JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

JIHOČESKÝ KORESPONDENČNÍ MATEMATICKÝ SEMINÁŘ 1996 – 1999

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Zdeněk ČÁSTKA
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma "Jihočeský korespondenční matematický seminář 1996–1999" zpracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 24. dubna 2009

. . . .

Zdeněk Částka

Anotace

Název: Jihočeský korespondenční matematický seminář 1996 – 1999

Vypracoval: Zdeněk Částka

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Didaktika, práce s nadanými studenty, metody řešení úloh

Obsahem této práce jsou vyřešené úlohy 17. – 19. ročníku Jihočeského korespondenčního matematického semináře (1996 – 1999), které mohou být využity jako materiál pro další práce s podobnými typy úloh. Jsou vhodné zejména pro studenty středních škol.

Annotation

Title: The South Bohemia correspondence mathematical competition 1996 – 1999

Author: Zdeněk Částka

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Keywords: Didactics, work with talented students, methods of solving problems

This dissertation includes solved problems of the 17^{th} – 19^{th} year of the South Bohemia correspondence mathematical competition (1996 – 1999). These tasks can be used as material for next work with similar types of exercises. They are suitable especially for students at secondary schools.

Poděkování

Rád bych poděkoval panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D., za odborné vedení, ochotu, trpělivost a cenné rady, které přispěly k realizaci této diplomové práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Matematické korespondenční semináře jsou významné z hlediska práce s nadanými studenty. Umožňují rozvíjet jejich myšlení, posilují jejich motivaci. Kladou si za cíl získávat více žáků pro hlubší studium matematiky. Formou soutěže probouzí zájem o samostatnou práci.

Korespondenční seminář vede řešitele k soustavné práci, umožňuje řešit úlohy v klidu a používat literaturu, s kterou se tímto způsobem studenti naučí pracovat. Tím, že jsou série úloh většinou monotématické, se alespoň trochu řešitelům napovídá, jak úlohu řešit. Důležitým faktorem je zde také zpětná vazba.

Jihočeský korespondenční matematický seminář patřil mezi nejstarší svého druhu u nás, vznikl kolem roku 1980 a probíhal až do roku 2002. Hlavním cílem bylo zpřístupnění co největšímu počtu zájemců o matematiku. U samého zrodu stála doc. Lada Vaňatová. Od roku 1986 se na organizaci semináře a sestavování úloh výrazně podílel RNDr. Pavel Pech. V roce 1989 byla organizace semináře předána učitelům jihočeských gymnázií.

Diplomová práce obsahuje kompletní zadání a řešení 17. – 19. ročníku Jihočeského korespondenčního matematického semináře. Úlohy sestavili tito pedagogové: Pert Sokol, Pavel Leischner a Michaela Koblížková. Jednotlivé ročníky jsou rozděleny do kapitol, za zadáním každé série následuje její řešení.

Kapitola 2

Ročník 1996/97

2.1 1. série

Sérii sestavil Petr Sokol

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnou délky 7 cm. Zjistěte, zda jej lze rozřezat na 6 navzájem různých pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků? Pokud ano, ukažte jak!

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Motocyklista a cyklista vyjeli současně z místa A do místa B. Po třetině cesty se cyklista zastavil a odpočíval. Pokračoval v cestě tehdy, když motocyklistovi zbývala do B třetina cesty. Motocyklista dojel do B, otočil se a vracel se zpět do A. Kdo přijede dříve: motocyklista do A nebo cyklista do B?

3. Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka mají velikosti označené a, b. Nad jeho přeponou je sestrojen vně čtverec. Bez užití goniometrických funkcí vypočítejte vzdálenost středu tohoto čtverce od vrcholu C.

4. Zjistěte, zda existuje mnohočlen $p(x)$ s celočíselnými koeficienty tak, aby platilo

   (a) $p(0) = 19,\ p(1) = 96,\ p(2) = 1996,$

   (b) $p(0) = 19,\ p(1) = 97,\ p(2) = 1997,$

   (c) $p(1) = 19,\ p(19) = 97.$

5. Posloupnost $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ je dána rekurentním předpisem $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} \cdot a_n + 1,\ n = 1, 2,\ \ldots$. Dokažte, že číslo a_{1997} není dělitelné číslem 4.

6. Na úsečce AC zvolte libovolně její vnitřní bod B. Sestrojte postupně kružnice $k_1,\ k_2,\ k$ nad průměry AB, BC, AC. Bodem B veďte libovolnou přímku p, která protíná kružnici k v bodech P, Q a kružnice k_1, k_2 v bodech R, T. Dokažte, že platí $|PR| = |QT|$.

7. Pro kterou hodnotu n nabývá výraz

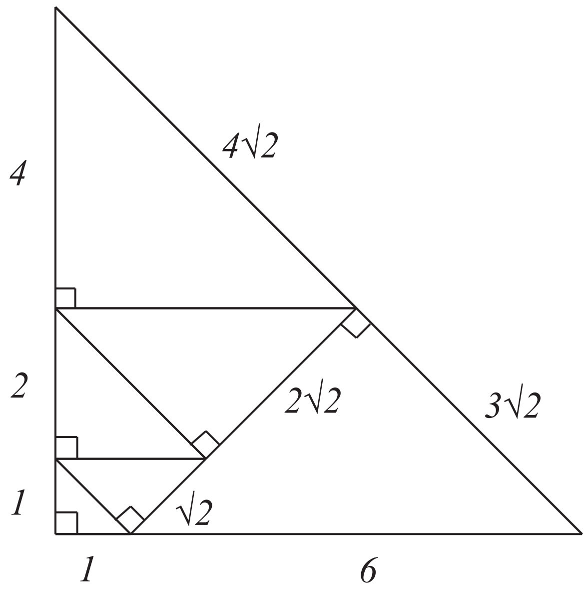
$$\frac{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 4 \cdots \log n}{10^n}$$

nejmenší hodnoty?

Řešení

1. Text úlohy. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnou délky 7 cm. Zjistěte, zda jej lze rozřezat na 6 navzájem různých pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků? Pokud ano, ukažte jak!

   Řešení úlohy. Ano, lze rozřezat. Viz obrázek:



Obrázek 2.1:

2. Text úlohy. Motocyklista a cyklista vyjeli současně z místa A do místa B. Po třetině cesty se cyklista zastavil a odpočíval. Pokračoval v cestě tehdy, když motocyklistovi zbývala do B třetina cesty. Motocyklista dojel do B, otočil se a vracel se zpět do A. Kdo přijede dříve: motocyklista do A nebo cyklista do B?

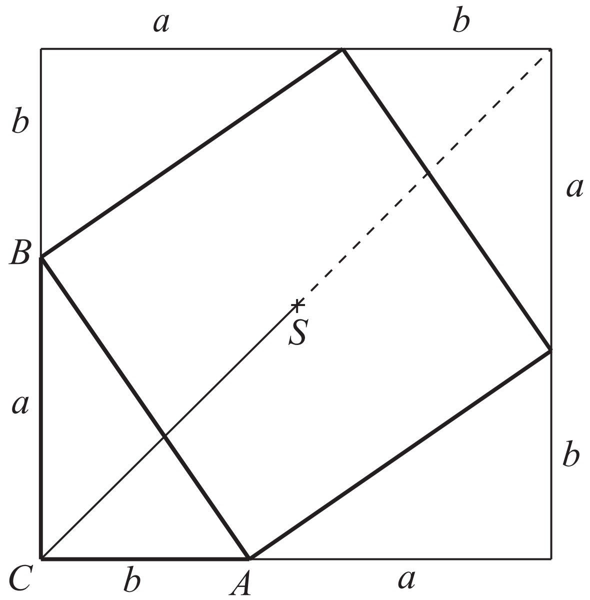
   Řešení úlohy. Cyklista ujede dráhu délky $|AX| = 1/3\,|AB|$ a motocyklista ujede za stejný čas dráhu délky $|AZ|$, která je menší než třetina ($|AY|$) jeho celkové dráhy. Motocyklista musí urazit dvojnásobnou trasu cyklisty, avšak rychlost cyklisty je více než polovina rychlosti motocyklisty.
   Cyklista přijede do B dříve než se motocyklista vrátí zpět do A.

Obrázek 2.2:

3. Text úlohy. Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka mají velikosti označené a, b. Nad jeho přeponou je sestrojen vně čtverec. Bez užití goniometrických funkcí vypočítejte vzdálenost středu tohoto čtverce od vrcholu C.

   Řešení úlohy. Obrázek doplníme na čverec o straně $a + b$. Výsledkem bude polovina z úhlopříčky tohoto čtverce

$$\frac{(a+b)\cdot\sqrt{2}}{2}.$$



Obrázek 2.3:

4. Text úlohy. Zjistěte, zda existuje mnohočlen $p(x)$ s celočíselnými koeficienty tak, aby platilo

   (a) $p(0) = 19,\ p(1) = 96,\ p(2) = 1996,$

   (b) $p(0) = 19,\ p(1) = 97,\ p(2) = 1997,$

   (c) $p(1) = 19,\ p(19) = 97.$

Řešení úlohy. K řešení úlohy je dobré vědět, že platí věta: Je-li $p(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty, potom je číslo $p(c)-p(d)$ dělitelné číslem $c-d$.

Důkaz. Odečtením vztahů

$$\begin{aligned} p(c) &= a_n \cdot c_n + a_{n-1} \cdot c_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot c + a_0, \\ p(d) &= a_n \cdot d_n + a_{n-1} \cdot d_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot d + a_0, \end{aligned}$$

dostaneme

$$p(c) - p(d) = a_n(c^n - d^n) + \ldots + a_1(c - d).$$

Rozdíly typu $c^k - d^k$ rozložíme podle vzorce

$$c^k - d^k = (c-d)(c^{k-1} + c^{k-2}d + c^{k-3}d^2 + \ldots + cd^{k-2} + d^{k-1})$$

a po vytknutí výrazu $c-d$ ze všech členů dostaneme

$$p(c) - p(d) = (c-d) \cdot q(c,d),$$

kde $q(c,d)$ je mnohočlen, který vznikne jako zbytek po vytýkání. Tím jsme dokázali, že číslo $p(c)-p(d)$ je dělitelné číslem $c-d$.

(a) Podle dokázané věty budeme zkoumat, zda číslo 1977 ($p(2) - -p(0) = 1996 - 19 = 1977$) je dělitelné číslem 2 ($2-0=2$), což neplatí, a proto požadovaný mnohočlen neexistuje.

(b) Zjitíme, že platí, číslo 1978 ($p(2) - p(0) = 1997 - 19 = 1978$) je dělitelné číslem 2 ($2-0=2$).
Budeme hledat mnohočlen ve tvaru

$$p(x) = ax(x-1) + bx + c, \tag{2.1}$$

z kterého snadno vypočítáme koeficienty a, b, c pro příslušná x.

$$\begin{array}{lr} \hline p(0) = & \mathbf{c} = \ \mathbf{19} \\ \hline p(1) = & b + c = \ 97 \\ & b + 19 = \ 97 \\ & \mathbf{b} = \ \mathbf{78} \\ \hline p(2) = & 2a + 2b + c = 1997 \\ & 2a + 156 + 19 = 1997 \\ & 2a = 1822 \\ & \mathbf{a} = \mathbf{911} \\ \hline \end{array}$$

Po dosazení do (2.1) dostaneme výsledný mnohočlen

$$p(x) = 911x^2 - 833x + 19.$$

(c) Protože číslo 78 ($p(19)-p(1) = 97-19 = 78$) není dělitelné číslem 18 ($19 - 1 = 18$), požadovaný mnohočlen neexistuje.

5. Text úlohy. Posloupnost a_0, a_1, a_2, ... je dána rekurentním předpisem $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} \cdot a_n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Dokažte, že číslo a_{1997} není dělitelné číslem 4.

   Řešení úlohy. Posloupnost je tvořena členy $a_o = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 7$, $a_5 = 22$, $a_6 = 155$, $a_7 = 3411$ atd. Mimo prvních dvou členů dávají všechny další při dělení čtyřmi postupně zbytky 2, 3, 3, 2, 3, 3, ...

   (a) Předpokládáme, že $a_{n-1} = 4k + 2$ a $a_n = 4k' + 3$, potom platí

   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} \cdot a_n + 1 = (4k+2)(4k'+3) + 1 = \\ &= 16kk' + 12k + 8k' + 7 = 4(\underbrace{4kk' + 3k + 2k' + 1}_{k''}) + 3 = \\ &= 4k'' + 3. \end{aligned}$$

   Ke stejnému závěru zřejmě dojdeme i tehdy, bude-li $a_{n-1} = 4k'+3$ a $a_n = 4k + 2$.

   (b) Předpokládáme, že $a_{n-1} = 4l + 3$ a $a_n = 4l' + 3$, potom platí

   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} \cdot a_n + 1 = (4l+3)(4l'+3) + 1 = \\ &= 16ll' + 12l + 12l' + 10 = 4(\underbrace{4ll' + 3l + 3l' + 2}_{l''}) + 2 = \\ &= 4l'' + 2. \end{aligned}$$

   Patří-li dva po sobě jdoucí členy při dělení čtyřmi do zbytkových tříd se zbytky 2 a 3 nebo 3 a 2 viz (a) (resp. 3 a 3 viz (b)), pak následující člen patří do zbytkové třídy se zbytkem 3 (resp. 2).
   Tím jsme dokázali, že členy posloupnosti dávají po dělení číslem 4 zbytky 2 a 3, a proto číslo a_{1997} není dělitelné 4.

6. Text úlohy. Na úsečce AC zvolte libovolně její vnitřní bod B. Sestrojte postupně kružnice k_1, k_2, k nad průměry AB, BC, AC. Bodem B veďte libovolnou přímku p, která protíná kružnici k v bodech P, Q a kružnice k_1, k_2 v bodech R, T. Dokažte, že platí $|PR| = |QT|$.

   Řešení úlohy. Platí

   $$\begin{aligned} |AC| &= |AB| + |BC| &= 2r_1 + 2r_2 &= 2(r_1 + r_2), \\ |AS| &= |AS_1| + |S_1S| &= |AC|/2 &= r_1 + r_2, \\ |SC| &= |SS_2| + |S_2C| &= |AC|/2 &= r_1 + r_2, \end{aligned}$$

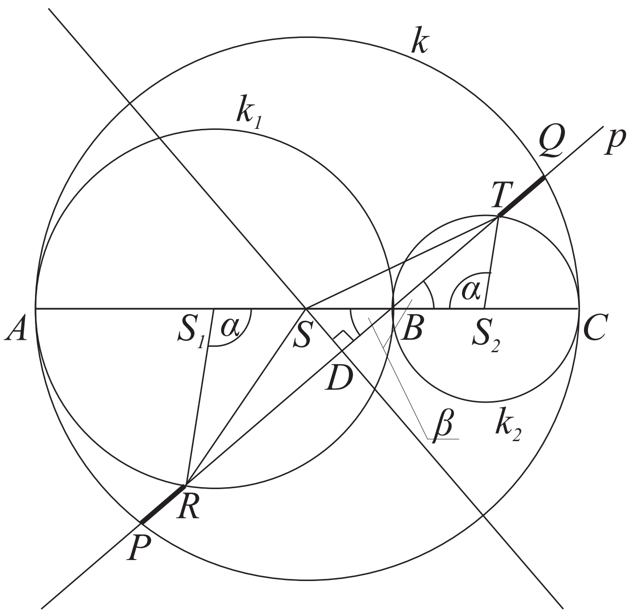
kde r_1, r_2 označují poloměry kružnic k_1 a k_2. Budeme zkoumat trojúhelníky S_1SR, S_2ST. V nich platí

$$|S_1R| = |SS_2| = r_1 \qquad \text{a} \qquad |S_1S| = |TS_2| = r_2.$$

Trojúhelníky S_1RB, BS_2T jsou rovnoramenné a podobné (mají stejné úhly při odpovídajících si vrcholech). Potom jsou trojúhelníky S_1SR, S_2ST shodné podle věty *sus* a platí $|SR| = |ST|$. Trojúhelník STR je rovnoramenný. Dále vedeme kolmici bodem S k PQ, kde ji protne v bodě D. Potom platí následující rovnosti

$$|DR| = |TD|\,,\ |DP| = |DQ|\,,$$

$$|\mathbf{PR}| = |DP| - |DR| = |DQ| - |DT| = |\mathbf{QT}|.$$



Obrázek 2.4:

7. Text úlohy. Pro kterou hodnotu n nabývá výraz

$$\frac{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 4 \cdots \log n}{10^n}$$

nejmenší hodnoty?

Řešení úlohy. Výzaz si přepíšeme na tvar

$$\underbrace{\frac{1}{10} \cdot \frac{\log 2}{10} \cdot \frac{\log 3}{10} \cdots \frac{\log n}{10}}_{n}.$$

Tento součin klesá (jelikož mezi sebou násobíme výrazy menší než 1) až do členu, pro který platí

$$\frac{\log n}{10} > 1,$$

po upravení

$$\begin{aligned} \log n &> 10, \\ n &> 10^{10}. \end{aligned}$$

Výraz nabývá nejmenší hodnoty pro $n = 10^{10}$ ($\log 10^{10} = 1$) a pro n předcházející $n = 10^{10} - 1$, jelikož tyto dvě hodnoty jou stejné.

2.2 2. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
Čtverec $ABCD$ má obsah 1 dm^2. Středy jeho stran AB, BC, CD, DA označíme po řadě písmeny K, L, M, N. Úsečky DK, MB, NC a LA rozdělují čtverec na 9 částí. Určete jejich obsahy.

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
Každý čtvrtek má Milan odpolední vyučování a přijíždí pro něj automobilem ke škole otec. Přijede vždy přesně v 16 hodin a 10 minut a ihned jedou domů. Jednou vyučování skončilo dřív a tak šel Milan v 15 hodin a 5 minut ze školy domů pěšky. Cestou potkal otce jedoucího pro něj. Nasedl k němu do auta a přijeli domů o deset minut dříve než obvykle.
Určete, kolikrát je průměrná rychlost otcova automobilu větší než průměrná rychlost Milanovy chůze.

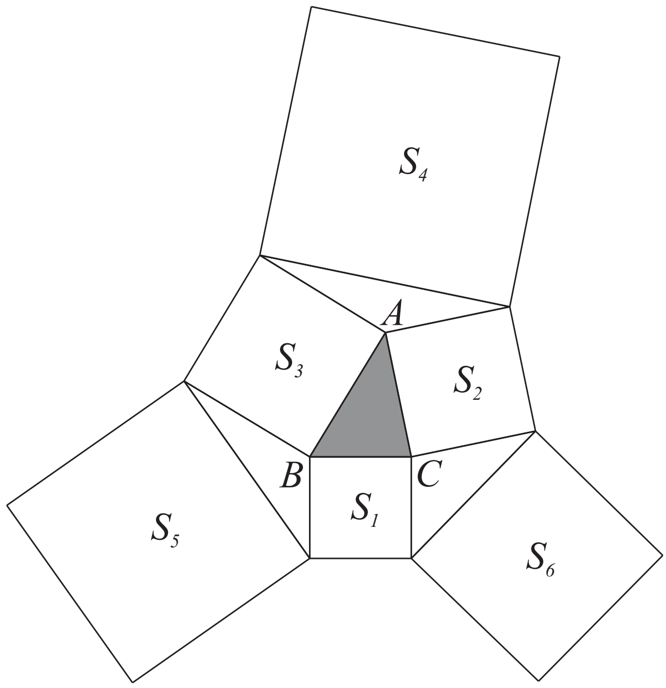
3. Místo B se nachází 4,5 km od místa A proti proudu řeky. Rychlost proudu je 3 km/h, rychlost veslaře na netekoucí vodě je 5 km/h. Veslař plul z A do B a zpět do A. Během cesty po stejných časových intervalech jízdy odpočíval a to vždy deset minut. Takových odpočinků bylo celkem osm (a stejných časových intervalů jízdy bylo tedy devět). Během každého odpočinku veslaře volně unášel proud. Za jak dlouho od vyplutí se veslař vrátil do A?

4. Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z splňujících rovnici
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

5. Určete všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice
$$(x-p)^2(px^2 - 2p^2x + p^3 - p - 1) = -1$$
více kořenů kladných než záporných.

6. Kružnice k_1 s poloměrem 3 cm a k_2 s poloměrem 6 cm mají vnější dotyk a každá z nich má navíc vnitřní dotyk s kružnicí k_3 o poloměru 9 cm. Tětiva kružnice k_3 se dotýká kružnice k_1 i kružnice k_2. Určete druhou mocninu délky takové tětivy.

7. Nad stranami libovolného trojúhelníka ABC sestrojíme postupně podle obrázku čtverce o obsazích, $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6$.
Dokažte, že
$$S_4 + S_5 + S_6 = 3(S_1 + S_2 + S_3).$$



Obrázek 2.5:

Řešení

1. Text úlohy. Čtverec $ABCD$ má obsah 1 dm^2. Středy jeho stran AB, BC, CD, DA označíme po řadě písmeny K, L, M, N. Úsečky DK, MB, NC a LA rozdělují čtverec na 9 částí. Určete jejich obsahy.

   Řešení úlohy. Označme a délku strany čtverce $ABCD$. Trojúhelníky ABL, BCM, CDN a DAK jsou shodné, a proto jsou shodné (při označení podle obr. 2.6) i trojúhelníky AKE, BLF, CMG a DNH. Obsah každého z nich je x

   $$S_{\triangle AKE} = S_{\triangle BLF} = S_{\triangle CMG} = S_{\triangle DNH} = x.$$

   Obsah každého z trojúhelníků ABL, BCM, CDN a DAK je 0,25 dm^2. Součet těchto čtyř obsahů je obsah čtverce $ABCD$. Kdyby tedy byly umístěny ve čtverci tak, aby se nepřekrývaly, pokryly by jej. Vzhledem k tomu, že se překrývají, je jimi nepokrytá část čtverce rovna součtu obsahů překrývajících se částí. To znamená, že platí

   $$S_{EFGH} = S_{\triangle AKE} + S_{\triangle BLF} + S_{\triangle CMG} + S_{\triangle DNH} = 4x.$$

   Z uvedených shodností trojúhelníků navíc plyne, že i čtyřúhelníky $AEHN$, $BFEK$, $CGFL$ a $DHGM$ jsou shodné. Označme y obsah každého z nich. V trojúhelníku AED je úsečka HN střední příčka, protože prochází středem strany AD a je rovnoběžná se stranou AE. Trojúhelník NHD má proto poloviční rozměry oproti trojúhelníku AED a pro jejich obsahy platí

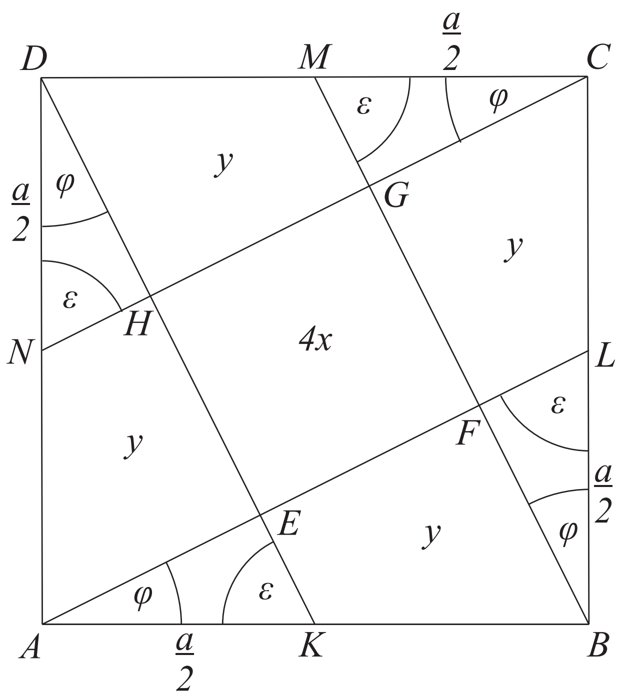
   $$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle NHD}} = \frac{4}{1} = \frac{y+x}{x}.$$

   Odtud zjistíme, že $y = 3x$. Navíc je $S_{\triangle AKD} = 0,25\ \text{dm}^2$, a tak

   $$2x + 3x = 0,25\ \text{dm}^2.$$

   Odtud $x = 0,05\ \text{dm}^2$ a $y = 3x = 0,15\ \text{dm}^2$.

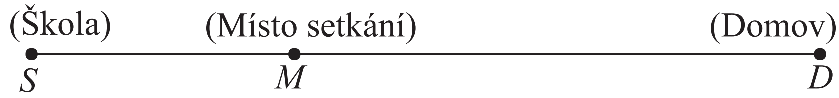
   Závěr
   $S_{\triangle AKE} = S_{\triangle BLF} = S_{\triangle CMG} = S_{\triangle DNH} = 0,05\ \text{dm}^2$,
   $S_{AEHN} = S_{BFEK} = S_{CGFL} = S_{DHGM} = 0,15\ \text{dm}^2$,
   $S_{EFGH} = 4x = 0,20\ \text{dm}^2$.



Obrázek 2.6:

2. Text úlohy. Každý čtvrtek má Milan odpolední vyučování a přijíždí pro něj automobilem ke škole otec. Přijede vždy přesně v 16 hodin a 10 minut a ihned jedou domů. Jednou vyučování skončilo dřív a tak šel Milan v 15 hodin a 5 minut ze školy domů pěšky. Cestou potkal otce jedoucího pro něj. Nasedl k němu do auta a přijeli domů o deset minut dříve než obvykle.
Určete, kolikrát je průměrná rychlost otcova automobilu větší než průměrná rychlost Milanovy chůze.

Řešení úlohy. Předpokládejme, že otec se setkal s Milanem v místě M. Na jízdě z D do M a zpět ušetřil 10 minut, na jízdě z D do M tedy ušetřil polovinu tohoto času, to znamená 5 minut. Místo obvyklé doby 16 hodin a 10 min se proto setkali v 16 hodin a 5 minut. Milan šel pěšky přesně hodinu úsek SM, který by otec ujel autem za 5 minut. Poměr rychlosti otcova automobilu a rychlosti Milanovy chůze je tedy roven $60 : 5 = 12 : 1$.
Auto bylo dvanáckrát rychlejší než Milan.



Obrázek 2.7:

3. Text úlohy. Místo B se nachází 4,5 km od místa A proti proudu řeky. Rychlost proudu je 3 km/h, rychlost veslaře na netekoucí vodě je 5 km/h. Veslař plul z A do B a zpět do A. Během cesty po stejných časových intervalech jízdy odpočíval a to vždy deset minut. Takových odpočinků bylo celkem osm (a stejných časových intervalů jízdy bylo tedy devět). Během každého odpočinku veslaře volně unášel proud. Za jak dlouho od vyplutí se veslař vrátil do A?

   Řešení úlohy. Úloha je nestandartní, odhadem a vyzkoušením zjistíme, že veslař vykonával půlhodinové intervaly veslování. Nechť $v = 5$ km/h je vlastní rychlost veslaře a $u = 3$ km/h rychlost proudu. Po proudu se pohyboval rychlostí $v+u = 8$ km/h vzhledem ke břehu a urazil v prvním úseku 4 km z A do B. Zbytek cesty do B, to znamená 0,5 km, jej odnesl proud během prvního desetiminutového odpočinku, unášel jej rychlostí 3 km/h po dobu 1/6 hodiny.
   Při cestě zpět urazil proti proudu při každém půlhodinovém veslování úsek délky 1 km rychlostí $v - u = 2$ km/h a během desetiminutového odpočinku jej proud odnesl o půl kilometru zpět. Při sedmi takových intervalech veslování a odpočinku se octl v místě vzdáleném $7 \cdot 0,5 = 3,5$ km od B a tedy 1 km od A. Tento poslední kilometr urazil v posledním (devátém) úseku veslování. Celková doba jeho jízdy byla $(9 \cdot 0,5 + 8 \cdot 1/6)$ hodiny, to znamená 5 hodin a 50 minut.

4. Text úlohy. Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z splňujících rovnici
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \tag{2.2}$$

   Řešení úlohy. Rovnice (2.2) se nemění záměnou přirozených čísel x, y, z. Proto ji můžeme řešit za podmínky $x \leq y \leq z$ a ostatní kořeny určit záměnami nalezených hodnot.
   Zřejmě nemůže být $x = 1$. Nechť je tedy $x = 2$. Pak po dosazení do (2.2) a úpravě dostaneme
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2},$$
   přičemž $z \geq y > 2$, pro $y = 2$ by muselo být $1/z = 0$. Při volbě $y = 3$

obdržíme

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

a tak vyhovuje trojice $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$.
Zvolme dále $y = 4$, pak

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

tedy $x = 2$, $y = z = 4$.
Pro $y \geq 5$ vycházejí hodnoty $x > y$, což je ve sporu s předpokladem.
Zvolme tedy dále $x = 3$. Pak

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad z \geq y \geq 3.$$

Vyhovuje pro $x = y = z = 3$. Pro $y \geq 4$ vychází $z \leq y$, nemá tedy smysl dál dosazovat.
Rovněž pro $x \geq 4$ je

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1.$$

Závěr
Rovnici (2.2) vyhovuje deset trojic $[x, y, z]$, které jsou uvedeny v tabulce

x	2	2	3	3	6	6	2	4	4	3
y	3	6	2	6	2	3	4	2	4	3
z	6	3	6	2	3	2	4	4	2	3

5. **Text úlohy.** Určete všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice

$$(x-p)^2(px^2 - 2p^2x + p^3 - p - 1) = -1 \tag{2.3}$$

více kořenů kladných než záporných.

Řešení úlohy. Je-li $p = 0$ má rovnice tvar $-x^2 = -1$ a kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Není tedy kladných kořenů více než záporných.
Nechť je dále $p \neq 0$. Rovnici (2.3) lze upravit na tvar

$$(x-p)^2(p(x^2 - 2px + p^2) - (p+1)) = -1.$$

Po substituci $y = x^2 - 2px + p^2 = (x-p)^2$ a další úpravě obdržíme kvadratickou rovnici

$$py^2 - (p+1)y + 1 = 0$$

s diskriminantem

$$D = (p+1)^2 - 4p = (p-1)^2$$

a kořeny

$$y_{1,2} = \frac{p+1 \pm (p-1)}{2p} = \begin{cases} 1 \\ 1/p. \end{cases}$$

Je tedy buď

$$(x-p)^2 = 1 \quad \text{a odtud} \quad x_{1,2} = p \pm 1$$

nebo

$$(x-p)^2 = \frac{1}{p}, \quad \text{což vede ke kořenům} \quad x_{3,4} = p \pm \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Pro $p = 1$ dostáváme $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, to znamená dvojnásobný kladný kořen a žádný záporný. Tato hodnota p vyhovuje.
Také $p > 1$ vyhovuje, neboť vycházejí všechny kořeny kladné.
Je-li $0 < p < 1$, máme dva kořeny kladné a dva záporné, což nevyhovuje.
Pro $p < 0$ existují jen dva reálné kořeny $x_1 = p+1 < 1$ a $x_2 = p-1 < 0$. Zde rovněž nemáme více kořenů kladných než záporných.

Závěr. $p \in \langle 1, \infty)$.

6. **Text úlohy.** Kružnice k_1 s poloměrem 3 cm a k_2 s poloměrem 6 cm mají vnější dotyk a každá z nich má navíc vnitřní dotyk s kružnicí k_3 o poloměru 9 cm. Tětiva kružnice k_3 se dotýká kružnice k_1 i kružnice k_2. Určete druhou mocninu délky takové tětivy.

Řešení úlohy. Z podobnosti trojúhelníků O_2CF a O_1DF dostáváme

$$\frac{|O_2F|}{|O_1F|} = \frac{|O_2C|}{|O_1D|}$$

a odtud při označení podle obr. 2.8

$$\frac{12+y}{3+y} = \frac{6}{3}.$$

Vyřešením této rovnice zjistíme $y = 6$ cm. Přímka O_3E je osa tětivy AB, jejíž délku d hledáme. Z podobnosti trojúhelníků O_3EF a O_1DF zjistíme

$$\frac{|O_3E|}{|O_1D|} = \frac{|O_3F|}{|O_1F|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{|O_3E|}{3} = \frac{15}{9}.$$

Odtud $|O_3E| = 5$ cm a užitím Pythagorovy věty pro trojúhelník O_3AE dostaneme

$$\frac{d}{2} = |AE| = \sqrt{|AO_3|^2 - |O_3E|^2}\ ,$$

číselně

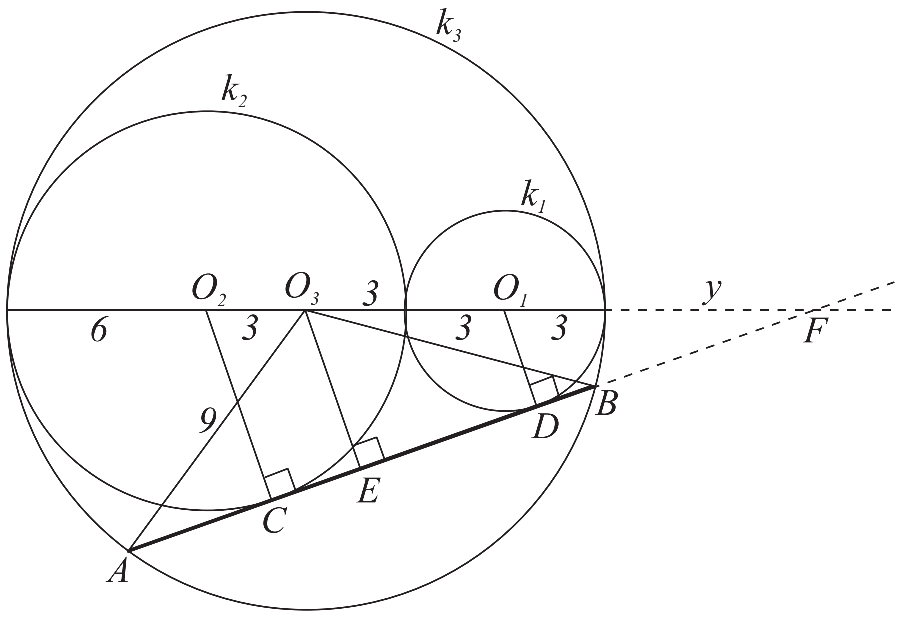
$$\frac{d}{2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56} = \sqrt{2^2 \cdot 14} = 2\sqrt{14} \text{ cm}.$$

Délka tětivy AB je

$$d = 4\sqrt{14} \text{ cm}.$$

Pro druhou mocninu dostaneme

$$d^2 = 16 \cdot 14 = 224 \text{ cm}^2.$$



Obrázek 2.8:

Úloze ještě vyhovuje tětiva XY na obr. 2.9. Označneme l délku tětivy XY. Použitím Pythagorovy věty pro trojúhelník O_3ZY dostaneme

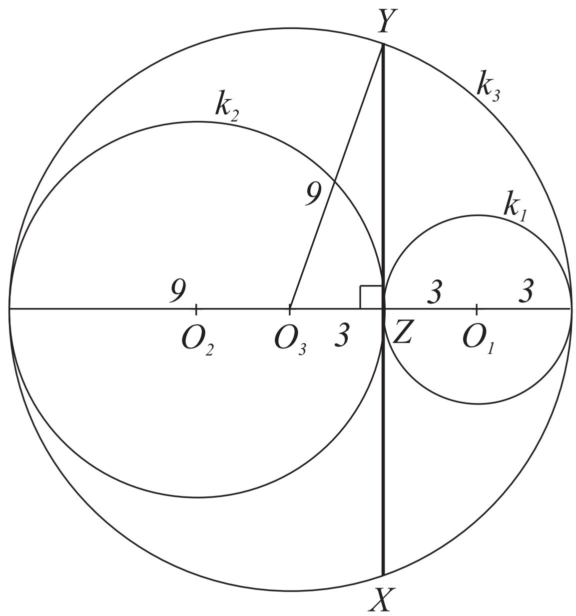
$$\frac{l}{2} = |YZ| = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Délka tětivy XY je

$$l = 12\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Pro druhou mocninu dostaneme

$$l^2 = 144 \cdot 2 = 288 \text{ cm}^2.$$



Obrázek 2.9:

7. Text úlohy. Nad stranami libovolného trojúhelníka ABC sestrojíme postupně podle obrázku čtverce o obsazích, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6. Dokažte, že

$$S_4 + S_5 + S_6 = 3(S_1 + S_2 + S_3).$$

Řešení úlohy. Označme vrcholy podle obr. 2.10 a dále $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$. Při obvyklém označení délek stran trojúhelníka ABC platí $|DB| = |AB| = c$, $|BE| = |BC| = a$, $|\angle DBE| = 180° - \beta$. Pomocí kosinové věty pro trojúhelník DEB dostaneme

$$S_5 = |DE|^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(180° - \beta).$$

Avšak

$$\cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta.$$

Je tedy

$$S_5 = c^2 + a^2 + 2ac\cos\beta.$$

Analogicky pro trojúhelník AHJ ($|\angle JAH| = 180^\circ - \alpha$) zjistíme

$$S_4 = |JH|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \alpha),$$

$$S_4 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Podobně pro trojúhelník FGC ($|\angle FCG| = 180^\circ - \gamma$) platí

$$S_6 = |FG|^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(180^\circ - \gamma),$$

$$S_6 = b^2 + a^2 + 2ab\cos\gamma.$$

Potom můžeme psát

$$S_4 + S_5 + S_6 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma.$$

Pomocí kosinové věty získáme také vztahy pro obsahy S_1, S_2 a S_3

$$S_1 = |BC|^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha = a^2 \;\rightarrow\; 2cb\cos\alpha = c^2 + b^2 - a^2,$$

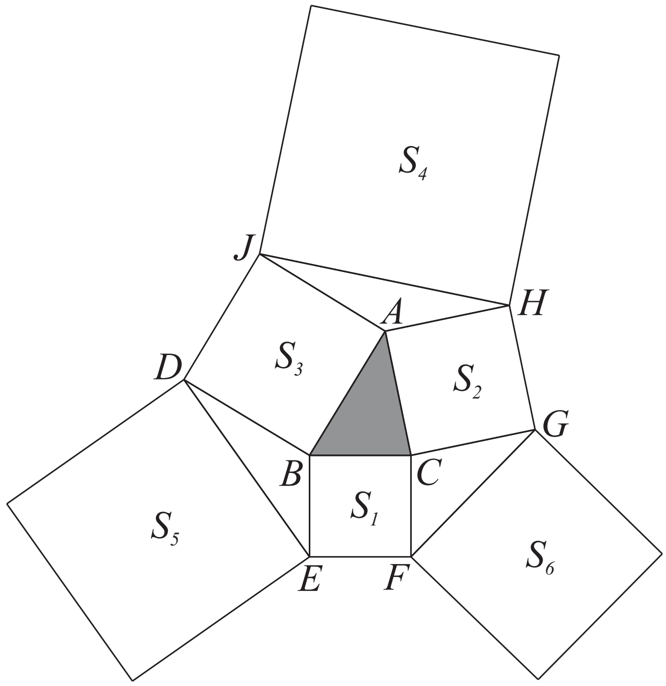
$$S_2 = |AC|^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta = b^2 \;\rightarrow\; 2ac\cos\beta = c^2 + a^2 - b^2,$$

$$S_3 = |AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \;\rightarrow\; 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$S_4 + S_5 + S_6 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + \underbrace{c^2 + b^2 - a^2}_{2cb\cos\alpha} + \underbrace{c^2 + a^2 - b^2}_{2ac\cos\beta} + \underbrace{a^2 + b^2 - c^2}_{2ab\cos\gamma} = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Platí tedy $S_4 + S_5 + S_6 = 3(S_1 + S_2 + S_3)$.



Obrázek 2.10:

2.3 3. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Dokažte, že každé liché přirozené číslo větší než 3 může být délkou odvěsny pythagorejského trojúhelníka.
   (Pythagorejský trojúhelník = pravoúhlý trojúhelník, který má celočíselné délky stran.)

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Narýsujte sítě několika čtyřstěnů takových, že tři ze stěn každého z nich jsou pravoúhlé trojúhelníky. Ukázky volte tak, aby pravé úhly byly různě rozloženy vzhledem k vrcholům čtyřstěnu.
   (Čtyřstěn = trojboký jehlan.)

3. Zjistěte

   (a) pro která lichá $n \geq 3$ existuje jen jediná trojice délek n, b, c určujících pythagorejský trojúhelník tak, že n je délka odvěsny,

   (b) která sudá n nejsou nikdy délkou odvěsny pythagorejského trojúhelníka.

4. Existují pythagorejské trojúhelníky o stranách

$a_1 = 3$	$b_1 = 4$	$c_1 = 5$
$a_2 = c_1 = 5$	$b_2 = 12$	$c_2 = 13$
$a_3 = c_2 = 13$	$b_3 = 84$	$c_3 = 85$
$a_4 = c_3 = 85$	$b_4 = ?$	$c_4 = ?$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

   Určete b_4, c_4.
   Dokažte, že posloupnost $\{T_n\}$ je nekonečná.
   Napište rekurentní předpis pro výpočet $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1}$.

5. Dokažte, že

   (a) posloupností $\{P_n\}$ pythagorejských trojúhelníků takových, že $a_{n+1} = c_n$ je nekonečně mnoho,

   (b) posloupnost $\{P_n\}$ může začínat kterýmkoliv pythagorejským trojúhelníkem.

6. Dokončete následující tvrzení.
   Pro každý čtyřstěn $ABCD$ platí,

   (a) jestliže úhly ADB, BDC, CDA jsou všechny pravé, pak trojúhelník ABC je . . . ,

   (b) jestliže úhly ACB, CBD, DAC jsou všechny pravé, pak úhel ADB je . . . .

7. Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn jehož všechny stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky.

Řešení

1. Text úlohy. Dokažte, že každé liché přirozené číslo větší než 3 může být délkou odvěsny pythagorejského trojúhelníka.
(Pythagorejský trojúhelník = pravoúhlý trojúhelník, který má celočíselné délky stran.)

   Řešení úlohy. Jestliže zvolíme

$$\begin{aligned} a &= 2n + 1, \\ b &= 2n^2 + 2n, \\ c &= 2n^2 + 2n + 1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

   kde $n \in \mathbf{N}$, představují čísla a, b, c délky stran pythagorejského trojúhelníka, neboť

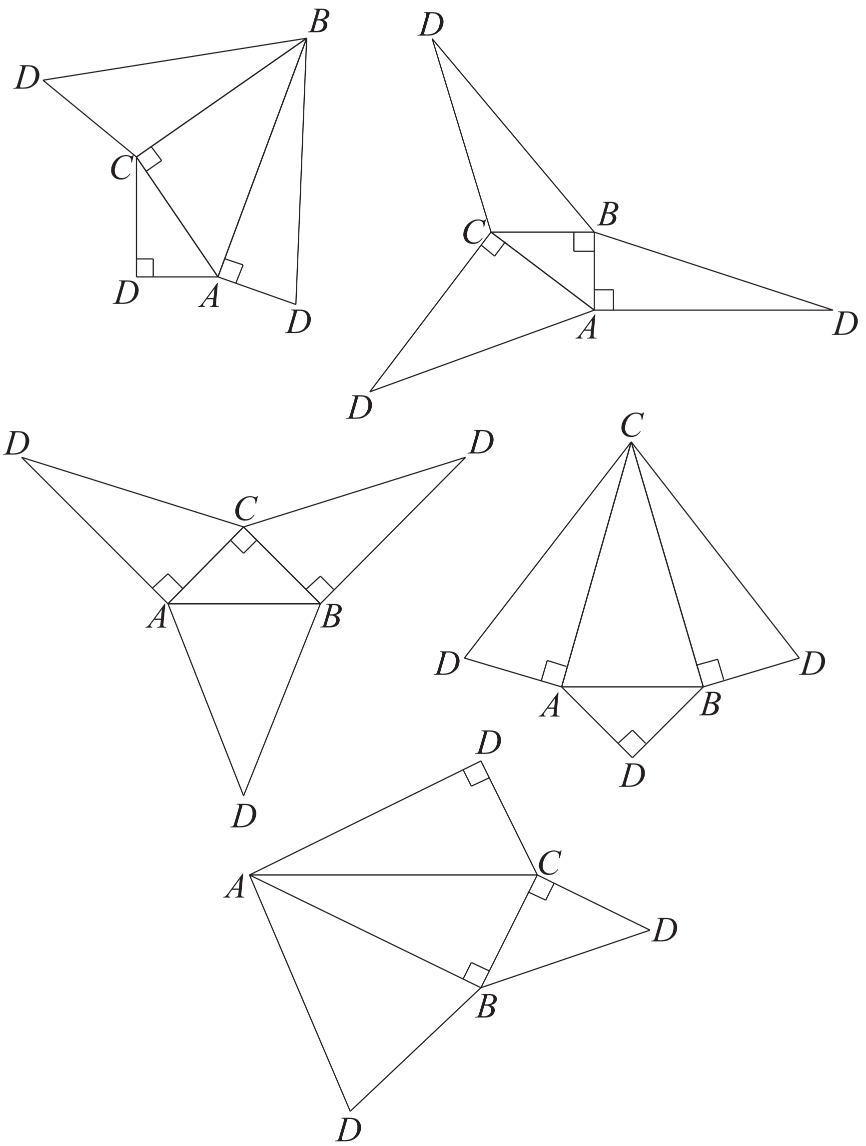
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = \\ &= 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 = \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (2n^2 + 2n + 1)^2 = \\ &= 4n^4 + 4n^3 + 2n^2 + 4n^3 + 4n^2 + 2n + 2n^2 + 2n + 1 = \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

   Potom a nabývá všech hodnot lichých čísel větších než jedna. Tím je úloha dokázána.

2. Text úlohy. Narýsujte sítě několika čtyřstěnů takových, že tři ze stěn každého z nich jsou pravoúhlé trojúhelníky. Ukázky volte tak, aby pravé úhly byly různě rozloženy vzhledem k vrcholům čtyřstěnu.
(Čtyřstěn = trojboký jehlan.)

Řešení úlohy. Je uvedeno na obr. 2.11.



Obrázek 2.11:

K řešení následujících úloh je užitečné znát řešení pythagorejské diofantské rovnice, které pochází z práce [1].

Řešte neurčitou rovnici

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2.5}$$

v oboru celých čísel.

Budeme hledat tři celá čísla x, y, z, která vyhovují rovnici (2.5). Předpo-

kládejme, že tato rovnice má řešení v množině celých čísel. Ukazuje se, že stačí hledat tři celá čísla x, y, z, která nemají společného dělitele různého od jedné.
Uvažujme, že x a y mají největšího společného dělitele d různého od jedné. Podle definice společného dělitele můžeme napsat, že $x = x_1 d$, $y = y_1 d$, kde x_1, y_1 jsou celá čísla, takže rovnice (2.5) bude mít tvar

$$x_1^2 d^2 + y_1^2 d^2 = z^2.$$

Odtud vyplývá, že z^2 je dělitelné d^2 a tedy z je násobkem d, $z = z_1 d$, kde z_1 je celé číslo. Můžeme proto rovnici (2.5) napsat ve tvaru

$$x_1^2 d^2 + y_1^2 d^2 = z_1^2 d^2$$

a po vykrácení

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2,$$

kde x_1, y_1 nemají společného dělitele kromě jedné. Dokonce platí $D(x_1, y_1, z_1) = 1$. Najdeme-li všechna řešení rovnice (2.5), pro která $D(x, y) = 1$, potom každé takové řešení $[x_0, y_0, z_0]$ můžeme získat celou sérii řešení ve tvaru $[nx_0, ny_0, nz_0]$, kde n je celé číslo.
Nechť $D(x, y) = 1$. Odtud je zřejmé, že všechna tři čísla nemohou být sudá, dokonce ani dvě z nich nemohou být sudá, protože by jedna část rovnice (2.5) byla dělitelná dvěma a druhá ne. Všechna tři čísla nemohou být současně lichá, protože součet dvou lichých čísel je sudé číslo. Zbývají dvě možnosti: buď jsou liché obě odvěsny (tj. x a y) a sudá přepona z, nebo lichá jedna odvěsna a přepona, druhá sudá. Snadno vyzkoušíme první možnost.
Nechť $x = 2p + 1$, $y = 2q + 1$, kde p, q jsou celá čísla. Potom

$$(2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2.$$

Tento součet je dělitelný dvěma, ale ne čtyřmi. Ale druhá mocnina libovolného sudého čísla je dělitelná čtyřmi a druhá mocnina libovolného lichého čísla není dělitelná dvěma. Tedy součet druhých mocnin dvou lichých čísel nemůže být ani druhou mocninou lichého, ani druhou mocninou sudého čísla. Jsou-li všechny tři strany pravoúhlého trojúhelníka celá nesoudělná čísla, je pouze možné, aby jedna z odvěsen (označíme ji y) bylo sudé a druhá odvěsna (označíme x) a přepona (označíme z) byly liché číslo. Potom odvěsnu y můžeme vyjádřit jako $y = 2v$, kde v je celé číslo, takže rovnice (2.5) bude mít tvar

$$\begin{aligned} x^2 + 4v^2 &= z^2, \\ 4v^2 &= z^2 - x^2, \\ 4v^2 &= (z + x)(z - x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Protože součet a rozdíl dvou lichých čísel z a x je číslo sudé, položíme

$$\begin{aligned} z + x &= 2u, \\ z - x &= 2t, \end{aligned}$$

kde u, t jsou celá čísla. Zřejmě $D(u,t) = 1$, přičemž jedno z čísel u a t je sudé a druhé liché číslo. Vyjádříme-li si totiž z a x pomocí u a t, dostaneme

$$\begin{aligned} z &= u + t, \\ x &= u - t. \end{aligned}$$

Kdyby čísla u a t měla společného dělitele různého od jedné, měla by jej i čísla z a x, což odporuje našemu předpokladu a vzájemné nesoudělnosti čísel x, y, z. Čísla u a t nemohou být obě zároveň sudá nebo lichá, protože by číslo z bylo sudé, což není možné. Jestliže $z + x = 2u$, $z - x = 2t$, potom rovnice (2.6) je

$$\begin{aligned} 4v^2 &= 4ut, \\ v^2 &= ut. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Protože $D(u,t) = 1$, musí se $u = p^2$, $t = q^2$, kde p, q jsou celá čísla, aby byla splněna rovnice (2.7). Protože jedno z čísel u a t je liché a druhé sudé, musí být jedno z čísel p, q liché a druhé sudé, navíc $D(p,q) = 1$. Tedy

$$\begin{aligned} z &= u + t = p^2 + q^2, \\ x &= u - t = p^2 - q^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Druhá odvěsna má pak tvar

$$\begin{aligned} y^2 &= z^2 - x^2 = \left(p^2 + p^2\right)^2 - \left(p^2 - q^2\right)^2 = 4p^2q^2, \\ y &= \pm 2pq. \end{aligned}$$

Řešení Pythagorovy rovnice je dáno vzorci

$$x = p^2 - q^2, \qquad y = 2pq, \qquad z = p^2 + q^2, \tag{2.9}$$

kde p, q jsou nesoudělná celá čísla, jedno z nich je sudé a druhé liché číslo.

3. Text úlohy. Zjistěte,

   (a) pro která lichá $n \geq 3$ existuje jen jediná trojice délek n, b, c určujících pythagorejský trojúhelník tak, že n je délka odvěsny,

   (b) která sudá n nejsou nikdy délkou odvěsny pythagorejského trojúhelníka.

   Řešení úlohy

   (a) Nechť
   $$n = 2k + 1,\ \ k \in N. \tag{2.10}$$
   Podle (2.9) je pro primitivní pythagorejskou trojici (přirozená čísla x, y, z, která jsou nesoudělná a splňují rovnici $z^2 = x^2 + y^2$)
   $$n = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q). \tag{2.11}$$
   Porovnáme-li vztahy (2.10) a (2.11), vidíme, že pro $p = q + 1$ platí $n = 2q + 1 = 2k + 1$, tedy $k = q$. Každé liché číslo od trojky počínaje je tedy odvěsnou nějakého primitivního pythagorejského trojúhelníka. Má-li to být odvěsna je nutné, aby n bylo prvočíslo.
   Závěr. Pro každé liché prvočíslo existuje jediná trojice n, b, c určujících pythagorejský trojúhelník.

   (b) Je-li n sudá délka odvěsny pythagorejského trojúhelníka, musí být podle (2.9) tvaru $n = 2pq$, kde p, q jsou přirozená čísla, jedno z nich je sudé a druhé liché číslo. Je tedy n dělitené čtyřmi.
   Závěr. Čísla $n = 2k$, kde k je liché číslo, nejsou nikdy délkou odvěsny pythagorejského trojúhelníka.

4. Text úlohy. Existují pythagorejské trojúhelníky o stranách

$a_1 = 3$	$b_1 = 4$	$c_1 = 5$
$a_2 = c_1 = 5$	$b_2 = 12$	$c_2 = 13$
$a_3 = c_2 = 13$	$b_3 = 84$	$c_3 = 85$
$a_4 = c_3 = 85$	$b_4 = ?$	$c_4 = ?$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Určete b_4, c_4.
Dokažte, že posloupnost $\{T_n\}$ je nekonečná.
Napište rekurentní předpis pro výpočet $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1}$.

Řešení úlohy. Ze zadání vidíme, že uvažované pythagorejské trojice jsou primitivní. Je tedy vždy
$$a_n = p_n^2 - q_n^2, \quad b_n = 2pq, \quad c = p_n^2 - q_n^2, \tag{2.12}$$

kde p, q jsou nesoudělná čísla a mají různou paritu. Zkusíme hledat p, q, která vyjadřují dané trojice a výsledek shrneme do následující tabulky:

n	a_n	b_n	c_n	p_n	q_n
1	3	4	5	2	1
2	5	12	13	3	2
3	13	84	85	7	6
4	85	3612	3613	43	42
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabulka 2.1:

Vidíme, že $p_n = q_n + 1$ a $q_{n+1} = p_n \cdot q_n$. Vztahy (2.12) lze přepsat do tvaru

$$a_n = (q_n + 1)^2 - q_n^2, \qquad b_n = 2q_n(q_n + 1) \qquad \text{a} \qquad c_n = (q_n + 1)^2 .$$

Odtud po úpravě máme

$$a_n = 2q_n + 1, \qquad b_n = 2q_n(q_n + 1), \qquad c_n = 2q_n^2 + 2q_n + 1. \quad (2.13)$$

Ze vztahů (2.13) plyne, že posloupnost $\{T_n\}$ je nekonečná.

Z podmínky $a_{n+1} = c_n$ dostaneme $2q_{n+1} + 1 = c_n$. Odtud

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{c_n - 1}{2}, \\ b_{n+1} &= 2q_{n+1} \cdot (q_{n+1} + 1) = 2 \cdot \frac{c_n - 1}{2} \left(\frac{c_n - 1}{2} + 1 \right) = \frac{(c_n + 1)(c_n - 1)}{2}, \\ c_{n+1} &= b_{n+1} + 1 = \frac{(c_n + 1)(c_n - 1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Rekurentní předpis naší posloupnosti má tedy tvar

$$a_{n+1} = c_n, \quad b_{n+1} = \frac{(c_n + 1)(c_n - 1)}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{(c_n + 1)(c_n - 1)}{2} + 1.$$

5. Text úlohy. Dokažte, že

   (a) posloupností $\{P_n\}$ pythagorejských troúhelníků takových, že $a_{n+1} = c_n$ je nekonečně mnoho,

   (b) posloupnost $\{P_n\}$ může začínat kterýmkoliv pythagorejským trojúhelníkem.

Řešení úlohy. Z postupu uvedeného v předchozí úloze vyplývá řešení úkolu (a) i (b).

(a) Můžeme zvolit libovolný primitivní pythagorejský trojúhelník jako první člen posloupnosti $\{P_n\}$ a vytvořit tabulku určující posloupnost postupem analogickým předchozímu řešení. Další posloupnosti získáme, když všechny členy některé již vytvořené posloupnosti $\{P_n\}$ vynásobíme přirozeným číslem $k > 1$. Například zvolíme $q_1 = 3$ ($q_{n+1} = (c_n - 1)/2$) a dostaneme posloupnost, kterou uvádí tabulka 2.2

n	q_n	$a_n = 2q_n + 1$	$b_n = 2q_n(q_n + 1)$	$c_n = 2q_n^2 + 2q_n + 1$
1	3	7	24	25
2	12	25	312	323
3	156	313	48984	48985
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabulka 2.2:

(b) Další posloupnost může být tvořena členy, které získáme jako dvojnásobky členů z předchozí tabulky (tzn. zvolíme $k = 2$) ($q_{n+1} = (c_n - 2)/4$)

n	q_n	$a_n = 4q_n + 2$	$b_n = 4q_n(q_n + 1)$	$c_n = 4q_n^2 + 4q_n + 2$
1	3	14	48	50
2	12	50	624	626
3	156	626	97968	97970
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabulka 2.3:

6. Text úlohy. Dokončete následující tvrzení.
Pro každý čtyřstěn $ABCD$ platí

(a) jestliže úhly ADB, BDC, CDA jsou všechny pravé, pak trojúhelník ABC je … ,

(b) jestliže úhly ACB, CBD, DAC jsou všechny pravé, pak úhel ADB je … .

Řešení úlohy

(a) Označme $|DA| = x$, $|DB| = y$, $|DC| = z$, a, b, c jsou délky stran trojúhelníka ABC, α, β, γ velikosti jeho vnitřních úhlů. Pak musí platit

$$
\begin{aligned}
c^2 &= x^2 + y^2, \\
a^2 &= y^2 + z^2, \\
b^2 &= x^2 + z^2.
\end{aligned}
$$

Odtud $b^2 + c^2 - a^2 = 2x^2$
a dle kosinové věty ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$)

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{x^2}{bc} > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ je ostrý úhel.}$$

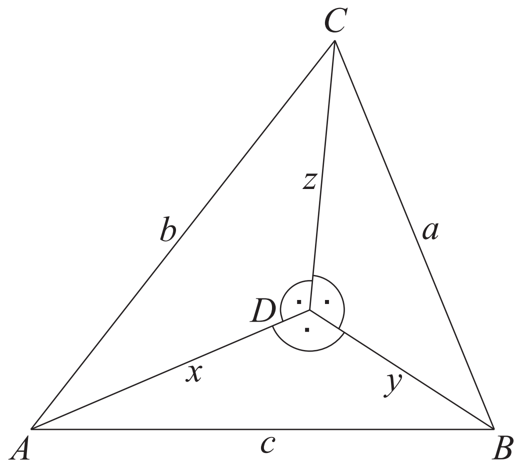
Obdobně $a^2 + c^2 - b^2 = 2y^2$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{y^2}{ac} > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta \text{ je ostrý úhel}$$

a konečně $a^2 + b^2 - c^2 = 2z^2$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac} = \frac{z^2}{ab} > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \text{ je ostrý úhel.}$$

Všechny úhly trojúhelníka ABC jsou ostré, a proto je trojúhelník ABC ostroúhlý.

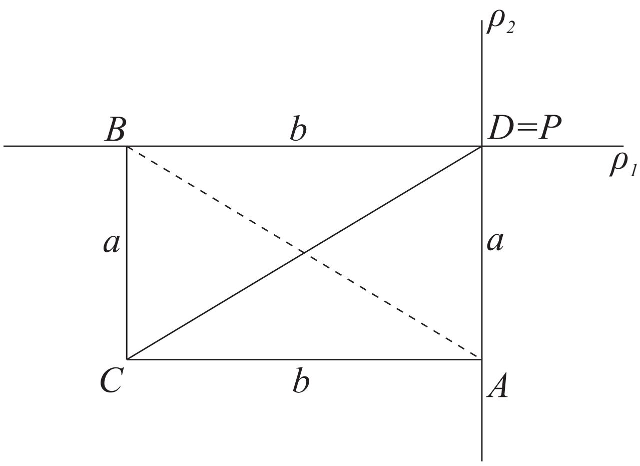


Obrázek 2.12:

(b) Opět označíme $|DA| = x$, $|DB| = y$, $|DC| = z$, a, b, c jsou délky stran trojúhelníka ABC, $|\angle ADB| = \delta$. Podle kosinové věty ($c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\delta$) dostaneme

$$\cos\delta = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{2xy}.$$

Představme si, že síť čtyřstěnu na obr. 2.15 je vyrobena z papíru. Otáčením stěn ABD, BCD a CAD kolem hran AB, BC a CA z ní skládáme čtyřstěn. Bod D_2 se přitom pohybuje v rovině ρ_1 kolmé k rovině $\sigma = ABC$, rovnoběžné s přímkou AC a obsahující bod B. Bod D_3 se pohybuje v rovině ρ_2 kolmé k σ, rovnoběžné s BC a obsahující bod A. Body D_1, D_2 a D_3 se proto setkají na průsečnici rovin ρ_1, ρ_2 a vytvoří vrchol čtyřstěnu. Přímka $p = \rho_1 \cap \rho_2$ je kolmá na rovinu σ, proto při kolmém pohledu shora na rovinu σ vypadá čtyřstěn tak, jak je znázorněno na obr. 2.13. Označme P kolmý průmět vrcholu D do roviny σ a $v = |PD|$.

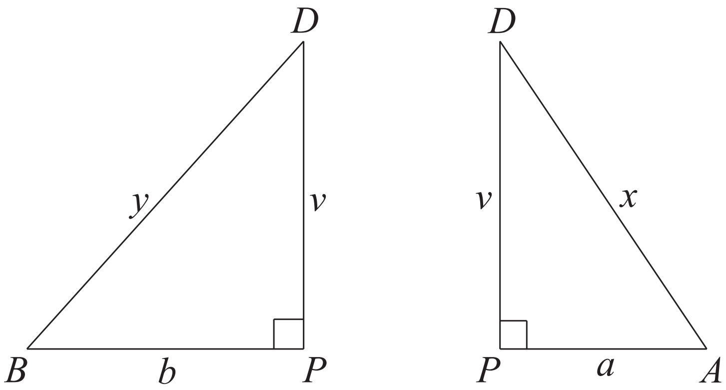


Obrázek 2.13:

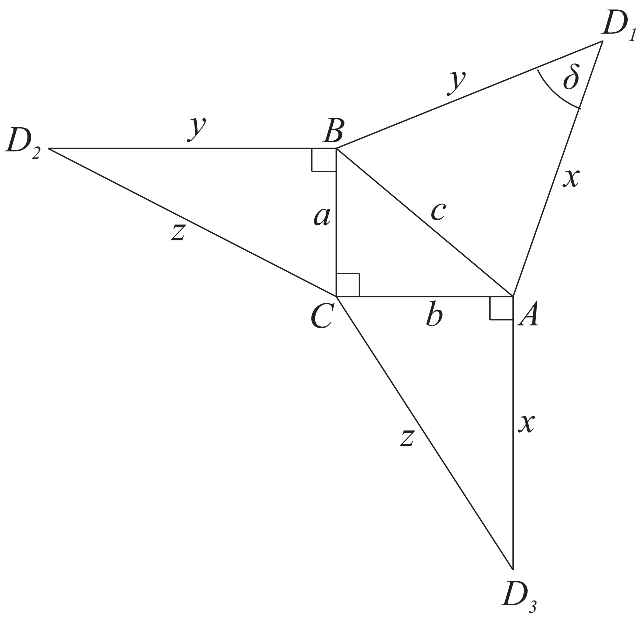
Pak z pravoúhlých trojúhelníků APD a BPD (obr. 2.14) plyne $x > a$ a $y > b$. Odtud $x^2 + y^2 > a^2 + b^2$. Užitím tohoto vztahu a rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ dostaneme

$$\cos\delta = \frac{\overbrace{x^2 + y^2}^{>c^2} - c^2}{2xy} > O.$$

Je tedy $\cos\delta > 0$, což znamená, že δ je ostrý úhel.



Obrázek 2.14:

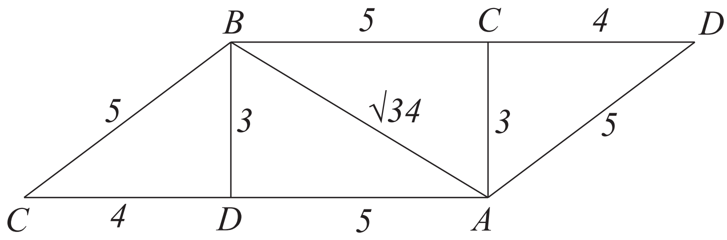


Obrázek 2.15:

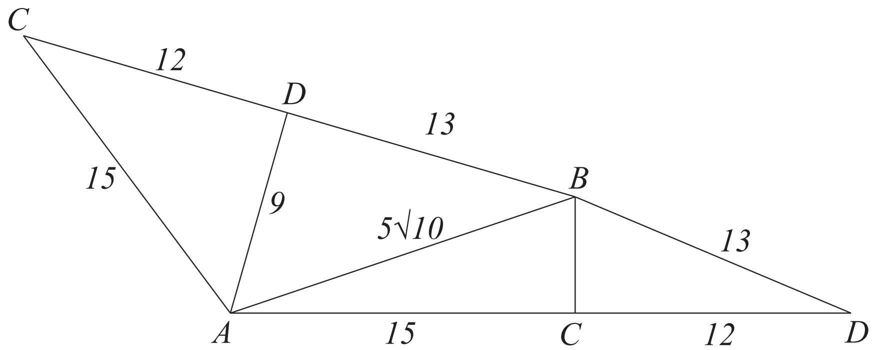
7. Text úlohy. Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn jehož všechny stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky.

   Řešení úlohy. Řešení pochází z práce [2]. Příklady čtyřstěnů lze získat experimentováním, kdy pomůže znalost pythagorejských trojúhelníků. Uvedené jsou jen dvě ukázky obr. 2.16, obr. 2.17.

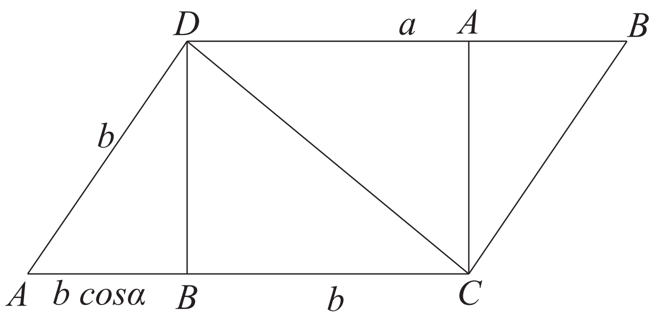
   Poznámka. Nejsnadnější způsob nalezení sítě čtyřstěnu, který má všechny stěny pravoúhlé, je vzít kosodélník s délkami stran a, b a vnitřním ostrém úhlu velikosti α takový, že $a = b + b\cos\alpha$, spojit úhlopříčkou vrcholy, při kterých je tupý úhel a vztyčit úhel v nich kolmice na delší stranu. (obr. 2.18)



Obrázek 2.16:



Obrázek 2.17:



Obrázek 2.18:

Kapitola 3

Ročník 1997/98

3.1 1. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Sudá mocnina přirozeného čísla n se rovná čtyřcifernému číslu, které začíná trojkou a končí pětkou. Určete n.

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že $n = 8p^2 + 1$ je prvočíslem pouze pro $p = 3$.

3. Dokažte, že číslo
   $$a_n = 2^{2^n} + 1$$
   končí číslicí 7 pro každé $n \geq 2$.

4. (a) Dokažte, že mezi 101 náhodně zvolenými trojcifernými čísly lze najít (aspoň) 12 čísel, které začínají stejnou číslicí a 11 čísel, která stejnou číslicí končí.
   (b) Zvolte 101 různých trojciferných čísel tak, že stejnou číslicí jich vždy začíná nejvýše 12 a stejnou číslicí končí nejvýše 11.
   (c) Kolik je mezi zvolenými čísly takových, že stejně začínají i končí? Odpověď zformulujte pro váš konkrétní příklad i pro situaci obecnou.

5. Dokažte, že zlomek
$$\frac{4n+3}{3n+2}$$
nelze krátit pro žádné přirozené n.

6. (a) Ukažte, že existují přirozená čísla a, b, c tak, že jejich součet i součet každé dvojice z nich, je úplný čtverec (čtverec přirozeného čísla).

   (b) Rozhodněte, zda existuje trojice po dvou nesoudělných a, b, c.

Řešení

1. **Text úlohy.** Sudá mocnina přirozeného čísla n se rovná čtyřcifernému číslu, které začíná trojkou a končí pětkou. Určete n.

   Řešení úlohy. Jestliže dekadický zápis čísla n^{2k} končí cifrou 5, pak je

   $$n^k = 10a + 5$$

   a platí

   $$n^{2k} = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10a \cdot 5 + 25.$$

   Odtud po úpravě dostaneme

   $$n^{2k} = 100a(a + 1) + 25.$$

   Číslo n^{2k} je proto

   $$n^{2k} = \overline{3x25},$$

   kde $\overline{3x} = a(a+1)$. Vyzkoušením se přesvědčíme, že vyhovuje jen $a = 5$ a $x = 0$

   $$30 = 5 \cdot 6.$$

   Je tedy

   $$(n^k)^2 = 3025 \quad \text{a} \quad n^k = 55.$$

   Poslední rovnice má řešení jen pro $k = 1$.
   Úloha má jediné řešení $n = 55$.

2. **Text úlohy.** Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že $n = 8p^2 + 1$ je prvočíslem pouze pro $p = 3$.

   Řešení úlohy. Pro $p = 3$ je $n = 8 \cdot 3 + 1 = 73$, což je prvočíslo.
   Je-li p prvočíslo různé od tří, může být buď tvaru $p = 3k + 1$ nebo tvaru $p = 3k + 2$.
   V prvním případě je

   $$n = 8(3k + 1)^2 + 1 = 8(9k^2 + 6k + 1) + 1,$$

   neboli

   $$n = 3(24k^2 + 16k + 3).$$

   Je tedy n dělitelné třemi.
   Ve druhém případě analogicky zjistíme, že

   $$n = 8(3k + 2)^2 + 1 = 3(24k^2 + 32k + 11)$$

   je opět číslo dělitelné třemi. Tím je úloha dokázána.

3. **Text úlohy.** Dokažte, že číslo

$$a_n = 2^{2^n} + 1 \tag{3.1}$$

končí číslicí 7 pro každé $n \geq 2$.

Řešení úlohy. Úlohu dokážeme matematickou indukcí.

I. Pro $n = 2$ platí

$$a_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17.$$

Vidíme, že tvrzení platí, neboť a_2 končí cifrou 7.

II. Ve druhém kroku předpokládáme, že dekadický zápis čísla (3.1) končí cifrou 7 a chceme dokázat, že toutéž cifrou je zakončen i zápis čísla

$$a_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1.$$

Zřejmě platí

$$a_{n+1} = 2^{2 \cdot 2^n} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1. \tag{3.2}$$

Podle indukčního předpokladu je číslo

$$a_n = 2^{2^n} + 1 \qquad \text{tvaru} \qquad 10k + 7.$$

Odtud

$$2^{2^n} = 10k + 6,$$

což dosadíme do (3.2)

$$a_{n+1} = (10k + 6)^2 + 1 = 100k^2 + 120k + 30 + 6 + 1.$$

Je tedy

$$a_{n+1} = 10l + 7,$$

kde $l = 10k^2 + 12k + 3$ je přirozené číslo.
Vidíme, že dekadický zápis čísla a_{n+1} je zakončen cifrou 7 a tím je úloha dokázána.

4. **Text úlohy.**

   (a) Dokažte, že mezi 101 náhodně zvolenými trojcifernými čísly lze najít (aspoň) 12 čísel, které začínají stejnou číslicí a 11 čísel, která stejnou číslicí končí.

   (b) Zvolte 101 různých trojciferných čísel tak, že stejnou číslicí jich vždy začíná nejvýše 12 a stejnou číslicí končí nejvýše 11.

(c) Kolik je mezi zvolenými čísly takových, že stejně začínají i končí? Odpověď zformulujte pro váš konkrétní příklad i pro situaci obecnou.

Řešení úlohy.

(a) Náhodně zvolená trojciferná čísla, která označíme $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$, mají dekadický zápis zakončen stejnou cifrou právě tehdy, když mají stejný zbytek při dělení deseti. Možné zbytky jsou $0, 1, \ldots, 9$. Je tedy deset zbytkových tříd. Jestliže do nich rozdělíme daná čísla, kterých je více než $10 \cdot 10$, bude v aspoň jedné třídě aspoň 11 čísel (Dirichletův princip), která mají zápis zakončen toutéž cifrou.
Analogicky můžeme daná čísla rozdělit do skupin podle toho, jakou mají první cifru. Takových skupin je jen devět, protože první cifra nemůže být 0. Našich čísel je více než $11 \cdot 9$, a proto bude v aspoň jedné skupině aspoň dvanáct čísel.

(b) Zvolíme čísla ve tvaru $\overline{aba}$, kde a jsou cifry $1, 2, \ldots, 9$ a b $0, 1, \ldots, 9$. Pro cifru a máme devět možností pro cifru b deset, celkem dostaneme 90 čísel. Zbývající čísla vybereme například takto $\overline{a00}$ - - devět čísel, poslední dvě mohou být například 110 a 210.

(c) V našem výběru se vyskytuje celkem 90 požadovaných čísel, což je i maximální možný počet. Vyzkoušením se můžeme přesvědčit, že lze čísla vybrat i tak, aby mezi mini nebylo žádné s uvedenou vlastností.

5. Text úlohy. Dokažte, že zlomek

$$\frac{4n+3}{3n+2} \tag{3.3}$$

nelze krátit pro žádné přirozené n.

Řešení úlohy. Kdyby bylo možné zlomek (3.3) krátit, existovalo by celé číslo $d > 1$, které by bylo společným dělitelem čísel $4n+3$ a $3n+2$. Z podmínek $d|4n+3$ a $d|3n+2$ plyne, že d dělí i jejich rozdíl, tedy $d|n+1$. Pak ale též $d|3(n+1)$ a $d|(3(n+1)-(3n+2))$. To znamená, že $d|1$. Zlomek tedy nelze krátit.

6. Text úlohy.

(a) Ukažte, že existují přirozená čísla a, b, c tak, že jejich součet i součet každé dvojice z nich, je úplný čtverec (čtverec přirozeného čísla).

(b) Rozhodněte, zda existuje trojice po dvou nesoudělných a, b, c.

Řešení úlohy.

(a) Ukážeme řešení, které pochází od Diofanta z Alexandrie (3. st. n.l.) a je uvedené v knize [3]. Hledaná čísla označíme a, b, c. Zkusme položit

$$a + b = x^2, \tag{3.4}$$
$$b + c = x^2 - 2x + 1, \tag{3.5}$$
$$a + b + c = x^2 + 2x + 1. \tag{3.6}$$

Vztahy (3.4), (3.5) a (3.6) představují soustavu rovnic s neznámými a, b, c a parametrem $x \in A_t - \{1\}$, kterou snadno vyřešíme a zjistíme

$$a = 4x, \quad b = x^2 - 4x \quad \text{a} \quad c = 2x + 1. \tag{3.7}$$

Ze vztahů navíc vidíme, že součty $a + b$, $b + c$ a $a + b + c$ jsou druhými mocninami přirozených čísel. Zbývá najít takové x, aby i číslo $a + c = 6x + 1$ bylo druhou mocninou přirozeného čísla. Například můžeme zvolit $x = 20$, pak $a = 80$, $b = 320$ a $c = 41$.

Zkouška. $a + b = 400 = 20^2$, $b + c = 361 = 19^2$, $a + c = 121 = 11^2$ a $a + b + c = 441 = 21^2$.

(b) Kdyby byla čísla a, b, c po dvou nesoudělná a platily by vztahy (3.7), muselo by být číslo x liché. Položme tedy $x = 2k + 1$, kde k je celé, nezáporné číslo. Součet $a + c = 6x + 1$ pak nabývá tvaru $12k + 7$ a má být druhou mocninou přirozeného čísla. Ta však při dělení dvanácti nikdy nedává zbytek 7. Je-li totiž m přirozené číslo, které není dělitelné dvanácti, má právě jeden z těchto tvarů

$$6n \pm 1, \quad 6n \pm 2 \quad \text{nebo} \quad 6n + 3 \quad , (n \in A_t).$$

V prvním případě totiž zjistíme, že $m^2 = 12(3n^2 \pm n) + 1$, ve druhém $m^2 = 12(3n^2 \pm 2n) + 4$ a ve třetím $m^2 = 12(3n^2 + 3n) + 9$. Možné nenulové zbytky při dělení druhé mocniny celého čísla číslem 12 jsou tedy pouze 1, 4 a 9.

3.2 2. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Následující tabulka uvádí přehled všech pravidelných mnohostěnů a jejich nejdůležitějších vlastností

Název mnohostěnu	Stěna je	Počet		
		stěn	vrcholů	hran
Pravid. čtyřstěn	rovnostr. trojúhelník	4	4	6
Pravid. šestistěn (krychle)	čtverec	**6**	**8**	12
Pravid. osmistěn	rovnostr. trojúhelník	**8**	**6**	12
Pravid. dvanáctistěn	pravid. pětiúhelník	**12**	**20**	30
Pravid. dvacetistěn	rovnostr. trojúhelník	**20**	**12**	30

Tabulka 3.1:

   Zdůvodněte proč jich nemůže být více.

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Z tabulky (3.1) je vidět (tučný tisk) i dualita mezi pravidelným osmistěnem a krychlí a mezi pravidelným dvanáctistěnem a pravidelným dvacetistěnem. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě. Projevem této duality je i to, že středy stěn každého pravidelného mnohostěnu určují pravidelný mnohostěn duální.

   (a) Dualitu pravidelných mnohostěnů popište vhodně slovy.

   (b) Popsaný geometrický význam duality mezi krychlí a pravidelným osmistěnem znázorněte obrázky ve volné rovnoběžné projekci.

3. Určete mnohostěn, který má za vrcholy středy všech hran zadaného pravidelného čtyřstěnu.
   Doplňte obrázkem.

4. Také u krychle se můžeme ptát, co určují středy jejich hran. Nové těleso vznikne z krychle odříznutím jejích osmi vrcholů - řezy jsou rovnostranné trojúhelníky a z každé stěny zůstane čtvercová stěna: Dostaneme konvexní mnohostěn, jehož stěny jsou 6× čtverec a 8× rovnostranný trojúhelník. Všechny hrany tělesa jsou stejně dlouhé,

v každém vrcholu se stýkají dva čtverce a dva rovnostranné trojúhelníky. Takový mnohostěn nazýváme polopravidelný.

(a) Jiné polopravidelné těleso - osmistěn jehož stěny jsou $4\times$ pravidelný šestiúhelník a $4\times$ rovnostranný trojúhelník získáme z pravidelného čtyřstěnu tak, že vhodně odřízneme jeho vrcholy.
Popište způsob odříznutí vrcholů čtyřstěnu a popište počet hran a stěn, které se v každém vrcholu tohoto polopravidelného tělesa stýkají.

(b) Určete jiný pravidelný konvexní mnohostěn tak, aby se v každém jeho vrcholu stýkaly 3 stěny, z nichž dvě jsou pravidelný šestiúhelník a jedna čtverec.

5. Ukažte, že existuje polopravidelný konvexní s-stěn pro každé $s \geq 5$.

6. Určete aspoň jeden polopravidelný konvexní mnohostěn takový, že se v každém jeho vrcholu stýkají pravidelné stěny z nichž každá má jiný počet hran.

Řešení

Příklady pochází z práce [2].

1. Text úlohy. Následující tabulka uvádí přehled všech pravidelných mnohostěnů a jejich nejdůležitějších vlastností

Název mnohostěnu	Stěna je	Počet		
		stěn	vrcholů	hran
Pravid. čtyřstěn	rovnostr. trojúhelník	4	4	6
Pravid. šestistěn (krychle)	čtverec	**6**	**8**	12
Pravid. osmistěn	rovnostr. trojúhelník	**8**	**6**	12
Pravid. dvanáctistěn	pravid. pětiúhelník	**12**	**20**	30
Pravid. dvacetistěn	rovnostr. trojúhelník	**20**	**12**	30

   Zdůvodněte proč jich nemůže být více.

   Řešení úlohy. V každém vrcholu mnohostěnu se musí stýkat stejný počet stěn, který je aspoň 3. Součet vnitřních úhlů těchto stěn při libovolném vrcholu musí být menší než 360°. To může být splněno jen tak, že se v každém vrcholu stýkají 3, 4 nebo 5 rovnostranných trojúhelníků, 3 čtverce nebo tři pravidelné pětiúhelníky. Víc možností být nemůže, protože situace ve všech vrcholech je shodná: jsou-li pro hledaný pravidelný mnohostěn zadány všechny pravidelné stěny stýkající se v jednom vrcholu, lze konstrukci tělesa jednoznačně provést doplňováním chybějících stěn v dalších vrcholech.

2. Text úlohy. Z tabulky (3.1) je vidět (tučný tisk) i dualita mezi pravidelným osmistěnem a krychlí a mezi pravidelným dvanáctistěnem a pravidelným dvacetistěnem. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě. Projevem této duality je i to, že středy stěn každého pravidelného mnohostěnu určují pravidelný mnohostěn duální.

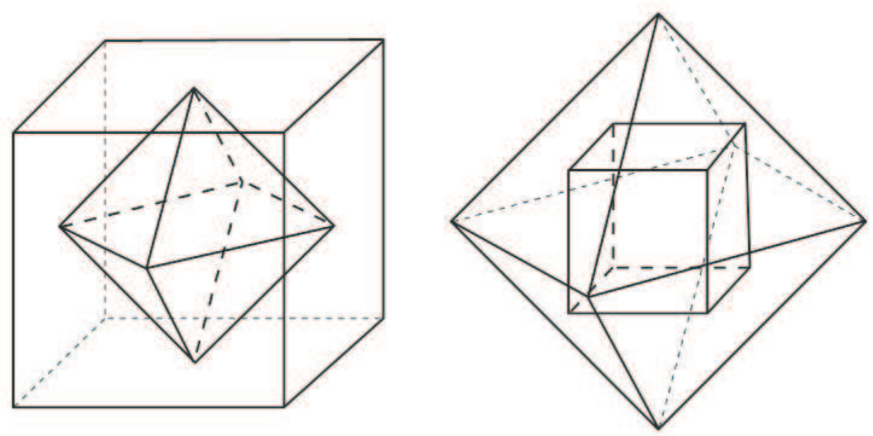
   (a) Dualitu pravidelných mnohostěnů popište vhodně slovy.

   (b) Popsaný geometrický význam duality mezi krychlí a pravidelným osmistěnem znázorněte obrázky ve volné rovnoběžné projekci.

Řešení úlohy.

(a) Pravidelný mnohostěn D duální k danému pravidelnému mnohostěnu M má tolik vrcholů jako měl mnohostěn M stěn a naopak tolik stěn jako měl M vrcholů, oba pak mají stejný počet hran.

(b)

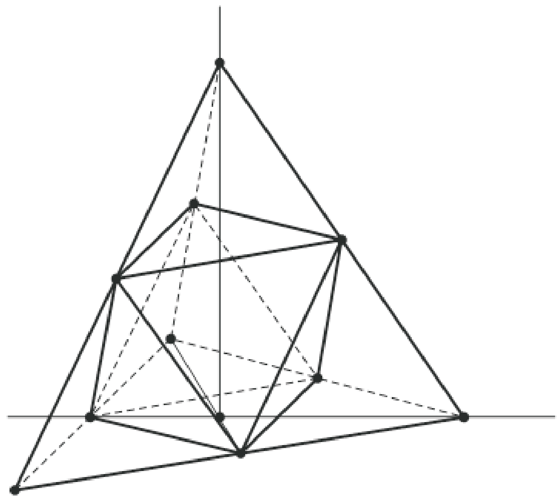


Obrázek 3.1:

3. Text úlohy. Určete mnohostěn, který má za vrcholy středy všech hran zadaného pravidelného čtyřstěnu.
Doplňte obrázkem.

Řešení úlohy. Nechť je dán pravidelný čtyřstěn s hranou délky b. Ukážeme, že středy jeho hran určují pravidelný osmistěn o hraně $b/2$.

Důkaz
Odřízneme-li každý z vrcholů čtyřstěnu rovinou určenou středy právě těch hran, které z něho vycházejí, zůstane nám osmistěn. Řezy jsou trojúhelníky, jejichž všechny strany jsou střední příčky původních stěn a mají proto délku $b/2$. Další čtyři stěny tohoto osmistěnu jsou rovnostranné trojúheníky, které zůstaly ze stěn čtyřstěnu (ohraničené středními příčkami původních stěn). V každém vrcholu osmistěnu se stýkají právě čtyři rovnostranné trojúhelníky.
Osmistěn je tedy pravidelný.



Obrázek 3.2:

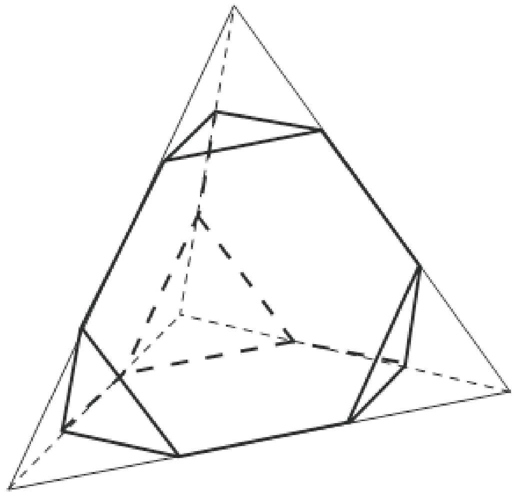
4. Text úlohy. Také u krychle se můžeme ptát, co určují středy jejich hran. Nové těleso vznikne z krychle odříznutím jejích osmi vrcholů - řezy jsou rovnostranné trojúhelníky a z každé stěny zůstane čtvercová stěna: Dostaneme konvexní mnohostěn, jehož stěny jsou 6× čtverec a 8× rovnostranný trojúhelník. Všechny hrany tělesa jsou stejně dlouhé, v každém vrcholu se stýkají dva čtverce a dva rovnostranné trojúhelníky. Takový mnohostěn nazýváme polopravidelný.

   (a) Jiné polopravidelné těleso - osmistěn jehož stěny jsou 4× pravidelný šestiúhelník a 4× rovnostranný trojúhelník získáme z pravidelného čtyřstěnu tak, že vhodně odřízneme jeho vrcholy.
   Popište způsob odříznutí vrcholů čtyřstěnu a popište počet hran a stěn, které se v každém vrcholu tohoto polopravidelného tělesa stýkají.

   (b) Určete jiný pravidelný konvexní mnohostěn tak, aby se v každém jeho vrcholu stýkaly 3 stěny, z nichž dvě jsou pravidelný šestiúhelník a jedna čtverec.

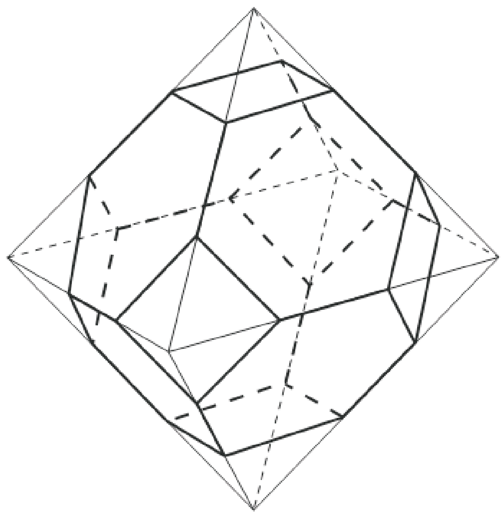
Řešení úlohy

   (a) Každý vrchol odřízneme tak, že řez vedeme v jedné třetině hran vycházejících z tohoto vrcholu (od daného vrcholu). Z každého vrcholu tohoto polopravidelného tělesa vycházejí 3 hrany a stýkají se v něm jeden rovnostranný trojúhelník se dvěma pravidelnými šestiúhelníky.



Obrázek 3.3:

(b) Tento mnohostěn (otupený osmistěn), získáme odřezáváním vrcholů pravidelného osmistěnu.
Řezy i tentokrát vedeme ve třetinách hran.



Obrázek 3.4:

5. **Text úlohy.** Ukažte, že existuje polopravidelný konvexní s-stěn pro každé $s \geq 7$.

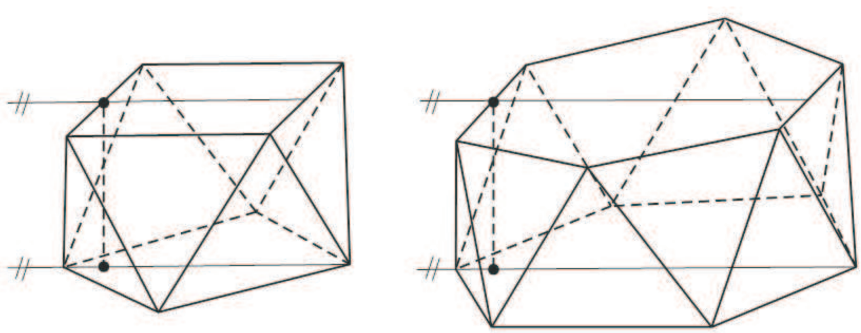
Řešení úlohy. Existují dokonce dvě nekonečné množiny polopravidelných

s-stěnů.

(a) Pravidelné hranoly se čtvercovými stěnami
Trojboký má právě 5 stěn, pětiboký má 7 stěn, n-boký pak má $n + 2$ stěn pro $n \geq 3$. V této množině je však pro $n = 4$ i krychle, tj. příslušný šestistěn je dokonce pravidelný (tedy není polopravidelný).

(b) Antihranoly, jejichž podstavy jsou pravidelné n-úhelníky (navzájem pootočené o $180°/n$) a boční stěny rovnostranné trojúhelníky. V každém vrcholu se stýkají právě tři rovnostranné trojúhelníky a n-úhelník. Celkový počet stěn je $2n+2$, tedy všechna sudá čísla počínaje 10 (pro $n = 3$ sem patří pravidelný osmistěn). Ukázky antihranolů pro $n = 4$ a pro $n = 6$ můžeme vidět na obr. 3.5.

Polopravidelný s-stěn existuje pro každé $s \geq 7$.



Obrázek 3.5:

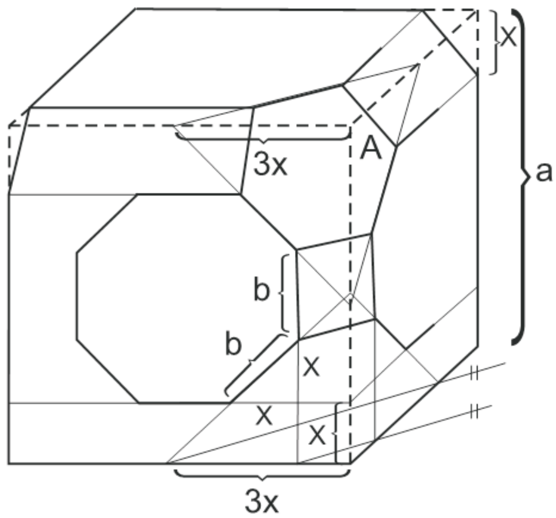
6. Text úlohy. Určete aspoň jeden polopravidelný konvexní mnohostěn takový, že se v každém jeho vrcholu stýkají pravidelné stěny z nichž každá má jiný počet hran.

Řešení úlohy. Lze snadno ukázat, že počet hran a stěn při jednom vrcholu musí být právě tři. Pokud by se totiž v určitém vrcholu stýkaly čtyři pravidelné stěny např. trojúhelník, čtverec, pětiúhelník a šestiúhelník bude součet hranových úhlů při tomto vrcholu 378° a mnohostěn nemůže být konvexní. Pro jinou kombinaci čtyř stýkajících se stěn je součet úhlů ještě větší.
Příklad takového tělesa získáme z krychle s délkou hrany a tak, že odřežeme všechny hrany rovinami rovnoběžnými vždy s odřezávanou hranou a současně též odřízneme původní vrcholy. Místo dvanácti hran

získáme čtverce, místo osmi vrcholů pravidelné šestiúhelníky a z původních šesti stěn zbudou pravidelné osmiúhelníky. Všechny hrany nového tělesa musí mít tutéž délku b. Vzdálenost x charakterizující vedené řezy je nutno spočítat

$$
b = a - 4x = x\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad
\begin{aligned}
a &= 4x + x\sqrt{2}, \\
a &= x(4+\sqrt{2}), \\
x &= \frac{a}{4+\sqrt{2}} \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \frac{a(4-\sqrt{2})}{14},
\end{aligned}
$$

což je přibližně $0,185a$.
Rovina odřezávající hranu, která jde z vrcholu A, je s ní rovnoběžná a protíná obě další hrany vycházející z A ve vzdálenosti x od A. Rovina odřezávající vrchol A protíná všechny původní hrany jdoucí z A ve vzdálenosti $3x$ od A.



Obrázek 3.6:

Poznámka. Existuje ještě další typ mnohostěnu se třemi různými typy stěn stýkajícími se v každém vrcholu. Jeho hranice je složena ze čtverců, pravidelných šestiúhelníků a pravidelných desetiúhelníků. Tento 62-stěn lze získat ořezáváním pravidelného dvanáctistěnu.

3.3 3. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
Matka rozdala 26 bonbonů svým čtyřem malým synům. První (nejstarší) jich snědl stejně jako třetí, druhý snědl polovinu svého původního počtu a čtvrtý snědl tolik jako všichni tři ostatní dohromady. Pak jim zbylo každému stejně. Kolik který dostal a snědl?

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro která platí
$$8x^3 - y^3 = 387$$

3. Martin řekl Janě: "Jsem třikrát starší, než jsi byla ty, když mi bylo tolik let, kolik je ti nyní." Jana odpověděla: "Když mi bude tolik, kolik je ti nyní, bude nám dohromady 77 let."
Kolik let měl v době tohoto rozhovoru Martin a kolik Jana?

4. Pro které hodnoty reálného parametru m je součet druhých mocnin kořenů rovnice
$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$$
nejmenší?

5. Je dána soustava rovnic
$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{a}, \end{aligned}$$
s neznámými x, y, z a reálným, nenulovým parametrem a.
Dokažte, že z každých tří reálných čísel x, y, z, které soustavě vyhovují, je aspoň jedno rovno číslu a.

6. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y, které vyhovují rovnici
$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

Řešení

1. Text úlohy. Matka rozdala 26 bonbonů svým čtyřem malým synům. První (nejstarší) jich snědl stejně jako třetí, druhý snědl polovinu svého původního počtu a čtvrtý snědl tolik jako všichni tři ostatní dohromady. Pak jim zbylo každému stejně. Kolik který dostal a snědl?

   Řešení úlohy. Nechť každému zbylo x bonbonů. První syn snědl y bonbonů a původně jich měl $x + y$. U třetího tomu bylo stejně. Druhý musel sníst x bonbonů, protože mu zbylo stejně, kolik snědl. Měl tedy původně $2x$ bonbonů. Čtvrtý syn snědl tolik co zbývající tři dohromady, tj. $2y + x$ a původně měl $2x + 2y$. Sečtením původních množství bonbonů sestavíme rovnici

   $$2(x + y) + 2x + 2x + 2y = 26.$$

   Odtud

   $$3x + 2y = 13.$$

   Dosazováním zjistíme, že vyhovuje jen $x = 1$ a $y = 5$ nebo $x = 3$ a $y = 2$.
   Synové v pořadí první, druhý, třetí a čtvrtý dostali buď 6, 2, 6 a 12 bonbonů nebo 5, 6, 5 a 10 bonbonů.

2. Text úlohy. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro která platí

   $$8x^3 - y^3 = 387.$$

   Řešení úlohy. Z daného vztahu plyne

   $$8x^3 > 387$$

   neboli

   $$x > \frac{\sqrt[3]{387}}{2} \doteq 3,644.$$

   Je tedy

   $$x > 3.$$

   Dále platí

   $$y^3 < 8x^3$$

   a odtud

   $$y < 2x.$$

Porovnáním třetích mocnin přirozených čísel zjistíme, že $2x < 12$. Kdyby totiž například platilo $2x = 12$, byla by minimální hodnota levé strany naší rovnice

$$12^3 - 11^3 = 1728 - 1331 = 397 > 387.$$

Budeme hledat $3 < x < 6$, což platí pouze pro $x = 4$ a $x = 5$. Dosadíme za x do původní rovnice a vypočítáme y.
Pro $x = 4$ dostaneme

$$y^3 = 8 \cdot 4^3 - 387 \qquad \text{a odtud} \qquad y = 5.$$

Pro $x = 5$ nedostaneme za y přirozené číslo.
Rovnici vyhovuje pouze jediné řešení $x = 4$ a $y = 5$.

3. Text úlohy. Martin řekl Janě: "Jsem třikrát starší, než jsi byla ty, když mi bylo tolik let, kolik je ti nyní." Jana odpověděla: "Když mi bude tolik, kolik je ti nyní, bude nám dohromady 77 let."
Kolik let měl v době tohoto rozhovoru Martin a kolik Jana?

Řešení úlohy. Věk Martina označme x, věk Jany y. Před d lety, tj. v době o níž se hovoří v Martinově výroku, bylo Martinovi $x - d = y$ let a Janě $y - d$ let. Je tedy $d = x - y$, Janě bylo $2y - x$ let. Pro Martinův věk máme

$$x = 3(2y - x)$$

a po úpravě

$$2x = 3y. \tag{3.8}$$

Z druhého tvrzení analogicky zjistíme

$$x + (x + (x - y)) = 77,$$

odkud

$$y = -77 + 3x. \tag{3.9}$$

Po dosazení do rovnice (3.8) dostaneme rovnici

$$2x = 3(-77 + 3x),$$

z níž snadno vypočteme

$$x = 33.$$

Dosadíme x do rovnice (3.9) a zjitíme $y = 22$.
Martinovi je 33 let a Janě 22 let.

4. Text úlohy. Pro které hodnoty reálného parametru m je součet druhých mocnin kořenů rovnice

$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$$

nejmenší?

Řešení úlohy. Předpokládáme, že x patří do oboru reálných čísel. Daná rovnice má vždy dva různé reálné kořeny, neboť její diskriminant je

$$D = (m-2)^2 + 4(m+3) = m^2 + 16 > 0.$$

Podle vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice platí

$$x_1 + x_2 = -(m-2), \tag{3.10}$$
$$x_1 x_2 = -(m+3), \tag{3.11}$$

a proto

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Dosadíme rovnice (3.10), (3.11) a dostaneme

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (2-m)^2 + 2(m+3) = 4 - 4m + m^2 + 2m + 6 = \\ &= m^2 - 2m + 1 + 9 = (m-1)^2 + 9. \end{aligned}$$

Poslední výraz má nejmenší hodnotu, právě když je výraz v závorce roven nule, tj. když $m = 1$.

5. Text úlohy. Je dána soustava rovnic

$$x + y + z = a, \tag{3.12}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, \tag{3.13}$$

s neznámými x, y, z a reálným, nenulovým parametrem a.
Dokažte, že z každých tří reálných čísel x, y, z, které soustavě vyhovují, je aspoň jedno rovno číslu a.

Řešení úlohy. Rovnice (3.13) má smysl, jen když jsou jmenovatelé zlomků nenulová čísla. Vynásobíme ji součinem $axyz$ a upravíme na tvar

$$a(yz + zx + xy) - xyz = 0.$$

Za číslo a dosadíme levou stranu rovnice (3.12) a upravíme

$$\begin{aligned}(x+y+z)(xy+yz+xz)-xyz &= (x+y)(xy+yz+xz)+\\ +z(xy+yz+xz-xy) &= (x+y)(xy+yz+xz)+\\ +z^2(x+y) &= (x+y)(y(x+z)+z(x+z)) =\\ &= (x+y)(y+z)(z+x)=0.\end{aligned}$$

Z rovnice

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0$$

pak plyne, že vždy je součet některých dvou kořenů naší soustavy rovnic roven nule. Proto je třetí kořen roven parameru a, jak je vidět z rovnice (3.12).

6. Text úlohy. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y, které vyhovují rovnici

$$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2.$$

Řešení úlohy. Vynásobíme krajní a prostřední výrazy na levé straně rovnice

$$(x^2+8x)(x^2+8x+7)=y^2.$$

Zvolíme-li nyní substituci

$$u=x^2+8x, \tag{3.14}$$

můžeme rovnici upravit na tvar

$$u^2+7u-y^2=0. \tag{3.15}$$

Nechť m^2 je její diskriminant. Vztah

$$m^2=49+4y^2$$

snadno přepíšeme na tvar

$$(m-2y)(m+2y)=49.$$

Zřejmě musí být m celé číslo a výrazy v závorkách jsou dělitelé čísla $49=1\cdot 7\cdot 7$.
Může být

$$\begin{array}{lll} m-2y=\pm 1 & m-2y=\pm 7 & m-2y=\pm 49\\ m+2y=\pm 49 & m+2y=\pm 7 & m+2y=\pm 1\end{array}$$

Celkem dostaneme 6 soustav rovnic, z kterých si vyjádříme y.

$$\begin{array}{rlrlrl}
m-2y = & \pm 1 & m-2y = & \pm 7 & m-2y = & \pm 49 \\
m+2y = & \pm 49 & m+2y = & \pm 7 & m+2y = & \pm 1 \\
\hline
4y = & \pm 48 & 4y = & 0 & 4y = & \mp 48 \\
y_{1,2} = & \pm 12 & y_3 = & 0 & y_{4,5} = & \mp 12
\end{array}$$

Nalezené hodnoty y nám umožňují stanovit u ze vztahu (3.15). Pro $y_1 = y_4 = 12$ a pro $y_2 = y_5 = -12$ dostaneme

$$u^2 + 7u - (\pm 12)^2 = 0,$$
$$u^2 + 7u - 144 = 0,$$

$$u_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+576}}{2} = \frac{-7 \pm 25}{2} \begin{cases} -16 \\ 9. \end{cases}$$

Hodnoty $u_1 = -16$ a $u_2 = 9$ dosadíme do substitučního vztahu (3.14) a vyjádříme x. Pro u_1 dostáváme

$$x^2 + 8x + 16 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = -4.$$

Analogicky pro u_2 platí

$$x^2 + 8x - 9 = 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} \begin{cases} 1 \\ -9. \end{cases}$$

Ještě nám zbývá spočítat x pro $y_5 = 0$. Opět dosadíme do vztahu (3.15) a po vytknutí dostaneme

$$u(u+7) = 0 \quad \text{odkud} \quad u_3 = 0,\ u_4 = -7.$$

Po dosazení do (3.14) dostaneme, že

$$x^2 + 8x = 0 \quad \text{nebo} \quad x^2 + 8x + 7 = 0.$$

První rovnice má kořeny $x_5 = 0$ a $x_6 = -8$, druhá $x_7 = -1$ a $x_8 = -7$.

Závěr. Původní rovnici vyhovuje celkem 10 uspořádaných dvojic $[x, y]$. Jsou to tyto dvojice: $[-9, \pm 12]$, $[-8, 0]$, $[-7, 0]$, $[-4, \pm 12]$, $[-1, 0]$, $[0, 0]$, $[1, \pm 12]$.

3.4 4. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB při běžném označení délek stran je poloměr kružnice vepsané dán vztahem
   $$r = \frac{ab}{a+b+c},$$
   $$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je v výška z vrcholu C. Dokažte, že trojúhelník se stranami délek v, $v+c$, $a+b$ je také pravoúhlý.

3. Rovnoramennému pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je vepsán pravoúhelník $CXYZ$ tak, že body X, Y, Z leží po řadě na úsečkách AC, AB, BC. Určete poměr $|AY| : |YB|$, je-li obsah pravoúhelníka $CXYZ$ roven 18% obsahu trojúhelníka ABC.

4. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme M střed přepony AB. Odvěsny trojúhelníka mají délky 6 cm a 8 cm.
   Vypočítejte vzdálenost středů kružnic vepsaných trojúhelníkům AMC, MBC.

5. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je Q pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, AQC, QBC označme po řadě r, r_1, r_2. Dokažte, že platí
   $$|CQ| = r_1 + r_2 + r.$$

6. Určete obsah pravoúhlého trojúhelníka ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li jeho obvod $o = 72$ cm a rozdíl délky těžnice t_c a výšky v_c je $m = t_c - v_c = 7$ cm.

Řešení

1. Text úlohy. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB při běžném označení délek stran je poloměr kružnice vepsané dán vztahy

$$r = \frac{ab}{a+b+c}, \tag{3.16}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}. \tag{3.17}$$

Řešení úlohy
I. Způsob
Vztah (3.16) je přímým důsledkem porovnání dvou vzorců pro obsah pravoúhlého trojúhelníka. Ze zápisu

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2} = \frac{ab}{2},$$

totiž snadno zjistíme, že $r = ab/(a+b+c)$.
Vztah (3.17) dostaneme, když zlomek (3.16) rozšíříme výrazem $a+b-c$ a jmenovatel upravíme následovně

$$((a+b)+c)((a+b)-c) = a^2+b^2-c^2+2ab = 2ab,$$

neboť v pravoúhlém trojúhelníku ABC a podle Pythagorovy věty platí $c^2 = a^2 + b^2$. Je tedy

$$r = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}.$$

II. Způsob
Podle obr. 3.7 je čtyřúhelník $KCLO$ čtverec a proto

$$|KC| = |LC| = r.$$

Položme ještě

$$x = |AL| = |AM| \quad \text{a} \quad y = |BK| = |BM|.$$

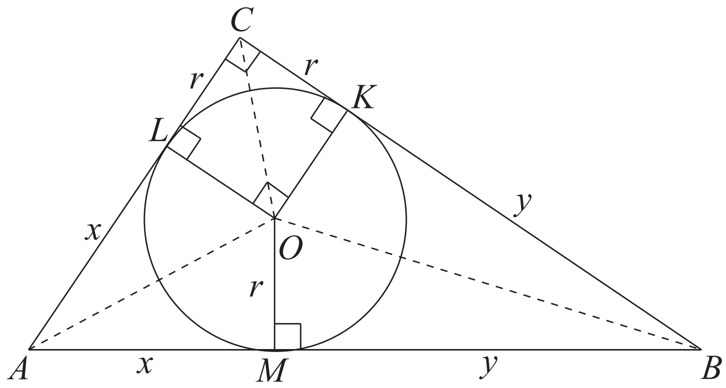
Zřejmě je

$$c = x + y,$$
$$s = \frac{o}{2} = x + y + r.$$

Z těchto vztahů pak obdržíme

$$r = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

Tím jsme dokázali vztah (3.17). Vztah (3.16) obdržíme, když poslední zlomek rozšíříme výrazem $a+b+c$ a upravíme analogicky jako u prvního způsobu.



Obrázek 3.7:

2. Text úlohy. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je v výška z vrcholu C. Dokažte, že trojúhelník se stranami délek v, $v+c$, $a+b$ je také pravoúhlý.

Řešení úlohy. Platí

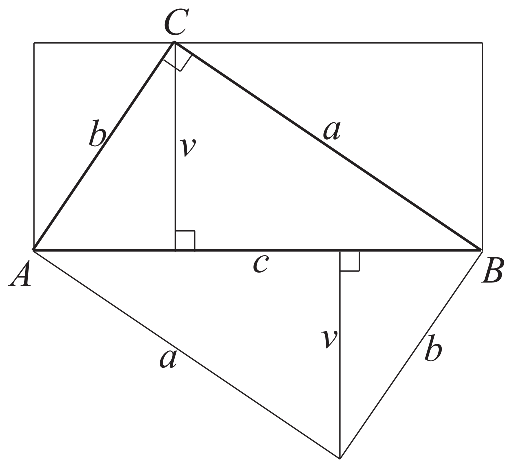
$$(v+c)^2 = v^2 + 2cv + c^2,$$

kde $cv = ab$ (obr. 3.8) a podle Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$. Potom můžeme psát

$$(v+c)^2 = v^2 + 2ab + a^2 + b^2 = v^2 + (a+b)^2.$$

Je tedy podle věty obrácené k větě Pythagorově trojúhelník se stranami délek v, $v+c$, $a+b$ pravoúhlý.

Poznámka. Měli bychom rozlišit Pythagorovu větu od tzv. obrácení Pythagorovy věty. Pythagorova věta tvrdí, že v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou délky c a odvěsnami délek a, b platí $a^2 + b^2 = c^2$, kdežto obrácení Pythagorovy věty tvrdí, že když v nějakém trojúhelníku se stranami délek a, b, c platí $a^2 + b^2 = c^2$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý.



Obrázek 3.8:

3. Text úlohy. Rovnoramennému pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je vepsán pravoúhelník $CXYZ$ tak, že body X, Y, Z leží po řadě na úsečkách AC, AB, BC. Určete poměr $|AY| : |YB|$, je-li obsah pravoúhelníka $CXYZ$ roven 18% obsahu trojúhelníka ABC.

   Řešení úlohy. Hledaný poměr označme x. Jelikož trojúhelníky AXY a YZB jsou pravoúhlé a rovnoramenné, platí $|AY| = m\sqrt{2}$, $|YB| = n\sqrt{2}$ (obr. 3.9). Potom platí

$$x = \frac{|AY|}{|YB|} = \frac{m\sqrt{2}}{n\sqrt{2}} = \frac{m}{n}. \tag{3.18}$$

   Z podmínky obsahů plyne

$$mn = \frac{0,18(m+n)^2}{2}.$$

   Rovnici umocníme a upravíme na tvar

$$9m^2 - 82mn + 9n^2 = 0.$$

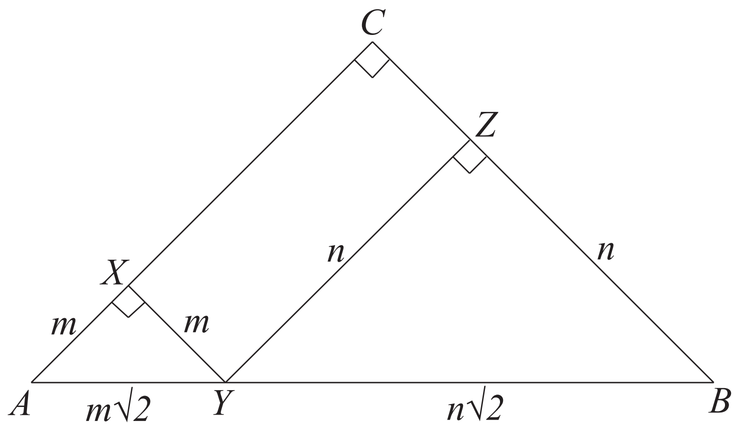
   Po vydělení této rovnice číslem n^2 a využití vztahu (3.18) dostaneme kvadratickou rovnici

$$9x^2 - 82x + 9 = 0,$$

   s kořeny

$$x_{1,2} = \frac{82 \pm 80}{18} = \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ 1/9. \end{array} \right.$$

   Hledaný poměr je 9 : 1 nebo 1 : 9.



Obrázek 3.9:

4. Text úlohy. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme M střed přepony AB. Odvěsny trojúhelníka mají délky 6 cm a 8 cm.
Vypočítejte vzdálenost středů kružnic vepsaných trojúhelníkům AMC, MBC.

Řešení úlohy. Nechť M je střed strany AB. Podle Pythagorovy věty je

$$c = |AB| = 10 \text{ cm}$$

a pro Thaletovu kružnici platí

$$|MA| = |MB| = |MC| = 5 \text{ cm}.$$

Kružnice vepsané rovnoramenným trojúhelníkům BMC a AMC se dotýkají základen BC a AC v jejich středech K, L (Obr. 3.10). Čtyřúhelník $KCLM$ je obdélník se stranami délek $|MK| = |LC| = 3$ cm a $|ML| = |KC| = 4$ cm. Na jeho stranách leží středy O, S vepsaných kružnic. Druhá mocnina vzdálenosti těchto středů je

$$x^2 = |OS|^2 = (4 - m)^2 + (3 - n)^2. \tag{3.19}$$

Tím převádíme úlohu na výpočet poloměrů m, n kružnic vepsaných trojúhelníkům ACM, BCM. Ty však můžeme určit porovnáním vztahů pro výpočet obsahu téhož trojúhelníka

$$S_\triangle = \frac{a+b+c}{2} \cdot \rho = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

kde ρ označuje poloměr kružnice vepsané.
Je tedy

$$S_{\triangle AMC} = \frac{|AM| + |MC| + |CA|}{2} \cdot m = \frac{5+5+6}{2} \cdot m = 8m =$$

$$= \frac{|CA| \cdot |ML|}{2} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2.$$

Odkud

$$m = \frac{3}{2} \text{ cm}.$$

Analogicky platí

$$\begin{aligned} S_{\triangle BCM} &= \frac{|MB| + |BC| + |CM|}{2} \cdot n = \frac{5+8+5}{2} \cdot n = 9n = \\ &= \frac{|BC| \cdot |MK|}{2} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12 \text{ cm}^2, \end{aligned}$$

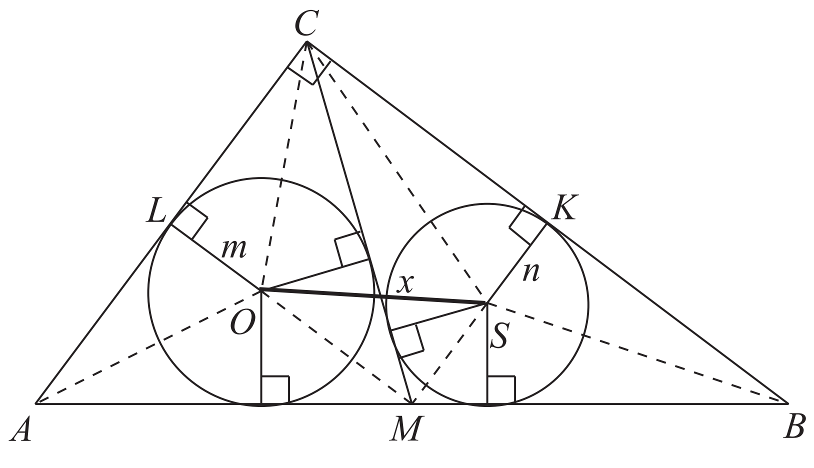
$$n = \frac{4}{3} \text{ cm}.$$

Dosadíme hodnoty m a n do (3.19):

$$x^2 = \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{9} = \frac{325}{36} \text{ cm}^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{325}{36}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 13}}{6} = \frac{5\sqrt{13}}{6} \text{ cm}.$$

Vzdálenost středů kružnic vepsaných trojúhelníkům AMC a MBC je $(5\sqrt{13})/6$ cm.



Obrázek 3.10:

5. Text úlohy. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je Q pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, AQC, QBC označme po řadě r, r_1, r_2. Dokažte, že platí

$$|CQ| = r_1 + r_2 + r.$$

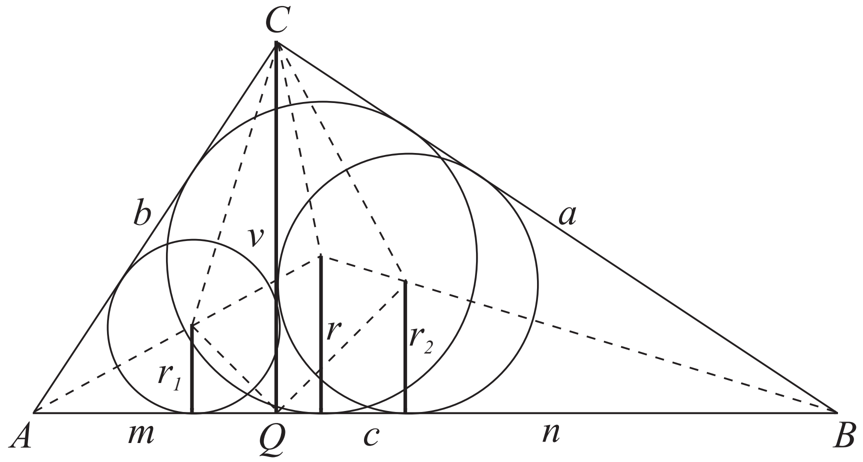
Řešení úlohy. Označme $|CQ| = v$, $|AQ| = m$, $|BQ| = n$. Pomocí již dokázaného vztahu (3.17) (z 1. úlohy) pro trojúhelníky AQC, QBC, a ABC dostáváme

$$r_1 + r_2 + r = \frac{m+v-b}{2} + \frac{n+v-a}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{2v+m+n-c}{2},$$

kde $m + n = c$, potom dostáváme

$$r_1 + r_2 + r = v = |CQ|\,.$$

Tím je tvrzení dokázáno.



Obrázek 3.11:

6. Text úlohy. Určete obsah pravoúhlého trojúhelníka ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li jeho obvod $o = 72$ cm a rozdíl délky těžnice t_c a výšky v_c je $m = t_c - v_c = 7$ cm.

Řešení úlohy
I. Způsob. (Upraveno podle Ivana Piliše, Gymnázium Martin).
Z vlastností Thaletovy kružnice plyne $t_c = c/2$. Proto můžeme podmínku $t_c - v_c = 7$ cm upravit na tvar

$$2v_c = c - 14. \tag{3.20}$$

Čtyřnásobek obsahu trojúhelníka ABC je

$$4S_{\triangle ABC} = 2ab = 2cv_c,$$

odtud

$$2ab = c(c-14),$$

a podle Pythagorovy věty

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab = (72-c)^2 - c(c-14).$$

Poslední vztah vede na kvadratickou rovnici

$$c^2 + 130c - 5184 = 0,$$

které vyhovuje jen kladný kořen $c = 32$ cm. Dále již snadno zjistíme $v_c = c/2 - 7 = 9$ cm a $S = c \cdot v_c/2 = 144$ cm^2.

II. **Způsob.** (Upraveno podle Evy Pekárkové, Gymnázium Tábor). Podobně jako v předchozím řešení zjistíme

$$2ab = (a+b)^2 - c^2 = 2cv_c.$$

Sem dosadíme ze vztahu (3.20) a po substituci $x = a+b$ máme

$$x^2 - c^2 = c(c-14).$$

Dále c nahradíme pravou stranou vztahu $c = 72 - x$, který představuje podmínku pro obvod trojúhelníka. Po úpravě obdržíme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 274x + 9360 = 0$$

s kořeny $x_1 = 234$ a $x_2 = 40$. Součet $x = a+b$ nemůže být větší než obvod trojúhelníka, proto vyhovuje jen $x_2 = 40$ cm. Délka přepony je tedy $c = 72 - x_2 = 32$ cm. Výšku v_c a obsah S určíme stejně jako v závěru prvního způsobu.

Kapitola 4

Ročník 1998/99

4.1 1. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Určete kolika nulami končí součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 499 \cdot 500$ (tj. součin všech přirozených čísel od jedné do pěti set).

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Nechť x, y jsou celá čísla a číslo $6x+11y$ je dělitelné číslem 31. Dokažte, že pak je také číslo $x + 7y$ dělitelné číslem 31.

3. Bez použití kalkulačky nebo počítače dokažte, že číslo
   $$1996 \cdot 1997 \cdot 1998 \cdot 1999 + 1$$
   je druhou mocninou přirozeného čísla.

4. Celá část reálného čísla x je takové celé číslo $m = [x]$, pro které platí $m \leq x < m + 1$. Najděte celou část čísla
   $$\sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + \sqrt{64a^2 + 16a + 2}}}\,,$$
   jestliže a je libovolné přirozené číslo.

5. Určete všechna přirozená čísla, která jsou jedenáctkrát větší než jejich ciferný součet.

6. Vynásobíme-li čtyřciferné číslo devíti, dostaneme čtyřciferné číslo složené ze stejných cifer ale v opačném pořadí.
   Najděte všechna taková čísla.

Řešení

1. Text úlohy. Určete kolika nulami končí součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 499 \cdot 500$ (tj. součin všech přirozených čísel od jedné do pěti set).

   Řešení úlohy. Nejprve zjistíme, kolik pětek obsahuje součin prvočinitelů čísla $s = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 499 \cdot 500$.
   V samotném součinu s se vyskytují čísla 5, 10, 15, ... 495, 500. Je jich 100 a každé z nich je dělitelné pěti. V prvočíselném rozkladu čísla s je proto aspoň 100 pětek. Tento odhad musíme zvýšit o počet čísel z předchozí řady, která jsou násobky druhých mocnin pěti, neboť tato čísla mají ve svém rozkladu dvě pětky, dále o počet čísel, která jsou násobky třetích mocnin pěti atd.
   Násobky druhých mocnin jsou čísla 25, 50, 75, ... 475, 500 (je jich celkem 20), násobky třetích mocnin jsou 125, 250, 375, 500. Násobky vyšších mocnin se v řadě nevyskytují.
   Je tedy v rozkladu součinu s na prvočinitele 124 pětek. Dvojek je zde podstatně více (aspoň 250). Protože každý součin $2 \cdot 5$ určuje právě jednu nulu v dekadickém zápisu čísla s, obsahuje tento zápis právě 124 nul.

2. Text úlohy. Nechť x, y jsou celá čísla a číslo $6x + 11y$ je dělitelné číslem 31. Dokažte, že pak je také číslo $x + 7y$ dělitelné číslem 31.

   Řešení úlohy. Podle zadání je $6x + 11y = 31k$, kde k je celé číslo. Platí

   $$6(x + 7y) = (6x + 11y) + 31y = 31(k + y).$$

   Součin $6(x + 7y)$ je tedy násobkem 31. Protože čísla 6 a 31 jsou nesoudělná, je činitel $x + 7y$ dělitelný číslem 31 a to jsme chtěli dokázat.

3. Text úlohy. Bez použití kalkulačky nebo počítače dokažte, že číslo

   $$1996 \cdot 1997 \cdot 1998 \cdot 1999 + 1$$

   je druhou mocninou přirozeného čísla.

   Řešení úlohy. Při řešení této úlohy je výhodné položit $x = 1996$. Pak platí

   $$a = x(x + 3)(x + 1)(x + 2) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1,$$

   zvolíme substituci $y = x^2 + 3x$ a dostaneme.

   $$a = y(y + 2) + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2.$$

Tím je důkaz proveden a vidíme, že se ani nemusíme omezovat na speciální volbu $x = 1996$. Tvrzení platí pro každé přirozené x.

4. Text úlohy. Celá část reálného čísla x je takové celé číslo $m = [x]$, pro které platí $m \leq x < m + 1$. Najděte celou část čísla

$$\sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + \sqrt{64a^2 + 16a + 2}}}\,,$$

jestliže a je libovolné přirozené číslo.

Řešení úlohy. Označme b dané číslo. Platí

$$b = \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + \sqrt{64a^2 + 16a + 2}}}$$

$$b > \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + \sqrt{64a^2 + 16a + 1}}} = \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + \sqrt{(8a+1)^2}}} =$$

$$= \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 1}} = \sqrt{4a^2 + \sqrt{(4a+1)^2}} = \sqrt{4a^2 + 4a + 1} =$$

$$= \sqrt{(2a+1)^2} = 2a + 1,$$

$$b > 2a + 1.$$

Rovněž platí

$$b < \sqrt{4a^2 + 2 \cdot \sqrt{16a^2 + 2 \cdot \sqrt{64a^2 + 32a + 4}}} =$$

$$= \sqrt{4a^2 + 2 \cdot \sqrt{16a^2 + 2 \cdot \sqrt{(8a+2)^2}}} = \sqrt{4a^2 + 2 \cdot \sqrt{16a^2 + 16a + 4}} =$$

$$= \sqrt{4a^2 + 2 \cdot \sqrt{(4a+2)^2}} = \sqrt{4a^2 + 8a + 4} = \sqrt{(2a+2)^2} = 2a + 2,$$

$$b < 2a + 2.$$

Je tedy $2a + 1 \leq b < (2a + 1) + 1$, to znamená, že celá část b je číslo $2a + 1$.

5. Text úlohy. Určete všechna přirozená čísla, která jsou jedenáckrát větší než jejich ciferný součet.

Řešení úlohy. Libovolné z hledaných čísel označme a, jeho počet cifer nechť je n. Zřejmě musí platit

$$10^{n-1} < \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifer} \leq a \leq 11 \cdot \underbrace{(9 + 9 + \ldots + 9)}_{n\ cifer} = 99n.$$

Je tedy $10^{n-1} < 99n$. Tato nerovnost platí jen pro $n \in \{1, 2, 3\}$, neboť pro $n = 4$ je již $1000 > 396$ a s každým následujícím n se levá strana tohoto vztahu zvětší desetkrát, kdežto pravá jen o 99.
Pro $n = 1$ by podle zadání mělo platit $a = 11a$, což splňuje jen $a = 0$, ale to není přirozené číslo.
Pro $n = 2$ položme $a = 10x + y$ a ze zadání dostaneme po úpravě rovnici

$$x = -10y,$$

která opět nemá řešení, jelikož $x \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 9\}$.
Pro $n = 3$ položme konečně $a = 100x+10y+z = 11(x+y+z)$. Poslední rovnost lze upravit na tvar

$$10(9x - z) = x + y.$$

Zvážíme-li navíc, že x, y, z jsou cifry (x je různé od nuly) a $x+y \leq 18$, není jiná možnost, než že $9x-z = 1$ a současně $x+y = 10$. Tedy $x = 1$, $y = 9$, $z = 8$, $a = 198 = 11 \cdot (1 + 9 + 8)$.

6. Text úlohy. Vynásobíme-li čtyřciferné číslo devíti, dostaneme čtyřciferné číslo složené ze stejných cifer ale v opačném pořadí.
Najděte všechna taková čísla.

Řešení úlohy
I. Způsob. (Upraveno podle Jana Hermana, Gymnázium Brno)
Hledané číslo označíme $x = 1000a + 100b + 10c + d$, v němž cifry a, d nejsou nuly. Ze zadání plyne

$$9000a + 900b + 90c + 9d = 1000d + 100c + 10b + a$$

a odtud po úpravě

$$8999a + 890b = 10c + 991d.$$

Levá strana tohoto výrazu má minimální hodnotu 8999, kdežto pravá je nejvýše rovna číslu 9009. Z těchto jedenácti čísel z intervalu $\langle 8999, 9009 \rangle$ může levá strana nabývat pouze hodnoty 8999 a pravá jen 8999 nebo 9009. Rovnost obou stran tedy nastane, právě když

$$8999a + 890b = 10c + 991d = 8999$$

a je to jen tehdy, když $a = 1$, $b = 0$, $c = 8$ a $d = 9$.
Hledané číslo je 1089.

II. Způsob. (Upraveno podle Lady Oberreiterové, Gymnázium Třebíč) Hledáme čísla $x = \overline{ABCD}$, kde A, B, C, D představují jednotlivé cifry. Zřejmě platí

$$1000 \leq x \leq 1111, \tag{4.1}$$

neboť součin $9 \cdot 1111 = 9999$ je nevětší čtyřciferné číslo. Vidíme odtud, že $A = 1$ a také $D = 9$, protože součin $9 \cdot x$ musí končit jedničkou. Dále si zapíšeme příslušné násobení

$$\begin{array}{r} 1BC9 \\ \cdot \quad 9 \\ \hline 9CB1 \end{array}$$

Vzhledem k podmínce (4.1) může být jen $B = 0$ nebo $B = 1$. Proto rozlišíme tyto případy

(a)

$$\begin{array}{r} 1\,0\,C9 \\ \cdot \quad 9 \\ \hline 9C\,0\,1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 1\,1\,C9 \\ \cdot \quad 9 \\ \hline 9C\,1\,1 \end{array}$$

V případě (a) z tabulky násobení odvodíme rovnici (je třeba si uvědomit, že se převádí 8 z pravého sloupce) $900 + 9C + 8 = 900 + 10C$, jejímž řešením je $C = 8$.
V případě (b) analogicky dostaneme $990 + 9C + 8 = 901 + 10C$, odtud $C = 17$, což zřejmě nevyhovuje.

Závěr. Úloha má jediné řešení $x = 1089$.

4.2 2. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
Představte si, že se svým přítelem hrajete tuto hru: Na stole je položena řada několika mincí, některé rubem, jiné lícem vzhůru. (Mohou být i všechny lícem či rubem vzhůru). Mince si prohlédnete, pak odejdete, ale váš přítel v místnosti zůstane a za vaší nepřítomnosti odebere jednu minci. Ostatní mince poobrací po dvou libovolným způsobem. (To znamená, že může obrátit naráz libovolné dvě, potom další dvě atd.). Pak vás zavolá zpět a vy máte z pouhého pohledu na mince zjistit, zda odebral "líc" či "rub". Popište příslušný myšlenkový postup.

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
Určete počet všech čtyřciferných čísel, která jsou dělitelná třemi a jejichž dekadické zápisy obsahují právě dvě jedničky.

3. Město má tvar čverce 5×5 km. Ulice jej rozdělují na čtvercové bloky o straně délky 200 m. Poutník se vydá na cestu ulicemi a po deseti kilometrech chůze se octne na místě, z kterého vyšel. Jaký největší obsah může mít obrazec ohraničený poutníkovou trajektorií?

4. V továrně na hračky vyrábějí krychlové kostky, jejichž každá stěna je obarvena některou ze šesti barev: modrá, bílá, červená, zelená, žlutá, černá. Stěny jsou jednobarevné a každá kostka je šestibarevná. Kolik různých typů takových kostek je možné vyrobit? Kostky, které se liší jen tím, že jsou různě otočené, považujeme za stejné.

5. Na polici je sedm stejných sklenic téhož léku po 200 tabletách v každé z nich. Hmotnost jedné tablety má být přesně 1,00 g. Od výrobce přišel telegram, že se v zásilce mohly vyskytnout sklenice se závadným lékem, jehož tablety váží 1,01 g, které se musí vyřadit. V žádné sklenici nejsou tablety různých hmotností.
Navrhněte způsob, jak pomocí jediného vážení zjistit, které sklenice obsahují vadný lék, máme-li k dispozici přesné váhy s příslušným závažím a dostatečně velkými miskami.

6. Na obvodu kruhu jsou v libovolném pořadí napsány čtyři jedničky a pět nul. Opakovaně provádíme následující operaci: mezi každé dvě původně napsané různé cifry napíšeme jedničku a mezi stejné nulu. Pak původně

napsané cifry vymažeme. Dokažte, že nikdy se nám nepodaří tímto postupem obdržet devět nul.

Řešení

1. Text úlohy. Představte si, že se svým přítelem hrajete tuto hru: Na stole je položena řada několika mincí, některé rubem, jiné lícem vzhůru. (Mohou být i všechny lícem či rubem vzhůru). Mince si prohlédnete, pak odejdete, ale váš přítel v místnosti zůstane a za vaší nepřítomnosti odebere jednu minci. Ostatní mince poobrací po dvou libovolným způsobem. (To znamená, že může obrátit naráz libovolné dvě, potom další dvě atd.). Pak vás zavolá zpět a vy máte z pouhého pohledu na mince zjistit, zda odebral "líc" či "rub". Popište příslušný myšlenkový postup.

   Řešení úlohy. Mince otočené lícem (resp. rubem) vzhůru označíme L (resp. R), počet všech mincí typu L v řadě nechť je $p(L)$ a počet všech mincí typu R je $p(R)$. Obrátíme-li nyní v dané řadě dvě mince typu L, budou počty mincí po obrácení

   $$p'(L) = p(L) - 2 \qquad \text{a} \qquad p'(R) = p(R) + 2. \tag{4.2}$$

   Podobně bude platit po obrácení dvou mincí typu R

   $$p'(L) = p(L) + 2 \qquad \text{a} \qquad p'(R) = p(R) - 2 \tag{4.3}$$

   a po obrácení dvojice typu L, R se počty $p(L)$, $p(R)$ nezmění.
   Sudé číslo zůstává po přičtení nebo odečtení čísla 2 sudým a liché lichým. Vidíme tedy ze vztahů (4.2) a (4.3), že se tak zvaná parita (tj. sudost nebo lichost) provedením libovolného počtu otočení mincí podle daných pravidel nemění.
   Odebráním jedné mince typu L se naopak parita čísla $p(L)$ změní, stejně jako oderáním mince typu R se změní parita počtu $p(R)$.
   Hráč, který má uhodnout odebraný typ mince si tedy musí před odchodem zapamatovat parity čísel $p(L)$ a $p(R)$. Po příchodu usoudí, že byla odebrána mince toho typu, u nějž příslušný počet změnil paritu.

2. Text úlohy. Určete počet všech čtyřciferných čísel, která jsou dělitelná třemi a jejichž dekadické zápisy obsahují právě dvě jedničky.

   Řešení úlohy. Můžeme určit celkem dvanáct čtyřciferných čísel, jejichž dekadický zápis obsahuje právě dvě jedničky a po jedné ze dvou různých nenulových cifer A, B. Prvních šest z nich jsou čísla $11AB$, $1A1B$, $1AB1$, $A11B$, $A1B1$ a $AB11$. Dalších šest vznikne z předchozích záměnou cifer A, B.
   Je-li nenulová cifra $B = A$, utvoříme jen šest čísel a snadno dále zjistíme, že když jedna z různých cifer A, B (např.A) je rovna nule,

tak existuje devět čtyřciferných čísel: $110B$, $11B0$, $101B$, $1B10$, $10B1$, $1B01$, $B110$, $B101$, $B011$.
Dále je třeba si uvědomit, že číslo je dělitelné třemi, právě když je součet jeho cifer dělitelný třemi. Cifry A, B ($A \leq B$) tedy musí spňovat vztah $A + B = 3k - 2$, kde $k = 2, 3, 4, 5, 6$, neboť pro vyšší hodnoty k by byl součet $A + B$ větší než 18 a pro $k \leq 1$ menší než 2.
Všechny možnosti přehledně uvádí následující tabulka

Cifra A	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	8
Cifra B	4	7	3	6	9	2	5	8	4	7	6	9	5	8	7	8
Počet možností	9	9	12	12	12	6	12	12	12	12	12	12	6	12	12	6

Celkový počet čtyřciferných čísel s danými vlastnostmi je

$$p = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 11 \cdot 12 = 168.$$

3. Text úlohy. Město má tvar čverce 5×5 km. Ulice jej rozdělují na čtvercové bloky o straně délky 200 m. Poutník se vydá na cestu ulicemi a po deseti kilometrech chůze se octne na místě, z kterého vyšel. Jaký největší obsah může mít obrazec ohraničený poutníkovou trajektorií?

Řešení úlohy. Město si představíme jako čtvercovou síť - šachovnici 25×25 políček. Každé políčko je čtverec o straně 200 m $= 0,2$ km. Stranu políčka, ale i její délku budeme nazývat ulice.
Poutníkova cesta je tedy uzavřená lomená čára složená z jednotlivých ulic. Její celková délka je $10 : 0,2 = 50$ ulic. Pokud útvar omezený touto čarou není pravoúhelník, lze jej nahradit pravoúhelníkem o stejném obvodu, ale větším obsahu.
Proto budeme dále vyšetřovat jen pravoúhelníky se stranami délek a, b, pro něž $a + b = 25$ ulic, $a \leq b$. Největší hodnota $a = 12$ pro $b = 13$ ulic. Dokážeme, že těmto rozměrům přísluší největší obsah

$$S_{max} = ab = 12 \cdot 13 = 156 \text{ bloků} = 6,24 \text{ km}^2.$$

Délka a již nemůže být za podmínky $a \leq b$ větší. Pokud ji zmenšíme o x bloků, bude obsah útvaru

$$S = (12 - x)(13 + x) = S_{max} - x - x^2 < S_{max}.$$

Největší obrazec ohraničený poutníkovou cestou je obdélník 12×13 ulic a má obsah 6,24 km^2.

4. Text úlohy. V továrně na hračky vyrábějí krychlové kostky, jejichž každá stěna je obarvena některou ze šesti barev: modrá, bílá, červená, zelená, žlutá, černá. Stěny jsou jednobarevné a každá kostka je šestibarevná. Kolik různých typů takových kostek je možné vyrobit? Kostky, které se liší jen tím, že jsou různě otočené, považujeme za stejné.

   Řešení úlohy

   I. Způsob

   Každou obarvenou krychli můžeme otočit tak, aby na horní stěně byla barva A. Na protilehlé, dolní stěně může být některá z barev B, C, D, E, F. To je pět možností.

   Má-li pak dolní stěna například barvu B, můžeme krychli při jakémkoliv obarvení bočních stěn zbývajícími barvami C, D, E, F otočit kolem svislé osy tak, aby vpředu byla barva C. Na zadní stěně pak je některá ze tří barev D, E, F. Je-li tam například barva D, lze umístit buď E na levou a F na pravou boční stěnu nebo naopak. Při pevně zvolených barvách na horní a dolní stěně máme tedy $3 \cdot 2 = 6$ možností pro boční stěny.

   Celkem existuje $5 \cdot 6 = 30$ typů barevných kostek.

   II. Způsob

   Pro pevně umístěnou kostku existuje $p = 720$ (6!=720) permutací obarvení stěn podle uvedených podmínek. Protože však otáčením kostky některé permutace splynou, představuje vždy m různých permutací jediný typ obarvení a počet různých typů kostek je $x = p/m$.

   Určíme nyní m. Mějme dvě kostky téhož typu, jedna má pevnou polohu, se druhou umístěnou obecně jinak, můžeme otáčet. První má na spodní stěně barvu A, druhá může mít barvu A na kterékoli ze svých šesti stěn - to je šest možností. Otočme druhou kostku tak, aby měla barvu A také na dolní stěně. Pak musí být na obou kostkách stejná i barva horní stěny. Barvy na odpovídajících si bočních stěnách se však mohou shodovat až po vhodném otočení kolem svislé osy druhé kostky. Pro takové otočení jsou čtyři možnosti: o úhel 0°, 90°, 180° nebo 270°.

   Odtud $m = 6 \cdot 4 = 24$ různých permutací pro tentýž typ kostky.

   Počet všech typů kostek je $x = 720/24 = 30$.

5. Text úlohy. Na polici je sedm stejných sklenic téhož léku po 200 tabletách v každé z nich. Hmotnost jedné tablety má být přesně 1,00 g. Od výrobce přišel telegram, že se v zásilce mohly vyskytnout sklenice se závadným lékem, jehož tablety váží 1,01 g, které se musí vyřadit. V žádné sklenici nejsou tablety různých hmotností.

   Navrhněte způsob, jak pomocí jediného vážení zjistit, které sklenice obsahují vadný lék, máme-li k dispozici přesné váhy s příslušným závažím a dostatečně velkými miskami.

Řešení úlohy. Využijeme toho, že každé celé nezáporné číslo a se dá vyjádřit jen jediným způsobem ve staru

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \ldots + a_n \cdot 2^n,$$

kde čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ nabývají jen hodnot 0 nebo 1 a jsou to vlastně cifry čísla a zapsaného ve dvojkové soustavě (pořadí cifer v tomto zápisu je ovšem obrácené).

Postup vážení je tento: na levou misku umístíme (tak, abychom rozlišili, co je z které sklenice) jednu tabletu z první sklenice, dvě tablety z druhé sklenice, čtyři tablety ze třetí, osm ze čtvrté atd., až nakonec 64 tablet z poslední, sedmé sklenice. Pak je vyvážíme závažím. Pokud bude hmotnost přesně $1+2+4+8+16+32+64 = 127$ gramů, nevyskytuje se v žádné sklenici vadný lék. Když je hmotnost o m centigramů větší ($m < 127$ cg), dělíme m opakovaně dvěma a nenulové zbytky určují sklenice s vadným lékem v tom pořadí, v jakém zbytky obdržíme.

Například jsme zjistili hmotnost 127,54 g. Zbytky při postupném dělení čísla 54 dvěma uvádí tato tabulka.

Číslo	54	27	13	6	3	1	0
Zbytek	0	1	1	0	1	1	0

Podle ní platí

$$54 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6$$

a proto obsahuje vadný lék druhá, třetí, pátá a šestá sklenice. Nezávadný lék je v první, čtvrté a sedmé.

6. Text úlohy. Na obvodu kruhu jsou v libovolném pořadí napsány čtyři jedničky a pět nul. Opakovaně provádíme následující operaci: mezi každé dvě původně napsané různé cifry napíšeme jedničku a mezi stejné nulu. Pak původně napsané cifry vymažeme. Dokažte, že nikdy se nám nepodaří tímto postupem obdržet devět nul.

Řešení úlohy. (Sporem - upraveno podle Jaroslava Zelenky a Jindřicha Zítky, Gymnázium Tábor)

Mezi devíti ciframi napsaných v kruhu je devět mezer a proto se provedením výše popsané operace počet cifer nemění. Pokud bychom po n operacích obdrželi devět nul, muselo by být v předchozím kole všech

devět číslic rovno 1 nebo všech devět číslic rovno 0. Nulu totiž můžeme do mezery psát jen tehdy, jsou-li číslice po obou stranách stejné. Když jdeme dále nazpět, není jiná možnost, než že devět nul vznikne z devíti jedniček. Jinak bychom totiž dosáhli devíti nul hned po první operaci a to není možné.
Pokud v nějakém kole dosáhneme samých jedniček, musí se v předcházející konfiguraci pravidelně střídat nuly a jedničky. To je však možné jen při sudém počtu napsaných cifer. Tím jsme došli ke sporu, neboť 9 není sudé číslo. Úloha je dokázána.

4.3 3. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Dokažte.
   (a) Každý pravoúhelník (obdélník, čtverec) je tětivový čtyřúhelník.
   (b) Každý deltoid (čtyřúhelník symetrický podle jedné z úhlopříček) je tečnový čtyřúhelník.
   (c) Lichoběžník je tětivový právě tehdy, když je rovnoramenný.
2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Nakreslete aspoň tři typově různé čtyřúhelníky, které jsou tečnové i tětivové současně. (Pojmenujte je nebo popište jejich konstrukci).
3. Deltoid s úhlopříčkami délky 10 cm a 6 cm je tětivový. Spočítejte jeho obvod.
4. Rovnoramenný lichoběžník, který je tečnovým čtyřúhelníkem, má základny délek $a = 10$ cm a $c = 5$ cm. Spočítejte jeho rameno b, výšku v, poloměr s kružnice, která je lichoběžníku vepsaná a poloměr r kružnice, která je mu opsaná.
5. Dána kružnice k a na ní bod A.
   Kolik lze zadané kružnici vepsat tětivových čtyřúhelníků $ABCD$ tak, aby při vrcholu A byl úhel pravý a při vrcholu B úhel n-krát větší než je úhel při vrcholu D? Kolik z těchto čtyřúhelníků je i tečnových? Všechny tyto tečnové čtyřúhelníky postupně pro $n = 1,\ 2,\ 3$ narýsujte.
6. Nechť $ABCD$ je tečnový lichoběžník. Dokažte, že platí: geometrický průměr délek jeho ramen je větší než geometrický průměr délek jeho základen.

Řešení

1. Text úlohy. Dokažte.

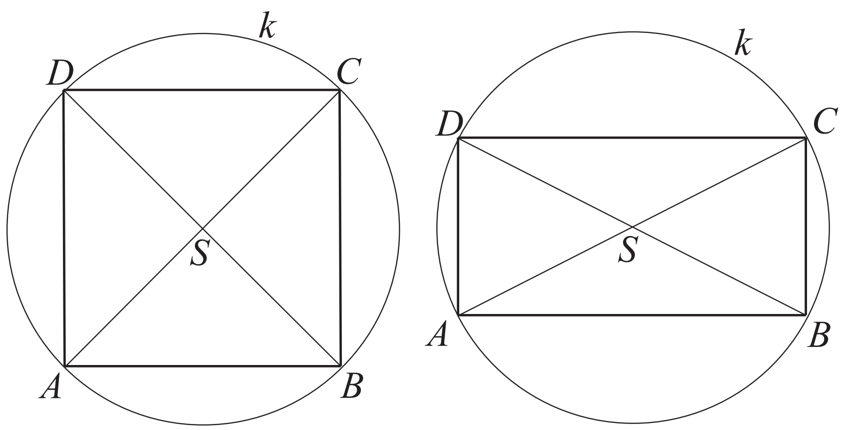
   (a) Každý pravoúhelník (obdélník, čtverec) je tětivový čtyřúhelník.

   (b) Každý deltoid (čtyřúhelník symetrický podle jedné z úhlopříček) je tečnový čtyřúhelník.

   (c) Lichoběžník je tětivový právě tehdy, když je rovnoramenný.

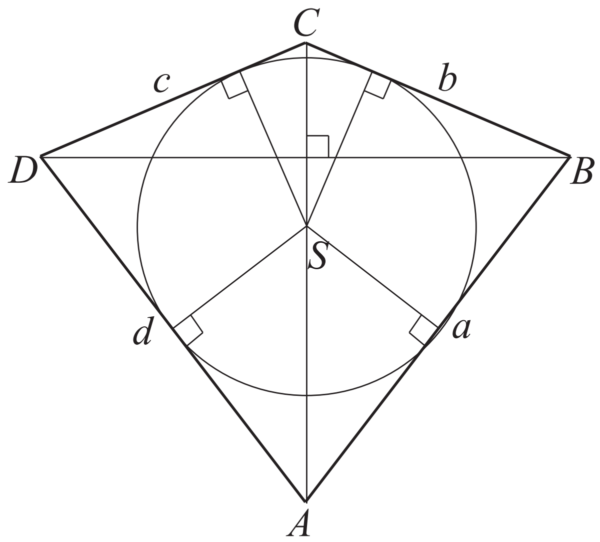
   Řešení úlohy. Využijeme známých vět:
   Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když součet dvojice jeho protějších úhlů je úhel přímý.
   Čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový právě tehdy, když pro délky jeho stran platí: $a + c = b + d$.

   (a) V pravoúhelníku $ABCD$ platí, že jeho úhlopříčky AC a BD jsou shodné a navzájem se půlí. Lze mu tedy opsat kružnici se středem v průsečíku úhlopříček.



Obrázek 4.1:

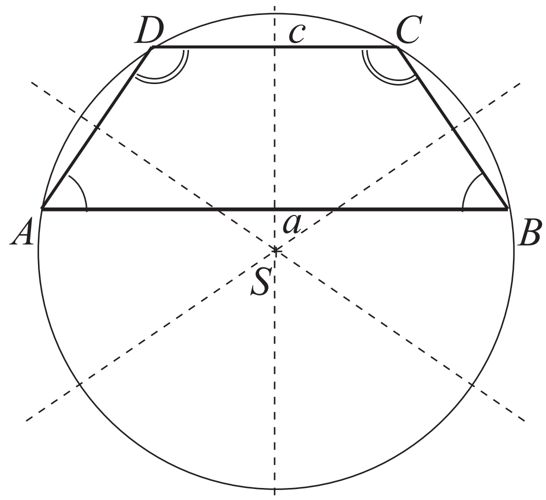
   (b) Je-li deltoid $ABCD$ symetrický podle úhlopříčky AC, musí pro délky jeho stran platit $a = d$ a $c = b$. Odtud $a + c = b + d$. Čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový.



Obrázek 4.2:

(c) i. Rovnoramenný lichoběžník se základnami a, c má shodné úhly, které jsou přilehlé téže základně. Odtud plyne, že součty protějších úhlů jsou shodné, tedy rovné přímému úhlu a lichoběžník je tětivový.

ii. Jestliže jde lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD opsat kružnici, musí osy obou základen procházet středem této kružnice, osy tedy splynou a lichoběžník je osově souměrný tedy rovnoramenný.

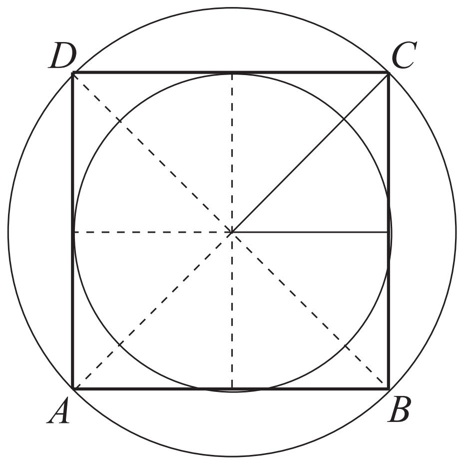


Obrázek 4.3:

2. Text úlohy. Nakreslete aspoň tři typově různé čtyřúhelníky, které jsou tečnové i tětivové současně. (Pojmenujte je nebo popište jejich konstrukci).

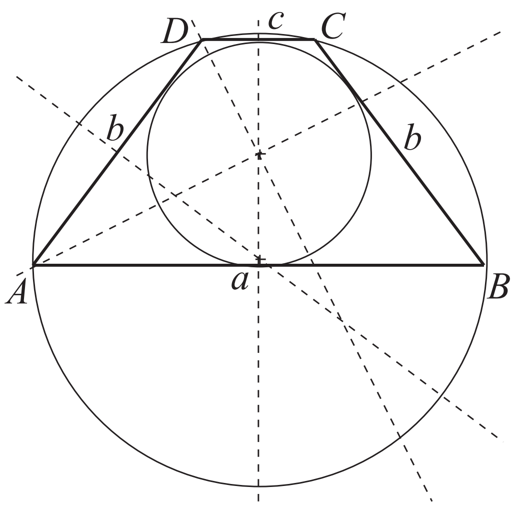
Řešení úlohy.

(a) Čtverec



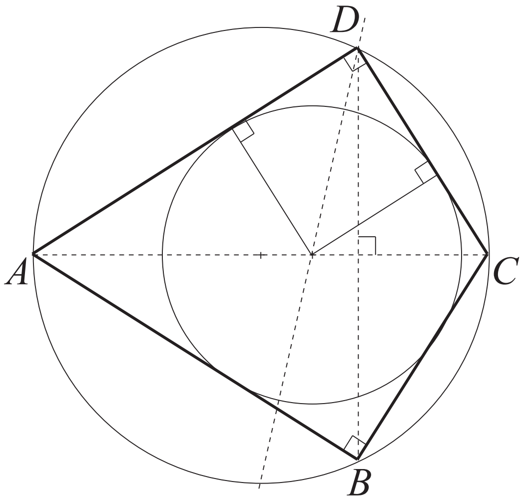
Obrázek 4.4:

(b) Rovnoramenný lichoběžník se základnami a, c a ramenem $b = (a + c)/2$.



Obrázek 4.5:

(c) Deltoid, jehož právě jedna dvojice protějších úhlů je pravoúhlá.



Obrázek 4.6:

3. Text úlohy. Deltoid s úhlopříčkami délky 10 cm a 6 cm je tětivový. Spočítejte jeho obvod.

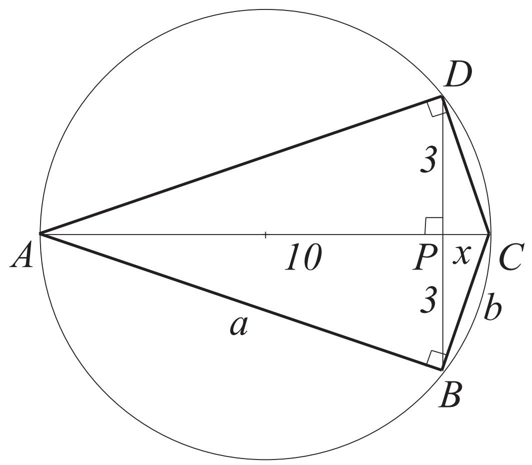
   Řešení úlohy. Nechť $ABCD$ je deltoid symetrický podle přímky AC, který je tětivový. Potom musí být při vrcholech B a D shodné úhly, jejichž součet je přímý úhel, tedy úhly pravé. Pokud by $|AC| = 6$ cm, $|BD| = 10$ cm byla by výška v pravoúhlém trojúhelníku ABC 5 cm, tedy větší než poloměr Thaletovy kružnice opsané nad AC a to není možné.
   Tedy $|AC| = 10$ cm, $|BD| = 6$ cm. Označíme-li P průsečík úhlopříček a $x = |CP|$, pak v pravoúhlém trojúhelníku ABC podle Euklidovy věty pro výšku ($v_c^2 = c_a \cdot c_b$) platí

$$\begin{aligned} x(10 - x) &= 9, \\ x^2 - 10x + 9 &= 0. \end{aligned}$$

   Tato kvadratická rovnice má kořeny $x = 1$ a $x = 9$.
   Zvolíme-li označení tak, že $x = 1$ pak podle Euklidovy věty pro odvěsnu ($a^2 = c \cdot c_a$, $b^2 = c \cdot c_b$) dostaneme

$$\begin{array}{lcl} |CB|^2 = \ 10x \ = 10 & \rightarrow & b = |CB| = \ \sqrt{10} \text{ cm}, \\ |AB|^2 = 10 \cdot 9 = 90 & \rightarrow & a = |AB| = 3\sqrt{10} \text{ cm}. \end{array}$$

   Obvod $o = 2(a + b) = 2(\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) = 8\sqrt{10}$ cm.



Obrázek 4.7:

4. **Text úlohy.** Rovnoramenný lichoběžník, který je tečnovým čtyřúhelníkem, má základny délek $a = 10$ cm a $c = 5$ cm. Spočítejte jeho rameno b, výšku v, poloměr s kružnice, která je lichoběžníku vepsaná a poloměr r kružnice, která je mu opsaná.

   Řešení úlohy. Dle podmínky pro tečnový čtyřúhelník platí $a + c = b + d$, v našem případě $b = d$ a tedy

$$\begin{aligned} 2b &= a + c = 15 \text{ cm}, \\ b &= 7,5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

   Výška v lichoběžníka je rovna průměru $2s$ kružnice lichoběžníku vepsané. Na AB označme bod E tak, aby trojúhelník BCE byl pravoúhlý. Z obr. 4.8 je zřejmé, že

$$|BE| = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = 2,5 \text{ cm}.$$

   Pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník BCE určíme

$$v = \sqrt{b^2 - |BE|^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm} \qquad \text{a} \qquad s = b/2 = 5\sqrt{2}/2 \text{ cm}.$$

   Označme K střed strany BC, M střed výšky a S střed opsané kružnice. Přímka SK je zřejmě osa strany BC, tedy přímka kolmá na BC. Úhly BCE a SKM jsou ostré úhly jejichž ramena jsou na sebe kolmá, tedy úhly shodné. Pravoúhlé trojúhelníky BCE a SKM jsou podobné podle věty *uu*. Potom pro délku $p = |SK|$ platí

$$\frac{p}{|MK|} = \frac{b}{v}, \tag{4.4}$$

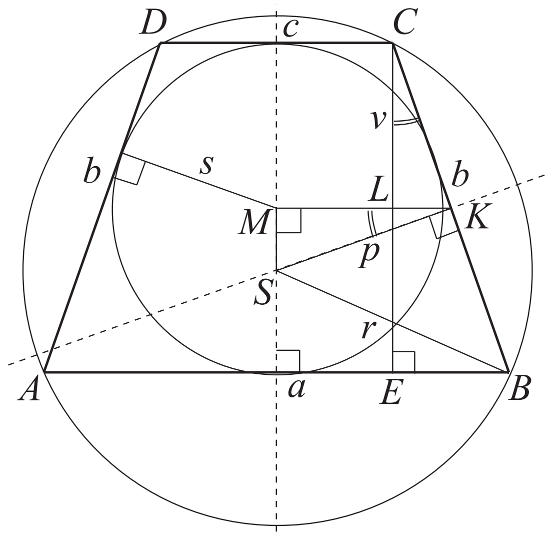
kde $|MK| = |ML| + |LK| = |CD|/2 + |BE|/2 = 3,75$. Po dosazení známých hodnot do (4.4) dostaneme

$$\frac{p}{3,75} = \frac{7,5}{5\sqrt{2}} \qquad \text{a odtud} \qquad p = 2,8125 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Poloměr r opsané kružnice spočítáme z pravoúhlého trojúhelníka BSK

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + p^2 = 3,75^2 + (2,8125 \cdot \sqrt{2})^2 = 29,8828125,$$
$$r \doteq 5,467 \text{ cm}.$$

Hledané délky jsou: $b = 7,5$ cm, $v = 5\sqrt{2}$ cm, $s = 2,5\sqrt{2}$ cm, $r \doteq 5,467$ cm.



Obrázek 4.8:

5. Text úlohy. Dána kružnice k a na ní bod A.
Kolik lze zadané kružnici vepsat tětivových čtyřúhelníků $ABCD$ tak, aby při vrcholu A byl úhel pravý a při vrcholu B úhel n-krát větší než je úhel při vrcholu D? Kolik z těchto čtyřúhelníků je i tečnových? Všechny tyto tečnové čtyřúhelníky postupně pro $n = 1,\ 2,\ 3$ narýsujte.

Řešení úlohy. Vepsaných čtyřúhelníků je nekonečně mnoho.
Zvolíme libovolně bod D na k a najdeme bod C na k tak, aby úhel ADC měl velikost $180°/(n+1)$ a střed kružnice ležel uvnitř tohoto úhlu (bod D případně dle potřeby posuneme, vhodných bodů D je

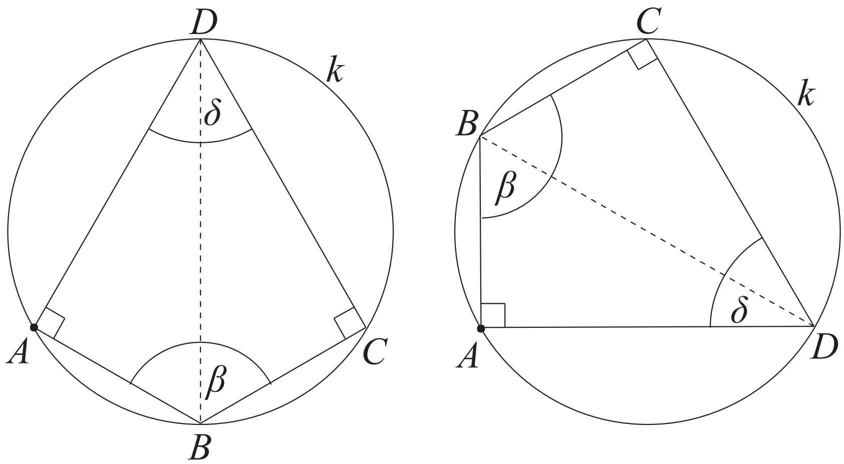
nekonečně mnoho)
Setrojíme bod B takový, aby BD byl průměr kružnice k.
Úhly BAD i BCD jsou podle Thaletovy kružnice pravé, $\beta + \delta = 180°$ a tedy $\beta = n \cdot \delta$.
Označme strany nalezeného čtyřúhelníka $ABCD$ obvyklým způsobem. Pak musí dle Pythagorovy věty platit $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ (pravoúhlé trojúhelníky mají společnou přeponu). Má-li být čtyřúhelník tečnový platí i $a + c = b + d$, tento součet označíme A.
První rovnici upravíme

$$a^2 - c^2 = b^2 - d^2,$$
$$(a - c) \cdot (a + c) = (b - b) \cdot (b + d),$$

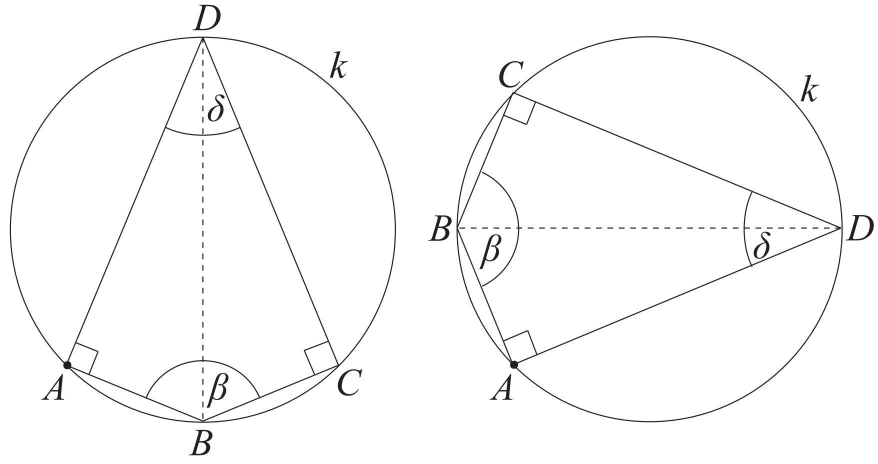
po vydělení číslem A održíme $a - c = b - d$. Ze soustavy rovnic

$$a + c = b + d,$$
$$a - c = b - d,$$

plyne $a = b$ a $c = d$. Čtyřúhelník je deltoid s osou BD a dvěma pravými úhly. Takovéto deltoidy lze kružnici k pro zadané n vepsat jen dva. Odtud plyne i jednoduchá konstrukce tečného $ABCD$ pro $n = 2$ nebo $n = 3$:
Do k vepíšeme deltoid požadovaných vlastností a pak ho otočíme kolem středu kružnice tak, aby v A byl vrchol, ve kterém strany svírají pravý úhel, pro $n = 2$ ($\beta = 60°$, $\delta = 120°$) a $n = 3$ ($\beta = 45°$, $\delta = 135°$) dostaneme dvě možnosti (obr. 4.9), (obr. 4.10).

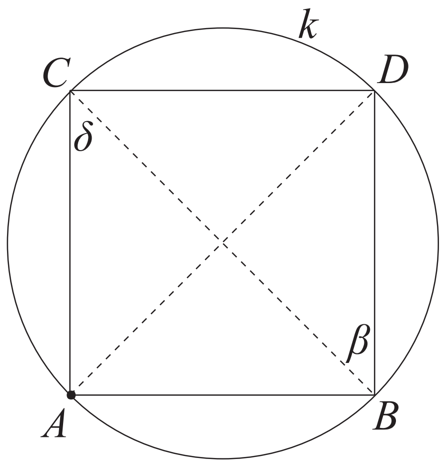


Obrázek 4.9:



Obrázek 4.10:

Pro $n = 1$ ($\beta = \delta = 90°$) jsou všechny úhly v $ABCD$ pravé, $ABCD$ je tedy pravoúhelník a tečnový je právě tehdy, když je to čtverec. Kružnici tedy vepíšeme čtverec s daným vrcholem A, čtverec bude určen jednoznačně (obr. 4.11).
Kružnici k s daným bodem A můžeme vepsat 5 tečnových čtyřúhelníků.



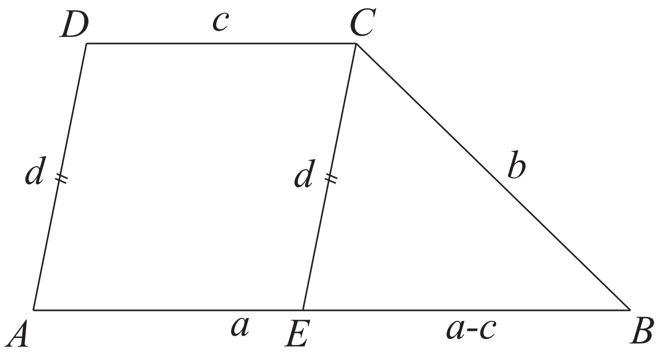
Obrázek 4.11:

6. Text úlohy. Nechť $ABCD$ je tečnový lichoběžník. Dokažte, že platí: geometrický průměr délek jeho ramen je větší než geometrický průměr délek jeho základen.

Řešení úlohy. Nejprve dokážeme, že rozdíl ramen každého lichoběžníka je menší než rozdíl jeho základen.
Nechť $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB, CD jehož označení je voleno tak, aby platilo $a > c$, $b \geq d$. Označme E bod na AB tak, aby EC bylo rovnoběžno AD. Pak trojúhelník EBC má strany délek, $a-c$, b, d. Dle trojúhelníkové nerovnosti v něm platí $a-c > b-d$. Označíme-li libovolný tečnový lichoběžník stejným způsobem jako v předchozím odstavci, musí platit $a+c = b+d$ - konstantu označíme $2p$. Protože $a-c > b-d$ můžeme označit $a = p+R$, $c = p-R$, $b = p+r$, $d = p-r$, kde $R > r$.
Odtud

$$ac = (p+R)\cdot(p-R) = p^2 - R^2 < p^2 - r^2 = (p+r)\cdot(p-r) = bd,$$
$$\sqrt{ac} < \sqrt{bd}.$$

Tvrzení je dokázáno.



Obrázek 4.12:

4.4 4. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Kolik je typů čtyřstěnů, které mají právě jen dvě různé délky hran ($a \neq b$)? Nakreslete příklad od každého typu a stanovte podmínky pro a, b.

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší)
   Určete čtyřboký jehlan se čtvercovou podstavou o straně a, který není pravidelný a má právě jen dvě různé délky hran a, b (dále budeme říkat, že jehlan má vlastnost $V1$). Nakreslete síť jehlanu s vlastností $V1$ pro $a = 3$ cm a $b = 4$ cm.

3. Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn jehož všechny stěny jsou navzájem neshodné rovnoramenné (ale nikoli rovnostranné) trojúhelníky.

4. Určete čtyřboký jehlan J s vlastností $V1$, který má maximální objem a spočítejte tento objem v závislosti na straně podstavy a. Ve vhodně zvolené projekci nakreslete J pro $a = 6$ cm.

5. Zjistěte všechna přirozená n, pro která existuje čtyřstěn jehož síť je pravidelný n-úhelník.

6. (a) Hledejte všechny čtyřstěny jejichž sítí je rovnoběžník se zadanými délkami stran $a = 16$ cm, $b = 10$ cm a jedním z úhlů o velikosti $45°$.
   (b) Ukažte, že existují dva čtyřstěny jejichž sítí je zadaný tětivový deltoid o délkách stran $a = 16$ cm, $b = 10$ cm a porovnejte jejich objemy.

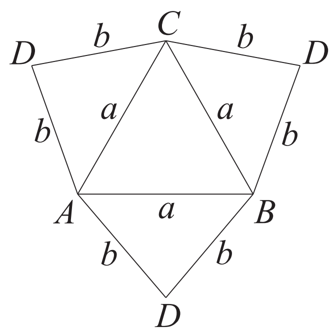
Řešení

2., 4., 5. a 6. úlohu uvádí Koblížková v práci [2].

1. Text úlohy. Kolik je typů čtyřstěnů, které mají právě jen dvě různé délky hran ($a \neq b$)? Nakreslete příklad od každého typu a stanovte podmínky pro a, b.

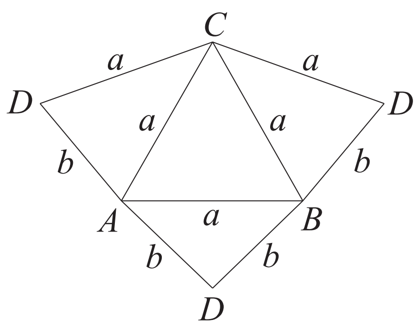
   Řešení úlohy. Pro hranové úhly při libovolném vrcholu každého čtyřstěnu platí: součet dvou z nich je vždy větší než úhel třetí. Rozlišme dvě možnosti.
   I. Čtyřstěn má rovnostrannou stěnu o straně a.

   (a) Pravidelný trojboký jehlan s podstavnou hranou a, boční hranou b. Podmínka řešitelnosti: pro $a > b$ platí $a < 2b$ (pro $a < b$ platí $b < 2a$).



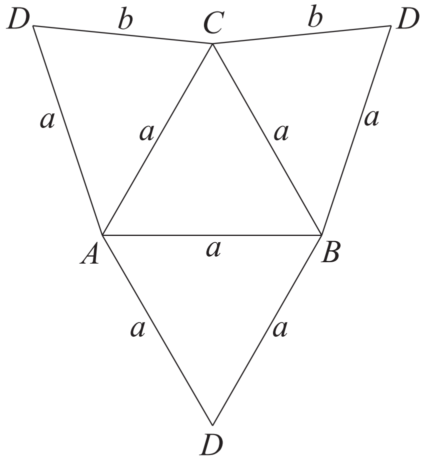
Obrázek 4.13:

   (b) Jehlan s podstavnou hranou a a rovnoramennými stěnami z nichž dvě jsou shodné o stranách b, a, a, třetí má strany a, b, b. Podmínka řešitelnosti: pro $a > b$ platí $a < 2b$ (pro $a < b$ platí $b < 2a$).



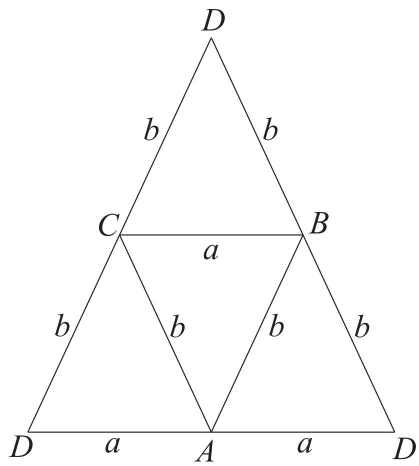
Obrázek 4.14:

(c) Jehlan, který má dvě rovnostranné stěny a dvě stěny rovnoramenné o stranách a, a, b. Podmínka řešitelnosti: pro $a > b$ platí $a < 2b$ (pro $a < b$ platí $b < 2a$).



Obrázek 4.15:

II. Čtyřstěn žádnou rovnostrannou stěnu nemá.
Čtyřstěn jehož všechny stěny jsou shodné (rovnostranné) trojúhelníky např. o stranách a, b, b. Síť je pak ostroúhlý rovnoramenný trojúhelník se stranami $2a$, $2b$, $2b$.
Podmínka řešitelnosti je ostroúhlost stěn, tedy $a < b\sqrt{2}$ resp. $b < a\sqrt{2}$ pro stěny o stranách a, a, b.



Obrázek 4.16:

Existují čtyři typy čtyřstěnů s popsanou vlastností.

2. Text úlohy. Určete čtyřboký jehlan se čtvercovou podstavou o straně a, který není pravidelný a má právě jen dvě různé délky hran a, b (dále budeme říkat, že jehlan má vlastnost $V1$). Nakreslete síť jehlanu s vlastností $V1$ pro $a = 3$ cm a $b = 4$ cm.

   Řešení úlohy. Protože jehlan $ABCDV$ není pravidelný musí mít i některá z bočních hran např. AV délku a.

   (a) Předpokládejme, že všechny ostatní boční hrany mají délku b. Potom ovšem stěny BCV a CDV jsou rovnoramennými trojúhelníky se základnami BC a CD. Hlavní vrchol V tedy leží v rovinách souměrnosti těchto základen, jejichž průsečnicí je kolmice o na rovinu podstavy vztyčená ve středu S čtverce $ABCD$. V tedy leží na o, a proto je stejně vzdálen od všech čtyř vrcholů čtverce $ABCD$. Tedy i vzdálenost od AV se musí rovnat b, což není možné - spor. Obdobně není možné, aby jen jedna boční hrana měla délku b.

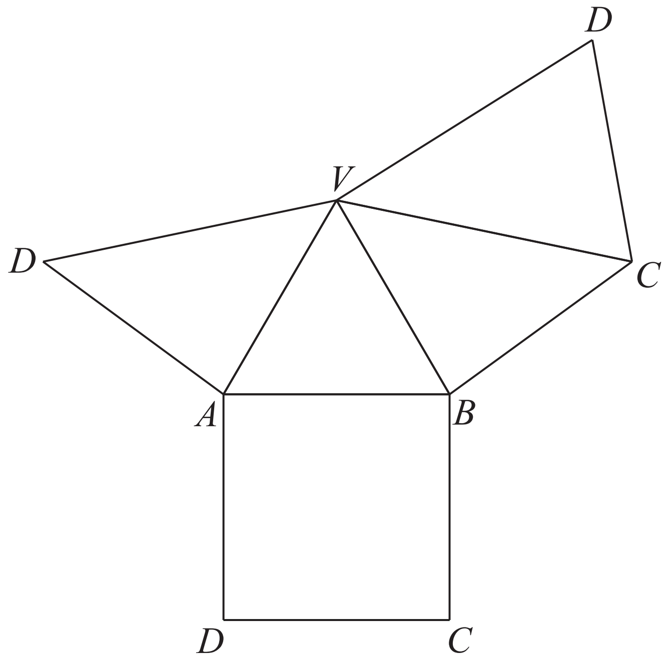
   (b) Délku a mají právě dvě boční hrany.

      i. Shodné jsou vždy dvojice protějších bočních hran např. AV, CV mají délku a, BV a DV mají délku b. Pak rovnoramenné trojúhelníky BDV a ACV nejsou shodné, mají stejnou základnu, ale jinou délku ramene, tedy i různou výšku. Úsečka SV je však společná - spor.

      ii. Délku a mají dvě sousední boční hrany např. AV a BV. Stěna ABV je potom rovnostranná o hranách a, stěny BCV a DAV jsou shodné o hranách a, a, b a stěna CDV má hrany b, b, a.

   Existuje jediný typ jehlanu s vlastností $V1$. Podmínkou řešitelnosti úlohy je platnost trojúhelníkové nerovnosti pro všechny stěny. Tedy $4a > 2b > a$.

Síť hledaného jehlanu pro $a = 3$ cm a $b = 4$ cm



Obrázek 4.17:

3. Text úlohy. Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn jehož všechny stěny jsou navzájem neshodné rovnoramenné (ale nikoli rovnostranné) trojúhelníky.

Řešení úlohy. Hledejme síť takového čtyřstěnu.
Vyjdeme od podstavy ABC jehož základna AB má délku z a ramena mají délku r. Pro hranu CD jsou tři možnosti.

(a) Má délku r.
Pak $|AD|$, $|BD|$ jsou různé od z i navzájem a trojúhelník ABD není rovnoramenný.

(b) Má délku z.
Pak trojúhelník ACD musí být rovnoramenný a neshodný s ABC, tj. $|AD| = z$, ale pak trojúhelník ABD může být rovnoramenný pouze tenkrát, je-li shodný s ABC nebo ACD.

(c) Má délku s různou od r i z.
Pak hrany AD, BD mají jedna délku s a druhá r a z trojúhelníků ABD, ACD jeden není rovnoramenný.

Čtyřstěn s požadovanou vlastností neexistuje.

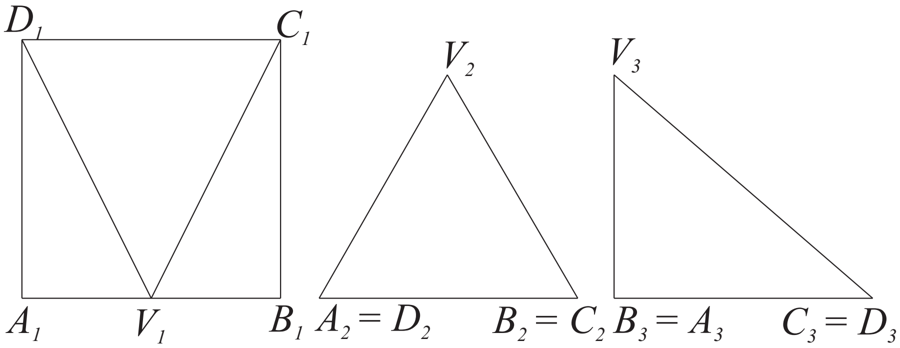
4. Text úlohy. Určete čtyřboký jehlan J s vlastností $V1$, který má maximální objem a spočítejte tento objem v závislosti na straně podstavy a. Ve vhodně zvolené projekci nakreslete J pro $a = 6$ cm.

   Řešení úlohy. Protože obsah podstavy je stálý, hledáme jehlan s největší možnou výškou. Výška jehlanu je však nejvýše rovna nejmenší z výšek jednotlivých stěn. Protože b může být větší než a, bude se výška hledaného jehlanu rovnat výšce "rovnostranné" stěny, tj. $v = a\sqrt{3}/2$. Potom rovina této stěny je kolmá na rovinu podstavy a sousední stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ($b = a\sqrt{2}$).
   Pro objem jehlanu platí

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$

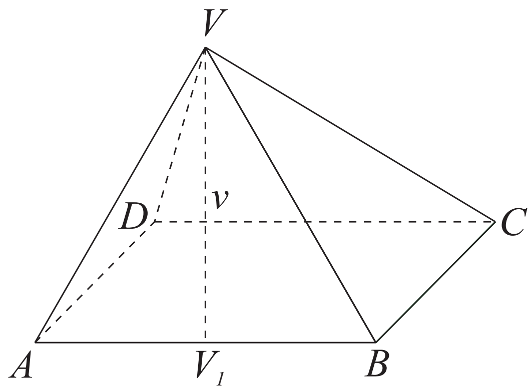
   Zobrazení tělesa

   (a) Půdorys, nárys a bokorys



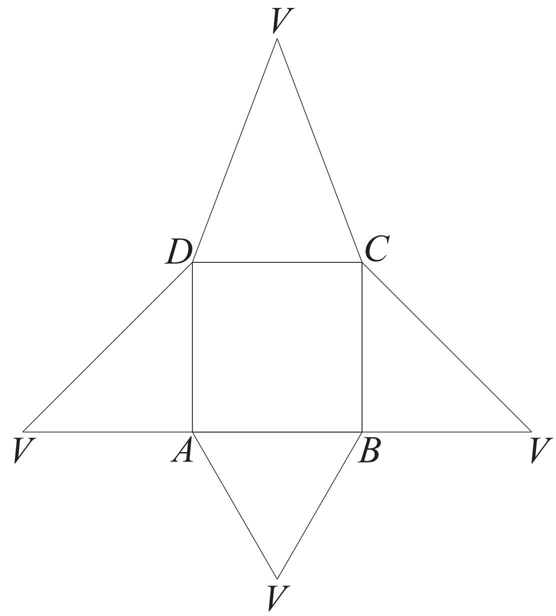
Obrázek 4.18:

(b) Volné rovnoběžné promítání



Obrázek 4.19:

(c) Síť jehlanu



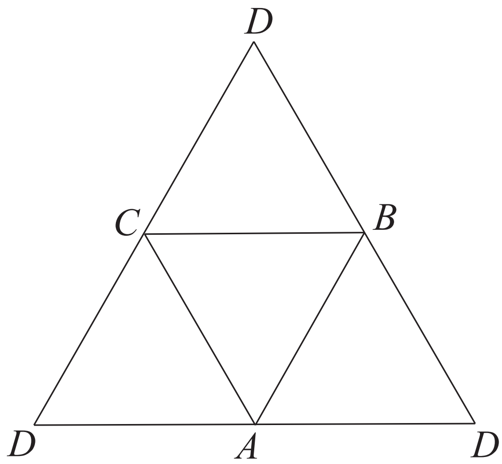
Obrázek 4.20:

5. Text úlohy. Zjistěte všechna přirozená n, pro která existuje čtyřstěn jehož síť je pravidelný n-úhelník.

   Řešení úlohy. Rozstřihneme-li plášť čtyřstěnu podle tří hran a rozvineme-li ho do roviny získáme síť čtyřstěnu, která je obecně šestiúhelník a síť má 9 hran. Při rozvinutí do roviny však mohou dvě hrany sítě

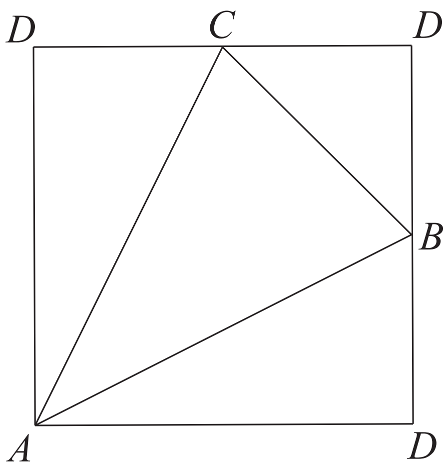
vycházející z téhož vrcholu být částí téže přímky. Zkoumáme tedy postupně rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a pravidelný šestiúhelník.
Příslušnou síť lze najít pro $n = 3,\ 4,\ 5.$

n=3



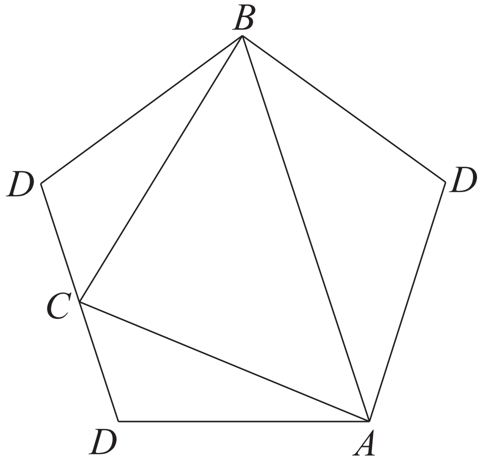
Obrázek 4.21:

n=4



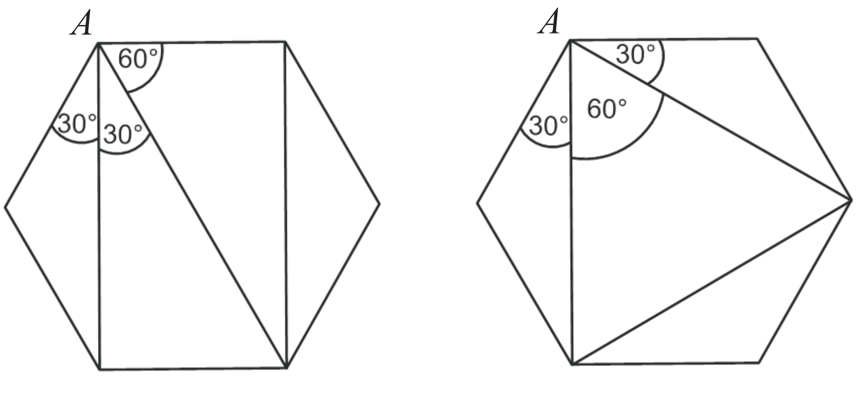
Obrázek 4.22:

n=5



Obrázek 4.23:

$n = 6$
Pokud síť existuje musíme šestiúhelník rozdělit dalšími třemi úsečkami (abychom oddělily stěny), což lze udělat jen tak, že z nějakého vrcholu vycházejí dvě nové hrany. Nechť je to vrchol A. Dvě nové hrany z bodu A lze zvolit jen dvěma zásadně odlišnými způsoby - viz. (obr. 4.24). Vždy je porušeno, že součet dvou úhlů při vrcholu A musí být větší než úhel třetí. Čtyřstěn pro $n = 6$ neexistuje.
Vyhovující n jsou 3, 4, 5.



Obrázek 4.24:

6. Text úlohy

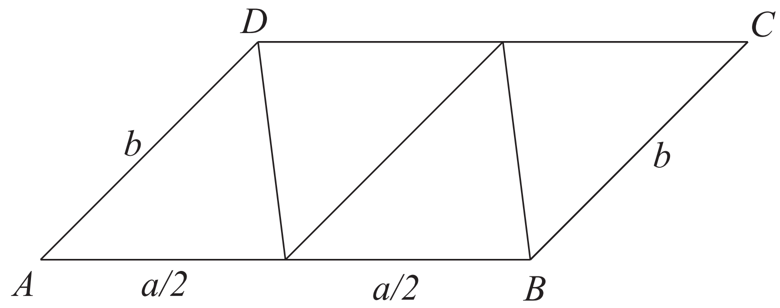
(a) Hledejte všechny čtyřstěny jejichž sítí je rovnoběžník se zadanými délkami stran $a = 16$ cm, $b = 10$ cm a jedním z úhlů o velikosti $45°$.

(b) Ukažte, že existují dva čtyřstěny jejichž sítí je zadaný tětivový deltoid o délkách stran $a = 16$ cm, $b = 10$ cm a porovnejte jejich objemy.

Řešení úlohy

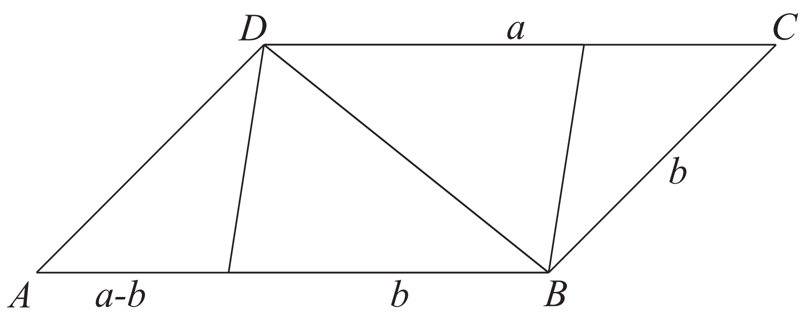
(a) Zvolme označení rovnoběžníku $ABCD$ tak, aby úhly s vellikostí $45°$ byly při vrcholech A, C. Na obvodu rovnoběžníku musíme najít dva vrcholy sítě. Protože delší strany zřejmě nelze slepit navzájem, musí hledané vrcholy ležet právě na nich:

Vrcholy tyto strany půlí, čtyřstěn má všechny stěny shodné dle věty sus.



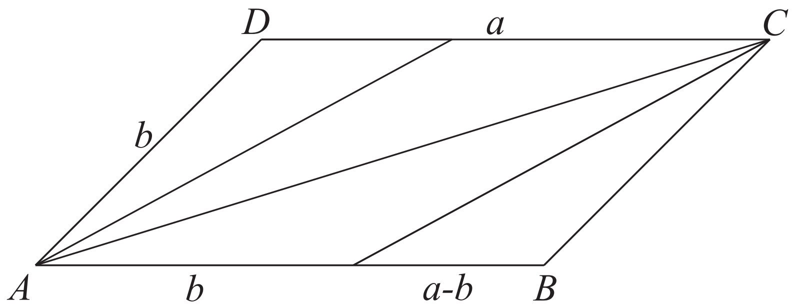
Obrázek 4.25:

Jeden vrchol leží na AB ve vzdálenosti 4 cm od A, druhý na CD ve vzdálenosti 4 cm od C, čtyřstěn pak má hranu BD a dvě dvojice shodných stěn.



Obrázek 4.26:

Jeden vrchol leží na AB ve vzdálenosti 6 cm od A, druhý na CD ve vzdálenosti 6 cm od C, čtyřstěn má hranu AC a dvě dvojice shodných stěn.



Obrázek 4.27:

Vyrobením papírových modelů se můžeme přesvědčit, že tělesa existují.

(b) Deltoid $ABCD$ má osu symetrie $\leftrightarrow AC$ a lze mu opsat kružnici k, protože je tětivový. Ta je opsaná nad průměrem AC, a proto úhly při vrcholech B, D jsou pravé. Mohou nastat dvě možnosti.

i. Čtyřstěn je $AXYC$, který má za podstavu rovnoramenný trojúhelník XYA a výšku b (body B a D jsou tentýž vrchol čtyřstěnu jako A a AC je kolmé na rovinu podstavy), (obr. 4.28). Pro objem čtyřstěnu platí

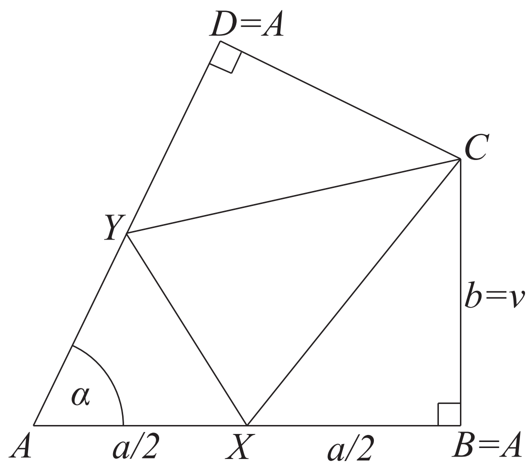
$$V_1 = \frac{a^2 b \cdot \sin\alpha}{24}.$$

ii. Čtyřstěn je $CUVA$, který má za podstavu rovnoramenný trojúhelník UVC a výšku a (body B a D zobrazují týž vrchol čtyřstěnu jako bod C a AV je kolmé na rovinu podstavy), (obr. 4.29). Pro objem čtyřstěnu platí

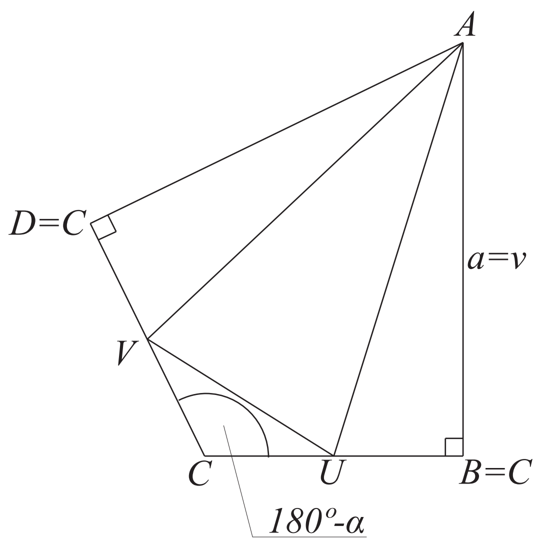
$$V_2 = \frac{ab^2 \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{24} = \frac{ab^2 \cdot \sin\alpha}{24}.$$

Čtyřstěny existují a jejich objemy jsou v poměru

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b} = \frac{8}{5}.$$



Obrázek 4.28:



Obrázek 4.29:

Kapitola 5

Závěr

Hlavní cíl diplomové práce spočíval ve zpracování a vyřešení 17. – 19. ročníku Jihočeského korespondenčního matematického semináře, který probíhal v letech 1996 – 1999. Dále pomáhá zdokumentovat a shrnout celý průběh semináře.

Vyřešené úlohy by měli sloužit studentům středních škol, ale samozřejmě jsou určené všem, kteří se o matematiku zajímají. Učitelé v nich mohou naleznout inspiraci k zpestření výuky.

Práce mě obohatila, nejen o zajímavé příklady, ale i o seznámení se s programem TEX, který byl použit na její zpracování. Zkušenosti s tímto programem se mi mohou hodit k sestavování studijních materiálů.

Literatura

[1] Frčka, L.: *Diofantovské rovnice.* (bakalářská práce), Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2007.

[2] Koblížková, M.: *Objevujme mnohostěny - sbírka řešených úloh pro zájemce o geometrii, In Mnohostěny a středoškolská matematika.* (dizertační práce), UK v Praze, Praha, 2004.

[3] Konforovič, A. G.: *Významné matematické úlohy.* SPN, Praha 1989.

[4] Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice.* Praha, SPN, 1990.

[5] Perelman, J.I.: *Zajímavá algebra.* Praha, SNTL, 1985.

[6] *Originály tiskopisů zadání jednotlivých serií semináře.*