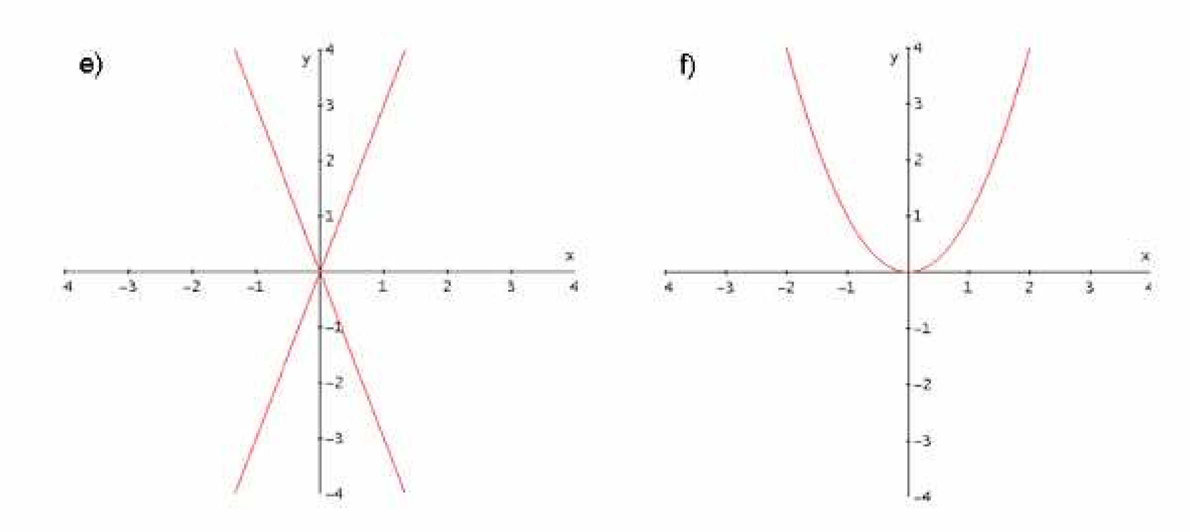
! Funkce je předpis,

podle kterého je KAŽDÉMU číslu přiřazeno NEJVÝŠE JEDNO ČÍSLO
(tzn. buď jedno číslo nebo žádné číslo)

Úkol 5:

Urči, na kterém obrázku je zakreslena funkce. Proč?



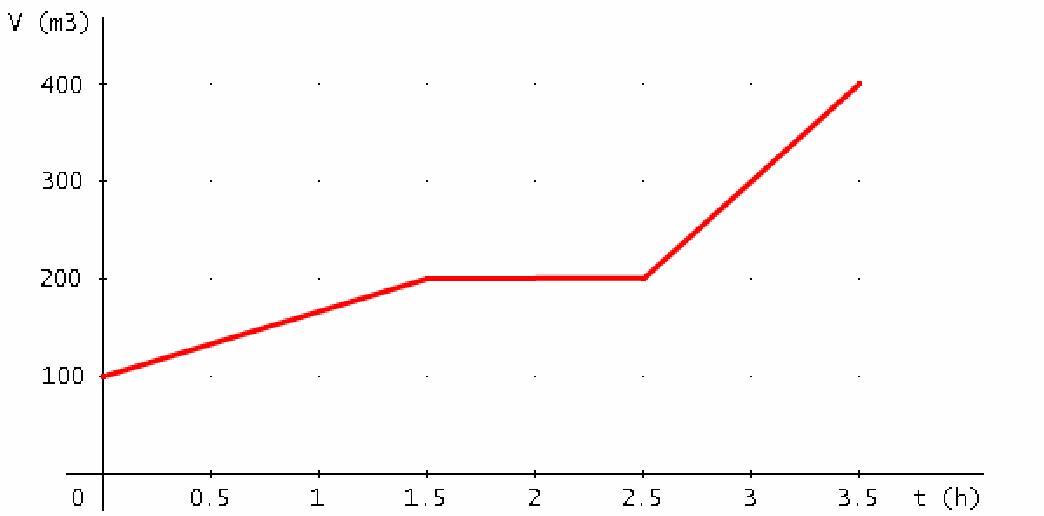


Řešení:
Funkce jsou na obrázku:
Funkce nejsou na obrázku:
Proč?

Úkol 6a:

Pracuj s následujícím grafem:

a) Která čísla jsou přiřazena číslu 3? Odpověď:
b) Která čísla jsou přiřazena číslu 0? Odpověď:
c) Kterým číslům je přiřazeno jedno číslo? Odpověď:
d) Kterým číslům není přiřazeno žádné číslo? Odpověď:
e) Hodnota funkce přiřazená číslu 200? Odpověď:



- ## Definiční obor

! Všechna čísla, kterým je funkcí přiřazeno nějaké číslo, tvoří DEFINIČNÍ OBOR funkce.

**! <u>Funkce je předpis</u>,
podle kterého je každému číslu z jejího DEFINIČNÍHO OBORU přiřazeno JEDNO číslo.**

- ## Obor hodnot

**! Hodnota, která je přiřazena číslu z definičního oboru se nazývá HODNOTA funkce.
Všechny hodnoty funkce tvoří OBOR HODNOT funkce.**

Úkol 6b:

Vrať se k předchozímu úkolu a urči, jaký má tato funkce
– definiční obor:
– obor hodnot:

Závislá a nezávislá proměnná

př. Hmotnost člověka se mění s jeho věkem
(= je závislá na jeho věku)
Teplota vzduchu se mění v průběhu dne
(= je závislá na denní době)
Petr dostal od maminky 100,– Kč na nákup jablek. Jeden kilogram jablek stojí 25,– Kč. Kolik kilogramů jablek bude moci koupit?
(= cena jablek nezávisí na tom, kolik má Petr peněz, ale počet kilogramů, které koupí, závisí na tom, kolik peněz má).

! Říkáme, že *y* je funkcí *x*, kde *x* je závisle proměnná a *y* je nezávisle proměnná.

Úkol 7:

Urči, která proměnná je závislá (Z) a která nezávislá (N):
1) Každému přirozenému číslu je přiřazeno číslo, které je počtem všech jeho dělitelů.
2) Objem vody v bazénu v době jeho napouštění.
3) Při odeslání balíku je cena 15 Kč za každý kilogram.
4) Počet návštěvníků na všech 8 představeních v tomto měsíci.
5) Počet vyrobených součástek se mění s v průběhu pracovní doby

Řešení:
1)
2)
3)
4)
5)

Cvičení na závěr:

1) Doplň chybějící údaje:

x	1	2	4	5	8	11
y = 2x						

2) Která tabulka nezobrazuje funkci? Proč?

a)

x	0	1	2	3	4
y	5	2	–1	2	5

b)

x	0	1	2	3	4
y	5	2	–1	–4	–7

c)

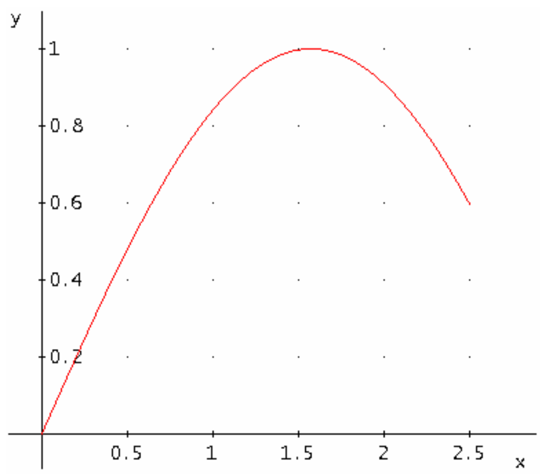
x	0	1	2	1	4
y	5	6	7	8	9

3) Urči definiční obor a obor hodnot funkce

$$y = x^2$$

4) Urči definiční obor a obor hodnot funkce z příkladu 1).

5) Pro které číslo z definičního oboru je hodnota funkce největší a pro které nejmenší?



Pracovní list: *FUNKCE*

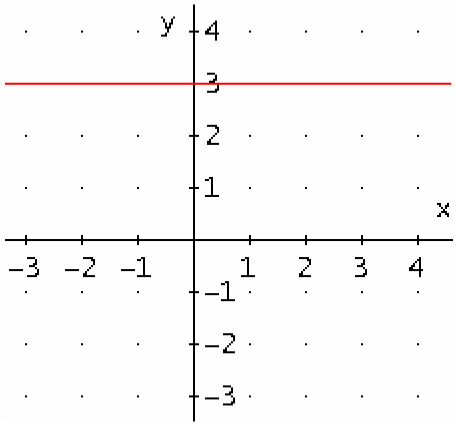
Příklad 1:

Urči, **zda se jedná** o graf funkce.
Pokud ano, přiřaď správný funkční předpis ze seznamu uvedeného o dva řádky níže (předpisy 1)– 7)).
!!! Pozn. Ne všechny uvedené funkční předpisy jsou níže vykresleny grafem.

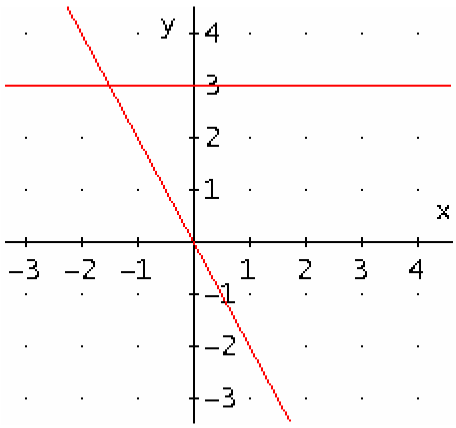
1) y=x **2)** y=x^2 **3)** y=2x+5 **4)** y=3
5) y=3x **6)** y=–2x **7)** y=5x+2

Řešení:

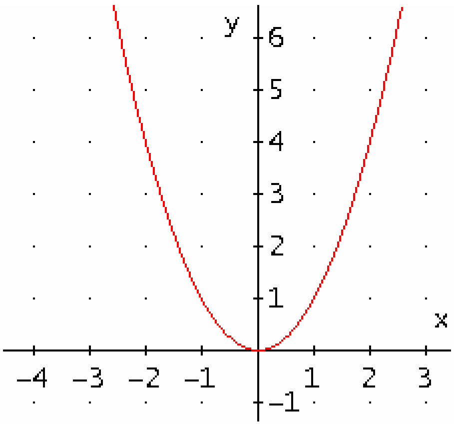
a) Jedná se o graf funkce? Ano/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



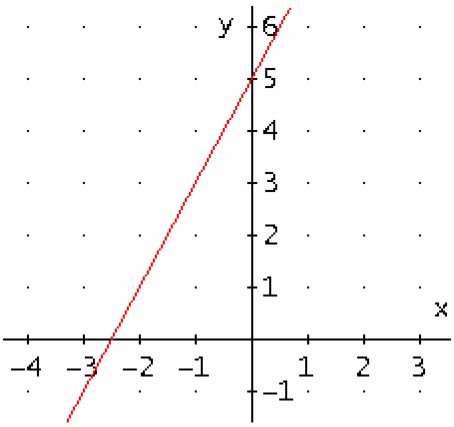
b) Jedná se o graf funkce? Ano/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



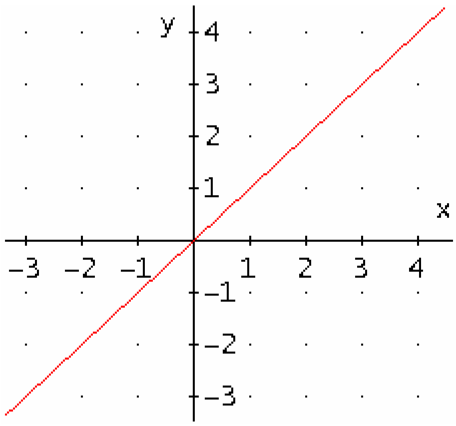
c) Jedná se o graf funkce? Ano/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



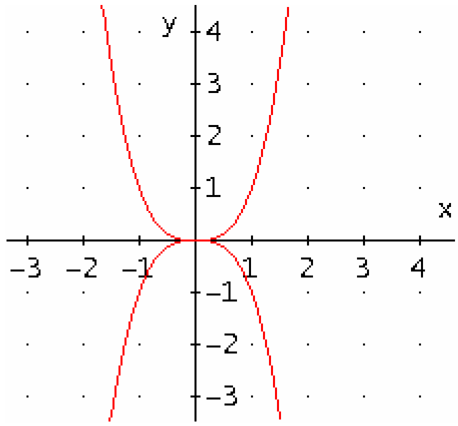
d) Jedná se o graf funkce? Ano/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



e) Jedná se o graf funkce? Ano/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



f) Jedná se o graf funkce? Ano/Ne (Označ libovolným způsobem správnou odpověď!)
Pokud jsi označil volbu Ano, zapiš funkční předpis:



Příklad 2:

Funkce je dána grafem (uveden níže):

a) Zapiš, která čísla tvoří definiční obor této funkce.

Odpověď:

b) Zapiš hodnotu funkce, která je přiřazena číslu 0.

Odpověď:

c) Zapiš hodnotu funkce pro číslo 3.

Odpověď:

d) Pro které číslo z definičního oboru je hodnota funkce největší?

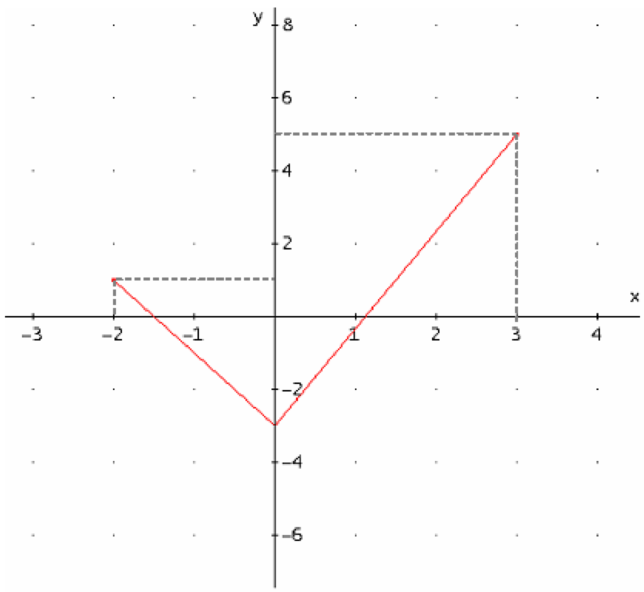
Odpověď:

e) Pro které číslo z definičního oboru je hodnota funkce nejmenší?

Odpověď:

f) Zapiš, která čísla tvoří obor hodnot funkce.

Odpověď:



Příklad 3:

Sestroj graf závislosti strany čtverce na jeho obvodu.

Řešení:

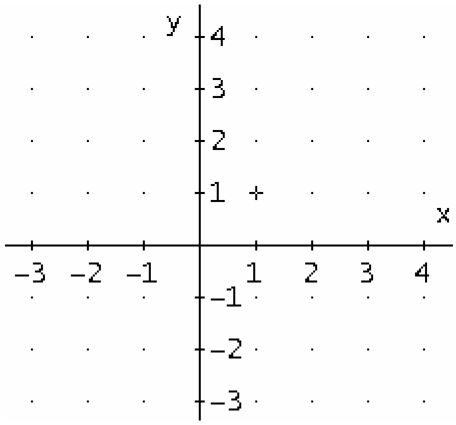
Nápověda:

- *uvědom si, jak počítáme obvod čtverce a urči požadovanou závislost*
- *zapiš závislost vzorcem (uprav níže umístěný předpis y=0, použij možnosti Úpravy -> Výraz)*
- *otevři dvoj-klikem grafické okno umístěné níže*

•*vykresli graf(Vložit -> Graf)*

•*graf umístěný v tomto okně aktualizuj (Soubor -> Aktualizovat)*

y = 0



Příklad 4:

Nádrž na vodu má objem 80 m^3. Otevřením přívodu přibývá 0,4 m^3 za čtvrt hodiny. Napiš rovnici funkce, která vyjadřuje závislost množství vody *y* (v metrech krychlových) na čase *x* (v hodinách), jestliže při otevření přívodu nádrže:

a) byla nádrž prázdná,

b) byla nádrž již naplněna 300 hl vody.

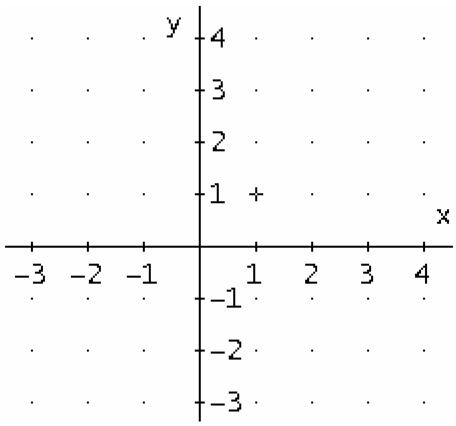
Řešení:

Nápověda:

•*sestav dvě rovnice*

•*pro kontrolu vykresli oba grafy*

- *do jednoho obrázku (použij grafické okno umístěné níže, postup stejný jako u předchozích příkladů)*
- *osy x a y popiš jako množství (m krychlové) a čas (hodiny)(Možnosti -> Zobrazení... -> záložka Osy -> Označení os)*
- *grafy zakresli různými barvami (Možnosti -> Zobrazení... -> záložka Barva) a*
- *připoj funkční předpisy obou grafů (Možnosti -> Popsat nové grafy)*



Lineární funkce

Úkol 1:

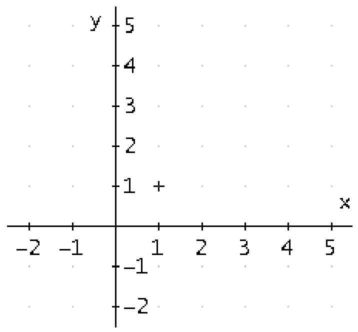
Sestroj graf funkce, jejíž definiční obor tvoří všechna čísla a která je vyjádřena následovně:

a)

$y = -3 \cdot x + 1$

b)

$y = x + 2$



Z obrázků vidíme, že grafem lineární funkce je **přímka**.

Lineární funkce je dána předpisem

$$y = kx + q,$$

k a q jsou libovolná čísla.

Definiční obor funkce tvoří všechna čísla, není-li určeno jinak.

Δ Pracuj s pracovním listem Graf lineární funkce a zjisti, jak ovlivní průběh funkce parametr k a jak parametr q.

***k* ... určuje směr funkce (ovlivňuje sklon grafu k ose x)**

a>0 funkce rostoucí

a<0 funkce klesající

q* ... určuje posunutí po ose *y

Úkol 2:

Kolik bodů nám stačí znát, abychom sestrojili graf lineární funkce? **Odpověď**:

Speciální případy lineární funkce:

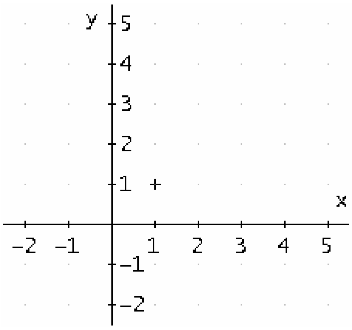
Úkol 3:

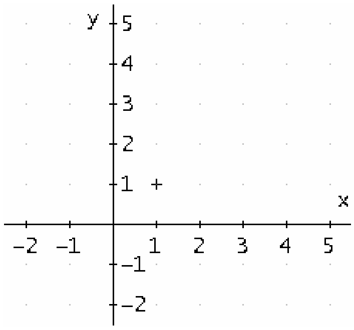
Zakresli graf libovolné lineární funkce pro případ:

a) $k = 0$

b) $q = 0$

Zapiš také jejich funkční předpisy.





!!! Budeme se bavit o
PŘÍMÉ ÚMĚRNOSTI a **KONSTANTNÍ FUNKCI.**

Úloha 4:

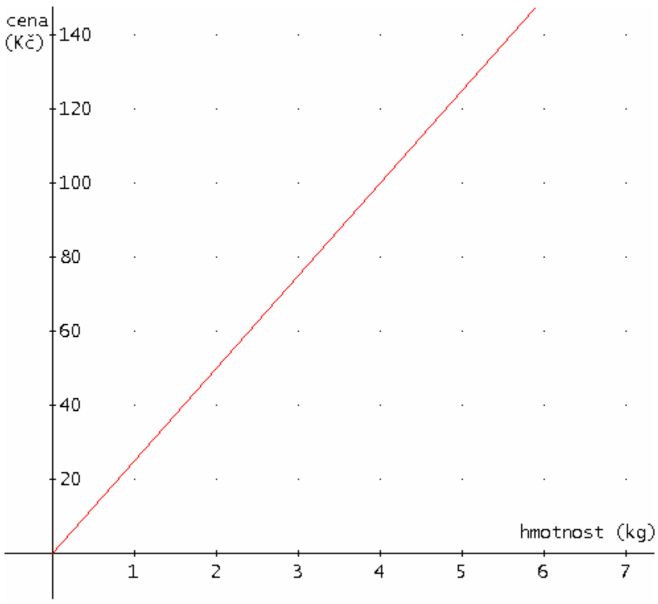
Cena za 1 kilogram pomerančů je 25 Kč. Sestav vzorec, který vyjadřuje závislost ceny pomerančů na jejich hmotnosti.

!! Kolikrát se zvětší hmotnost,
tolikrát se zvětší cena !!

Cena je přímo úměrná hmotnosti.

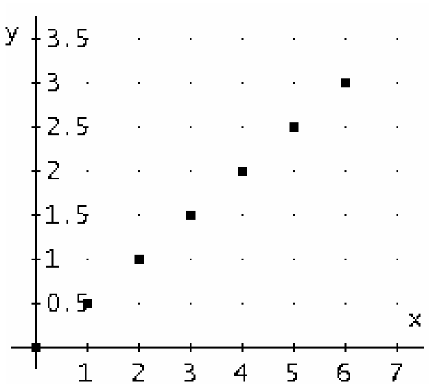
Na obrázku je zobrazen graf přímé úměrnosti, která znázorňuje závislost ceny pomerančů na jejich hmotnosti.

•*Zjisti z grafu, kolik kilogramů pomerančů, si můžeš koupit za 125 Kč.*
•*Urči z grafu, kolik stojí 4 kg pomerančů?*



Úkol 5:

Urči z obrázku přímé úměrnosti:
a) Definiční obor této funkce.
b) Zapiš pomocí souřadnic všechny body grafu této funkce.
c) Zapiš vzorec, kterým je funkce vyjádřena.

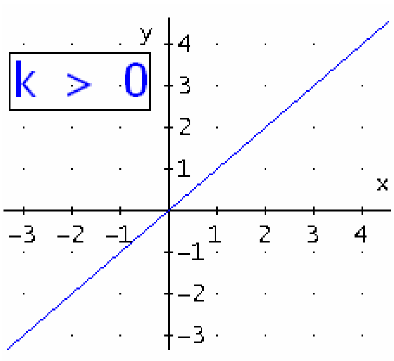


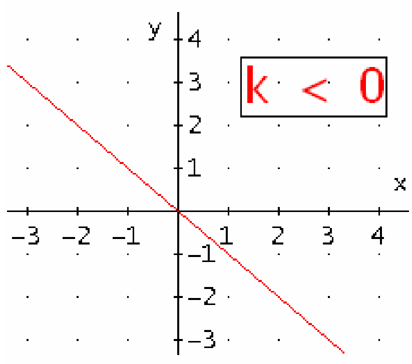
• Přímá úměrnost

Vyjadřujeme ji vzorcem **$y = kx$**, *k* je libovolné číslo různé od nuly.

Je to speciální případ lineární funkce: ***q = 0 a zároveň k ≠ 0.***
Přímá úměrnost vyjadřuje závislost jedné veličiny na druhé.
Pokud se jedna veličina zvětší, druhá veličina se také zvětší.

Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem soustavy souřadné.





Úkol 6:

Kolik bodů nám stačí k tomu, abychom dokázali zakreslit graf přímé úměrnosti? **Odpověď:**

• Konstantní funkce

Vyjadřujeme ji vzorcem **$y = q$**, *q* je libovolné číslo.

Je to speciální případ lineární funkce: ***q ≠ 0 a zároveň k = 0.***
Do oboru hodnot patří pouze číslo q.

Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou *x*.

Úkol 7:

Kolik bodů stačí k sestrojení grafu konstantní funkce?
Odpověď:

Úlohy na závěr:

1) Zakresli graf přímé úměrnosti

a) $y = 2,5\ x$

b) $y = -\ 5\ x$

2) Rychlík jede průměrnou rychlostí 72 km za hodinu z místa A do místa B.

a) Sestrojte graf závislosti dráhy na čase.

b) Určete, jaká je vzdálenost míst A a B, jestliže do místa B dojel rychlík za 1 hodinu 25 minut.

3) Může být grafem lineární funkce

a) rovnoběžka s osou x?

b) rovnoběžka s osou y?

4) Sestroj graf lineární funkce $y = 2x - 3$. Pak z něho zjisti všechna x, pro která platí:

a) $2x-3=0$

b) $2x-3=3$

c) $2x-3=-5$

5) Řeš graficky soustavy rovnic:

a)
$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 6 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 11 \\ 6x - 10y &= 22 \end{aligned}$$

Pracovní list: *Graf lineární funkce*

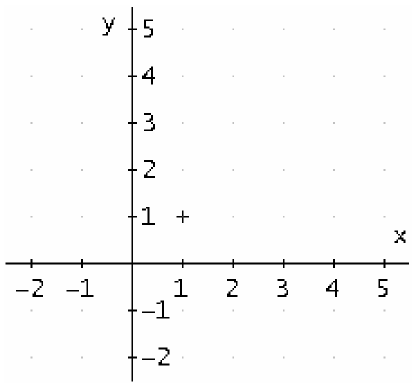
Úkol 1:

Zjistěte, jak ovlivní velikost parametru *a* průběh funkce
y = a·x

Řešení:

Nápověda:

- *Pro práci využij níže umístěné grafické okno (aktivuješ jej dvoj-klikem).*
- *Vykresli graf (nezapomeň, že musíš mít v algebraickém okně označený výraz, který chceš vykreslit).*
- *Použij posuvník (Vložit -> Posuvník...).*
- *Zkoumej změnu grafu vhodným zvolením parametru a (např. -2, 0, 2).*
- *Až budeš s řešením hotov/a, přemísti grafické okno zpět (Soubor -> Aktualizovat).*



Závěr:

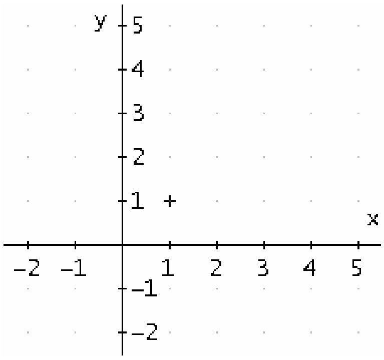
Úkol 2:

Jaká změna (oproti předchozímu úkolu) nastane, pokud budete zkoumat funkci
y = a·x + 3

Řešení:

Nápověda:

- *Postupuj jako v předchozím úkolu.*



Závěr:

Úkol 3:

Dokážete říci na základě předchozích příkladů, příp. s využitím svých znalostí, jaký závěr bude u funkce

$y = a \cdot x - 3$

Závěr:

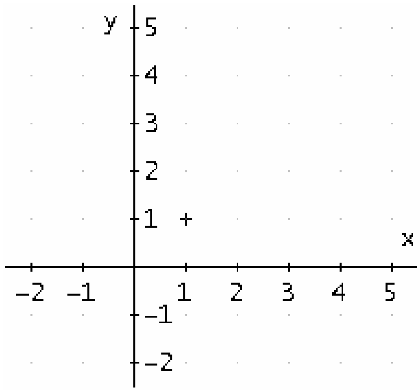
Úkol 4:

Zkoumejte vliv parametru *b* na průběh funkce

$y = 2 \cdot x + b$

K jaké dochází změně oproti předchozím případům?

Řešení:



Závěr:

Úkol 5:

Mějme funkční předpis

$y = k \cdot x + q$

k, q jsou libovolná čísla.

Shrňte, jak graf ovlivňuje číslo k a jak číslo q.

Nápověda: *Vycházejte z předchozích úkolů.*

Závěr:

Pracovní list: *Lineární funkce*

Příklad 1:

Z následujících funkcí vyber ty, jejichž grafy jsou rovnoběžné přímky ($x \in R$).

$y = x - 5$

$y = -3 \cdot x + 2$

$y = -x + 5$

$y = x + 2$

$y = 5 \cdot x - 5$

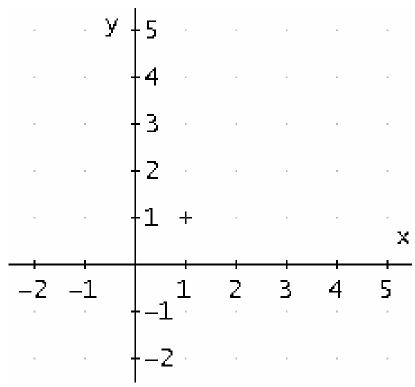
Výsledek ověř graficky.

Řešení:

Odpověď:

Nápověda ke grafickému ověření:

- *Dvoj-klikem otevři níže zobrazené grafické okno.*
- *Vykresli grafy (Vložit -> Graf).*
- *Nezapomeň, že nejdříve musíš v algebraickém okně označit výraz, který chceš vykreslit.*
- *Až svou práci dokončíš, přenes grafické okno zpět do tohoto dokumentu příkazem Soubor -> Aktualizovat.*



Příklad 2:

Urči, pro které hodnoty proměnné x bude mít funkce:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + 3$$

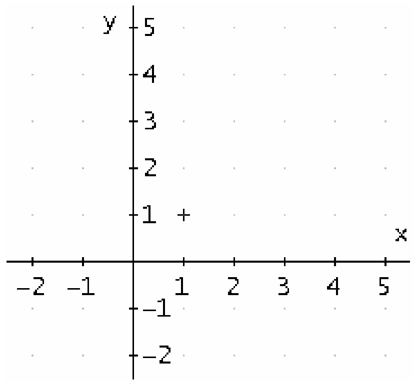
a) kladné hodnoty,

b) záporné hodnoty?

Řešení:

Nápověda:

- *Zkoumej graf funkce.*



Odpověď:

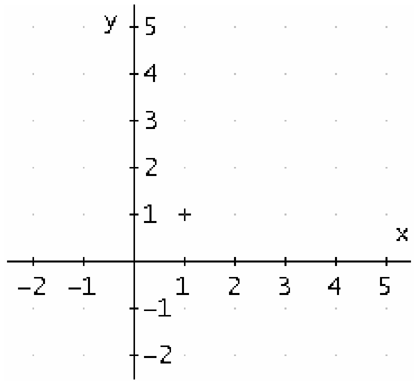
Příklad 3:

Uveď aspoň dvě lineární funkce, pro které platí: Hodnota funkce přiřazená číslu 3 je 7.

Řešení:

Odpověď:

Svoje řešení ověř graficky.



Příklad 4:

Řeš soustavu rovnic:

$2 \cdot x - y = 2$

$2 \cdot x + 3 \cdot y - 6 = 0$

Řešení proveď graficky i početně.

Řešení početní:

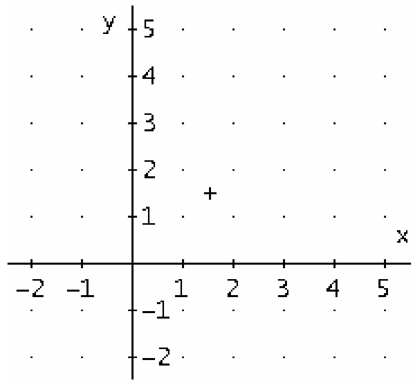
Nápověda:

- *Pro rychlé řešení použij Řešit -> Soustavu rovnic...*

Řešení grafické:

Nápověda:

- *Vykresli grafy a použij funkce trasovat graf.*
- *Pro zjištění souřadnic průsečíku lze využít příkazů hCross a vCross.*



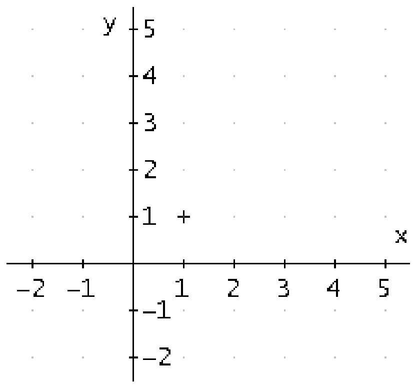
Příklad 5:

V půjčovně ALFA pronajímají Fabii za denní paušál 400 Kč a navíc se platí 8 Kč za každý ujetý kilometr. V půjčovně BETA je Fabia pronajímána za denní poplatek 500 Kč plus 6 Kč za každý kilometr.
Při jakém počtu ujetých kilometrů je finančně výhodnější pronajmout Fabii na jeden den v půjčovně BETA?

Řešeni:

Nápověda:

- *Ujasni si jaké znáš údaje a pokud potřebuješ, vypiš si je.*
- *K vyřešení úlohy využij grafické znázornění(pracuj s následujícím grafickým oknem).*



Odpověď:

Nepřímá úměrnost

Pavel pomáhal tatínkovi odvážet dřevo. Tatínek by sám odvezl všechno dřevo za 3 hodiny. Jak dlouho by jim to trvalo, kdyby přišel na pomoc ještě dědeček, strýc a soused?

Uvažujme nad úlohou:
- tatínek sám by odvozil dřevo za 3 hodiny
- s pomocí syna by se určitě doba práce zkrátila (o polovinu – uvažujme, že všichni pracují stejně výkonně)
- s každým dalším pomocníkem by byla doba práce opět kratší a kratší

Najde zde již někdo nějakou souvislost?
Jak se mění počet pracovníků a doba práce?

Čím více pracovníků bude pracovat, tím kratší dobu jim bude práce trvat!!!

Sestavme tabulku:

Počet pracovníků	1	2	3	4	5
Doba odvozu (minuty)					

A vykresleme graf pomocí následujících bodů:

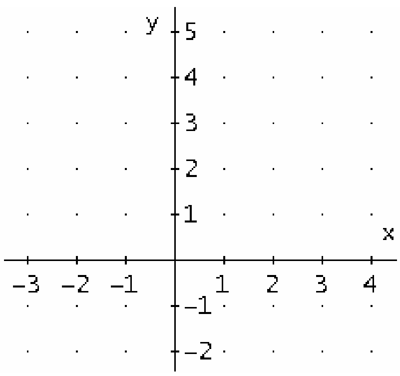
[1, 180]

[2, 90]

[3, 60]

[4, 45]

[5, 36]



Všimni si, že grafem nepřímé úměrnosti není přímka, ale křivka!

A jak bude v tomto případě vypadat funkční předpis?

Ze zadání víme, že jeden pracovník odveze dřevo za **180 min.**
Dva pracovníci by dřevo odvezli za polovinu původní doby, to je **180 : 2 = 90 min.**
Třem pracovníkům by odvoz trval třetinu původní doby, to je **180 : 3 = 60 min. atd.**

Označíme-li počet pracovníků *x* a čas *y*, pak

$$y = \frac{180}{x}$$

Z tohoto zápisu odvoďte obecný tvar rovnice nepřímé úměrnosti.

y = ?

x ... nezávisle proměnná ($x \neq 0$)
y ... závisle proměnná
k ... koeficient nepřímé úměrnosti ($k \neq 0$)

Úkol 1

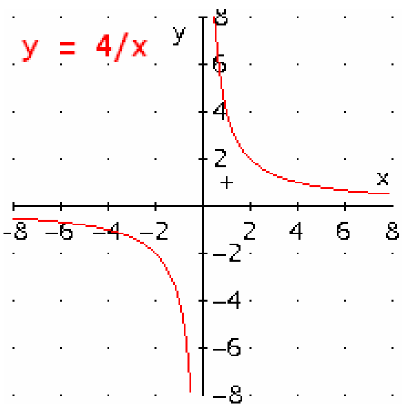
Rozhodni, ve kterém případě se jedná o nepřímou úměrnost:

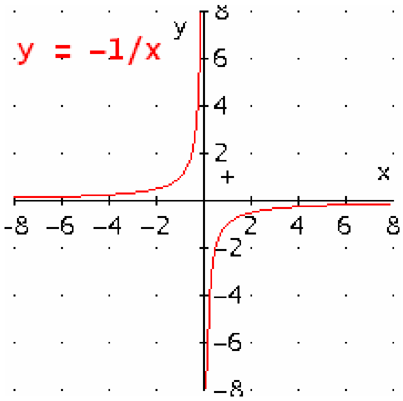
1) Závislost celkové sklizené plochy obilí za jednotku času na počtu kombajnů.
2) Závislost sklizené plochy obilí jedním kombajnem na počtu kombajnů.
3) Závislost doby sklizně na počtu lidí.
4) Závislost velikosti získaného kousku dortu na počtu lidí, jež ho budou jíst.
5) Závislost ujeté dráhy na počtu otáček kola.
6) Závislost hustoty tělesa na jeho hmotnosti.
7) Závislost obsahu čtverce na délce jeho strany.
8) Závislost množství vody v bazénu na množství připuštěné vody.
9) Závislost hustoty tělesa na jeho objemu (při konstantní hmotnosti tělesa).
10) Závislost hmotnosti výrobku na hustotě použitého materiálu.
11) Závislost celkové spotřeby energie na počtu elektrospotřebičů.
12) Závislost odporu vodiče na protékajícím proudu při stálém napětí.
13) Závislost velikosti síly, kterou je těleso nadlehčováno v kapalině, na hustotě kapaliny.

Řešení:

Graf nepřímé úměrnosti

Srovnej následující grafy:





Dokážeš říci, co tvoří graf a podle čeho je souměrný?

! Grafem nepřímé úměrnosti je křivka, kterou budeme nazývat **HYPERBOLA nebo její část.** Tato křivka neprochází počátkem soustavy souřadnic – je **středově souměrná podle počátku.**

Úkol 2

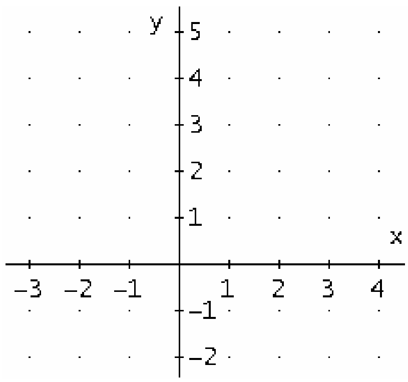
Sestroj grafy funkcí:

$$y = \frac{1}{x}$$

a

$$y = -\frac{1}{x}$$

do jednoho obrázku. Podle které osy jsou souměrné?



Odpověď:

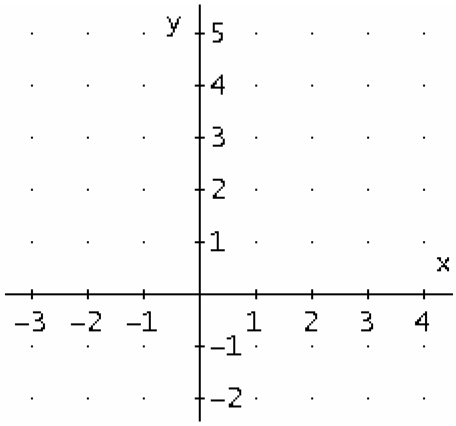
Úkol 3

Urči konstantu *k* v rovnici funkce

$$y = \frac{k}{x}$$

$(x \neq 0)$, jestliže její graf prochází bodem a = [1, 2]

a sestroj její graf.



Řešení:

Pochopili jste z předchozího úkolu, co ovlivňuje polohu grafu? Zda leží graf v I. a III. kvadrantu nebo v II. a IV. kvadrantu?

! Je-li koeficient rovnice $y = k/x$

$k > 0$ (kladný), leží graf v **I. a III. kvadrantu**

$k < 0$ (záporný), leží graf ve **II. a IV. kvadrantu**

! Vlastnosti funkce:

Na základě předchozích grafů zkus říci jaké má funkce vlastnosti. Tj. definiční obor, obor hodnot a kde je klesající nebo rostoucí. Pokud si nejsi jistý/jistá, ověř si své výsledky dalším obrázkem.

Definičním oborem jsou všechna čísla různá od nuly, tj. **$R - \{0\}$**

Oborem hodnot jsou všechna čísla různá od nuly, tj. **$R - \{0\}$**

Je **klesající** nebo **rostoucí** v **$(-\infty, 0)$** v **$(0, +\infty)$**

Úlohy na závěr:

1) Zapiš vzorcem nepřímou úměrnost, do jejíhož grafu patří bod $A = [2,-3]$.

2) Nakresli graf nepřímé úměrnosti

$$y = \frac{5}{x}$$

3) Může být druhá souřadnice některého bodu, který patří do grafu nepřímé úměrnosti, rovna nule?

4) Urči všechna čísla, pro která je hodnota funkce

$$y = \frac{1}{x}$$

a) rovna 1000
b) menší než 1000
c) větší než 1000.

5) Rozhodni, které z bodů [2;4], [3;4], [–1;–8], [0;0] nepatří do grafu funkce

$$y = \frac{8}{x}$$

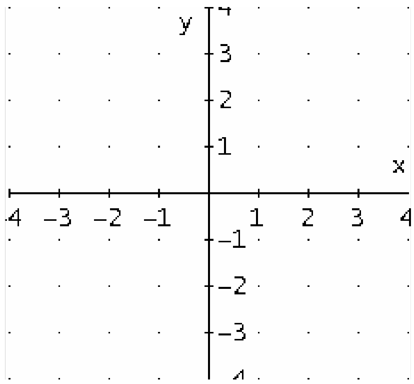
Kvadratická funkce

Úkol 1:

Vykresli graf funkce

$$y = x^2$$

jejíž definiční obor tvoří čísla 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3; –0,5; –1; –1,5; –2 a –3.



Všimni si, jaké jsou hodnoty pro navzájem opačná čísla (1 a –1, 2 a –2 atd.).

!!! Hodnoty funkce jsou pro navzájem opačná čísla (tj. např. 1 a –1) STEJNÉ.

Je graf funkce souměrný podle některé přímky?

!!! Graf funkce je OSOVĚ SOUMĚRNÝ podle osy *y*.

Úkol 2:

Urči z grafu (pracuj s grafem z úkolu 1):

a) Pro které *x* je hodnota funkce nejmenší? **Odpověď**:

b) Jaká je hodnota funkce pro x = 2,5? **Odpověď**:

c) Jaká je hodnota funkce pro x = – 2,5? **Odpověď**:

d) Pro která *x* je hodnota funkce rovna číslu 9? **Odpověď**:

Úkol 3:

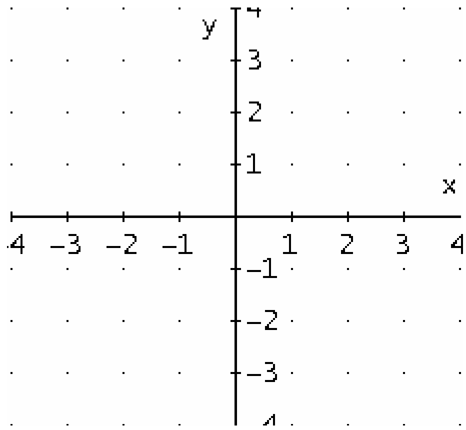
Co mají společného grafy následujících funkcí?

$$y = x^2$$

a

$$y = -x^2$$

Grafy sestrojíme do jednoho obrázku. Popíšeme je a zvolíme pro ně různé barvy.

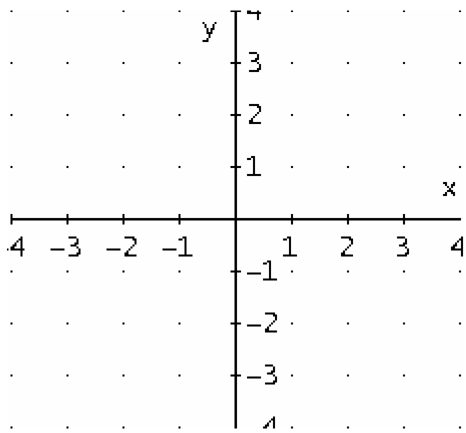


!!! Graf funkce y = −x^2 je obrazem grafu funkce y = x^2 v OSOVÉ SOUMĚRNOSTI s osou *x*.

Úkol 4:

Vykreslíme graf funkce
$y = a \cdot x^2$

(Použijeme funkce posuvníku, abychom mohli sledovat průběh funkce pro různá a).



!!! KVADRATICKÁ funkce:

je dána předpisem:

$$y = a \cdot x^2,$$

pro $a \neq 0$.

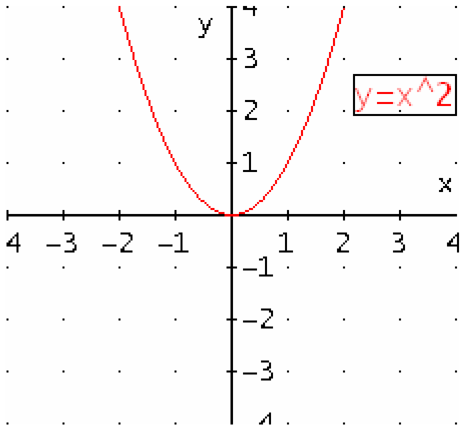
(některé složitější kvadratické funkce mohou mít tvar: y = ax^2 + bx + c nebo y = ax^2 + c).

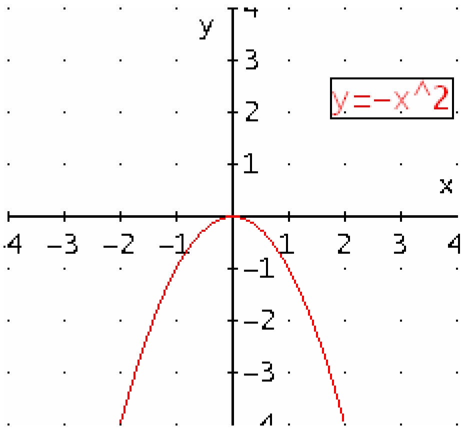
!!! Graf kvadratické funkce dané předpisem $y = ax^2$, vždy prochází počátkem soustavy souřadné (tj. bodem 0 = [0,0]). V počátku má vrchol.

!!! Grafem kvadratické funkce je křivka, kterou budeme nazývat PARABOLA.

Úkol 5:

Jak hodnota parametru *a* mění průběh funkce?





Z grafů urči:

definiční obor:
obor hodnot pro **a>0**:
obor hodnot pro **a<0**:

!!! Definiční obor kvadratické funkce tvoří všechna čísla
(není-li určeno jinak).

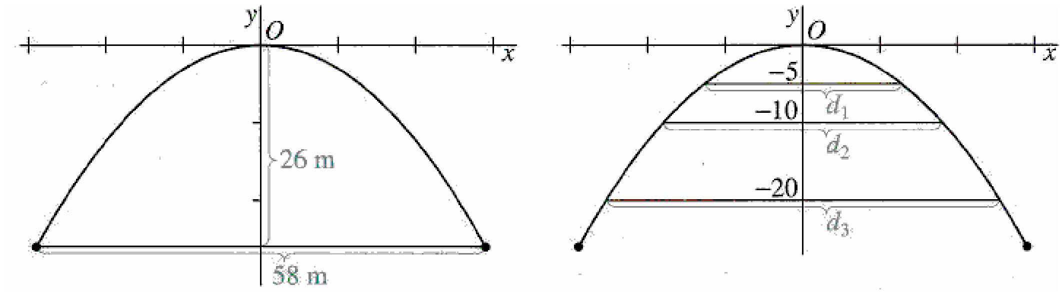
!!! Obor hodnot kvadratické funkce tvoří:

- **pro a>0: všechna čísla větší nebo rovna 0**
- **pro a<0: všechna čísla menší nebo rovna 0**

Úlohy na závěr:

1) Načrtni graf funkce, který vyjadřuje závislost obsahu kruhu na jeho poloměru ($S = \pi r^2$). !Poloměr kruhu je kladné číslo!

2) ***Oblouky pro náročnější***
Architekt navrhuje lávku pro pěší. Stavitel lávky požaduje podrobnější informace o nosných obloucích.
Architekt předpokládá nákres nosného oblouku a doplňuje údaje: "Oblouk má rozpětí 58 metrů a výšku 26 metrů. V soustavě souřadné na obrázku vlevo jde o část paraboly, která je grafem kvadratické funkce $y = ax^2$."



a) Urči ve vzorci $y = ax^2$, kterým je tato kvadratická funkce vyjádřena hodnotu *a*.
b) Vypočítej pro stavitele délky *d1, d2, d3,* které vyznačil v obrázku vpravo.

3) Sestrojte graf funkce

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x^2$$

Jaký bude graf, pokud omezíme definiční obor: $-3 \leq x < 2$.

4) Urči průsečíky grafů funkcí

$$y = -x^2$$

a

$$y = x-2$$

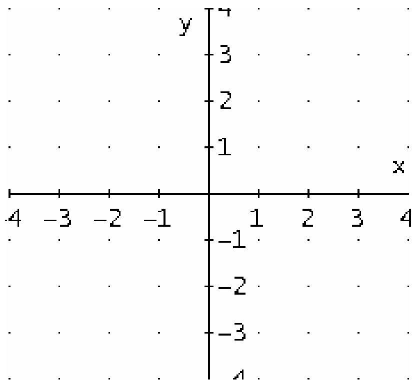
5) Určete konstantu *a* v rovnici kvadratické funkce $y=ax^2$, prochází-li graf této funkce bodem: $[-2,-8]$.

6) Zapište předpis kvadratické funkce, jejíž graf má maximum pro $x=2$.

Pracovní list:
Nelineární funkce

Příklad 1:
Zapiš vzorcem nepřímou úměrnost, do jejíhož grafu patří bod A=[3,4].

Řešení:
Nápověda:
- *využij možnosti posuvníku*
- *vykresli bod A a obecnou rovnici nepřímé úměrnosti*
- *vhodným zvolením parametru posuň graf nepřímé úměrnosti až do bodu A*
- *poté urči správný předpis dané funkce*

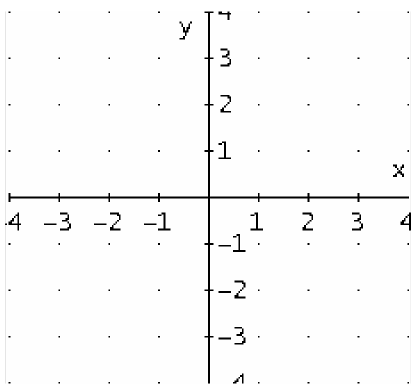


Odpověď:

Příklad 2:
Zapiš závislost obsahu čtverce na jeho straně.

Řešení:
Nápověda:
- *nejprve urči vzorec výpočtu obsahu čtverce*
- *poté zapiš funkční předpis*
- *výsledek ověř graficky*

! *Obsah i strana čtverce jsou kladná čísla* !



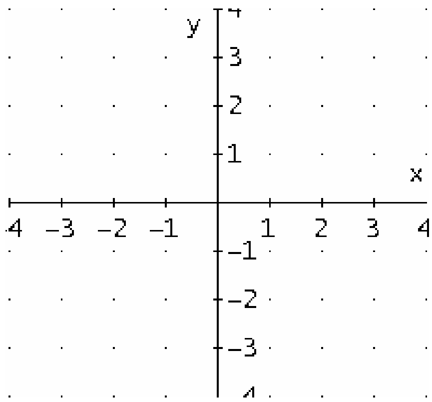
Příklad 3:

Urči konstantu *k* v rovnici funkce y=k/x (x≠0), jestliže její graf prochází bodem A=[1,2] a sestrojte její graf.

Řešení:

Nápověda:

•*Postup obdobný jako u příkladu 1.*



Odpověď:

Příklad 4:

Které z bodů

A := [−1, 0.5]
B := [0, 0]
C := [2, 2]
D := [2, −1]
E := [−2, 2]

leží na grafu funkce

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x$$

a které na grafu funkce

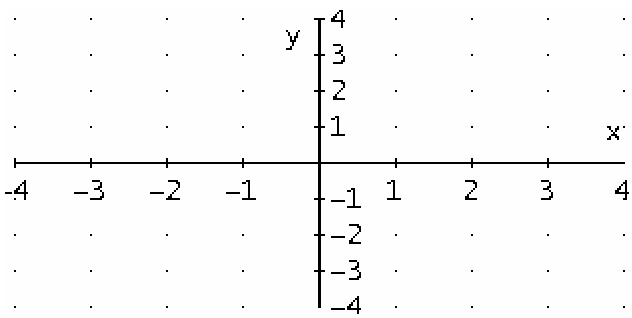
$$y = 0.5\cdot x^2$$

Řešení proveď ***graficky***.

Řešení:

Nápověda:

•*vykresli grafy i body a urči odpověď*



Odpověď:

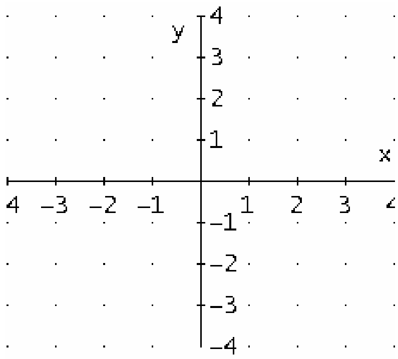
Příklad 5:

Pro která x jsou dané funkce rostoucí?

a)

$$y = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

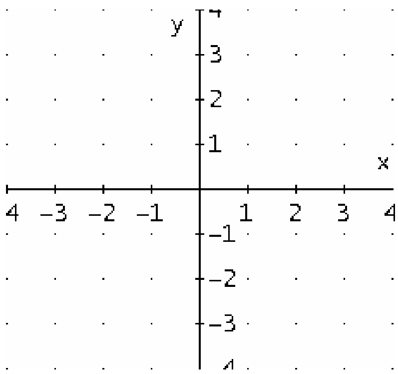
Odpověď:



b)

$$y = -2 \cdot x^2$$

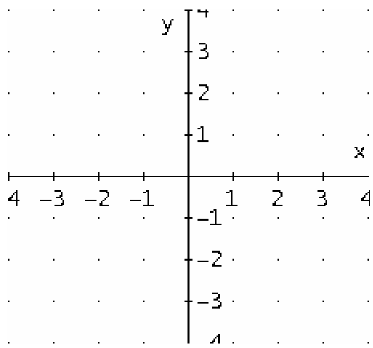
Odpověď:



c)

$$y = \frac{2}{3} \cdot x$$

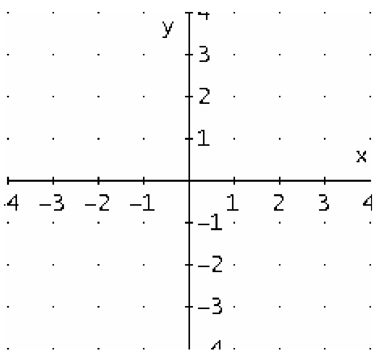
Odpověď:



d)

$$y = -\frac{2}{3} \cdot x$$

Odpověď:



Žák: ________________

Dotazník:

(Po skončení své práce vyplň pravdivě tento dotazník, volbu „nevím“ použij jen pokud nedokážeš jasně odpovědět. Odpovědi označ křížkem nebo doplň číslo. Žádná odpověď není špatná! Jakékoliv dotazy, připomínky či postřehy k celému projektu můžeš připsat z druhé strany listu.)

1. Po seznámení se s ovládáním programu *Derive*, hodnotím práci s ním jako:
   - ☐ lehkou
   - ☐ středně těžkou
   - ☐ těžkou
   - ☐ nevím

2. Na programu *Derive* se mi:
   - ☐ líbí: ……………………………………………………………..
     …….……………………………………………………………
   - ☐ nelíbí: ….…………………………………………………………...
     ……………………………………………………………………

3. Zadané úkoly hodnotím jako:
   - ☐ spíše lehké
   - ☐ spíše těžké
   - ☐ některé lehké, některé těžké

4. Při řešení příkladů mi dělalo obtíže, že jsem:

a) nerozuměl/a zadání	Ano/Ne
b) neuměl/a dané učivo	Ano/Ne
c) nedokázal/a použít program	Ano/Ne
d) neměl/a dostatek času	Ano/Ne
	(Označ správné odpovědi.)

5. Matematiku mám:
   - ☐ velmi rád/a
   - ☐ rád/a
   - ☐ nerad/a
   - ☐ velmi nerad/a

6. Celkově mě práce s počítačem:
   - ☐ baví
   - ☐ nebaví

7. Chtěl/a bych využívat *Derive*, příp. podobný program:

a) ve škole při výuce:	b) doma při samostudiu:
☐ ano	☐ ano
☐ ne	☐ ne

8. Chtěl/a bych znát podrobnější výsledky své práce:
   - ☐ ano
   - ☐ ne