PROBLEMATIKA ŘEŠENÍ NETRADIČNÍCH FYZIKÁLNÍCH ÚLOH

Diplomová práce

Ondřej Tröstl

Jihočeská univerzita

Pedagogická fakulta

Katedra fyziky

České Budějovice 2009

ANOTACE

Tato diplomová práce pojednává o jiných než typických možnostech výuky a zadávání úloh ve fyzice. V úvodní části je popsáno formální zpracování fyzikálních úloh, konkrétně postupem při řešení fyzikálních úloh a převodem jednotek SI. Následující kapitola se věnuje matematickému aparátu potřebnému pro řešení fyzikálních úloh, konkrétně lineárním, kvadratickým, exponenciálním, logaritmickým a goniometrickým rovnicím a nerovnicím, závěrečná část této kapitoly je věnována i základům diferenciálního a integrálního počtu. Zbytek práce se zabývá netradičně zadanými fyzikálními úlohami, například úloha zadaná tabulkou, grafem, práce s obrázky a vektory, v závěru jsou též úlohy zadané videem a animací.

SUMMARY

This diploma thesis deals with unusual possibilities of education and setting of exercises in physics. The introduction describes formal process of exercises in physics, especially the procedure of solving these exercises and the conversion of SI units. The next chapter is focused on mathematic skills needed in such exercises, especially linear, quadratic, exponential, logarithmical and goniometrical equation, the last part of this chapter is focused on differential and integral calculus. The end of this work describes unusual settings of exercises in physics, for example exercises setting of figure, graph, video and animation as well as working with pictures and vectors.

Děkuji RNDr. Františkovi Špulákovi za odbornou pomoc, trpělivost a rady při vedení mé diplomové práce. Poděkování patří též všem, kteří mi jakkoli pomohli při pořizování videonahrávek a fotografií.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pramenů, které jsou uvedeny v přiloženém seznamu použité literatury.

V Českých Budějovicích, duben 2009

podpis

OBSAH

1 ÚVOD

V příležitostných průzkumech oblíbenosti předmětů u žáků základních škol figuruje fyzika spolehlivě na posledních místech. Tamtéž se nachází v tabulkách úspěšnosti žáků v jednotlivých předmětech. Fyzika děti nebaví a "nejde jim". Možnou příčinou této neoblíbenosti fyziky je neznalost příslušného matematického aparátu. Struktura jednotlivých kapitol je volena z pohledu matematiky s aplikací na různé fyzikální úlohy. Přitom je to právě fyzika, která má jako obor skvělé dispozice k tomu, stát se pro učitele i děti záživným a zábavným představením: jde přece o disciplínu, která stojí na zajímavých experimentech, jejichž průběh je zajímavý sám o sobě, a její výsledky a aplikace potkáváme na každém kroku. [1]

V moderním vyučování učitelé hojně aplikují experimenty do svých hodin a to nejen při výkladu nové látky, ale také při zkoušení a opakování. Hodina tak nabírá mnohem větší zajímavosti a zábavnosti než pouhý výklad a žáci si více pamatují. Do výuky však neodmyslitelně patří i slovní úlohy, které žáci musí řešit ať už z důvodu osvojení si probraného učiva, zopakování, či zkoušení. Přestože se tyto slovní úlohy snaží být jakkoliv vtipně, či zábavně podané, jde vždy pouze o psaný text (občas doplněný obrázkem), který žáci přijímají s odporem.

V diplomové práci se snažím „pomoci studentům s fyzikou“, zvýšit její oblibu a vytvořit slovní úlohy, zadané trochu jiným způsobem a to nonverbálním. V hodině je možno strohý výklad nahradit například frontálním experimentem, zkoušení laboratorní úlohou a zadání slovních úloh nahradit videem či obrázkem. Tyto fyzikální úlohy jsou tedy slovní úlohy zadané jinak než pouhým textem. V případě mé diplomové práce jde o krátká videa, fotografie, tabulky, grafy a hyperaktivní applety (kde studenti mohou měnit parametry zadání úlohy).

2 FORMÁLNÍ ZPRACOVÁNÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH

Řada žáků si nedá poradit a místo písemné práce odevzdá „chaos“. Přitom s pravidly, jak řešit úlohu, jsou detailně seznámeni. V jejich zápisu je velmi těžké se orientovat a z toho pramení i spousta chyb. Žáci zapomenou na převedení jednotek, chybným označením dosadí do vztahu jinou hodnotu atd. Podobné nedostatky jsou zbytečné.

Fyzikální úlohy mají často podobu slovní úlohy z matematiky. To znamená, že některé údaje nejsou v textu explicitně přímo napsány, ale vyplývají z okolností. Při řešení nevystačíme jen se znalostí matematických operací, protože pro úspěšné řešení je třeba využít fyzikální vztahy a kombinovat je.

2.1 *Postup při řešení fyzikálních úloh:*

1. Úlohu si několikrát přečtěte, abyste si ujasnili, co je v úloze uvedeno a co máte sami zjistit.
2. Vytvořte zkrácený zápis, ve kterém všechny jednotky převeďte do SI. Do zápisu můžete připsat i implicitně nepřímo zadané hodnoty (např. je-li uveden 1 litr vody, je jeho hmotnost asi 1 kg) a fyzikální konstanty související s problémem.
3. Zakreslete situaci do obrázku. Obrázek vás často navede na vhodné řešení.
4. Poznačte si fyzikální vztahy, které budete při řešení úlohy potřebovat. Dostanete rovnici nebo soustavu rovnic, jejichž řešení vede k výsledku.
5. Obecně vyjádřete hledanou veličinu. Až potom do výsledného vztahu dosaďte číselné hodnoty (viz úloha 1).
6. Výsledek řešené úlohy fyzikálně interpretujte, porovnejte se zadáním úlohy a napište odpověď.[2]

Úloha 1:

Míč byl vržen svisle vzhůru rychlostí 18 km.h^{-1}. Do jaké maximální výšky vystoupí?

v = 18 km.h^{-1} = 5 m.s^{-1}

h = *?* m

g = 9,81 m.s^{-2}

Řešení:

Výpočet se opírá o zákon zachování mechanické energie: kinetická energie E_k na počátku se rovná potenciální energii E_p v nejvyšším bodě trajektorie.

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$\{h\} = \frac{5^2}{2 \cdot 9{,}81}$$

$$h = 1{,}27\mathrm{m}$$

Odpověď:

Míč vystoupí do výšky 1,27 m.

2.2 *Převádění jednotek SI*

Co je SI?

Od roku 1960 platí ve většině států tzv. Mezinárodní soustava jednotek, zkráceně SI (z fran. *Système International d'Unités*). Vědci, obchodníci i obyčejní lidé mohou jednodušeji porovnávat údaje z různých částí světa. Například délka je standardně uváděna v metrech a lokty, stopy, míle a pídě se už ve fyzice nepoužívají. [3]

SI má sedm základních jednotek, dvě doplňkové jednotky, několik vedlejších jednotek a odvozené jednotky. (viz tab.1)

Základní jednotky – jednotky délky, hmotnosti, času, termodynamické teploty, elektrického proudu, látkového množství a svítivosti umožňují popsat celé spektrum fyzikálních disciplín. Pokud vám ve výčtu některé veličiny chybí, jejich jednotky jsou tzv. odvozené jednotky, například elektrické napětí, síla, práce, energie, ... i když odvozené jednotky mají často vlastní název – volt, newton, joule, ..., dají se vyjádřit pomocí součinu sedmi základních jednotek v různých mocninách.

Doplňkové jednotky radián a steradián slouží ke geometrickému zpřesnění fyzikálního popisu.

Vedlejší jednotky je povoleno používat v praxi – Celsiův stupeň, tuna, litr, elektronvolt, světelný rok, ...

Mezinárodní soustava jednotek			
Základní jednotky			
Veličina	značka	jednotka	značka
délka	l	metr	m
hmotnost	m	kilogram	kg
čas	t	sekunda	s
elektrický proud	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množství	n	mol	mol
svítivost	I	candela	cd
doplňkové jednotky			
rovinný úhel	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	radián	rad
prostorový úhel	Ω	steradián	sr

tab.1

Úloha 2:

Vyjádřete 1 newton pomocí základních jednotek SI.

Řešení:

Newton je jednotka síly. Síla ***F*** je definována vztahem ***F*** = *m**a***, kde *m* je hmotnost tělesa a ***a*** jeho zrychlení. Jednotkou hmotnosti je kilogram, jednotkou zrychlení $m.s^{-2}$ (metr je v první mocnině; sekunda ve druhé). Vztah pro výpočet síly můžeme považovat z matematického pohledu za rovnici, musí být obě strany ekvivalentní. Takže i jejich fyzikální rozměr – tj. rozměr jednotky musí být stejný. Rozměr jednotek na pravé straně je $kg^1.m^1.s^{-2}$. Jednička označující první mocninu se nezapisuje; další čtyři základní jednotky SI zastoupeny nejsou (mají nultou mocninu – jejich hodnota je jedna)

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg.m.s^{-2}}$$

Převádět jednotky na základní jednotky vede vždy ke správnému konci, ale ve speciálních případech můžete převádění pominout. Pokud jsou stejné veličiny například v poměru, nemusíte zlomek upravovat. Bylo by to krácení nebo rozšiřování, které nemá na číselnou hodnotu výrazu vliv. Podobných výjimek, kdy převádění není nutné, existuje víc.

2.3 *Násobky a díly jednotek*

V minulosti se násobky a díly označovaly slovně. Většina předpon znamená v latině, italštině nebo řečtině přídavné jméno „malý“, „velký“ atd. Pro výpočty je však výhodnější uvádět násobky a díly jednotek pomocí mocnin deseti. Sčítání různých hodnot velikosti fyzikální veličiny se omezí na jednoduché matematické operace. Problém může nastat u veličin, jejichž jednotka je složená nebo je jinak historicky zavedena.

Násobné předpony:

Předpona	Značka	Matematické vyjádření
yotta-	Y	10^{24}
zetta-	Z	10^{21}
exa-	E	10^{18}
peta-	P	10^{15}
tera-	T	10^{12}
giga-	G	10^{9}
mega-	M	10^{6}
kilo-	k	10^{3}
hekto-	h	10^{2}
deka-	da	10^{1}

tab.2a

Dílčí předpony:

Předpona	Značka	Matematické vyjádření
deci-	d	10^{-1}
centi-	c	10^{-2}
mili-	m	10^{-3}
mikro-	μ	10^{-6}
nano-	n	10^{-9}
piko-	p	10^{-12}
femto-	f	10^{-15}
atto-	a	10^{-18}
zepto-	z	10^{-21}
yokto-	y	10^{-24}

tab.2a

Úloha 3:

Chodec nejprve ušel 3 km a potom dalších 8000 dm. Jakou celkovou vzdálenost urazil?

$$l = 3 \text{ km} + 8000 \text{ dm}$$

$$l = 3 \cdot 10^3 \text{ m} + 0{,}8 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$l = 3{,}8 \cdot 10^3 \text{ m}$$

Chodec urazil dráhu 3,8 km.

2.4 *Převody fyzikálních jednotek*

Mezi složitější převody nejběžnějších jednotek patří převody jednotek plošného obsahu, objemu, hustoty a rychlosti.

U převádění objemu a plošného obsahu si musíme dát pozor na mocniny jednotek. Například krychle o straně 1 m má objem 1 m^3, ale také ji můžeme považovat za krychli o délce strany 10 dm, takže objem je 1000 dm^3. Ačkoliv jsme rozměr délky hrany změnili o jeden řád (z metru na decimetr), objem se změnil o tři řády.

Plošný obsah nejčastěji převádíme na čtvereční metry – například čtverec se stranou 1 m. Běžně ale používáme i mm^2, cm^2, dm^2 a km^2. V praxi se pak setkáváme i s ary a hektary. 1 ar je 100 m^2 (10 m x 10 m) a hektar (značka ha) 10 000 m^2 (100 m x 100 m).

Objem převádíme podobně jako plošný obsah. V praxi se nejčastěji používají krychlové milimetry mm^3, krychlové centimetry cm^3, krychlové decimetry dm^3, krychlové metry m^3 a litry. Decilitr je desetina litru, hektolitr je 100 litrů. Přitom platí, že 1 dm^3 je 1 litr.

Hustota ρ udává hmotnost jednotky objemu stejnorodé látky:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Na gymnáziu není potřeba v souvislosti s hustotou používat jinou jednotku objemu než cm^3 nebo m^3. I když se hustoty látek výrazně liší (1 m^3 vzduchu má hmotnost asi 1,3 kg a rtuti 13500 kg). Používáme pro zápis hmotnosti jednoho „kubíku“ pouze kilogramy a pro zápis hmotnosti jednoho krychlového centimetru gramy. Hustotu tedy uvádíme v kg / m^3 a v g / cm^3. Pro tyto dvě jednotky hustoty platí následující převodní vztahy:

$$1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = \frac{1\cdot10^{-3}\mathrm{kg}}{1\cdot10^{-6}\mathrm{m}^3} = 1\cdot10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \frac{1\cdot10^{3}\mathrm{g}}{1\cdot10^{6}\mathrm{cm}^3} = 1\cdot10^{-3}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 0{,}001\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Rychlost vyjádřenou různými jednotkami převádíme obdobně, rychlost je definována jako podíl dráhy a času:

$$v = \frac{s}{t}\ .$$

Rychlost automobilu vyjadřujeme v kilometrech za hodinu $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, ale pro výpočty je nutné používat jednotku metr za sekundu $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, tj. jednotku SI. Pro tyto dvě jednotky rychlosti platí následující převodní vztahy:

$$1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1\,\frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 0{,}2\overline{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\frac{1}{1000}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Mnozí žáci, kteří na gymnázium přicházejí ze základních škol, znají převody rychlosti nazpaměť. Je to chyba, protože kapacita lidského mozku je omezená a člověk by měl mozek využívat k přemýšlení, ne jen k ukládání poznatků. Snažte se proto tyto převody odvozovat. Nepřekvapí vás potom převod z centimetrů za minutu na metry za den, třeba u výpočtu rychlosti hlemýždě.

3 ZÁKLADNÍ MATEMATICKÉ POSTUPY – ÚPRAVY VÝRAZŮ

Algebraické výrazy musí umět řešit každý žák fyziky. Nejprve se pokusím vysvětlit vyjádření neznámé ze vzorce, ve kterém jsou mocniny a odmocniny a ve kterém je zároveň nutné vytýkat nebo používat tzv. součtové vzorce. Pravidla pro tyto úpravy naleznete ve všech učebnicích matematiky pro 1. Ročník gymnázia a přehledech středoškolské matematiky. Také tam naleznete pravidla pro sčítání, násobení, dělení a rozklad mnohočlenů a lomených výrazů. Bez znalostí popsaných v těchto učebnicích se neobejdete ani ve fyzice. Složitější operace, jako je logaritmování nebo práce s goniometrickými funkcemi, si ozřejmíme v samostatných kapitolách.

3.1 Úpravy mnohočlenů a lomených výrazů

Mezi nejobecnější pravidla úpravy mnohočlenů a lomených výrazů patří:

- Výraz pod odmocninou nesmí být záporný – příklady řešíme v oboru reálných a ne komplexních čísel.
- Nelze dělit ani krátit nulou. Nezapomeňme, že i neznámá může nabýt nulovou hodnotu.
- Rovnice nesmíme nejen dělit, ale ani násobit nulou. Násobení by tak nebylo ekvivalentní úpravou. Vynásobím-li nesmyslnou rovnost 5 = 4 nulou, dostanu zápis 0 = 0, který už je správný.

Úpravy výrazů provádíme v každé fyzikální úloze. V této kapitole vás chci seznámit se základními aplikacemi matematických poznatků ve fyzice.

S úpravami, které jsou popsány v této kapitole, se seznamují žáci druhého stupně základní školy. Problém je v tom, že poznatky z matematiky neumějí využít ve fyzice, může to být proto, že fyzika vedle matematických omezení klade na výpočet i omezení vlastní. Čas, hmotnost a délka trajektorie nemohou být nikde záporné apod.

I když následující úloha 4 nemá fyzikální základ, je jeho úspěšné vyřešení důležité. Nemáte-li s úpravou podobných výrazů problém, jsou vaše matematické základy solidní a pro fyziku dostačující.

Úloha 4:

Vyjádřete všechny neznámé z výrazu: $\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2} = 1$

Řešení:

1) Vyjádření neznámé *a*:

Nejprve vynásobme obě strany rovnice jmenovatelem *(3c + d²),* poté je třeba obě strany odmocnit a nakonec převedeme výraz *-2b* na pravou stranu

$$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2} = 1,\ 3c + d^2 \neq 0$$

$$(a-2b)^2 = 3c + d^2$$

$$(a-2b) = \sqrt{3c+d^2}$$

$$a = \sqrt{3c+d^2} + 2b$$

2) Vyjádření neznámých *b, c* a *d*:

$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2} = 1$	$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2} = 1$	$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2} = 1$
$(a-2b)^2 = 3c + d^2$	$(a-2b)^2 = 3c + d^2$	$(a-2b)^2 = 3c + d^2$
$(a-2b) = \sqrt{3c+d^2}$	$3c + d^2 = (a-2b)^2$	$3c + d^2 = (a-2b)^2$
$-2b = \sqrt{3c+d^2} - a$	$3c = (a-2b)^2 - d^2$	$d^2 = (a-2b)^2 - 3c$
$b = \frac{a-\sqrt{3c+d^2}}{2}$	$c = \frac{(a-2b)^2-d^2}{3}$	$d = \sqrt{(a-2b)^2 - 3c}$

V této úloze jsme viděli, že úprava vztahu vede téměř vždy k racionálnímu lomenému výrazu, který je žáky chybně označován za „zlomek“. Ve zlomku jsou totiž pouze čísla. Proto musíme umět určit, pro které hodnoty proměnné je výraz definován, čili najít **definiční obor** výrazu (viz úloha 5)

Úloha 5:

Pro které hodnoty proměnné x má výraz $\frac{x+1}{x^2-x}$ smysl?

Řešení:

Protože jmenovatel nesmí být roven nule, vytkneme neznámou x a lépe poznáme, kdy by tato varianta mohla nastat:

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x+1}{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}.$$

Jmenovatel by byl roven nule, pokud se bude rovnat nule x, nebo člen v závorce. To znamená, že x se nesmí rovnat 0 nebo 1.

3.2 *Využití rovnic a nerovnic při řešení fyzikálních úloh*

Lineární rovnice a jejich soustavy jste se naučili řešit na základní škole. Některá pravidla jsem uvedl v předchozí kapitole, při studiu matematiky na gymnáziu si použití ekvivalentních úprav při řešení rovnic zopakujete. V této kapitole se chci věnovat takovým soustavám rovnic a nelineárním rovnicím, se kterými se budete celkem pravidelně setkávat ve fyzice. Důležité je matematický výsledek úlohy správně fyzikálně interpretovat.

Téměř všechny fyzikální úlohy vedou k řešení pomocí rovnice nebo soustavy rovnic. Výhoda takových úloh je v tom, že si můžete jednoduše udělat zkoušku dosazením kořene, tj. výsledku výpočtu, do zadání. Vyjde-li zkouška, ihned víte, že výpočet je **matematicky** správný. Výsledek ale musí být správný fyzikálně, vždy je třeba ho v odpovědi interpretovat.

3.2.1 Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice je každá rovnice s neznámou x, která se dá pomocí ekvivalentních úprav převést na tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde a je kvadratický člen, b je lineární člen a c absolutní člen. Pokud je kvadratický člen roven nule, rovnice přechází v rovnici lineární $bx + c = 0$.

Pokud je buď absolutní člen, nebo lineární člen roven nule, nemusíme rovnici řešit pomocí vzorce s diskriminantem, který má po úpravě tvar:

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, kde odmocnina $\sqrt{b^2 - 4ac}$ je diskriminant, ale vystačí nám vytýkání a rozklad na součin.

Žáci často řeší pomocí diskriminantu i neúplné kvadratické rovnice, což je zbytečné. Vytýkání a rozklad na součin jsou jednodušší.

Úloha 6:

V jaké výšce nad povrchem Země působí na těleso desetkrát menší gravitační síla než na povrchu Země?

$R_Z = 6378 \cdot 10^3$ m

$\frac{F_g}{F_g(h)} = \frac{10}{1}$

Řešení:

Podle Newtonova gravitačního zákona je velikost gravitační síly působící na těleso umístěné na povrchu Země:

$F_g = G\frac{mM_Z}{(R_Z)^2}$ a $F_g(h) = G\frac{mM_Z}{(R_Z+h)^2}$ ve výšce h nad povrchem.

Ze zadání vyplývá, že hodnota poměru mezi silami je rovna 10:

$\frac{F_g}{F_g(h)} = 10$ $\qquad$ $\frac{F_g}{F_g(h)} = \frac{G\frac{mM_Z}{(R_Z)^2}}{G\frac{mM_Z}{(R_Z+h)^2}} = \frac{\frac{1}{(R_Z)^2}}{\frac{1}{(R_Z+h)^2}} = \left(\frac{R_Z+h}{R_Z}\right)^2 = 10$

Nyní upravíme matematický výraz a obdržíme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme pomocí vzorce s diskriminantem:

$$\left(\frac{R_Z+h}{R_Z}\right)^2 = 10$$

$$h^2 + 2hR_z + R_Z^2 = 10R_Z^2$$

$$h^2 + 2hR_z - 9R_Z^2 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{-2R_Z \pm \sqrt{4R_Z^2 + 4 \cdot 9R_Z^2}}{2}$$

$$h_{1,2} = -R_Z \pm \sqrt{10}R_Z$$

$$h_1 = R_Z\left(\sqrt{10} - 1\right)$$

$$h_2 = -R_Z\left(\sqrt{10} - 1\right).$$

První řešení je číselně rovno h_1 = 7 953 km. Umístíme-li těleso do této výšky nad povrch Země, bude na něj působit desetkrát menší gravitační síla než na povrchu naší planety.

Druhé řešení je číselně rovno h_2 = -15 309 km. Vzdálenost od povrchu ale nikdy nemůže být záporná. Ani v případě, že bychom těleso umístili pod povrch Země. Proto má jen jedno řešení, i když matematicky existují řešení dvě.

3.2.2 *Lineární nerovnice*

Fyzikální úlohy řešené pomocí lineárních nerovnic vyžadují nejen správný výpočet, ale i úvahu. Obecně úlohy řešené pomocí lineárních nerovnic patří mezi jednoduché fyzikální úlohy; všechny „nástrahy" lineárních nerovnic, jak je znáte z matematiky, nebývají ve fyzice uplatněny.

Lineární nerovnice s neznámou x lze vždy po úpravě zapsat ve tvaru $ax + b > 0$, kde a a b jsou konstanty. Pro zápis jsem použil znaménko nerovnosti „je větší", ale v zápise může být i *„je menší", „je menší nebo rovno"* a nebo *„je větší nebo rovno"*.

Úloha 7:

Na dno válcové nádoby může působit tlak 50 kPa. Jakou kapalinu můžeme do nádoby nalít, jestliže její výška je 1 metr?

h = 1 m,   p = 50 kPa = $5 \cdot 10^4$ Pa, $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$\rho = ?\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Řešení:

V zadání úlohy je otázka, jakou kapalinu můžeme do nádoby nalít. V mechanice patří mezi nejzákladnější charakteristiky kapalin jejich hustota ρ.

Tlak, který působí na dno nádoby, je hydrostatický. Hydrostatický tlak je definován jako součin hustoty kapaliny, výšky kapaliny v nádobě a tíhového zrychlení:

$$p_{\mathrm{h}} = h\rho g.$$

Protože výšku kapaliny v nádobě a tíhové zrychlení měnit nemůžeme, je hustota kapaliny jediná proměnná na pravé straně rovnice. Hustota musí být maximálně taková, aby tlak na dno byl 50 kPa:

$\mathrm{p_h} > h\rho g$, takže:

$$\rho \leq \frac{p_h}{hg}$$

$$\{\rho\} \leq \frac{5 \cdot 10^4}{1 \cdot 9{,}81}$$

$$\rho \leq 5\,096{,}84\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Do nádoby můžeme až po okraj nalít kapaliny, jejichž hustota je menší než $5\,096{,}84\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, tj. například vodu a líh, ale ne rtuť.

3.2.3 *Soustavy rovnic*

Při řešení fyzikálních úloh se nám často stane, že úlohu budeme řešit s použitím správného vztahu, ale budeme mít více neznámých, v takových případech musíme využít i další vztahy popisující danou situaci.

Z pohledu matematiky se jedná o řešení úlohy pomocí soustavy rovnic. Soustava dvou **lineárních rovnic** o dvou neznámých se vždy dá převést do tvaru:

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0,$$

kde *a, b, c,* a *d* jsou konstanty.

Nejjednodušší je vyjádřit jednu z neznámých z jedné rovnice a dosadit upravený výraz do druhé rovnice. Obecně je jedno, ze které rovnice a kterou neznámou vyjádříme. V praxi si vybírejte takový postup, který je z hlediska výpočtu nejsnazší. Popsaná úprava odpovídá **dosazovací metodě řešení soustavy rovnic.**

Budou-li se rovnat pravé strany rovnic, musí se rovnat i levé strany. Zapište je proto do rovnosti a využijte tak **metody srovnávací.**

Třetí výpočtová metoda řešení soustavy rovnic je **metoda odčítací**. Jak název napovídá, odčítáme od sebe levé a pravé strany rovnic.

Ve složitějších případech se využívá některá z metod řešení soustavy rovnic v kombinaci s dalšími algebraickými postupy. Často se dělí pravé a levé strany rovnic nebo se od sebe odečítají. Zvolit nejvýhodnější postup může být obtížné a často závisí na zkušenostech.

U soustav lineárních i nelineárních rovnic musí vždy platit, že všechny fyzikálně správné postupy řešení, ve kterých nejsou výpočtové chyby, musí vést ke správnému výsledku. Popis rozvětveného obvodu pomocí Kirchhoffových zákonů je pro učitele vždy „lahůdka“. Někdy se stane, že u patnácti žáků musí prověřit správnost deseti různých postupů. Všechny mohou být správné.

Úloha 8:

Těleso se pohybovalo na začátku pohybu rychlostí 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a rovnoměrně zrychlilo na 25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ při konstantním zrchlení 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Jakou dráhu při zrychlování urazilo?

$v_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$a = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

s = ? m

Řešení:

Rovnoměrně zrychlený pohyb popisují vztahy pro dráhu a rychlost:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

$$v = v_0 + at,$$

Kde t je čas, v_0 je počáteční dráha a a je zrychlení. V této soustavě rovnic jsou neznámé čas t a dráha s. Mnoho žáků nejprve čas vyjádří číselně a číslo dosadí do rovnice dráhy. Fyzikálně korektnější je ale vyjádřit čas z druhé rovnice obecně a tento výraz dosadit do rovnice první:

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$s = \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right).$$

Číselně:

$$\{s\} = \frac{1}{2}(625 - 100)$$

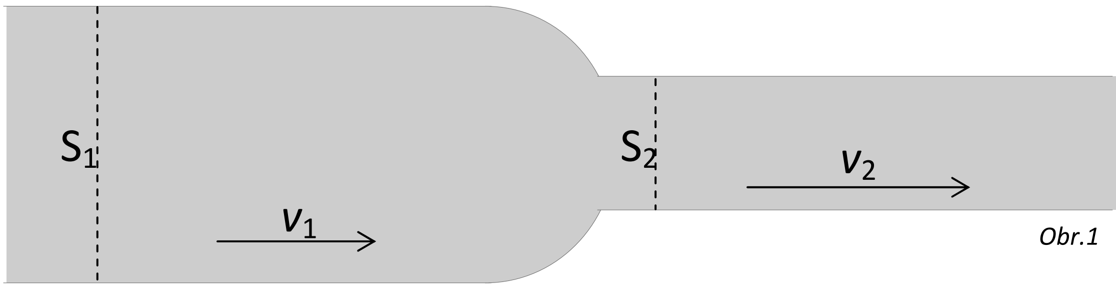
$$s = 262{,}5 \text{ m.}$$

O správnosti výpočtu se můžeme přesvědčit jednoduchým dosazením do vztahů.

Některé fyzikální veličiny mohou být ve vztahu uvedeny i ve vyšší mocnině (například rychlost u nerovnoměrných pohybů), řešíme ve fyzice i **soustavy nelineárních rovnic.** Nejčastěji budete pracovat s jedním nelineárním vztahem a jedním nebo několika pomocnými lineárními vztahy. Proto neznámé z nich vyjádřete a dosaďte do „*hlavního*“ vztahu (viz úloha 9).

Úloha 9:

Ve vodovodu o plošném obsahu 4 dm^2 proudí voda rychlostí 2 $m \cdot s^{-1}$ při tlaku 150 kPa. Určete rychlost a tlak vody v zúženém průřezu o obsahu 90 cm^2.



Obr.1

$S_1 = 4\ dm^2 = 0{,}04\ m^2$

$S_2 = 90\ cm^2 = 9 \cdot 10^{-3}\ m^2$

$v_1 = 2\ m \cdot s^{-1}$

$p_1 = 150\ kPa = 15 \cdot 10^4\ Pa$

$v_2 = ?\ m \cdot s^{-1}$

$p_2 = ?\ Pa$

Uvedená úloha charakterizuje hydromechaniku, tj. mechaniku kapalin. Proudící kapalinu v ní popisujeme pomocí Bernoulliovy rovnice, která vyjadřuje zákon zachování energie pro proudící kapalinu, a rovnice kontinuity (spojitosti toku). Jedinou jednoduchou metodou řešení této soustavy rovnic je vyjádřit z rovnice spojitosti rychlost v_2 v zúženém průřezu potrubí a dosadit ji do Bernoulliovy rovnice. Snažte se v podobných úlohách nejprve řešit obecně a číselné hodnoty dosazuje až do finálního vyjádření.

Řešení:

Bernoulliova rovnice: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$

Rovnice spojitosti toku: $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

Jak je uvedeno výše, do Bernoulliovy rovnice dosadíme vyjádření rychlosti v_2, kterou vypočítáme:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1 v_1}{S_2}\right)^2 + p_2$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1 v_1}{S_2}\right)^2$$

$$p_2 = 112{,}5\ \mathrm{kPa}$$

Rychlost v_2 můžeme dopočítat z Bernoulliovy rovnice i z rovnice spojitosti; respektive můžeme správnost výpočtu ověřit:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \qquad S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 - p_2 \qquad v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

$$v_2^2 = \frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 - p_2\right) \qquad \{v_2\} = \frac{0{,}04\cdot 2}{9\cdot 10^{-3}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 - p_2\right)} \qquad v_2 = 8{,}9\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

$$\{v_2\} = \sqrt{\frac{2}{1000}\left(\frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 2^2 + 150000 - 112500\right)}$$

$$v_2 = 8{,}9\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Tlak v zúžené části trubice je 112,5 kPa a rychlost 8,9 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

3.2.4 *Exponenciální a logaritmické rovnice*

Při řešení fyzikálních úloh nevystačíte pouze se znalostí lineárních a kvadratických rovnic. Postupně se od druhého ročníku budete seznamovat i s dalšími typy rovnic. Pomocí dekadického logaritmu je v akustice popsána hladina intenzity zvuku v závislosti na intenzitě zvuku nebo v astrofyzice tzv. Pogsonova rovnice umožňující klasifikaci hvězdných magnitud. Aktivita zářiče ve fyzice mikrosvěta je zase exponenciální funkce. Exponenciální je i závislost náboje a napětí kondenzátoru na čase. V praxi se využívá i přirozený logaritmus, jehož základem je Eulerovo číslo; e ≐ 2,71.

S úlohami řešenými pomocí složitějších matematických operací se setkáme až ve druhém a vyšších ročnících gymnázia. Nejprve se musíme seznámit s potřebným matematickým aparátem, který následně využijete v praxi ve fyzice. Např. logaritmy se studují v matematice na gymnáziích ve druhém ročníku.

Úloha 10:

Hladina intenzity zvuku tikajících hodinek je asi 20 dB. Motorová vozidla vydávají hladinu intenzity zvuku okolo 90 dB. Jaké zvýšení intenzity zvuku odpovídá zvýšení hladiny intenzity zvuku z 20 dB na 90 dB?

$L_1 = 20\ \mathrm{dB}$

$L_2 = 90\ \mathrm{dB}$

$I_0 = 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

$I_1 : I_2 = ?$

Hladina intenzity zvuku L má jednotku decibel (zkratka dB). Ucho je citlivější při nižších intenzitách zvuku, kdy i malé změny dokáže relativně přesně rozpoznat. Je proto výhodnější používat tzv. logaritmickou stupnici. Následující bod logaritmické stupnice se od předcházejícího liší v mocnině. Nezapisujeme např. na osu *y* hodnoty 0, 1, 2, ... ale 10^0, 10^1, 10^2, ... což odpovídá 1, 10, 100, ...).

Platí vztah $L = 10\log\frac{I}{I_0}$, kde I je intenzita zvuku a $I_0 = 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

Řešení:

Určíme obě intenzity zvuku a vypočítáme poměr těchto hodnot:

$L_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0} \Rightarrow 10^{\frac{L_1}{10}} = \frac{I_1}{I_0},$ $L_2 = 10\log\frac{I_2}{I_0} \Rightarrow 10^{\frac{L_2}{10}} = \frac{I_2}{I_0},$

$I_1 = I_0 10^{\frac{L_1}{10}}$ $I_2 = I_0 10^{\frac{L_2}{10}}$

$\{I_1\} = 10^{-12} \cdot 10^2$ $\{I_2\} = 10^{-12} \cdot 10^9$

$I_1 = 10^{-10}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ $I_2 = 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Neznámá ve výpočtu bude poměr intenzit hlasitosti, pro který platí $\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}$. Obě strany rovnice logaritmuje a zároveň vynásobíme 10 dB.

$$(10d\mathrm{B})\log\frac{I_2}{I_1} = (10dB)\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}$$

$$(10d\mathrm{B})\log\frac{I_2}{I_1} = (10dB)\log\frac{I_2}{I_0} - (10dB)\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$(10d\mathrm{B})\log\frac{I_2}{I_1} = 70\mathrm{dB}$$

$$\log\frac{I_2}{I_1} = 7$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^7$$

Při změně hladiny intenzity zvuku o 3,5 násobek se změní intenzita zvuku 10 000 000 krát.

3.2.5 *Goniometrické rovnice*

V některých typech úloh se neobejdeme bez znalostí goniometrických funkcí a rovnic. Typickým příkladem jsou úlohy na kmitání, vlnění a střídavé elektrické veličiny. V praxi se nejčastěji používají funkce sinus, cosinus a tangens. Toto učivo se obvykle probírá od druhého ročníku výše.

Úloha 11:

Ve kterých okamžicích je kinetická energie kmitajícího bodu rovna jeho potenciální energii?

Okamžitá výchylka kmitajícího bodu je: $y = A \sin \omega t$

Této výchylce odpovídá potenciální energie:

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m \Rightarrow \quad E_p = \frac{1}{2}\omega^2 m y^2 = \frac{1}{2}\omega^2 m A^2 \sin^2 \omega t$$

Okamžitá rychlost bodu je: $v = A\omega \cdot \cos \omega t$

Této rychlosti odpovídá kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$

Obě energie se mají rovnat:

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}\omega^2 m A^2 \sin^2 \omega t$$

$$\cos^2 \omega t = \sin^2 \omega t$$

$$\frac{\sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = 1$$

$$\tan^2 \omega t = 1 \Rightarrow \tan \omega t = \pm 1$$

$$\tan \omega t = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad t = (1 + 4k)\frac{T}{8}$$

$$\tan \omega t = -1 \Rightarrow \omega t = \frac{3\pi}{4} + k\pi \qquad t = (3 + 4k)\frac{T}{8}$$

pro $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

V časech $t = (1 + 4k)\frac{T}{8}$ a $t = (3 + 4k)\frac{T}{8}$ je kinetická energie kmitajícího bodu rovna jeho potenciální energii.

3.3 *Diferenciální a integrální počet ve fyzice*

Pomocí derivací a integrálů lze vypočítat většinu fyzikálních úloh, ale na středních školách se diferenciální a integrální počet učí v matematice až ve čtvrtém ročníku. Studenti tedy mají možnost využít tyto znalosti až ve výběrových seminářích čtvrtého ročníku.

3.3.1 *Diferenciální počet*

Využívá se u příkladů, ve kterých neznáme celkový průběh daného děje, ale pouze časové či jiné přírůstky. Tabulka č.3 obsahuje základní přehled vztahů mezi elementárními funkcemi a jejich derivacemi.

$f\colon y = f(x)$	*derivace*	$f\colon y = f(x)$	*derivace*	$f\colon y = f(x)$	*derivace*
$y = c$	$y = 0$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{arccotg} x$	$y = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$y = c.x$	$y = c$	$y = \operatorname{cotg} x$	$y = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = e^x$	$y = e^x$
$y = x^n$	$y = n.x^{n-1}$	$y = \arcsin x$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = a^x$	$y = a^x.\ln a$
$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \arccos x$	$y = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \ln x$	$y = \dfrac{1}{x}$
$y = \cos x$	$y = -\sin x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \log_a x$	$y = \dfrac{1}{x \ln a}$

tab.3

Vztahy pro počítání s derivacemi:

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f \cdot g)' = f'g + g'f \qquad (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'(g) \cdot g'(x)$$

Úloha 12:

Najděte rychlost a zrychlení v čase $t = \frac{T}{4}$ u pohybu harmonického daného rovnicí:

$$y = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Okamžitou rychlost můžeme vyjádřit jako derivaci polohy podle času:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} A \sin \frac{2\pi}{T} t = A \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{T} t \right) \cdot \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot A}{T} \left(\cos \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} \right) = \frac{2\pi \cdot A}{T} \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

Rychlost v daném čase je rovna 0, protože $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Zbývá nám už jen zrychlení a to se vyjádří jako derivace rychlosti podle času:

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi \cdot A}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t \right) = \frac{2\pi \cdot A}{T} \left(- \sin \frac{2\pi}{T} t \right) \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot A}{T^2} \left(- \sin \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} \right) = - \frac{4\pi^2 \cdot A}{T^2}$$

Rychlost a zrychlení v čase $t = \frac{T}{4}$ u našeho pohybu je $v = 0$ a $a = - \frac{4\pi^2 \cdot A}{T^2}$.

3.3.2 *Integrální počet*

Pod pojmem *integrál* budeme rozumět součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin – diferenciálů (při tomto popisu musíme ovšem brát v úvahu, že změny musí na sebe navazovat). Pro lepší pochopení si představme např. úsečku, kterou rozdělíme teoreticky na nekonečně velký počet nekonečně malých úseků. Je jasné, že součet délek těchto úseček dává přesně délku celé původní úsečky. Toto je vlastně příklad, v němž součet nekonečného počtu nekonečně malých veličin má konečnou hodnotu. V tabulce č.4 jsou sepsány základní vztahy mezi funkcemi a jejich primitivními funkcemi.

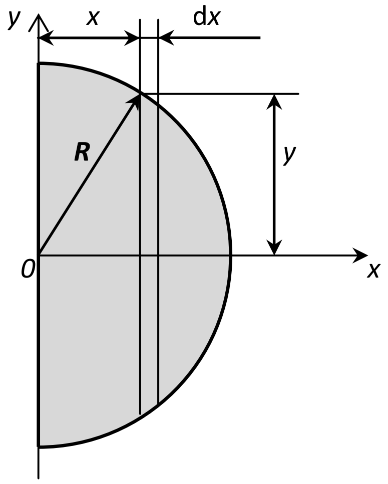
$f: y = f(x)$	Primitivní funkce	$f: y = f(x)$	Primitivní funkce
$y = x^n$	$y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$y = \tan x$	$y = -\ln\lvert\cos x\rvert$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln\lvert x\rvert$	$y = \cot x$	$y = \ln\lvert\sin x\rvert$
$y = e^x$	$y = e^x$	$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan x$
$y = a^x$	$y = \dfrac{a^x}{\ln a}$	$y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = -\cot x$
$y = \sin x$	$y = -\cos x$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$y = \sin x$	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan x$

tab.4

Chceme-li vypočítat nějaký integrál, porovnáme jej s těmito vzorci. Pokud se ukáže, že je totožný s jedním z nich, je integrál vypočten. Není-li daný integrál totožný s žádným ze základních vzorců, pokusíme se ho převést různými transformacemi na jeden z nich. Metody převedení integrálu na jeden ze základních jsou obecně velmi složité a vyžadují určitou obratnost, kterou lze získat pouze praxí.

Úloha 13:

Určete polohu těžiště půlkruhu o poloměru *R* znázorněného na obr. 2.



obr.2

Obsah půlkruhu je dán vztahem: $S = \frac{\pi R^2}{2}$

Polohu těžiště půlkruhu určíme užitím vztahu:

$$x_T = \frac{1}{S}\int_0^R x \, \mathrm{d}S,$$

kam za dS dosadíme $\mathrm{d}S = 2y\mathrm{d}x = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Po dosazení dostaneme:

$$x_T = \frac{2}{S}\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

Tento integrál vyřešíme pomocí substituce

$t = R^2 - x^2$, potom dt = -2x dx

Nesmíme také zapomenout na změnu mezí. Po provedení substituce dostaneme:

$$x_T = -\frac{2}{\pi R^2}\int_{R^2}^0 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{R^2} = \frac{4}{3\pi}R$$

Poloha těžiště půlkruhu je $x_T = \frac{4}{3\pi}R$.

4 GRAFY A TABULKY VE FYZIKÁLNÍCH ÚLOHÁCH

Zpracování úlohy v podobě grafů a diagramů patří ve fyzice mezi často používané metody. Některé úlohy jsou grafem přímo zadány, u jiných je graf nedílnou součástí postupu nebo řešení.

Grafy, se kterými se setkáváme v matematice, jsou ve své podstatě stejné jako grafy fyzikální. Pokud si to uvědomíme, předejdeme mnoha problémům. V matematice se učíme přesně znázornit průběh funkce; ve fyzice musíme umět průběh funkce popsat slovy.

4.1 *Grafy v zadání úloh*

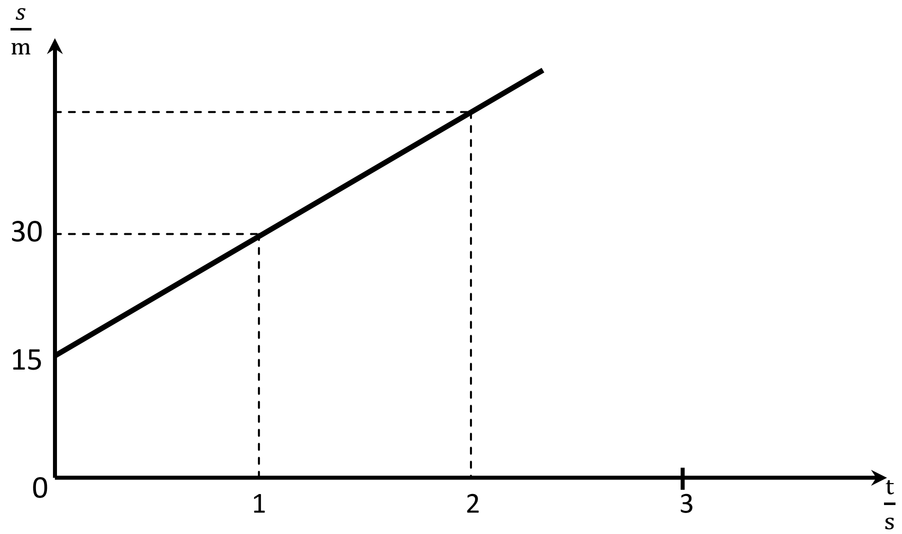
Úloha 13:

Rovnoměrný přímočarý pohyb tělesa je znázorněn na grafu č.1.

Určete: a) dráhu, kterou těleso urazí za 4s

b) rychlost tělesa

c) za jak dlouho těleso urazí 150m



Graf č.1

Jednotlivé úkoly nemusíme řešit ve stejném pořadí, ve kterém jsou zadány:

ad b) Rychlost rovnoměrně přímočarého pohybu *v* je definována jako dráha *s*, kterou těleso urazí za určitý čas *t*. Neznáme celkouvou dráhu ani celkový čas, ale z grafu můžeme určit, že za první sekundu těleso urazilo patnáct metrů, protože na začátku měření bylo od pozorovatele vzdáleno patnáct metrů a za jednu sekundu už třicet metrů:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow \{v\} = \frac{15}{1}$$

$$v = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ad a) Dráhu můžeme vyjádřit z definičního vztahu pro rychlost:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = vt$$

$$s = 60 \text{ m}$$

ad c) Také čas můžeme vyjádřit ze stejného vztahu:

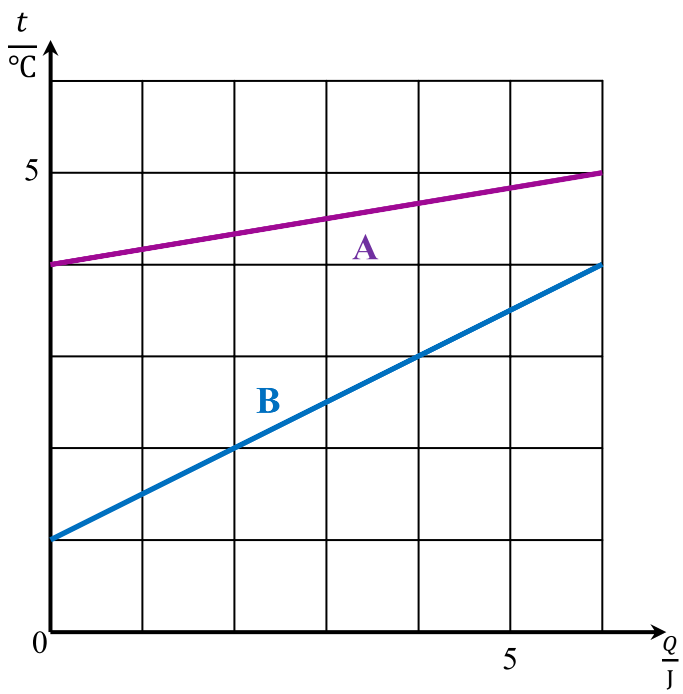
$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

Těleso se pohybovalo rychlostí 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; za čtyři sekundy urazilo 60 metrů

Úloha 14:

Na grafu č.2 je zobrazena závislost teploty dvou těles na přijímaném teple. Hmotnost obou těles je 60 gramů. Určete počáteční a koncové teploty těles. Určete měrné tepelné kapacity látek, z nichž jsou tělesa A a B zhotovena.



Graf č.2

Pro práci s grafy je důležité umět je „číst“: Na vodorovné ose (osa x) je zobrazeno teplo, které tělesa A a B přijímají. Vidíme, že počátek odpovídá přijatému teplu 0 J a jeden dílek znamená přijetí tepla 1 J. Hodnoty na svislé ose (osa y) udávají změnu teploty. Z grafu vyplývá, že počátek odpovídá 0 ºC a jeden dílek je 1 ºC.

Grafy funkcí jsou znázorněny jako dvě úsečky. To znamená, že závislosti jsou lineární a dají se matemticky obecně zapsat rovnicí $y = ax + b$, kde a a b jsou konstanty.

Nejprve určíme z grafu počáteční a koncové teploty. Musíme tedy najít ypsilonové souřadnice koncových bodů obou úseček. Graf tělesa A začíná v bodě, kterému odpovídá teplota $t_{0A} = 4$°C; koncovému bodu odpovídá teplota $t_A = 5$°C. Těleso A bylo zahřáto o 1 ºC.

Počáteční teplota tělesa B je $t_{0B} = 1$°C; koncová $t_B = 4$°C. Těleso B se ohřálo o 3 ºC. Abychom mohli vypočítat měrné tepelné kapacity, musíme znát i velikost přijímaného tepla. V obou případech je Q = 6 J. Protože teplo můžeme v termodynamice vypočítat pomocí vztahu $Q = mc\Delta t$, měrné tepelné kapacity těles jsou:

$$c_\mathrm{A} = \frac{Q_\mathrm{A}}{m\Delta t_\mathrm{A}} \Rightarrow \{c_\mathrm{A}\} = \frac{6}{0{,}06\cdot 1}; c_\mathrm{A} = 100\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}}.$$

$$c_\mathrm{B} = \frac{Q_\mathrm{B}}{m\Delta t_\mathrm{B}} \Rightarrow \{c_\mathrm{B}\} = \frac{6}{0{,}06\cdot 3}; c_\mathrm{B} = 33{,}3\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}}.$$

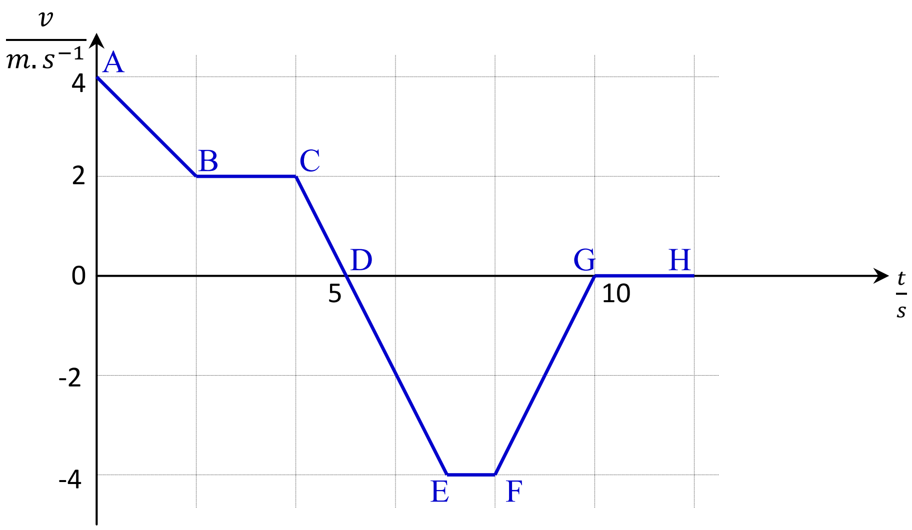
Měrné tepelné kapacity jsou $c_\mathrm{A} = 100\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}}$ a $c_\mathrm{B} = 33{,}3\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}}$.

Úloha 15:

Graf č.3 popisuje průběh rychlosti hmotného bodu na čase. Hmotný bod se pohyboval podél vodorovné osy x.

a) Kdy byl hmotný bod v klidu?
b) Kdy se hmotný bod pohyboval rovnoměrně? Jakou dráhu a jakým směrem při tom urazil v jednotlivých intervalech?
c) Kdy měla velikost rychlosti maximální hodnotu?
d) Kdy měla velikost zrychlení nejmenší nenulovou hodnotu a jaká to byla hodnota?
e) Jakou dráhu a jakým směrem urazil hmotný bod v jednotlivých intervalech pohybu, když byl pohyb nerovnoměrný?
f) Kde se hmotný bod nacházel v čase t = 12 s ?

g) Jakou celkovou dráhu (bez ohledu na směr) bod urazil během celé doby svého pohybu?



Graf č.3

Řešení:

ad a) z grafu můžeme vyčíst, že hmotný bod se nejprve vzdaloval od počátku (A → D), pak se k počátku vracel (D → G) a pak stál na místě (G → H). Tedy v klidu byl jistě v úseku G → H a pak ještě v bodě D, kde měnil směr pohybu.

ad b) rovnoměrný pohyb znamená, že se rychlost hmotného bodu nemění, to je v úsecích B → C, E → F. Dráhu pohybu rovnoměrného přímočarého udává vztah $s = v \cdot t$

$v_{BC} = 2\ \mathrm{m.s^{-1}}$ $t_{BC} = 2\ \mathrm{s}$ $s_{BC} = 4\ \mathrm{m}$ směrem od počátku

$v_{EF} = 4\ \mathrm{m.s^{-1}}$ $t_{EF} = 1\ \mathrm{s}$ $s_{EF} = 4\ \mathrm{m}$ opačným směrem

ad c) maximální rychlostí se hmotný bod pohybuje v bodě A a v úseku E → F. V obou případech měla velikost rychlosti hodnotu $v = 4\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

ad d) velikost zrychlení byla nejmenší (nenulová) v prvním úseku A → B. Tam se rychlost měnila pomaleji než v jiných úsecích. Rovnoměrnné zrychlení definujeme jako změnu rychlosti za čas, tedy $a_{AB} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, rychlost se zmenšila o 2 $\mathrm{m.s^{-1}}$ během času 2 s. Výsledné zrychlení je $a_{AB} = -1\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Vyšlo záporné, jedná se tedy o zpomalení.

ad e) dráha rovnoměrně zrychleného pohybu se počítá podle vztahu $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$, dráha rovnoměrného pohybu podle vztahu $s = vt$

A → B – zrychlený pohyb, počítáme tedy podle prvního vztahu

$s_{AB} = \frac{1}{2}a_{AB}t_{AB}^2 + v_0t_{AB} + s_0,$ $\quad a_{AB} = -1\ \mathrm{m.s^{-2}}, t_{AB} = 2\ \mathrm{s}, v_0 = 4\ \mathrm{m.s^{-1}},$

$s_0 = 0\ \mathrm{m}$

Po dosazení:

$s_{AB} = 6\ \mathrm{m}$

B → C – máme už spočítané z b)

$s_{BC} = 4\ \mathrm{m}$

C → D – obdobně jako v úseku A → B

$s_{CD} = 1\ \mathrm{m}$

D → E – opět stejný vztah

$s_{DE} = 4\ \mathrm{m}$

E → F – máme spočítane z b)

$s_{EF} = 4\ \mathrm{m}$

F → G – opět stejný vztah jako v prvním úseku

$s_{FG} = 4\ \mathrm{m}$

G → H – hmotný bod je v klidu

$s_{GH} = 0\ \mathrm{m}$

ad f) polohu v čase t = 12 s určíme tak, že od dráhy z úseku A → D odečteme dráhu úseku D → H.

$$s_{AD} - s_{DH} = -1 \text{ m},$$

hmotný bod se tedy nachází 1 m před polohou v čase 0 s.

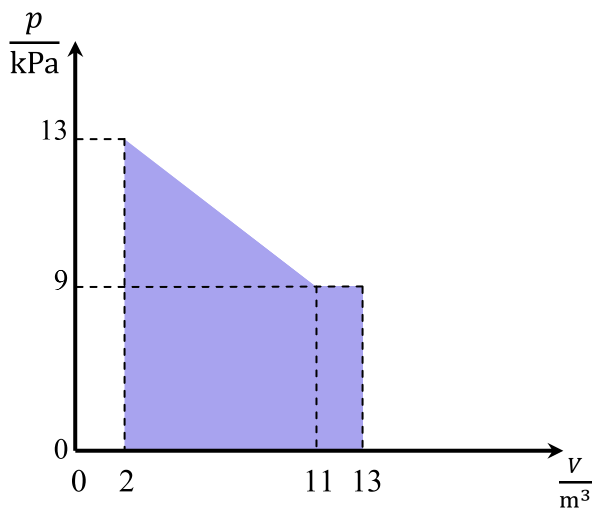
ad g) celkovou dráhu (bez ohledu na směr) spočítáme součtem drah ze všech úseků

$$s_{AH} = 23 \text{ m}$$

Pozn. V tomto případě se nám celková dráha zobrazila jako obsah plochy mezi křivkou a osou x.

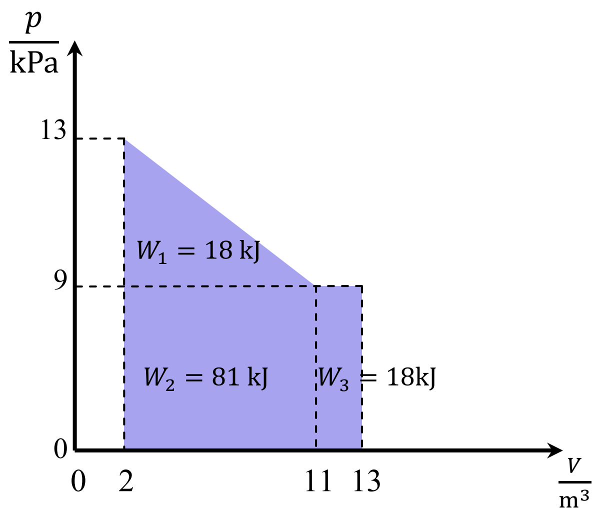
Úloha 16:

Na grafu č.4a je znázorněna změna tlaku vzduchu při změně jeho ojemu. Jakou mechanickou práci vzduch při popsaném ději vykonal?



Graf č.4a

Všechny potřebné údaje jsou zadány v grafu a ne v textu úlohy. Protože práce plynu číselně odpovídá obsahu vybarvené plochy, je řešení úlohy mnohem jednodušší, než by se mohlo podle teoretických poznatků zdát. Plochu lze rozdělil na několik částí – trojúhelník a dva obdélníky – a jejich obsahy sečíst.



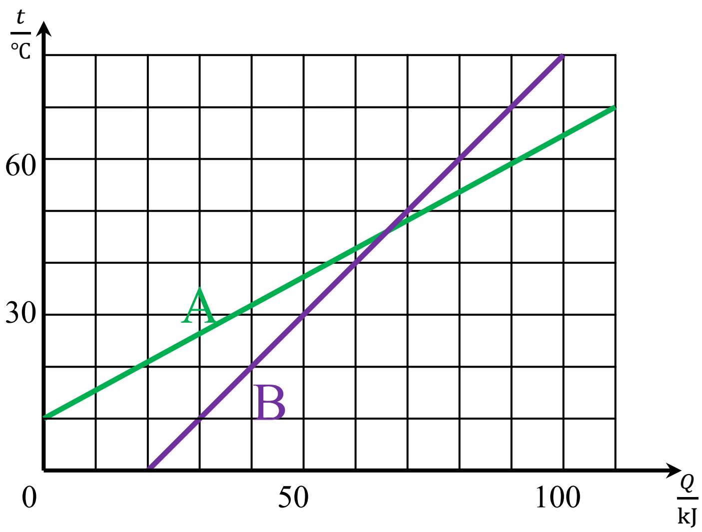
Graf č.4b

Práce plynu je při konstantním tlaku definována vztahem $W = p\Delta V$, při proměnlivém tlaku by se muselo integrovat. Z obou případů ale vyplývá, že **práce plynu je číselně rovna obsahu plochy pod křivkou** na pracovním diagramu.

Práce vykonaná plynem je 117 kJ.

Pozn.: graf č.5 vyjadřující změnu teploty jako funkci tepla přijatého těmito tělesy.

Pozor! Grafy vyjadřující závislost změny teploty těles na přijatém teple nevycházejí z počátku.



Graf č.5

$$Q = cm\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{Q}{cm} \quad c = \frac{Q}{m\Delta t}$$

Pozn.: pro *m* rovno 1 kg

4.2 *Úlohy řešené pomocí grafu*

Méně zkušení žáci by měli při řešení fyzikálních úloh maximálně používat grafy, nákresy, schémata a obrázky. Uvědomí si při tom mnoho souvislostí, které z psaného textu nemusí ihned vyplývat. S přibívajícími zkušenostmi nutnost kreslení grafů a obrázků mizí.

Při studiu fyziky se často setkáváme i s úlohami, ve kterých je grafické znázornění některých fyzikálních veličin přímo řešením některého dílčího úkolu (viz úloha 17).

Úloha 17:

Těleso se pohybovalo tři čtvrtiny hodiny rychlostí 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, potom 30 minut rychlostí 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a nakonec 0,25 h stálo. Nakreslete a) graf závislosti dráhy na čase, b) graf závislosti rychlosti na čase. Určete průměrnou rychlost.

$t_1 = 0{,}75\ \mathrm{hod} = 2700\ \mathrm{s}$ $\qquad$ $v_1 = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t_2 = 30\ \mathrm{min} = 1800\ \mathrm{s}$ $\qquad$ $v_2 = 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 12{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t_3 = 0{,}25\ \mathrm{hod} = 900\ \mathrm{s}$ $\qquad$ $v_3 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_\mathrm{p} = ?$

Čas zakreslujeme v grafu dráhy i rychlosti vždy na osu x. K ose je nutno připsat značku času *t* a značku jednotky. Za jednotku času si můžeme zvolit sekundu, minutu nebo třeba hodinu. Nezapomeňme ale, že v různých úsecích je čas uveden v různých jednotkách, a proto musíme převádět všechny hodnoty na stejnou jednotku. Podobně je to s jednotkami rychlosti, respektive dráhy, které znázorňujeme na osu y. Pokud budou vaše výpočty správné, můžeme si zvolit jakékoliv jednotky a nemusíte pracovat jen s jednotkami základními.

Zvolte si vhodné měřítko. V této úloze by bylo hloupé přiřadit jedné sekundě na ose 1 cm nebo třeba decimetru 1 mm.

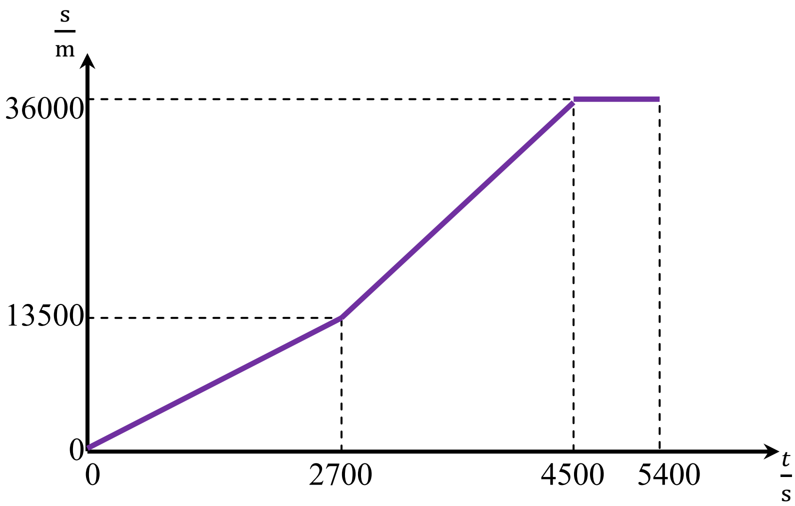
ad a) graf závislosti dráhy na čase popisuje délku trajektorie tělesa vzhledem k času. Nejprve vypočteme dráhy s_1, s_2 a s_3, které těleso v jednotlivých úsecích dráhy urazilo. Dráha rovnoměrného pohybu je definováno jako součin rychlosti a času: $s = vt$, proto:

$$s_1 = v_1 t_1; \;\; s_1 = 13500 \text{ m};$$

$$s_2 = v_2 t_2; \;\; s_2 = 22500 \text{ m};$$

$$s_3 = v_3 t_3; \;\; s_3 = 0 \text{ m}.$$

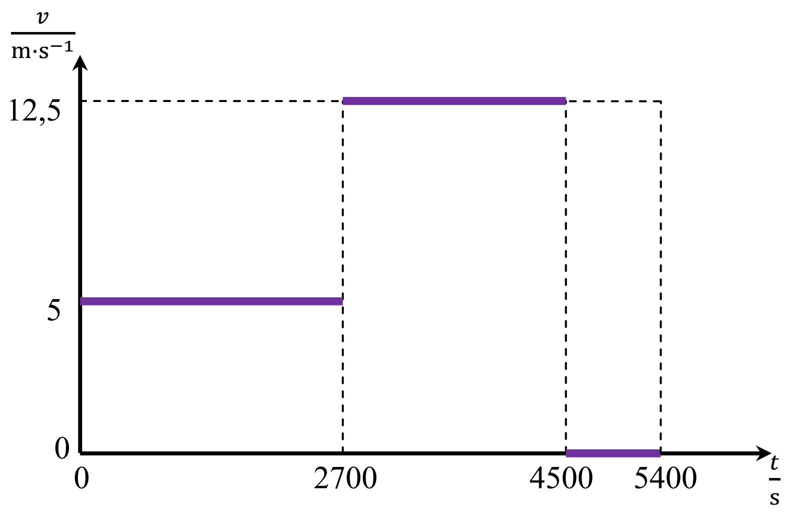
Protože celkový čas je 5400 s a celková dráha 36 000 m, můžeme si zvolit odpovídající měřítko grafu:



Graf č.6

Dráha rovnoměrného pohybu je vzhledem k času, jako proměnná, lineární funkce, kde konstantou úměrnosti je rychlost: $s = vt + s_0$. Grafem takové funkce je část přímky. V prvním úseku vychází z počátku, protože počáteční dráha s_0 je nulová. Ve druhém úseku už těleso urazilo dráhu s_1, a proto úsečka nesměřuje do počátku. Ve třetím úseku těleso stálo a dráha se nezvětšovala, byla konstantní. Grafem konstantní funkce je část přímky rovnoběžná s osou x.

ad b) graf závislosti rychlosti na čase sestrojíme podobně jako graf závislosti dráhy na čase. Potřebné hodnoty času a rychlosti v jednotlivých úsecích jsou uvedeny v zápise.



Graf č.7

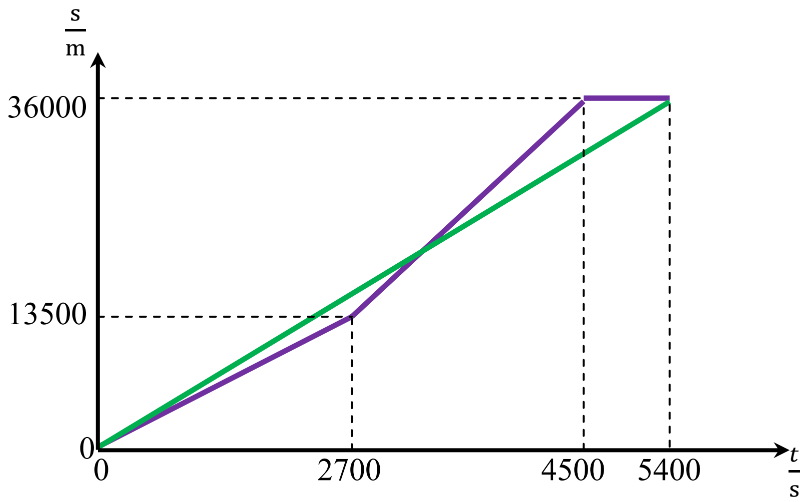
V jednotlivý úsecích se rychlost tělesa neměnila – byla konstantní. Proto jsou grafy úsečky rovnoběžné s osou x.

ad c) průměrná rychlost je podíl celkové dráhy a celkového času. Tyto hodnoty můžeme určit výpočtem nebo z grafu:

$$v_p = \frac{s}{t} \Rightarrow \{v_\mathrm{p}\} = \frac{36000}{5400}$$

$$v_p = 6{,}67\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Průměrná rychlost tělesa je 6,67 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.



Graf č.8

Pokud by se těleso celou dobu pohybovalo průměrnou rychlostí, muselo by urazit stejnou dráhu (viz dvě křivky na grafu č.8).

Úloha 18:

Hmotný bod zrychloval dvacet sekund z klidu, až dosáhl rychlosti 8 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, potom se pohyboval 15 sekund konstantní rychlostí. Nakreslete graf závislosti a) dráhy na čase, b) rychlosti na čase.

$v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_1 = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t_1 = 20\ \mathrm{s};\qquad s_1 = ?\ \mathrm{m}$

$t_2 = 15\ \mathrm{s};\qquad s_2 = ?\ \mathrm{m}$

První úsek dráhy urazil hmotný bod za 20 sekund a jeho rychlost se zvýšila za tuto dobu z nuly na osm metrů za sekundu. Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený, jehož rychlost a dráha jsou určeny vztahy:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Protože počáteční dráha a rychlost mají nulovou hodnotu, mužeme vztahy zapsat ve zjednodušeném tvaru:

$$v = at$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

Abychom mohli vypočítat dráhu, kterou hmotný bod urazil v prvním úseku, dosadíme vyjádření zrychlení ze vztahu pro rychlost do vztahu pro dráhu.

$$a = \frac{v_1}{t_1} \wedge s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1$$

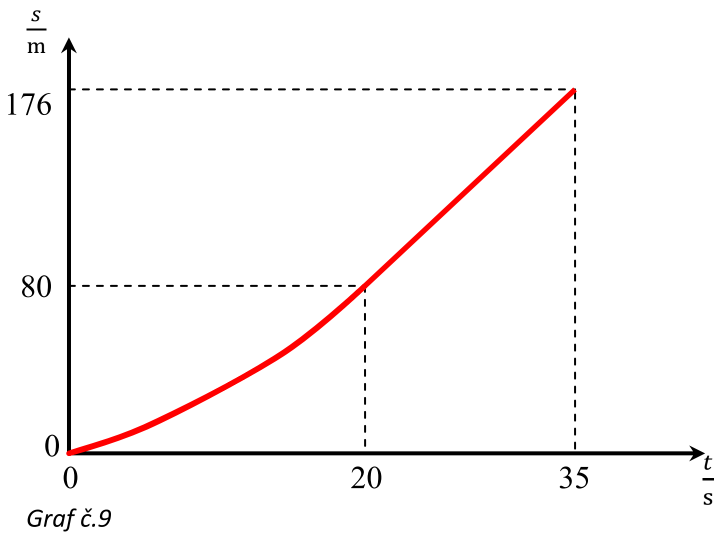
$$\{s_1\} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20$$

$$s_1 = 80 \text{ m}$$

Ve druhém úseku se hmotný bod pohyboval rovnoměrným pohybem rychlostí 8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ po dobu 12 s, takže urazil dráhu $s_2 = 96$ m.

Nyní známe všechny potřebné hodnoty a můžeme nakreslit hledané grafy:

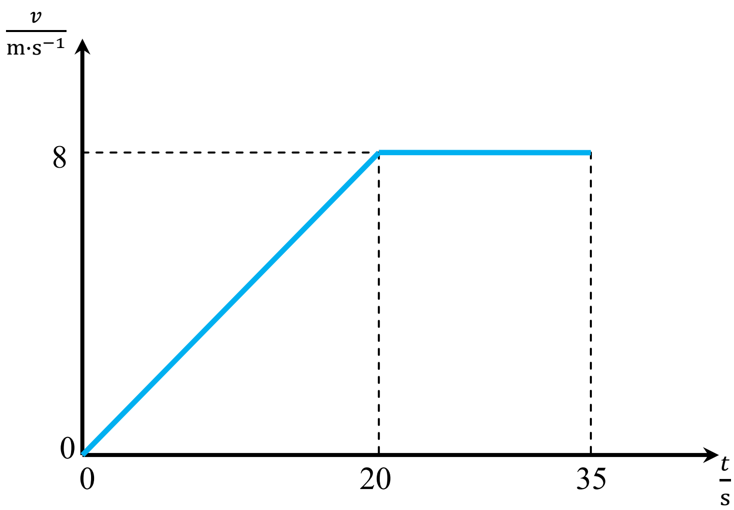
ad a) graf závislosti dráhy na čase:



Graf č.9

V prvním úseku se stává grafem část paraboly – závislost dráhy na čase je kvadratická; ve druhém úseku je grafem část přímky, závislost dráhy na čase je lineární.

ad b) graf závislosti rychlosti na čase:



Graf č.10

Úloha 19:

Jaké teplo musíme dodat 0,5 kg ledu o teplotě -5 ºC, aby roztál a voda následně vyvřela? Měrné skupenské teplo vypařování vody je 2,29 $\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je 334$\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$, měrná tepelná kapacita vody je 4200$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$, měrná tepelná kapacita ledu je 2100$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$.

$l_l = 334 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} = 334 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ $\quad$ $m = 0{,}5$ kg

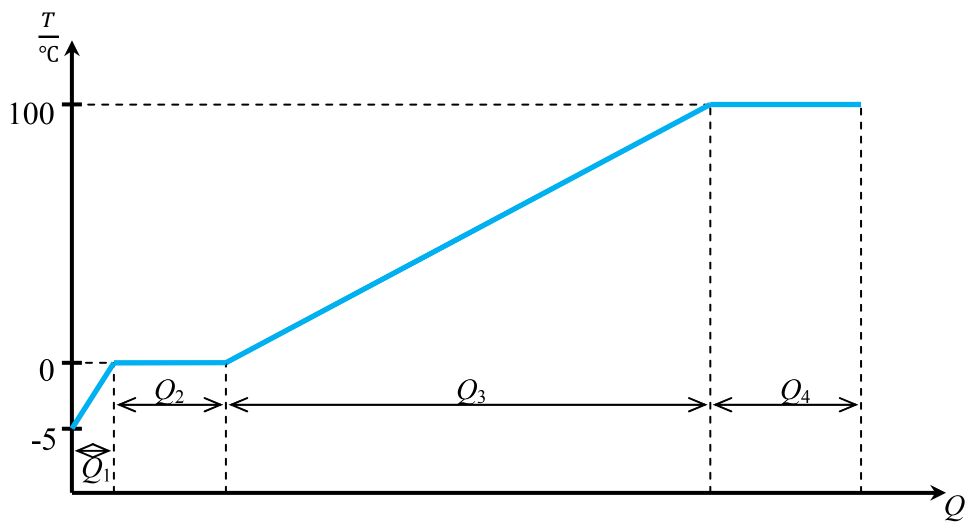
$l_v = 2{,}29 \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}} = 2{,}29 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ $\quad$ $t_1 = -5$ ºC

$c_1 = 2100 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$ $\quad$ $t_2 = 0$ ºC

$c_2 = 4180 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$ $\quad$ $t_3 = 100$ ºC

$Q = ?$ J

Řešení:



Graf č.11

Led bude postupně přijímat tyto části tepla: teplo Q_1 na ohřátí ledu na teplotu tání, skupenské teplo tání na změnu skupenství (led taje na vodu) Q_2, teplo Q_3 na ohřátí vzniklé vody na 100 ºC a skupenské teplo varu Q_4:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$Q = mc_1(t_2 - t_1) + ml_l + mc_2(t_3 - t_2) + ml_v$$

$$\{Q\} = 0{,}5 \cdot 2100 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 334 \cdot 10^3 + 0{,}5 \cdot 4180 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 2{,}29 \cdot 10^6$$

$$Q = 1{,}53 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$$

Ledu musíme dodat teplo 1,53 MJ.

V příkladech tohoto typu graf pomáhá uvědomit si, jaký děj probíhá a co se při tom děje.

4.3 Úlohy zadané tabulkou

Tabulky se využívyjí především v těch fyzikálních úlohách, ve kterých pracujeme se statisticky velkými soubory. Abychom nemuseli například sečítat stovky hodnot, zapíšeme je do několika intervalů a pracujeme s průměrnými hodnotami intervalů.

Součet velkého počtu hodnot se nazývá „*suma*“, značka $\sum$. Ve výšší matematice nahrazuje sumu integrování.

Druhou skupinou fyzikálních úloh, ve které se budete setkávat s tabulkami, je kinematika. Pohyb těles ja často vyjádřen tabulkou, která může sloužit jako pomůcka při vytváření grafu, nebo pro kontrolu jeho správnosti.

Nemyslitelné jsou laboratorní práce bez zápisu naměřených hodnot do tabulek. Naměřené hodnoty se dále zprácovávají (průměr, suma, modus, nejvyšší a nejnižší hodnota, ...) například pomocí programu MS Excel.

Úloha 20:

Určete střední kinetickou energii molekul kyslíku, jestliže rychlost molekul kyslíku studovaného souboru je popsán tabulkou:

Rychlos molekul $\frac{v}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$	Počet molekul $\frac{N}{\%}$
0 - 300	17
300 - 600	38
600 - 900	36
900 a více	9

tab.4

Střední kvadratická rychlost v_k se zavádí proto, abychom nemuseli počítat kinetickou energii všech částic zvlášť. Každá částice má jinou rychlost, má i jinou kinetickou energii. Proto je potřebné najít rychlost, kterou označujeme jako *střední kvadratická rychlost.* Kdyby ji totiž měly všechny částice systému, nezměnila by se jeho celková kinetická energie

E_k = ? J

T = ? K

Střední kinetická energie je popsána vztahem, kde v_k je střední kvadratická rychlost a m hmotnost molekuly:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{k}}^2$$

Střední kvadratickou rychlost musíme určit pomocí zadané tabulky. Najdeme ji z definice jako vážený průměr:

$$v_k^2 = N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2 + N_3 v_3^2 + N_4 v_4^2$$

$$\{v_k^2\} = 0{,}17 \cdot 150^2 + 0{,}38 \cdot 450^2 + 0{,}36 \cdot 750^2 + 0{,}09 \cdot 1050^2$$

$$v_k = 618{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Za rychlosti jsme dosadili průměrnou hodnotu v danném intervalu. Střední kvadratická rychlost je důležitá pro výpočet střední kinetické energie molekul kyslíku. Hmotnost systému m je součin relativní molekulové hmotnosti M_r a atomové hmotnostní jednotky m_u:

$E_k = \frac{1}{2} m v_k^2 \wedge m = M_r m_u$

$E_k = \frac{1}{2} M_r m_u v_k^2$

$E_k = \frac{1}{2} 16 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 618{,}5^2$

$E_k = 5{,}1 \cdot 10^{-21}\mathrm{J}$

Střední kinetická energie molekul kyslíku je $5{,}1 \cdot 10^{-21}\mathrm{J}$.

Úloha 21:

Model automobilu se při závodu rozjížděl od startovací čáry deset sekund rovnoměrně zrychleným pohybem. Doplňte tabulku:

t/s	0	2	4	6	8	10
s/m				3,6		
v/m.s^{-1}			0,8			
a/m.s^{-2}					0,2	

tab.5a

Dráha *s* a rychlost *v* rovnoměrně zrychleného pohybu jsou při nulové počáteční rychlosti popsány vztahy:

$s = \frac{1}{2} a t^2$; $v = at$, kde *a* je zrychlení a *t* čas.

Protože zrychlení *a* je při rovnoběžně zrychleném pohybu konstantní, můžeme do všech políček čtvrtého řádku tabulky napsat stejnou hodnotu, jaká je zapsaná pro čas *t* = 8 s:

t/s	0	2	4	6	8	10
s/m				3,6		
v/m.s^{-1}			0,8			
a/m.s^{-2}	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,2**

tab.5b

Pomocí vztahu pro rychlost (součin času a zrychlení) doplníme po jednoduchém výpočtu i hodnoty velikosti rychlosti.

t/s	0	2	4	6	8	10
s/m				3,6		
v/m.s^{-1}	**0**	**0,4**	**0,8***	**1,2**	**1,6**	**2,0**
a/m.s^{-2}	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

tab.5c

Podobně postupujeme při výpočtu dráhy, která je definovaná vztahem $s = \frac{1}{2}at^2$:

t/s	0	2	4	6	8	10
s/m	**0**	**0,4**	**1,6**	**3,6***	**6,4**	**10**
v/m.s^{-1}	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
a/m.s^{-2}	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

tab.5d

* tyto hodnoty byly v tabulce předepsány a zároveň jsou shodné s hodnotami vypočtenými. To dokazuje, že výpočet byl správný.

5 PRÁCE S VEKTORY A GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

Využívání obrázků a grafické rozbory jsou při řešení fyzikálních úloh běžné a často nutné. Neobejdete se bez základních znalostí planimetrie, tj. geometrie v rovině, jako jsou například práce s trojúhelníkem a s úhly, goniometrie a vektorové algebry.

Geometrie v prostoru se nazývá stereometrie. Ve fyzice se budete setkávat s trojúhelníky, čtyřúhelníky a úhly. Jistě víte, že úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé, co jsou vrcholové úhly a kdy jsou k sobě kolmé dvě roviny. Pokud ne, musíte základy stereometrie nejprve nastudovat.

Všechny fyzikální veličiny můžeme rozdělit na skalární a vektorové. U skalárních veličin, tzv. *skalárů*, nás zajímá pouze jejich velikost. Příkladem skalárních veličin je teplota, hmotnost, čas, teplo nebo elektrický odpor. Naproti tomu u vektorových veličin, tzv. *vektorů*, je nutné znát nejen jejich velikost, ale i směr, kterým působí, a působiště. Mezi vektorové fyzikální veličiny patří okamžitá rychlost, síla, hybnost, moment síly, elektrická intenzita a magnetická indukce.

Při práci se skaláry jsou výpočty jednoduché. Sčítáme-li dvě hmotnosti, jajich součet je vždy jasný. U vektorů ale nemusí platit, že „*jedna a jedna jsou vždy dvě*“. Jestliže gravitační síla působící na těleso má velikost 1 N a vy budete toto těleso zvedat ve svislém směru silou 1 N, bude výsledná síla působící na těleso nulová. Jedna a jedna skutečně nejsou dvě.

V této kapitole se seznámíme jen s nejzákladnějším uplatněním práce s vektory při řešení fyzikálních úloh. Tato problematika se studuje v průběhu celého prvního ročníku gymnázia a je detailně popsána v učebnicích mechaniky a v přehledech fyzikálních poznatků.

Vektorové veličiny můžeme sčítat, odčítat, násobit skalárem i vektorem. Vektor můžeme rovněž rozložit na jeho složky atd.

Studenti často mezi vektory řadí i elektrický proud a tlak. Je to dáno tím, že v souvislosti s těmito veličinami se o směru hovoří také. Jenomže směr elektrického proudu je omezen parametry obvodu a nedá se na něj aplikovat vektorová algebra. „*Směr*“

tlaku zase souvisí s působící tlakovou silou – například v kapalinách se šíří tlak vyvolaný vnější silou všemi směry. **Tlak a elektrický proud nejsou vektorové veličiny!**

Úloha 22:

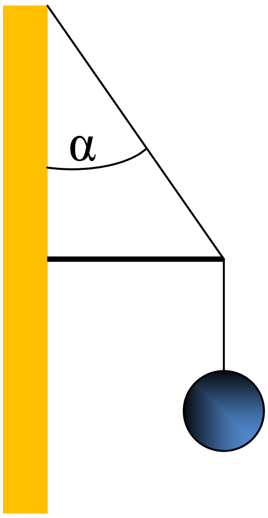
Těleso o hmotnosti 5 kg bylo zavěšeno u stěny pomocí vodorovného trámu. Lano svírá v místě nad trámem se svislou stěnou úhel 40º. Jakou silou je lano napínáno?

$m = 5$ kg

$\alpha = 40°$

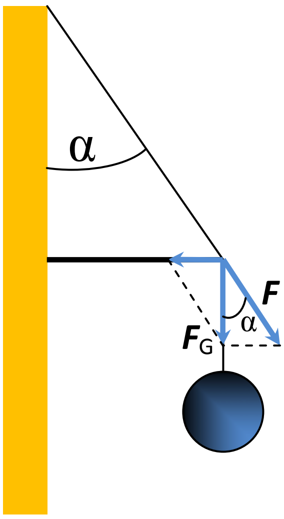
$F = ?$ N

$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$



Obr. č.3a

Při řešení fyzikální úlohy využiji rozklad vektoru na jeho vektorové složky. Těleso působí tíhovou silou na lano. V místě styku lana s trámkem musíme sílu rozložit na vodorovnou složku a složku ve směru lana nad trámkem (viz obrázek č.3b). Síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ svírají úhel α. Proto mohu velikost síly $\boldsymbol{F}$ vyjádřit pomocí goniometrické funkce cosinus:



Obr. č.3b

$$\cos\alpha = \frac{F_G}{F}$$

$$F = \frac{F_G}{\cos\alpha}$$

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} \qquad \{F\} = \frac{5\cdot 9{,}81}{\cos 40°}$$

$$F = 64\ \mathrm{N}.$$

Lano bylo v místech nad trámkem napínáno silou 64 N.

Přiložený CD ROM obsahuje model této úlohy v Cabri.

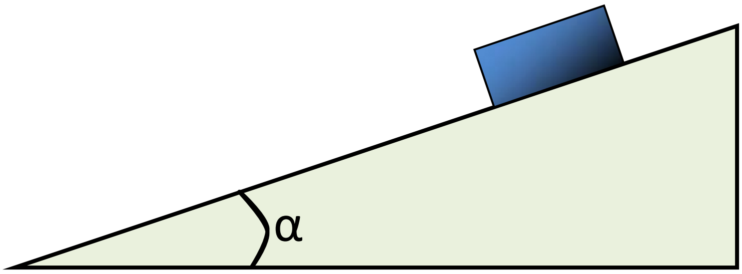
Úloha 23:

S jakým zrychlením se pohybovalo těleso, které bylo položeno na nakloněnou rovinu s úhlem 15 º?

$\alpha = 15°$

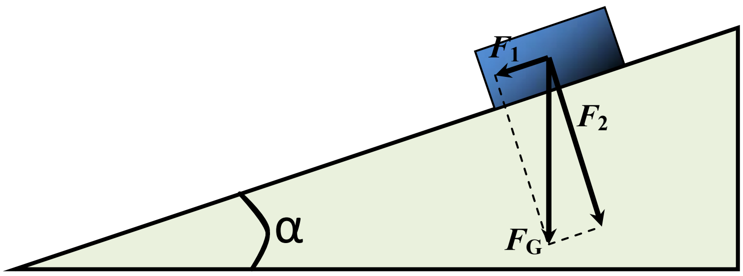
$g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$a = ?\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$



Obr. č.4a

Stejně jako v předchozím příkladu musíme rozložit tíhovou sílu $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ do dvou nezávislých směrů: Složka $\boldsymbol{F}_1$ je je rovnoběžná se směrem pohybu tělesa a složka $\boldsymbol{F}_2$ je kolmá na nakloněnou rovinu. Složka $\boldsymbol{F}_2$ síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ nezpůsobuje narozdíl od složky $\boldsymbol{F}_1$ pohyb.

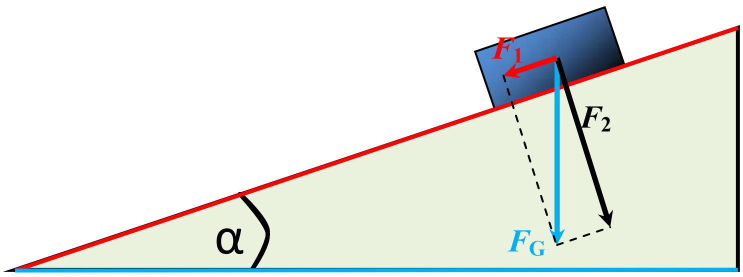


Obr. č.4b

Ze zadání a z obrázku č.4 vyplývá, že pomocí tíhové síly musíme vypočítat velikost zrychlení, které způsobuje síla $\boldsymbol{F}_1$. Podle druhého Newtonova zákona je velikost zrychlení rovna:

$$a_1 = \frac{F_1}{m}$$

Na rozdíl od minulé úlohy není velikost úhlu mezi silami ihned jasná. Musíme proto využít znalost vlastností úhlů: **dva úhly jsou shodné, jestliže jsou jejich ramena na sebe kolmá** (na vodorovnou rovinu je kolmá tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a na nakloněnou rovinu je kolmá síla $\boldsymbol{F}_2$ - viz obr.č.5). Úhel mezi silami $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ je tedy rovněž 15º.



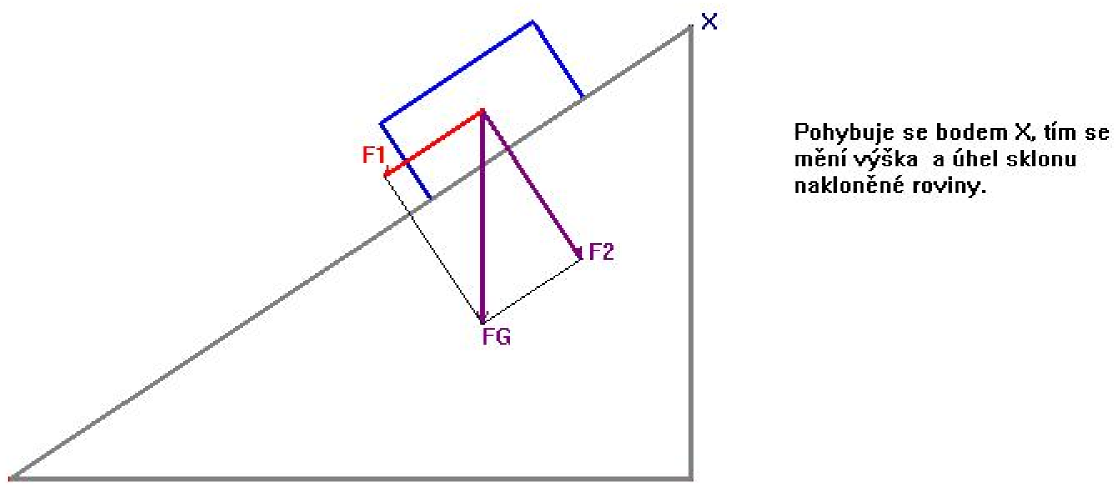
Obr. č.5

$$\sin\alpha = \frac{F_1}{F_G} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{ma_1}{F_G} \Rightarrow a_1 = \frac{mg\sin\alpha}{m} \Rightarrow a_1 = g\sin\alpha$$

$$a_1 = 2{,}54\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Těleso se pohybovalo se zrychlením $2{,}54\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

V příloze na CD ROM můžeme vidět tento příklad vymodelovaný v Cabri. Všimněme si jak se při změně výšky mění síla $\boldsymbol{F}_1$, která způsobuje zrychlení tělesa. (Obr.č.6)



Obr. č.6

Všimněme si, že když zvětšíme výšku nakloněné roviny, síla F_1 se také zvětší. Tedy čím máme větší sklon nakloněné roviny, tím máme větší zrychlení tělesa.

Na CD ROM se také nachází tento příklad nakloněné roviny se třením vymodelovaný v Cabri a dále vytvořený flashový animovaný applet nakloněnné roviny.

6 ÚLOHY ZADANÉ POMOCÍ ANIMACE NEBO VIDEA

Pokud si studenti pletou pojmy poloha, rychlost a zrychlení, znamená to, že dobře nechápou definice těchto veličin a nevidí jejich vzájemné vztahy. Při tradičním způsobu výuky fyziky tedy pravděpodobně není jejich zavedení na střední škole věnována dostatečná pozornost, jak lze pozorovat při výuce podle učebnic mechaniky pro gymnázia, které kladou velký důraz na používání definic a vztahů pro výpočet dané fyzikální veličiny pomocí jiných veličin. Přitom často ustupuje do pozadí logika, která k definici vede. Tento způsob výuky vede k tomu, že studenti nechápou odvozené rovnice jako relační vztahy popisující chování konkrétního fyzikálního systému v čase, ale jako statické vzorce, pomocí nichž se počítá rychlost pohybu, uražená dráha, atd.

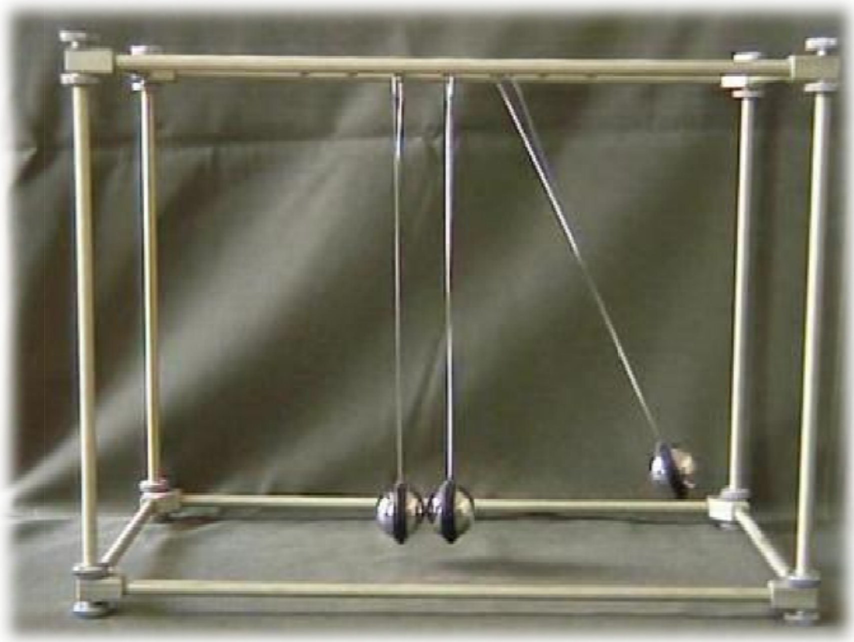
S tím, že si studenti neuvědomují dostatečně jasně vazby mezi jednotlivými fyzikálními veličinami, úzce souvisí i problémy, které mají s interpretací grafů závislostí kinematických veličin na čase. To je vzhledem ke skutečnosti, že se při výuce mechaniky využívají grafy závislostí kinematických veličin na čase velmi intenzivně a že by měly pomáhat zvyšovat srozumitelnost a současně snižovat nároky na abstraktní myšlení a představivost studentů, zcela zásadní problém, kterým se uzavírá začarovaný kruh. Přitom schopnost vytvořit k danému pohybu příslušné grafy závislostí polohy, rychlosti a zrychlení na čase je klíčem k budoucímu pochopení příčin pohybu. Podle 2. Newtonova zákona totiž existuje jednoznačný vztah mezi zrychlením tělesa a výslednicí působících sil. Známe-li síly působící na těleso, jsme schopni určit, jak se mění v závislosti na čase zrychlení tělesa a z něj dále při znalosti počátečních podmínek vypočítat závislost rychlosti a polohy tělesa na čase, tj. určit, jak se těleso pohybuje. Naopak, jsme-li schopni změřit závislost polohy tělesa na čase a z ní vypočítat závislost jeho zrychlení na čase, můžeme získat informace o silách, které na těleso působí.

Video či animace usnadňuje vytváření přímé vazby mezi konkrétním pohybem a grafem závislosti, který ho popisuje. Poté, co studenti vytvoří odpovídající graf závislosti polohy zkoumaného objektu na čase, je možné pouštět videozáznam znovu a porovnávat reálný pohyb s grafem, který ho popisuje. Tak je možné například zaměřit pozornost studentů na ty části grafu, kdy změna fyzikální situace (např. změna směru pohybu) přímo způsobí změnu v odpovídajícím grafu. Současná prezentace zkoumaného pohybu a odpovídajícího grafu usnadňuje pochopení jejich vzájemného vztahu a jeho uložení do dlouhodobé paměti jako jednoduchou entitu.

Úloha 24:

Co se stane, když první koule narazí do prostřední koule a co se bude dít při srážce dál?

Simulace daného děje je v příloze DP na CD

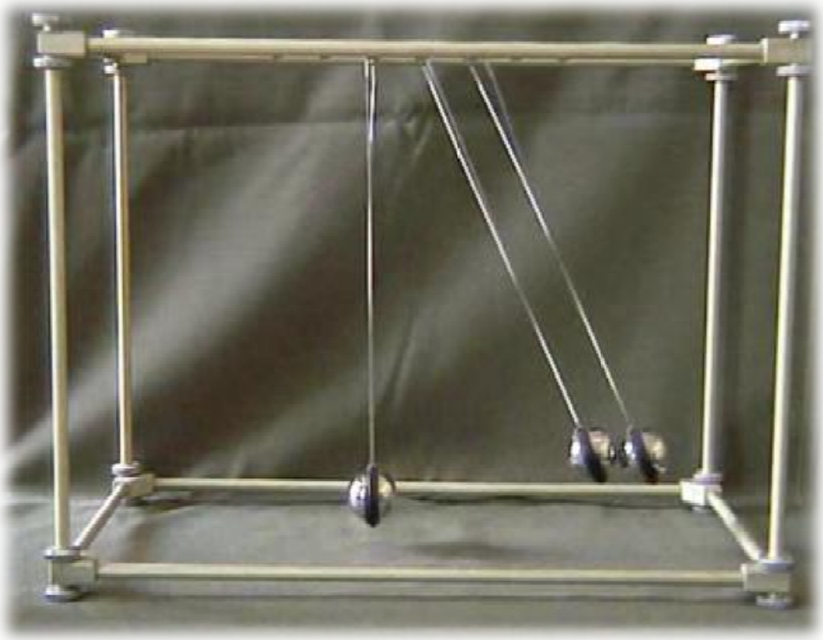


Obr. č.7

Jde o přístroj skládající se ze tří stejných koulí zavěšených na dvou stejně dlouhých závěsech, aby nedocházelo ke kyvům do stran. Koule se vzájemně dotýkají. Tomuto přístroji se odborně říká *rázostroj.*

Při vychýlení první kulička získá potenciální energii. Po puštění kuličky se začne potenciální energie měnit na kinetickou, kterou předá při srážce druhé kuličce v řadě a sama se zastaví. Druhá kulička předá získanou energii třetí kuličce, s kterou je v kontaktu, takže nezpozorujeme, že by se druhá kulička pohnula. Třetí kulička získá kinetickou energii a odlétne.

Vychýlíme-li dvě kuličky a necháme je dopadnout na jednu zbylou, můžeme pozorovat, že na druhé straně se v takovém případě odchýlí opět dvě kuličky.



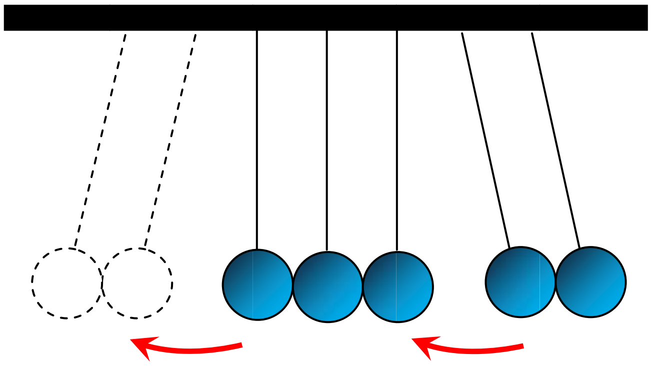
Obr. č.8

Podle zákona zachování hybnosti *(Je-li výslednice sil působících na izolovanou soustavu nulová, je součet hybností všech částí soustavy konstantní)* musí platit:

Současně musí platit zákon zachování mechanické energie *(součet energií všech částí izolované soustavy zůstává konstantní. Energie tedy nemůže vzniknout ani se ztratit)*. Protože řada koulí je vodorovná, všechny jsou ve stejné výši, je potenciální energie při srážce první koule s druhou stejná jako při srážce (n – 1)té koule s n-tou koulí. Proto uvažujeme pouze energii kinetickou. Platí:

Vydělíme-li tyto dvě rovnice, dostaneme $v_1 = v_2$. Podle první rovnice pak musí být k = n. To znamená, že se odrazí opět jedna kulička (viz obr.č.7). Ze zákona zachování energie pak vyplývá, že tato kulička odskočí do stejné výšky, z jaké byla spuštěna první kulička. Ve skutečném rázostroji se odražená kulička do stejné výšky nedostane, protože na ni působí odporové síly.

Zvedneme-li dvě kuličky, musí se podle těchto úvah odrazit na konci řady opět dvě kuličky.

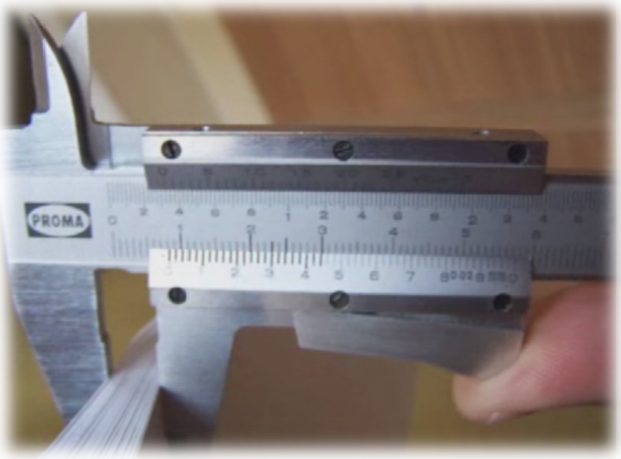


Obr. č.9

Na http://www.walter-fendt.de/ph14cz/ncradle_cz.htm můžete nalézt flashový applet rázostroje.

Úloha 24:

Měření tloušťky listu papíru. Tato úloha je formou videa na přiloženém CD ROM. Video zachycuje postupně počet listů, měření posuvným měřidlem, mikrometrem a digitalním posuvným měřidlem. Rozměry nejsou ve videu vypsané – žáci by měli být schopni vyčíst je z pozastaveného videa sami.



Obr. č.10a

$n = 80$

$t_{80} = 8{,}3$ mm

$$t_1 = \frac{t_{80}}{n} \Rightarrow t_1 \doteq 0{,}104\,\text{mm}$$

Obr. č.10b

$n = 80$

$t_{80} = 8{,}04$ mm

$$t_1 = \frac{t_{80}}{n} \Rightarrow t_1 \doteq 0{,}100 \text{ mm}$$

Obr. č.10c

$n = 80$

$t_{80} = 8{,}35$ mm

$$t_1 = \frac{t_{80}}{n} \Rightarrow t_1 \doteq 0{,}104 \text{ mm}$$

Výsledky se liší, ale až v tisícinách milimetru. Při měření posuvným měřidlem nám vyšla tloušťka jednoho listu , při měření mikrometrem a při měření digitálním posuvným měřidlem opět .

7 ZÁVĚR

Cílem této práce bylo zvýšit oblibu fyziky u žáků a pomoci jim s problémy spojenými s řešením různých fyzikálních úloh. Také jsem vytvořil několik fyzikálních úloh, které žáci nebudou muset číst, ale které uvidí. Názornost takto zadávaných úloh je zřejmá. Pokud pomůžou aspoň trochu k lepším výsledkům žáků a ke zpříjemnění a zpestření výuky, bylo by dobré ve tvorbě takových úloh pokračovat.

Nonverbální fyzikální úlohy ovšem nemusí být zaměřeny pouze na fyziku. Rozsáhlejší příklady mohou zasahovat do dalších předmětů a tím posílit mezipředmětové vztahy.

8 POUŽITÁ LITERATURA

[1] Časopis Moderní vyučování 08/2005 článek „Tučňáci z učebnic ožili“

[2] Volf, Ivo: Metodika řešení úloh ve vyučování fyzice; JČSMF; Praha; 1975

[3] http://www.wikipedia.cz/

[4] Bohuněk, Jiří: Sbírka úloh z fyziky pro ZŠ 1.díl, 2.vydání; Prométheus; Praha; 1992

[5] Bohuněk, Jiří: Sbírka úloh z fyziky pro ZŠ 2.díl, 1.vydání; Galaxie; Praha; 1993

[6] Bohuněk, Jiří: Sbírka úloh z fyziky pro ZŠ 3.díl, 2.vydání; Prométheus; Praha; 1994

[7] Ungermann, Z.: Matematika a řešení fyzikálních úloh. SPN; Praha; 1990

[8] Baník, I., Baník, R., Zámečník, J.:Fyzika netradičně – mechanika. Alfa; Bratislava; 1989

[9] http://www.walter-fendt.de/

9 PŘÍLOHY

CD ROM obsahující následující soubory:

Digitální posuvné měřidlo.bmp	- foto úloha 24
Měření listů.avi	- video úloha 24
Mikrometr.bmp	- foto úloha 24
Posuvné měřidlo.bmp	- foto úloha 24
03.html, 03.swf	- flash animace nakloněné roviny
Nakloněná rovina se třením.fig	- Cabri model
Nakloněná rovin.fig	- Cabri model
Rázostroj 1.avi	- video úloha 23
Rázostroj 2.avi	- video úloha 23
Těleso zavěšenu u stěny.fig	- Cabri model
Diplomová práce.docx	- Práce v elektronické podobě
Cabri.zip	- Freewarová verze Cabri