JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

STEJNOLEHLOST S PODPOROU CABRI VE STŘEDOŠKOLSKÉ GEOMETRII

(Diplomová práce)

Vypracoval: Petr Janáček

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Datum odevzdání: duben 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 24. dubna 2009 ………………………………….

Děkuji panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za jeho trpělivost, odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytoval.

Anotace

Název:	Stejnolehlost s podporou CABRI ve středoškolské geometrii
	Diplomová práce 2009, České Budějovice
Vypracoval:	Petr Janáček
Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Klíčová slova:	stejnolehlost, didaktika matematiky, planimetrie, konstrukční úlohy, Cabri geometrie

Práce se zabývá výukou tématu stejnolehlosti s podporou CABRI II Plus. Obsahuje jednak interaktivní soubory v příloze na CD, jednak metodický návod k jejich užití. Je i vhodnou pomůckou k samostatnému studiu.

Anbstract

Title:	The homothety with Cabri support in secondary school geometry Graduation thesis 2009, České Budějovice
Work up:	Petr Janáček
Master of Graduation thesis:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Keywords:	homothety, mathematics didactics, plane geometry, constructive problems, Cabri Geométre II.

The theme of this graduation thesis is the education of homothety using CABRI II Plus. It includes interactive files on CD and methodical instruction how to use them. It is also very useful tool for self-education.

Obsah

1. Úvod

Téma diplomové práce jsem si vybral proto, že jsem měl pocit, že většina studentů opouštějících střední školu si nedokáže pod pojmem „Stejnolehlost“ nic konkrétního vybavit. Snažil jsem se přijít na důvod, proč tomu tak je. Důvodů je hned několik.

Jako první bych uvedl stále se snižující počet hodin matematiky na jeden vyučovací týden. Z toho vyplývá i tlak na učitele, aby věnovali probíranému učivu méně času a někdy dokonce i nějakou látku vynechali. To je, bohužel, moderní trend doby, se kterým se nedá nic dělat. Proto se stejnolehlost vyučuje převážně už jenom na gymnáziích.

Dalším důvodem je problematika názorného předvedení tématu. Dříve to býval problém, protože vše záleželo nejen na pedagogickém umu, ale i na zručnosti učitele. V dnešní době techniky už se toho nemusíme obávat. K dispozici jsou programy na dynamickou geometrii, které mohou studentům kouzlo geometrie přiblížit daleko lépe, než by se to dalo zvládnout na tabuli. V současné době je nejlepším prostředkem pro zobrazování dynamické geometrie program CABRI II Plus. Bohužel ještě není moc využívaný. Možnou příčinou je, že pořízení tohoto programu není zadarmo a školy při svých investicích mnohdy nemají moc na výběr.

Věřím ale, že v blízké době ředitelé škol pochopí, jak užitečný tento program je. Vždyť matematika není o „počítání příkladů, které stejně nikdy nepoužijeme“, ale může nás naučit mnoho věcí, které si ani neuvědomujeme, jako např. způsob, jak řešit problémy, procvičovat si logické uvažování, algoritmizaci myšlení apod.

Pro ty, kteří už kouzlo CABRI objevili, bude tato práce pomůckou, pro ostatní snad inspirací.

2. Průzkum

2.1. Dotazníky

Zajímalo mě, jak se daří studentům na středních školách pochopit látku týkající se stejnolehlosti. Proto jsem vytvořil dva dotazníky – jeden pro učitele, jeden pro studenty. Výzkum jsem uskutečnil na gymnáziích, protože na ostatních typech škol se stejnolehlost buď nevyučuje, nebo je probírána jen okrajově. Ačkoliv vše bylo zcela anonymní, setkal jsem se u některých ředitelů s neochotou, někde dokonce i arogancí.

Nakonec se mi podařilo vybrat ze dvou škol celkem 65 dotazníků od studentů. Záměrně jsem vybíral vyšší ročníky s odstupem 2 roky od probírané látky.

2.1.1. Dotazník pro studenty

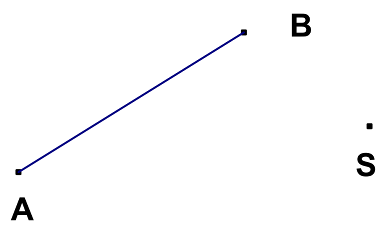
Tyto dotazníky obsahovaly tři úplně základní úlohy na stejnolehlost. Chtěl jsem, aby dotazník byl co nejkratší, abych příliš nenarušil učební plán (který se mimochodem nestíhal snad ani na jedné škole, kde jsem se ptal). Dva z příkladů se daly vyřešit intuitivně vzhledem k poloze zadání. Ty byly doplňující. Nejpodstatnější byl příklad prostřední, kde se ukázalo, jak na tom opravdu znalosti studentů o tomto tématu jsou.

Dotazník pro studenty

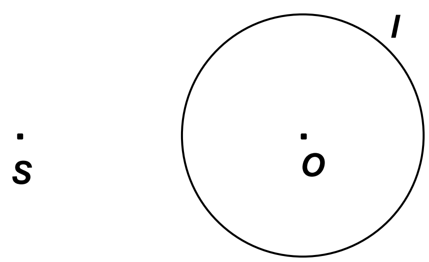
Ročník:

Sestrojte obraz bodu X ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem k = 2. Bod nazvěte X’.

Sestrojte obraz úsečky AB ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem k = 1. Úsečku nazvěte A’B’.



Sestrojte obraz kružnice l ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem k = -1. Kružnici nazvěte l’.



2.1.2. Dotazník pro učitele

Dotazník pro učitele se skládal z obecných otázek, např. ve kterém ročníku se stejnolehlost vyučuje, kolik hodin je jí věnováno, jak se zavádí, a jaké se používají pomůcky. Program CABRI je zatím občas používán jako demonstrační prostředek, ale studenti se s ním moc příležitostí setkat osobně neměli. I když na jednom gymnáziu už od příštího roku k němu přístup mít budou.

Dotazník pro učitele

Typ školy: ……………………..

V kterém ročníku je vyučována stejnolehlost?

…………………………………………………

Kolik hodin je stejnolehlosti věnováno?

…………………………………………………

Jakým způsobem se stejnolehlost zavádí?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jaké pomůcky (programy) se při zavádění stejnolehlosti používají?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2.2. Vyhodnocení

Průzkum základních znalostí o stejnolehlosti mezi studenty gymnázií							
	Počet studentů	Časový odstup	Počet hodin	Relativní četnost úspěšného řešení v %			Pomůcky používané při zavádění stejnolehlosti
				Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3	
Škola A	50	2 roky	6	80	58	74	CABRI - učitel, projektor
Škola B	15	2 roky	4	20	13,3	20	tabule

Tabulka1

Rozdílný počet hodin je dán tím, že jedno gymnázium bylo zaměřené jazykově a druhé přírodovědně. I přes menší dotaci hodin je ale rozdíl příliš veliký. Svoji roli hraje zajisté i to, pomocí jakých pomůcek učitelé látku vykládají. Jak jsem předpokládal, kreslení na tabuli je mnohem méně efektivní než moderní projekční metody.

Co se týče příkladu 2, ukázalo se, že většina špatných odpovědí vycházela ze zkreslené asociace, že stejnolehlost je středovou souměrností. Jedná se však pouze o její speciální případ.

3. Teoretická část

3.1. Základní poznatky o stejnolehlosti

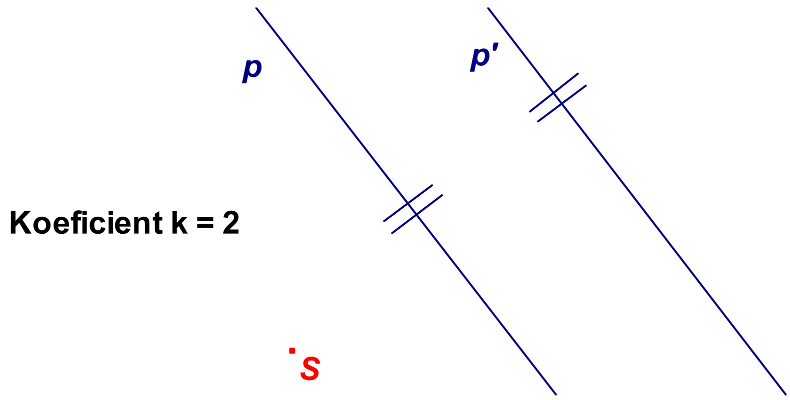
Je dán bod S a reálné číslo k ($k \neq 0$). *Stejnolehlost (homotetie) se středem S a koeficientem* κ *je zobrazení* $H(S,k)$*, které přiřazuje:*

1. *každému bodu* $X \neq S$ *bod X′ tak, že platí* $|SX'| = |k| \cdot |SX|$; *přitom pro* $k > 0$ *leží bod X′ na polopřímce SX, pro* $k < 0$ *je bod X′ bodem polopřímky opačné,*

2. *bodu S bod* $S' = S$. [3]

Koeficient k nesmí být roven nule z důvodu, že by se potom všechny body zobrazily do bodu S, a takové zobrazení by nemělo smysl.

Věta 1: Přímka a její obraz ve stejnolehlosti jsou rovnoběžné. [3]



Obr. veta01

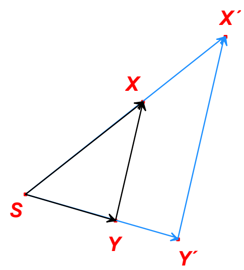
Důkaz: [1]

Evidentně stačí dokázat, že obrazem úsečky je rovnoběžná úsečka.

Mějme úsečku XY. Jejím obrazem bude úsečka $X'Y'$.

Platí že $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ a obraz leží ve stejné nebo opačné polopřímce, tj. vektorově zapsáno:

$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$. Stejně tak $\overrightarrow{SY'} = k \cdot \overrightarrow{SY}$. (1)



Obr. dk1

Dle definice stejnolehlosti musí platit (viz obr. dk1) vztah $\overrightarrow{SX} = \overrightarrow{SY} + \overrightarrow{YX}$.

Vynásobením číslem k dostaneme rovnost $k \cdot \overrightarrow{SX} = k \cdot \overrightarrow{SY} + k \cdot \overrightarrow{YX}$.

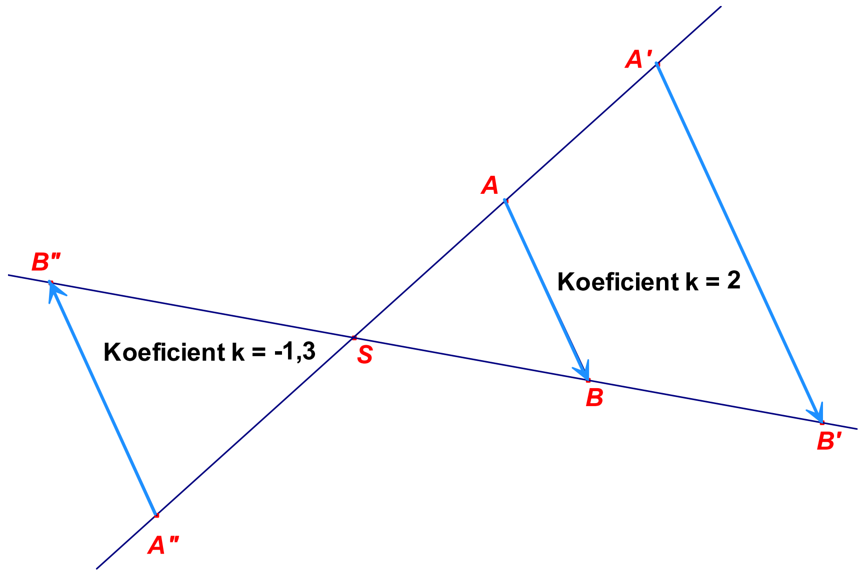
V důsledku vztahu (1) tedy můžeme napsat $\overrightarrow{SX'} = \overrightarrow{SY'} + k \cdot \overrightarrow{YX}$.

Podle obrázku platí $\overrightarrow{SX'} = \overrightarrow{SY'} + \overrightarrow{Y'X'}$,

tedy $k \cdot \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{Y'X'}$.

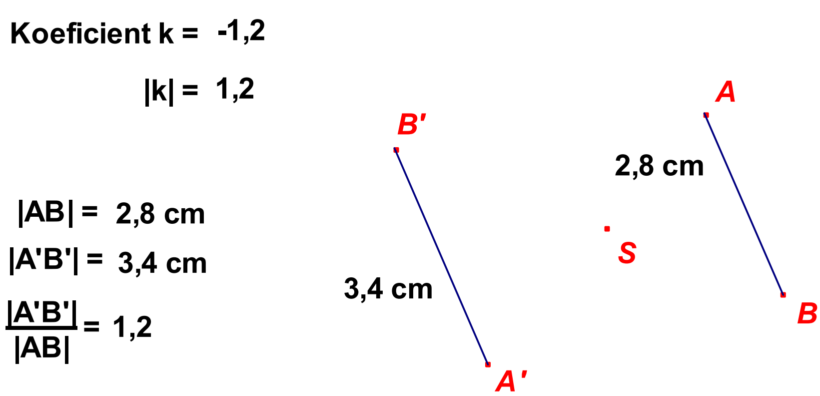
Tím je dokázáno, že přímky XY a $X'Y'$ jsou rovnoběžné a platí $|X'Y'| = |k| \cdot |XY|$.

Věta 2: Úsečka a její obraz ve stejnolehlosti jsou rovnoběžné. Vektory mezi krajními body úsečky jsou souhlasně orientovány ve stejnolehlosti s kladným koeficientem a opačně orientovány ve stejnolehlosti se záporným koeficientem. [3]



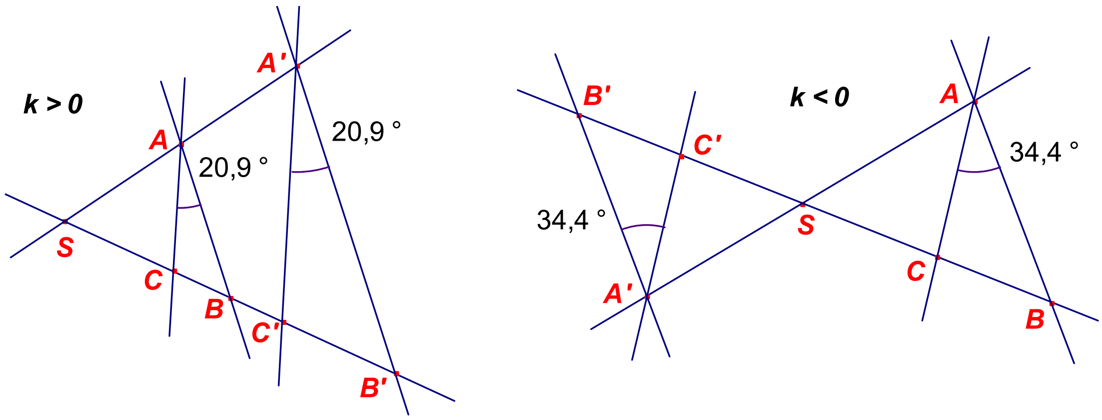
Obr. veta02

Věta 3: Poměr délek obrazu úsečky a jejího vzoru se rovná absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti. [3]



Obr. veta03

Věta 4: Obrazem úhlu je úhel shodný. [3]

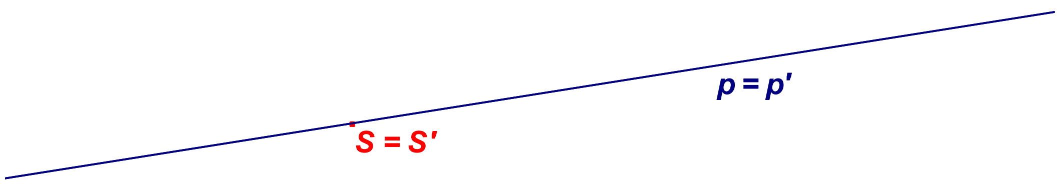


Obr. veta04

Důkaz:

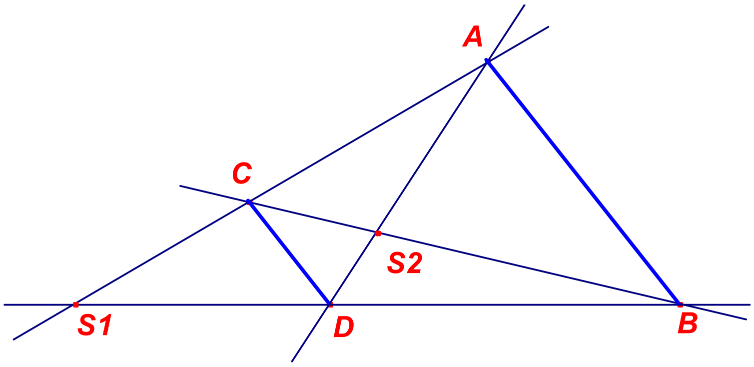
Plyne z rovnoběžnosti odpovídajících si přímek.

*Věta 5: Jediným **samodružným bodem** ve stejnolehlosti, která není identitou, je střed stejnolehlosti. **Samodružné přímky** jsou všechny přímky, které procházejí středem stejnolehlosti.* [3]



Obr. veta05

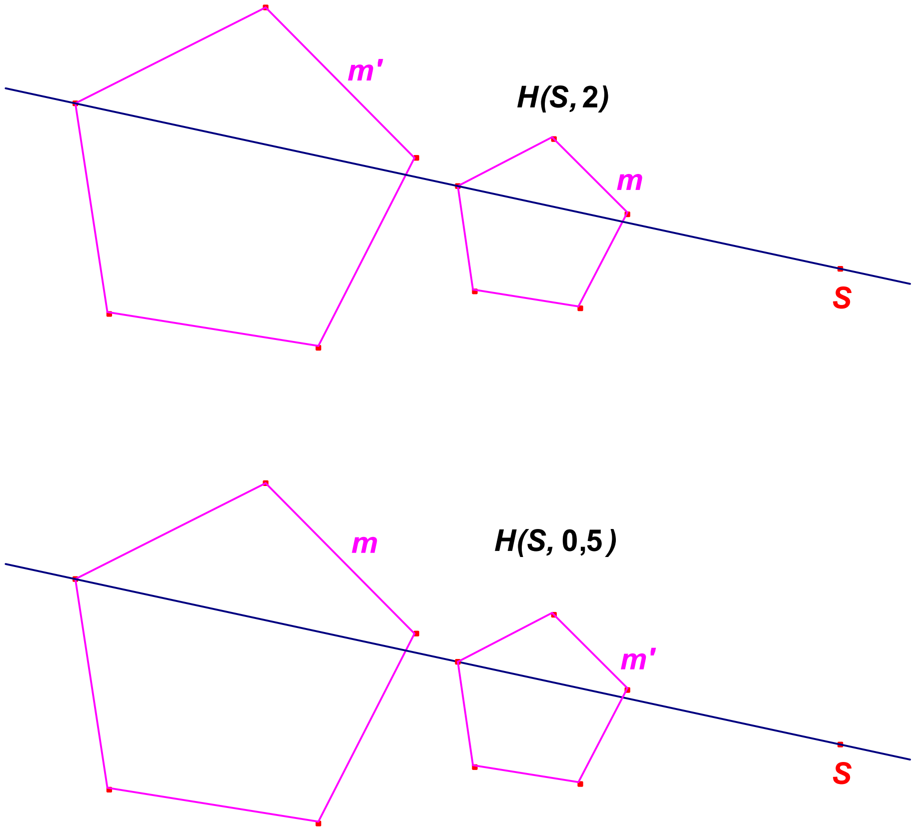
Věta 6: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí jednu úsečku na druhou. [3]



Obr. veta06

Pokud budeme brát úsečku CD jako obraz úsečky AB, tak první stejnolehlost se středem S_1 bude mít koeficient $k = \frac{|CD|}{|AB|}$ a střed S_1 nazveme **vnějším středem stejnolehlosti**. Druhá stejnolehlost se středem S_2 bude mít koeficient $k = -\frac{|CD|}{|AB|}$ a střed S nazveme **vnitřním středem stejnolehlosti**.

Věta 7: Inverzním zobrazením ke stejnolehlosti $H(S,k)$ *je stejnolehlost* $H\left(S,\frac{1}{k}\right)$. [3]



Obr. veta07

Důkaz:

Z definice stejnolehlosti lze odvodit analytické vyjádření:

$$\overrightarrow{SX'} = k\,\overrightarrow{SX}$$
$$X' - S = k(X - S)$$
$$X' = S + k(X - S)$$

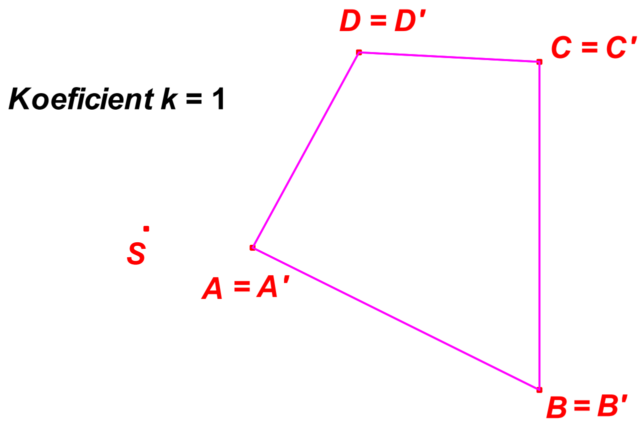
Rovnici inverzního zobrazení najdeme osamostatněním X:

$$X' = S + k(X - S)$$
$$X' - S = k(X - S)$$
$$\frac{1}{k}(X' - S) = X - S$$
$$X = S + \frac{1}{k}(X' - S)$$

Porovnáním obou předpisů je vidět, že střed je opět S a koeficient je $\frac{1}{k}$.

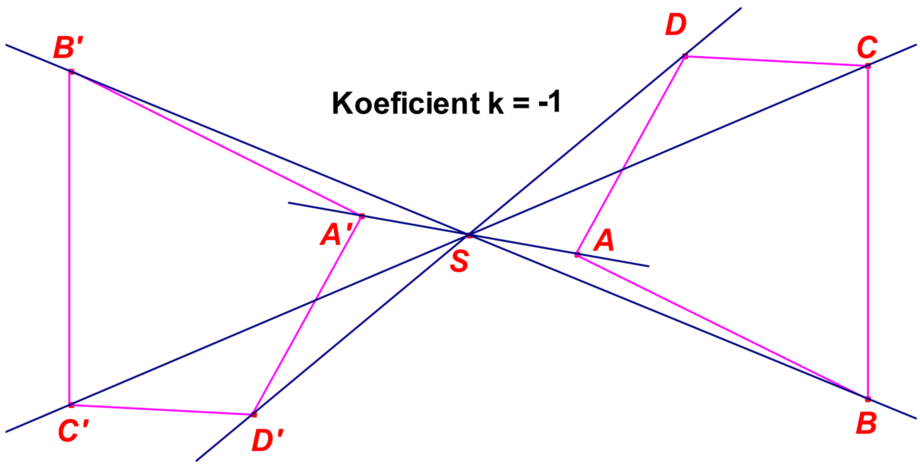
3.2. Speciální případy stejnolehlosti

Věta 8: Stejnolehlost s koeficientem $k = 1$ *je identita; každý bod roviny samodružný je samodružný.* [3]



Obr. veta08

Věta 9: Stejnolehlost s koeficientem $k = -1$ *je středová souměrnost.* [3]



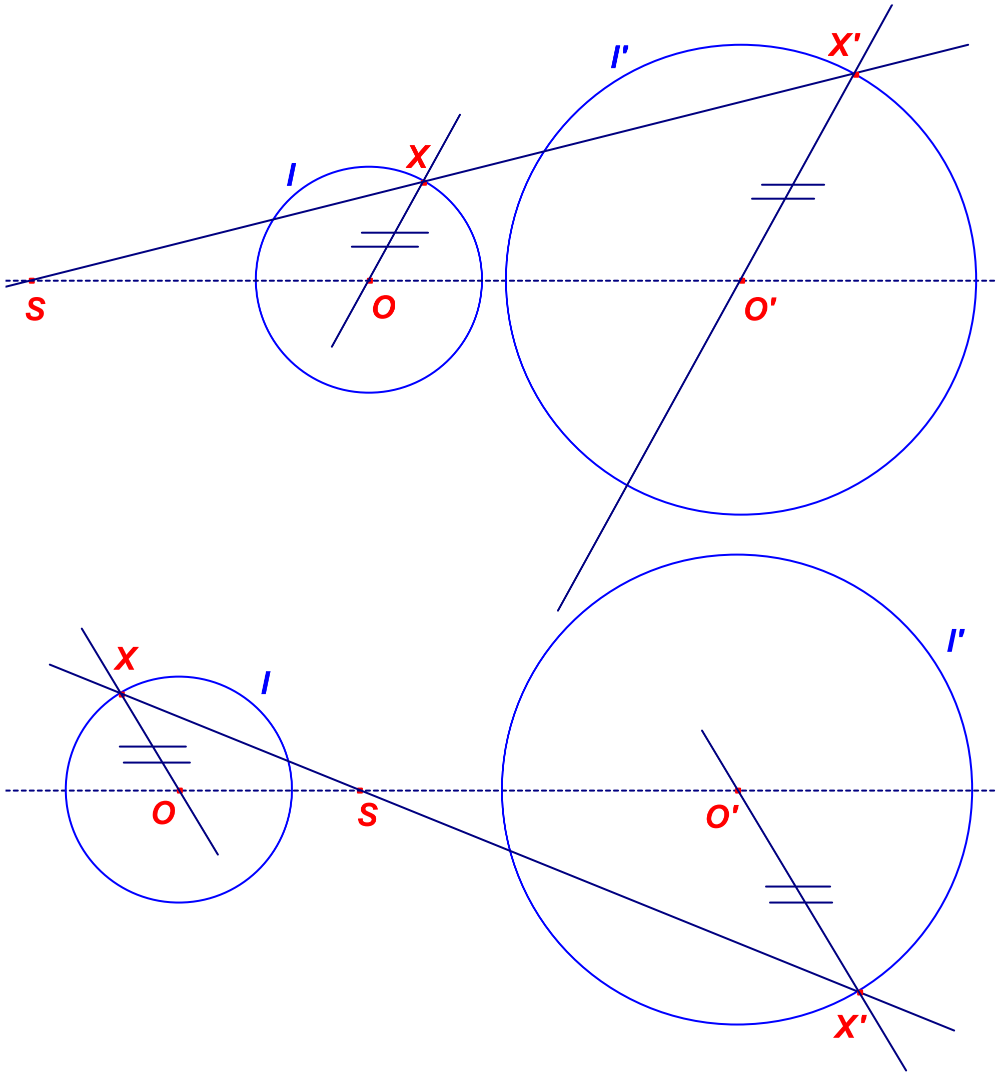
Obr. veta09

3.3. Stejnolehlost kružnic

Specifickým útvarem pro zobrazení ve stejnolehlosti je kružnice, proto je jí věnována samostatná kapitola.

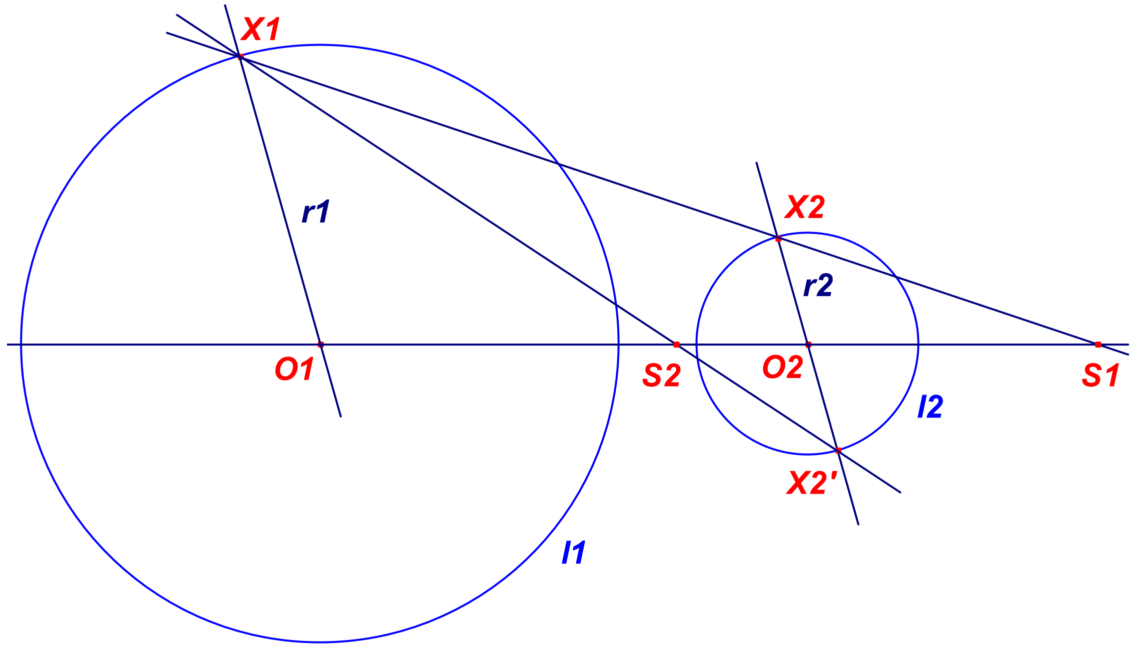
Z předcházejících vět přímo plyne.

Věta 10: Obrazem kružnice $l(O;r)$ *ve stejnolehlosti* $H(S;k)$ *je kružnice* $l'(O';|k|\cdot r)$*; přitom bod O′ je obrazem bodu O.* [3]



Obr. veta10

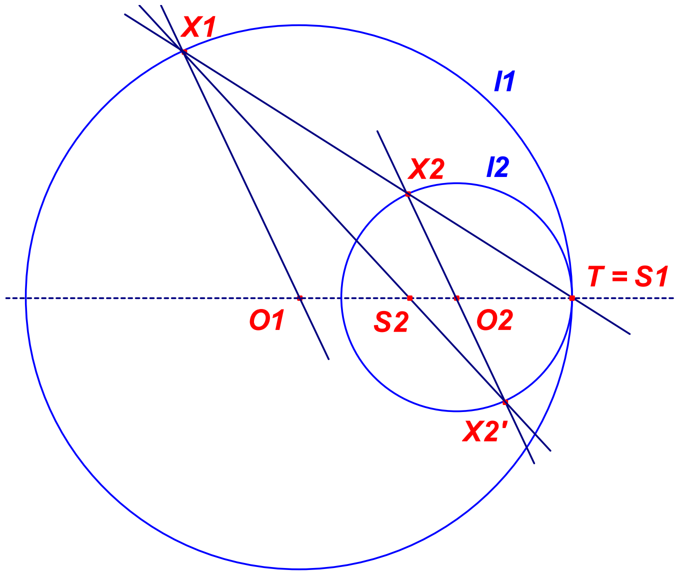
Věta 11: Jsou-li dány dvě kružnice l_1, l_2 s různými poloměry, tak existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí kružnici l_1 na kružnici l_2. [3]



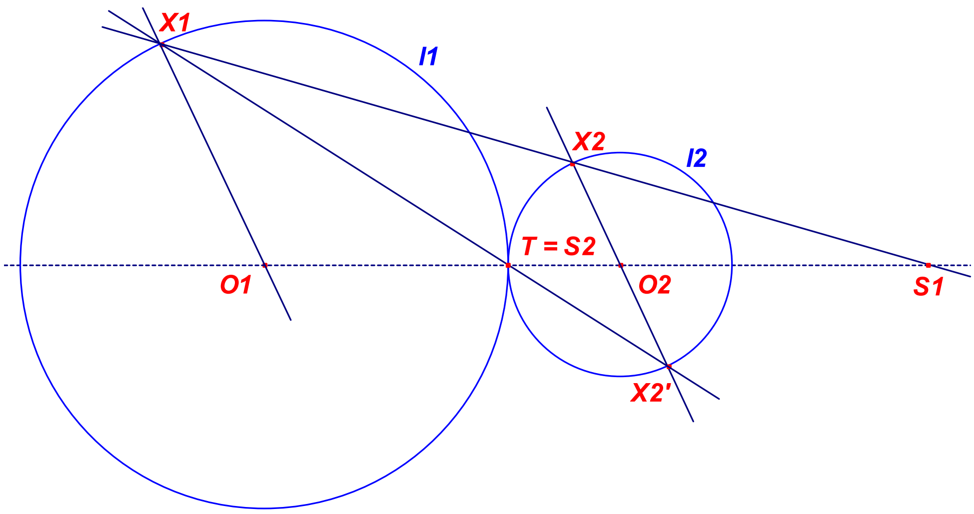
Obr. veta11

Pokud budeme brát kružnici $l_2(O_2; r_2)$ jako obraz kružnice $l_1(O_1; r_1)$, tak první stejnolehlost se středem S_1 (S_1 leží vně úsečky O_1O_2) bude mít koeficient $k = \frac{r_2}{r_1}$ a střed S_1 nazveme **vnějším středem stejnolehlosti**. Druhá stejnolehlost se středem S_2 (S_2 leží uvnitř úsečky O_1O_2) bude mít koeficient $k = -\frac{r_2}{r_1}$ a střed S_2 nazveme **vnitřním středem stejnolehlosti**.

Veta 12: Jestliže se kružnice dotýkají, je jeden střed stejnolehlosti v bodě dotyku. Bod vnitřního dotyku je vnějším středem stejnolehlosti (Obr. veta12a), bod vnějšího dotyku vnitřním středem stejnolehlosti (Obr. veta12b). [3]

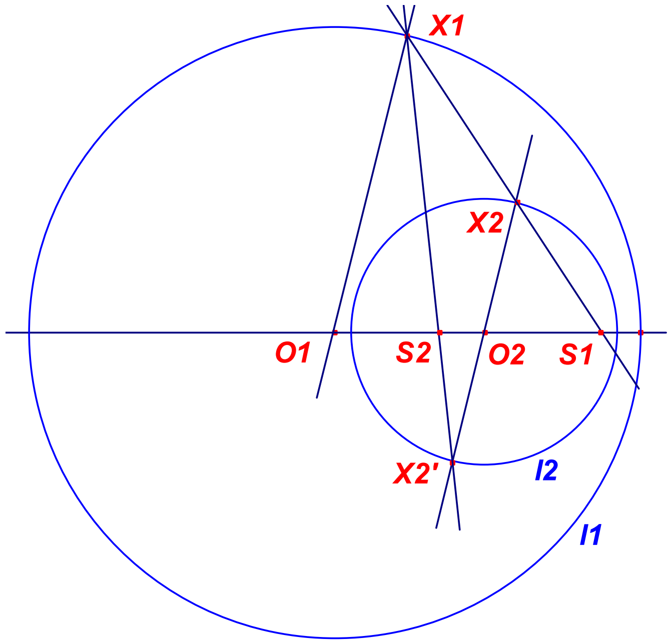


Obr. veta12a

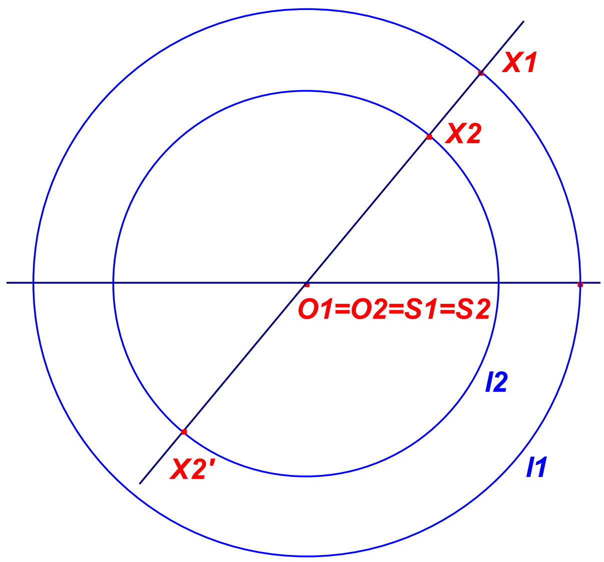


Obr. veta12b

Další možné polohy kružnic:

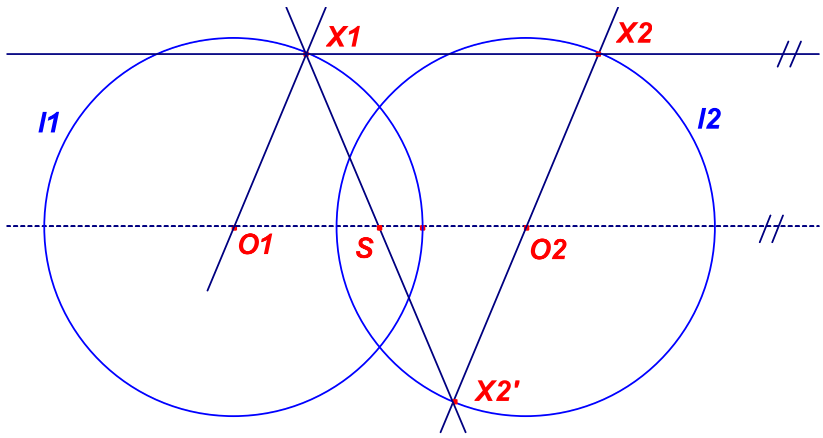


Obr. teo1

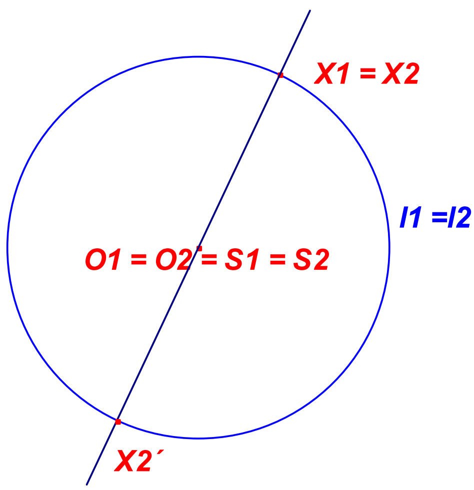


Obr. teo2

Věta 13: V případě dvou shodných kružnic s různými středy existuje jen jedna stejnolehlost, která zobrazuje jednu kružnici na druhou. Je to středová souměrnost (Obr. veta13a). Jestliže středy dvou shodných kružnic splývají, jde buď o identitu nebo o středovou souměrnost (Obr. veta13b). [3]



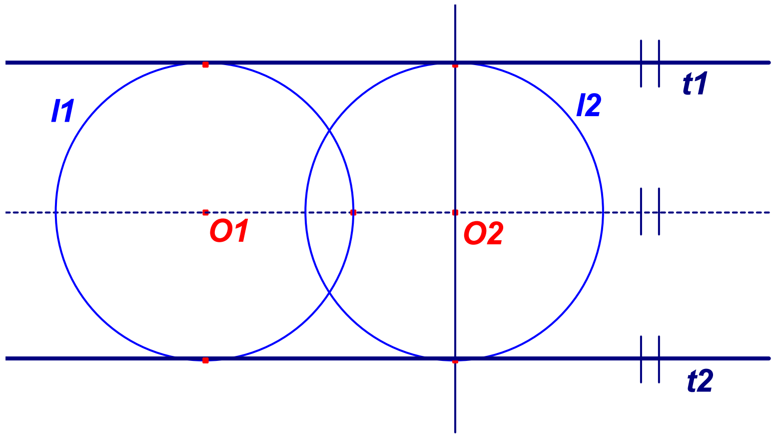
Obr. veta13a



Obr. veta13b

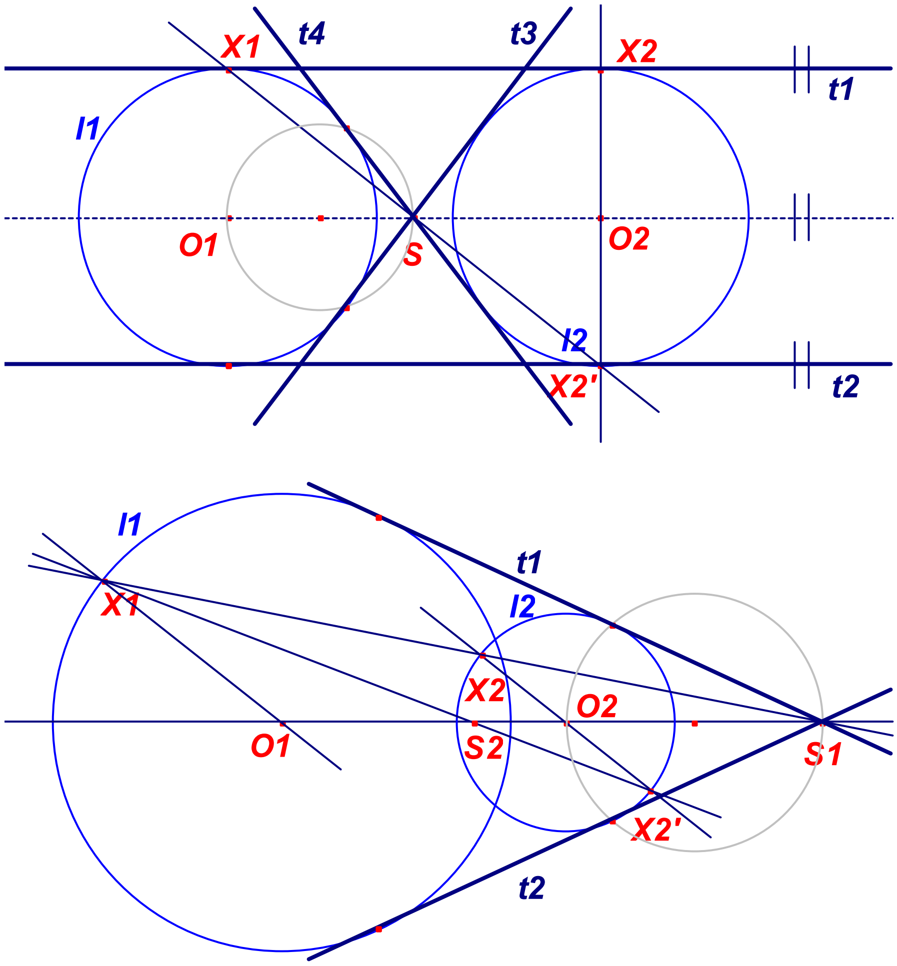
Věta 14: Společná tečna dvou kružnic (pokud existuje) je buď rovnoběžná se spojnicí středů kružnic (Obr. veta14a), nebo prochází středem některé stejnolehlosti, zobrazující jednu kružnici na druhou (Obr. veta14b-c). [3]

Tečny jsou rovnoběžné se spojnicí středů kružnic v případě, že poloměry obou kružnic se rovnají.



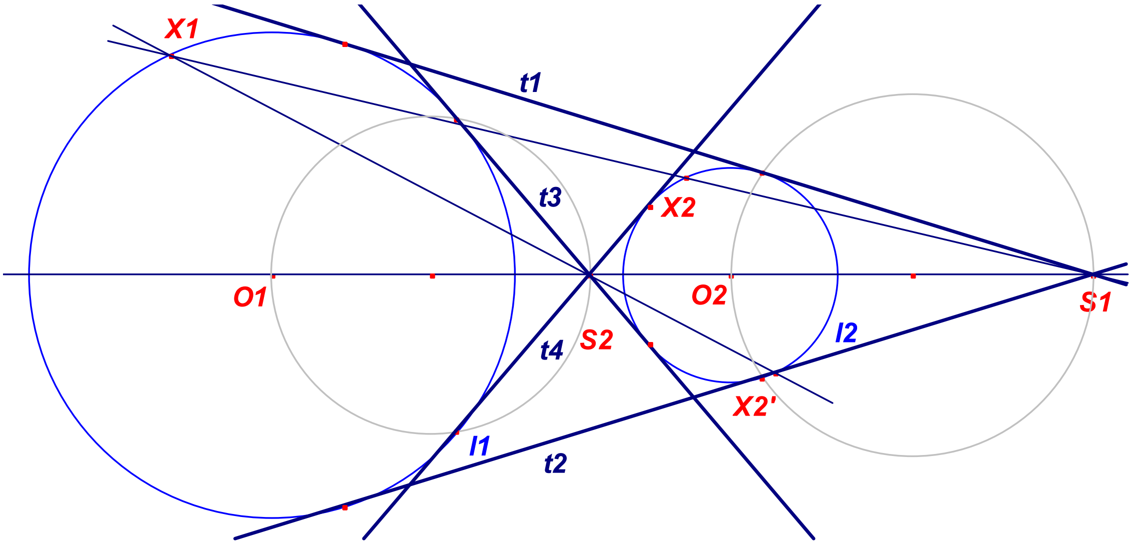
Obr. veta14a

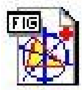
Dvě tečny procházejí jedním středem stejnolehlosti v případě, že dvě kružnice nemají žádný společný bod a mají stejný poloměr, nebo když se protínají a jejich poloměr je různý.



Obr. veta14b

Dvě kružnice mají čtyři společné tečny, pokud součet jejich poloměrů je menší než vzdálenost jejich středů. Když mají navíc různé poloměry, pak dvě tečny procházejí vnitřním a dvě vnějším středem stejnolehlosti.





Obr. veta14c

4. Didaktická část

4.1. Motivace

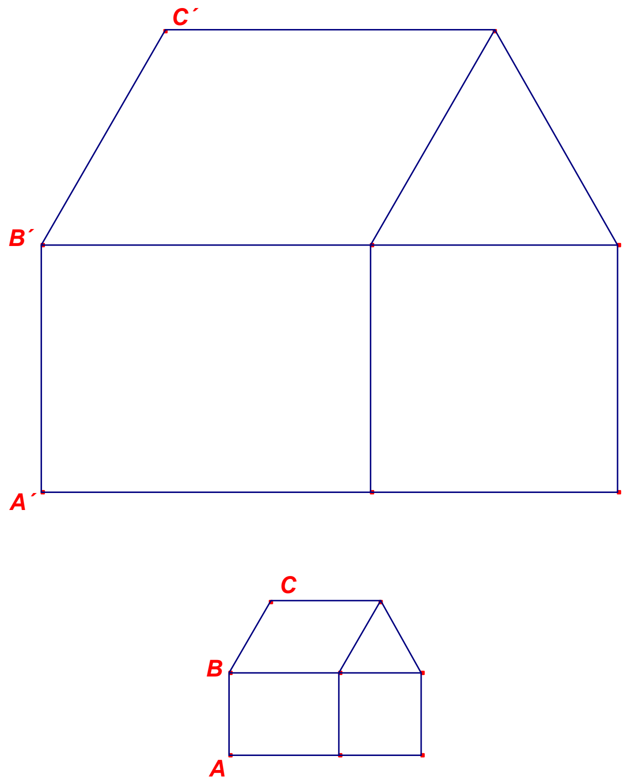
Z mého průzkumu vyplynulo, že většina studentů, kteří stejnolehlost nepochopili, si ji pletla se středovou souměrností. Proto bych se při zavádění stejnolehlosti, alespoň ze začátku, o tomto zvláštním případu stejnolehlosti nezmiňoval.

Úplně nejideálnější by bylo, aby studenti sami přišli na vztahy, které pro zobrazení ve stejnolehlosti platí. První část hodiny by tedy měla být v objevitelském duchu. Studenti dostanou vytištěný obrázek (Obr. motivacedomecek) a zkoumají pomocí pravítka, úhloměru a kalkulačky, jaké vztahy mezi danými dvěma objekty platí. Učitel mezi nimi prochází a zjišťuje, jak si studenti vedou. Během toho jim může napovídat, na co by se měli studenti zaměřit, např. na vztahy mezi úsečkou a jejím obrazem, úhlem a jeho obrazem či spojnicemi bodů a jejich obrazů.

Přibližně po deseti minutách průzkumu nastává diskuze o objevených vztazích. Učitel studenty pak upozorní na vztahy, které nebyly uvedeny. Odhalí, že takovéto zobrazení se nazývá stejnolehlost a zavede jeho definici. Na konci této části hodiny by měli být studenti seznámeni s těmito poznatky:

- odpovídající si úsečky jsou rovnoběžné
- odpovídající si úhly jsou shodné
- přímky spojující body a jejich obrazy se protínají v jednom bodě, a to je střed stejnolehlosti
- poměr vzdáleností středu od obrazu bodu a středu od vzoru bodu je pro libovolný bod stejný, a to je koeficient stejnolehlosti
- koeficient stejnolehlosti určuje i poměr velikosti obrazu úsečky a velikosti jejího vzoru

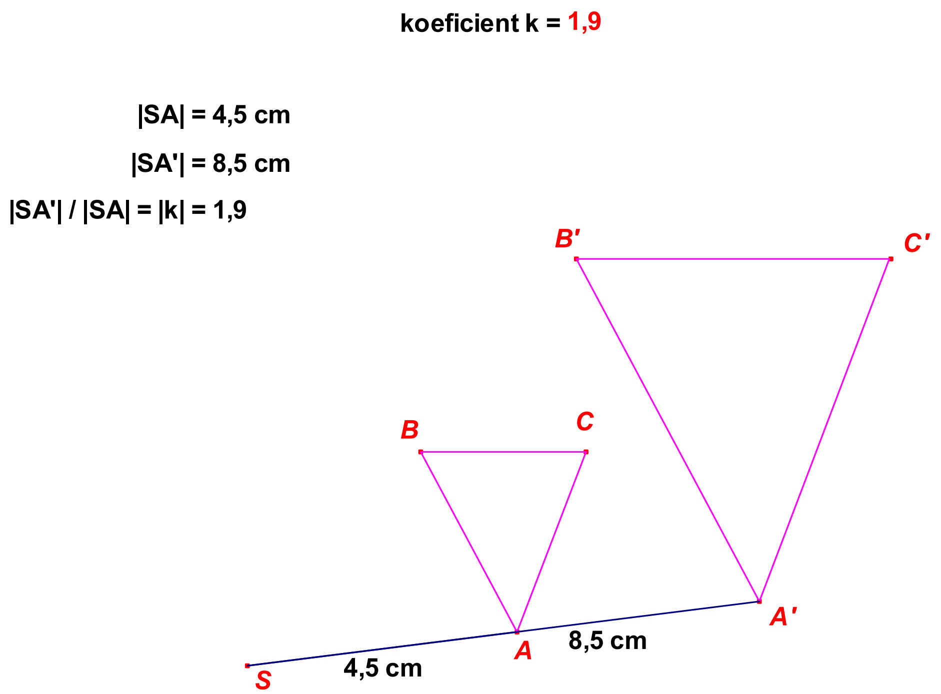
Aby si studenti vyzkoušeli zobrazování pomocí stejnolehlosti, mohou menšímu domečku pomocí úseček přikreslit komín, okno či dveře, a potom tyto nové útvary zobrazit na domeček větší. Bude to jejich první praktické využití stejnolehlosti.



Obr. motivacedomecek

V další části hodiny pak studenti použijí pro zpřesnění své představy o stejnolehlosti vzorový obrázek vytvořený v programu CABRI II plus (Obr. motivaceukazka). V tomto obrázku jsou veškeré body pohyblivé včetně středu stejnolehlosti *S*. Studenti mohou měnit i koeficient stejnolehlosti *k* a sledovat, jak se mění obraz daného útvaru (v našem případě trojúhelníku). Je zde vyjádřena vzdálenost bodu *A* i jeho obrazu *A´* od středu stejnolehlosti *S* a jejich poměr.

Dále pak už začíná samotná práce s pracovními listy.



Obr. motivaceukazka

4.2. Úlohy s pracovními listy

Pro účely této práce jsem vytvořil pracovní listy, které studentům ulehčí a zpřehlední výuku. Práce s nimi je jednoduchá, přehledná a odpadá nebezpečí špatně opsaného zadání. Prostor je i na poznámky studentů, což řada z nich určitě ocení. Na přiloženém CD jsou k dispozici dvě verze pracovních listů.

Verze, u které je v názvu souboru napsáno „tisk“, je určena pro studenty. S těmito pracovními listy se pracuje tak, že se vytisknou a studenti si do předkresleného zadání udělají náčrtek řešení a vedle napíší zápis konstrukce. Na první straně listu je prostor na poznámky. Druhá strana je vyhrazena diskusi k zadané úloze. Samotnou konstrukci dělají v programu CABRI II Plus. Učitel si může vyžádat jak pracovní listy, tak soubory s případným řešením, popřípadě je i ohodnotit.

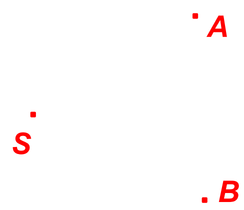
Druhá verze, u které je v názvu souboru napsáno „reseni“, je pro učitele. Obsahuje řešení i diskusi k dané úloze. K tomuto pracovnímu listu je přiloženo řešení s postupem vytvořené v CABRI II Plus. Jednotlivé kroky konstrukce i s popisem se odkrývají po kliknutí na připravená tlačítka. Tato pomůcka značně usnadňuje učiteli práci při demonstraci řešení úlohy. Je však nutné dbát na to, aby jednotlivé kroky nebyly odkrývány příliš rychle. V případě potřeby může učitel tuto verzi listů poskytnout studentům.

Všechny obrázky jsou spustitelné přímo z této diplomové práce. Stačí držet klávesu CTRL a kliknout na ikonu v pravém dolním rohu obrázku.

4.2.1. Pracovní list č. 1 a 2

Zadání:

Sestrojte body *A'*, *B'* jako obrazy bodů *A*, *B* ve stejnolehlosti se středem *S* a koeficientem: a) $|k| = 2$, b) $|k| = -0.5$, c) $|k| = 1$, d) $|k| = 0$.

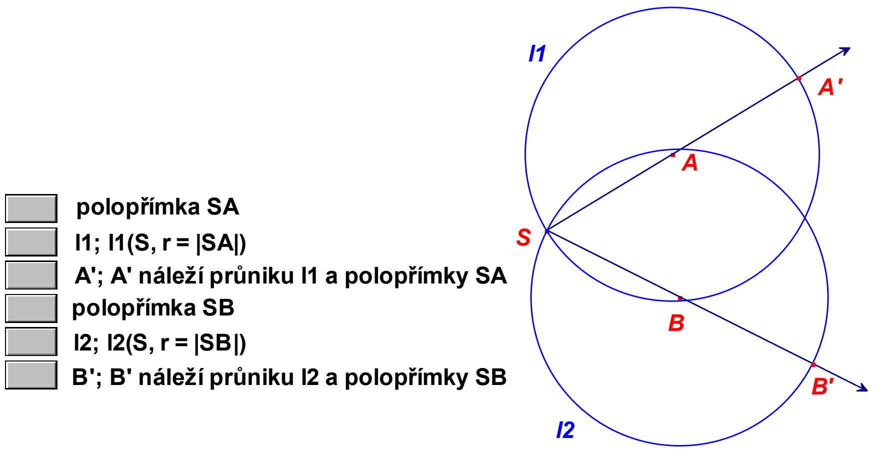


Obr. PL0102

Tyto pracovní listy slouží k zautomatizování práce s koeficientem a prohloubení znalosti principu zobrazení ve stejnolehlosti. Pro lepší zapamatování ještě není vhodné, aby studenti používali v CABRI předdefinovanou funkci „Stejnolehlost“. Bylo by to sice jednoduší a rychlejší, ale přišli by o příležitost procvičit si způsob zobrazování ve stejnolehlosti.

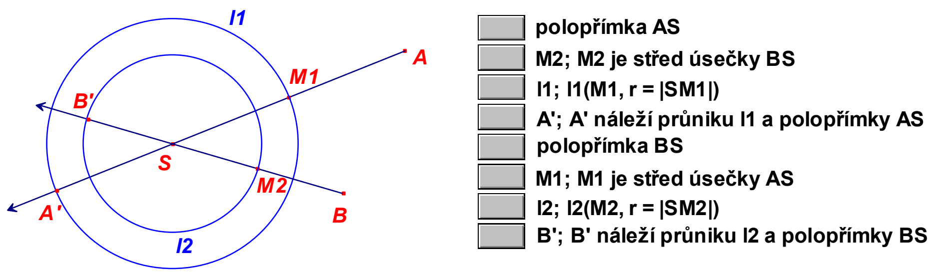
Řešení:

a) Podle definice musí být $|SA'| = |\,2\,| \cdot |SA|$, takže pro vyřešení použijeme polopřímku SA a bod A' vytvoříme v dvojnásobné vzdálenosti od bodu S. To samé zopakujeme i pro bod B'.



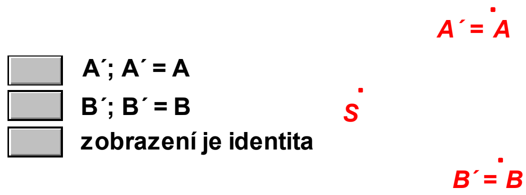
Obr. reseniPL0102a

b) Tento případ se liší od předchozího tím, že má záporný koeficient. Obraz bodu A tedy bude ležet na opačné polopřímce než u případu *a)*. Vzdálenost obrazu A' bude dle definice $|SA'| = |\,0{,}5\,| \cdot |SA|$.



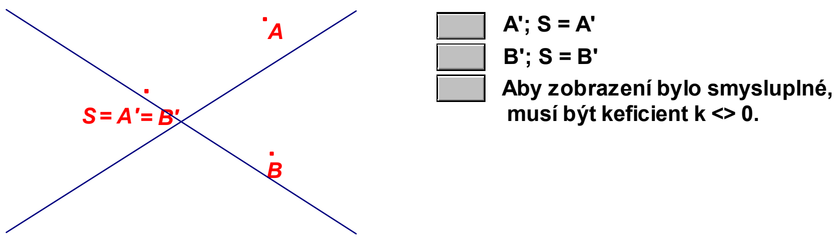
Obr. reseniPL0102b

c) Stejnolehlost s koeficientem $|k| = 1$ je speciálním případem stejnolehlosti, který se nazývá identita. Každý bod zobrazení s tímto koeficientem se zobrazí sám na sebe $|SA'| = |1| \cdot |SA| \Rightarrow |SA'| = |SA|$.



Obr. reseniPL0102c

d) Poslední je malý chyták. Učitel by tu měl ocenit studenty, kteří na první pohled poznají, že není splněna podmínka $k \neq 0$. Studenti si pak sami ověří, že takové zobrazení by nemělo smysl.



Obr. reseniPL0102d

Diskuse:

Příklad je zadán jednoznačně a tudíž existuje právě jedno řešení.

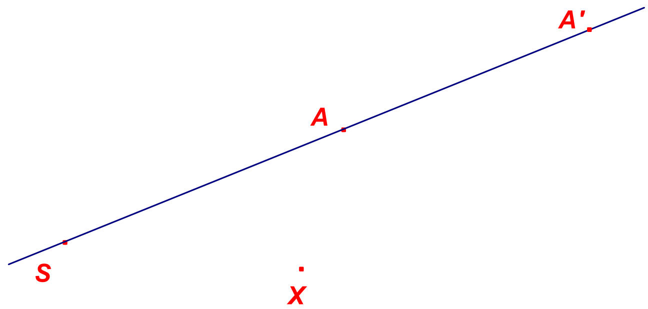
4.2.2. <u>Pracovní list č. 3</u>

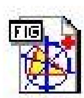
Zadání:

Máme stejnolehlost určenou středem *S*, bodem *A* a jeho obrazem *A'*. Podle této stejnolehlosti sestrojte *k* bodu *X* jeho obraz *X'*:

a) určením koeficientu stejnolehlosti,

b) geometricky.

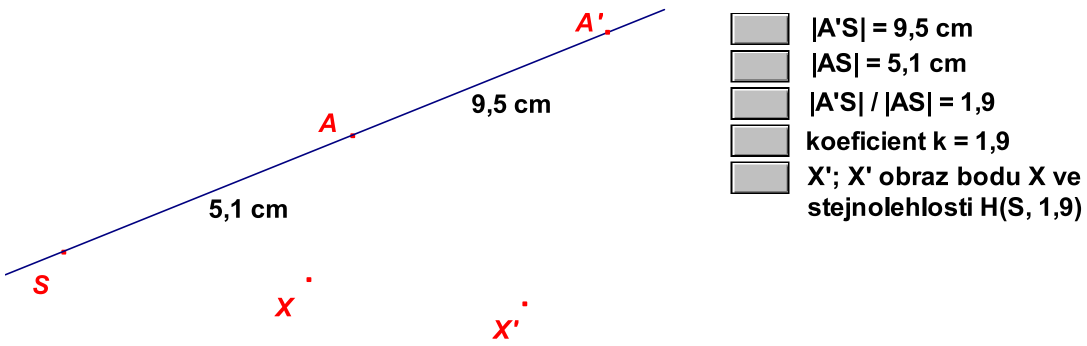




Obr. PL03

Řešení:

a) Zde můžeme opět využít základní definice stejnolehlosti $|SA'| = |k| \cdot |SA|$, kde tentokráte pro nás bude neznámou koeficient *k*. Využijeme funkce „Vzdálenost a délka“ v CABRI, abychom zjistili vzdálenosti bodů *A* a *A´* od bodu *S*. Dále použijeme funkci „Výpočty“ k provedení příslušného výpočtu $|k| = \dfrac{|SA'|}{|SA|}$. Poté použijeme přednastavenou funkci „Stejnolehlost“ v programu CABRI s námi vypočítaným koeficientem.



Obr. reseniPL03a

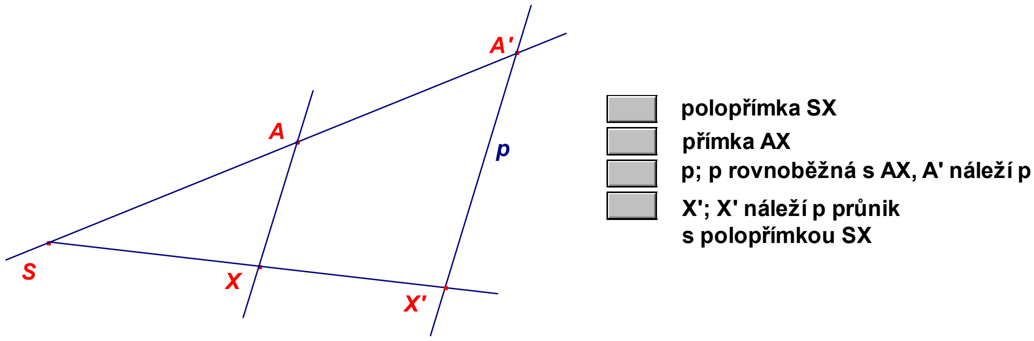
Diskuse:

Je-li $A \neq S \wedge A' = S$ nebo $A = S \wedge A' \neq S$, potom stejnolehlost neexistuje.

Je-li $A = S \wedge A' = S$, můžeme si jako koeficient *k* zvolit libovolné reálné číslo různé od nuly.

V případě, že bod $X = S$ a stejnolehlost určená body (*S, A, A´*) existuje, pak je bod X bodem samodružným a jeho obraz je tedy $X' = X = S$.

b) Tady už si s pouhou definicí nevystačíme. Využijeme zde *Věty 2*, která říká, že úsečka a její obraz jsou rovnoběžné. A jelikož musí obraz bodu *X* ležet na polopřímce *SX*, jedná se o průnik rovnoběžky *p* a právě dané polopřímky.



Obr. reseniPL03b

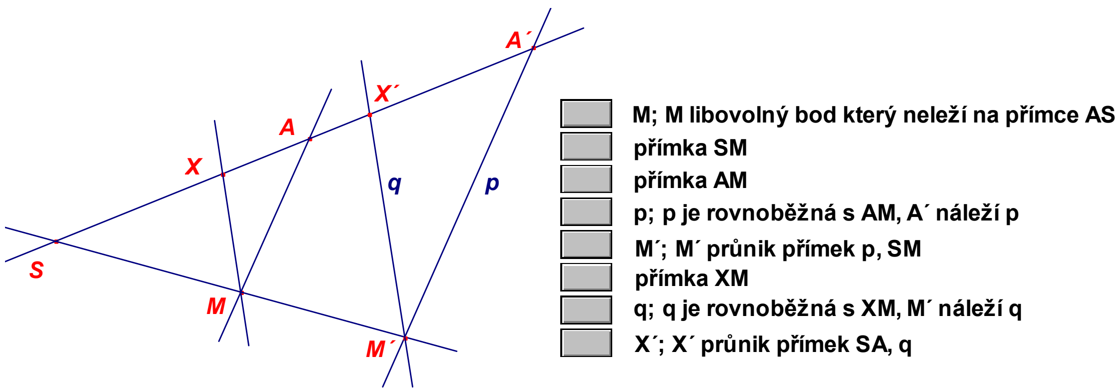
Diskuse:

Je-li $A \neq S \wedge A' = S$ nebo $A = S \wedge A' \neq S$, potom stejnolehlost neexistuje.

Je-li $A = S \wedge A' = S$, můžeme si jako koeficient k zvolit libovolné reálné číslo různé od nuly.

V případě, že bod $X = S$ a stejnolehlost určená body (S, A, A') existuje, pak je bod X bodem samodružným a jeho obraz je tedy $X' = X = S$.

Musíme ale ještě uvážit případ, kdy bod X leží na přímce SA a $X \neq S$. Zvolíme si bod M tak, aby neležel na přímce AS. Výše popsaným postupem sestrojíme jeho obraz M' v dané stejnolehlosti. Pro konstrukci bodu X' užijeme opět stejný postup, ve kterém dvojici (A, A') nahradíme dvojicí (M, M').

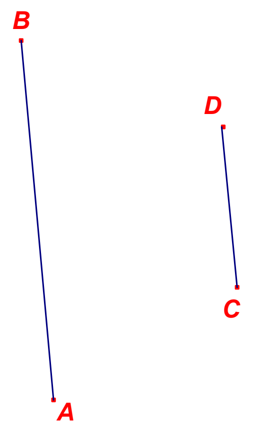


Obr reseniPL03b_d

4.2.3. Pracovní list č. 4

Zadání:

Máme dvě rovnoběžné úsečky *AB* a *CD*, které jsou různě velké. Sestrojte středy stejnolehlostí, které převádějí úsečku *AB* na úsečku *CD* a určete koeficienty příslušných stejnolehlostí.

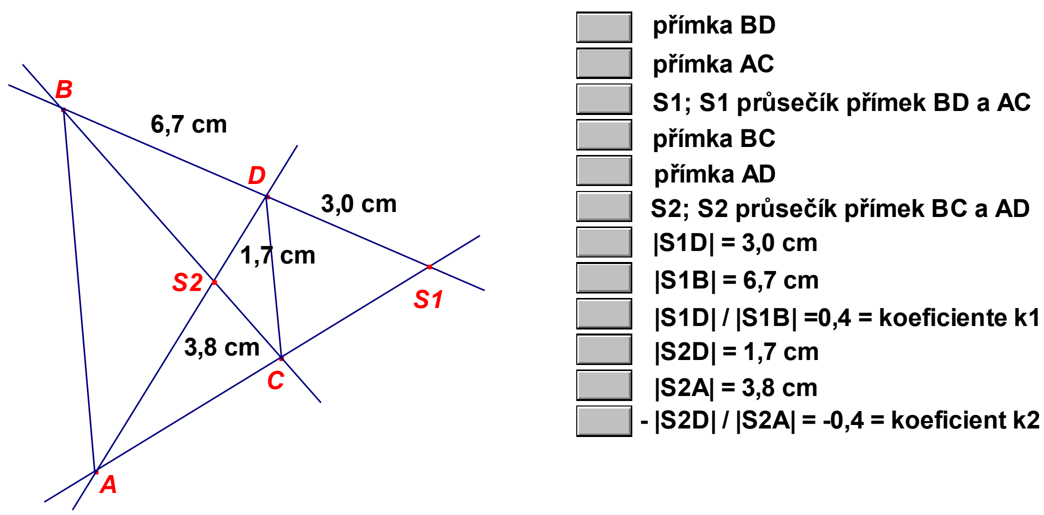


Obr PL04

Tento příklad je opakovací. Na něm si studenti procvičí všechny dovednosti, které zatím získali.

Řešení:

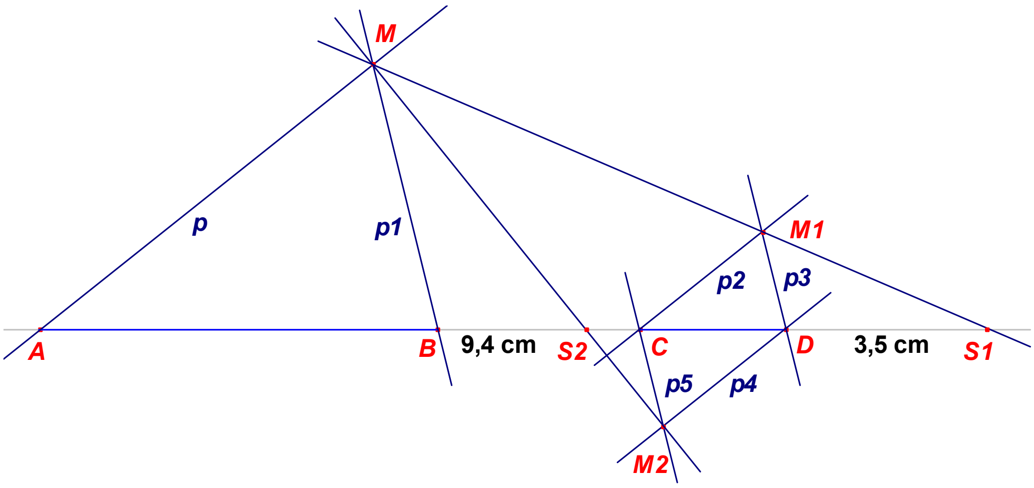
Úsečky se mohou na sebe zobrazit dvěma způsoby. Buď mohou být souhlasně orientované, a potom se zobrazí A na C a B na D, nebo mohou být opačně orientované, a pak se zobrazí A na C a B na D. Středy stejnolehlostí pak leží na průsečících odpovídajících přímek.



Obr. reseniPL04

Diskuse:

Takto lze příklad řešit ale pouze v případě, že úsečky *AB* a *CD* neleží na jedné přímce. Pokud leží na jedné přímce, tak abychom našli středy stejnolehlostí S_1, S_2, musíme si sestrojit pomocný trojúhelník *ABM*. Sestrojíme k němu trojúhelníky podobné, které mají základnu *CD*. Středy stejnolehlostí pak musí ležet na průsečících vrcholů trojúhelníků s přímkou *AB*.



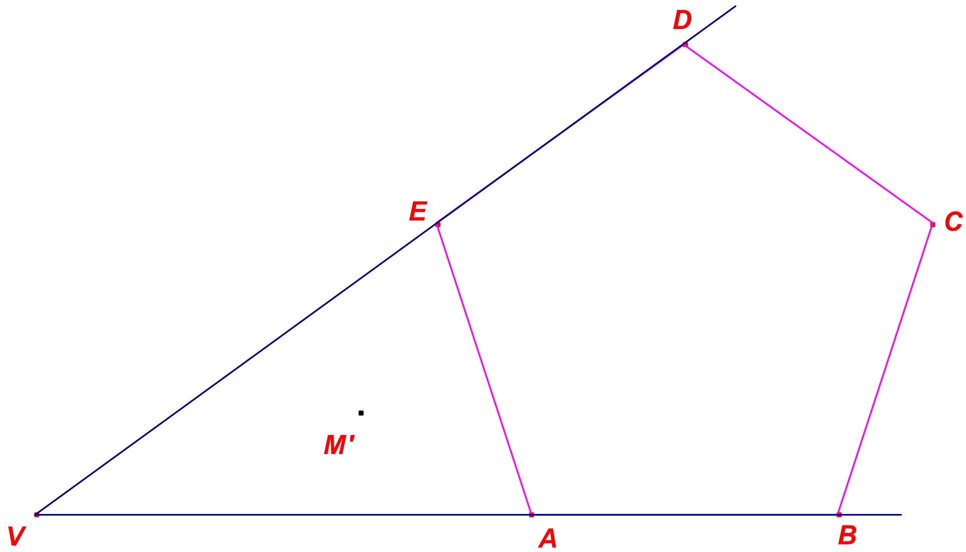
p; p libovolná přímka, A náleží p, C nenáleží p
p1; p1 libovolná přímka, B náleží p1, C nenáleží p1
M; M je průsečík p a p1
p2; p2 rovnoběžná s p, C náleží p2
p3; p3 rovnoběžná s p1, D náleží p3
M1; M1 je průsečík p2 a p3
p4; p4 rovnoběžná s p2, D náleží p4
p5; p5 rovnoběžná s p3, C náleží p5
M2; M2 je průsečík p4 a p5
přímka AB
přímka MM1
S1; S1 je průsečík přímek AB a MM1
přímka MM2
S2; S2 je průsečík přímek AB a MM2
|S1D| = 3,5 cm
|S1B| = 9,4 cm
|S1C| / |S1A| = 0,4 = koeficiente k1
koeficiente k2 = -0,4

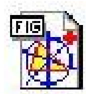
Obr. reseniPL04_d

4.2.4. Pracovní list č. 5

Zadání:

Je dán pravidelný pětiúhelník *ABCDE* a bod *M’*, který leží uvnitř konvexního úhlu *AVE* (*V* je společný bod přímek *AB* a *ED*). Sestrojte pětiúhelník *A’B’C’D’E’*, který je obrazem daného pětiúhelníku se středem v bodě *V* tak, aby bod *M’* byl vnitřním bodem úsečky *A’E’*. Řešte pomocí stejnolehlosti. [4]

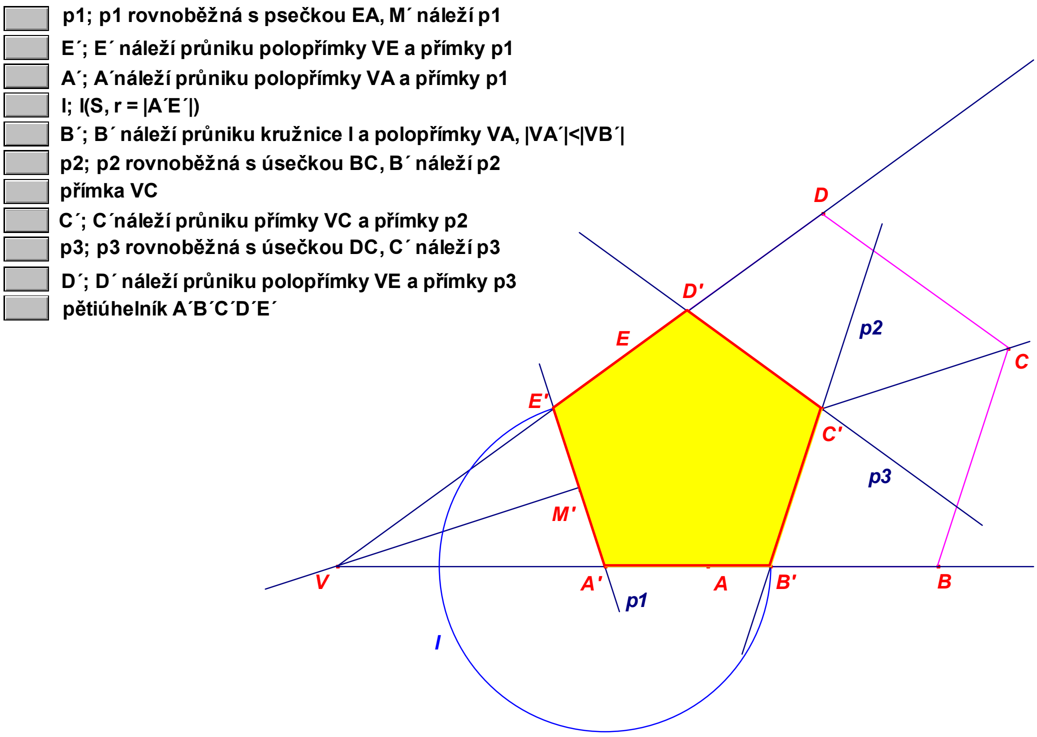




Obr. PL05

Řešení:

Jelikož ve stejnolehlosti jsou odpovídající si úsečky rovnoběžné, pak $E'A'$ musí být rovnoběžné s EA a víme, že prochází bodem M'. Proto $E'A'$ jsou průsečíky rovnoběžky s EA procházející bodem M'. $|E'A'|$ je velikostí strany pětiúhelníku $A'B'C'D'E'$ a body D', B' leží na ramenech úhlu AVE. Poté už není problém požadovaný pětiúhelník dorýsovat.



Obr. reseniPL05

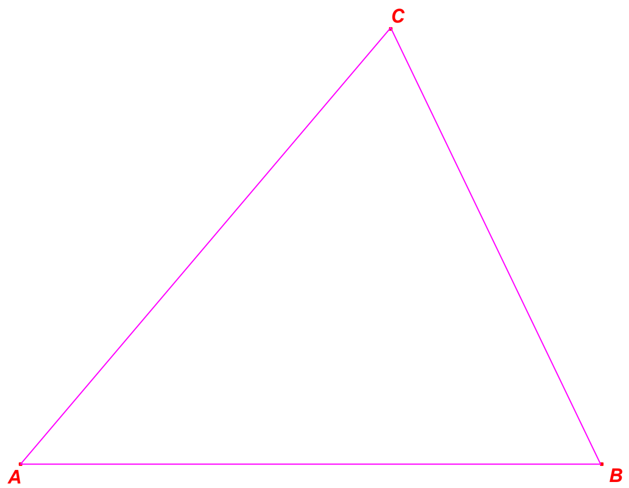
Diskuse:

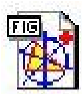
Úloha má jediné řešení, neboť obraz pětiúhelníku je za daných podmínek určen jednoznačně.

4.2.5. Pracovní list č. 6

Zadání:

Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby $KL \subset AB$, $M \in BC$, $N \in AC$. Řešte pomocí stejnolehlosti. [3]

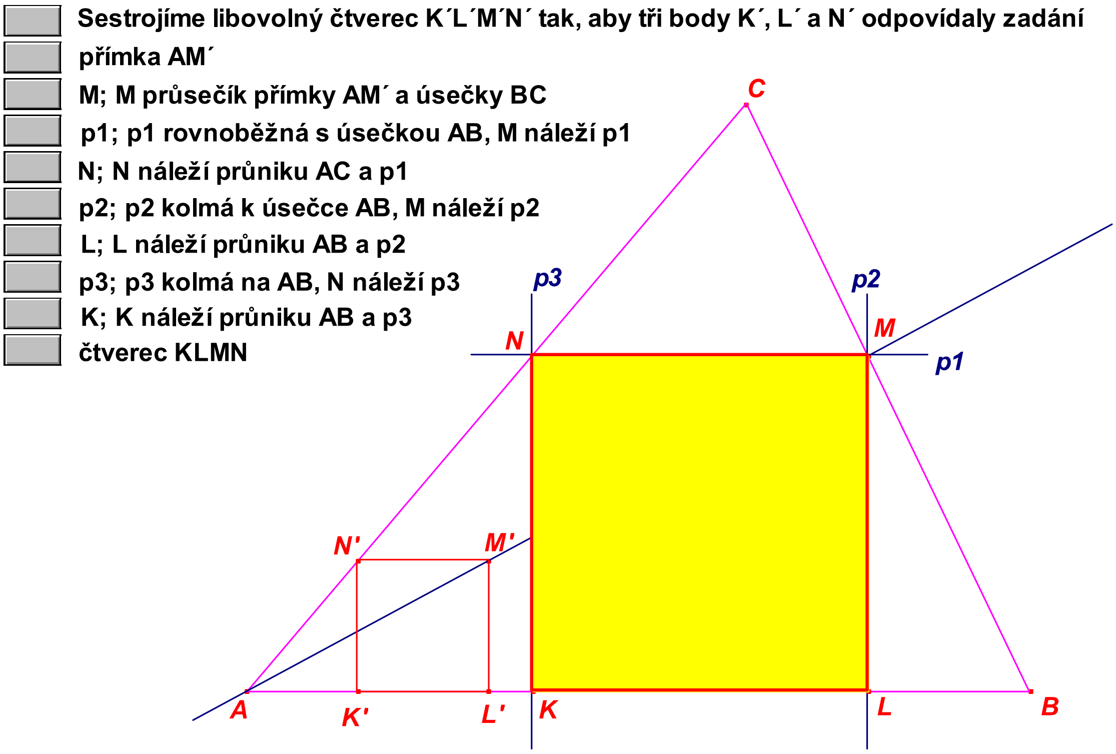




Obr. PL06

Řešení:

Do trojúhelníku dokážeme umístit vhodně zvolený čtverec tak, aby úsečka $K'L' \subset AB \wedge N' \in AC$. Pomocí stejnolehlosti pak tento čtverec zobrazíme na námi hledaný čtverec KLMN.



Obr. reseniPL06

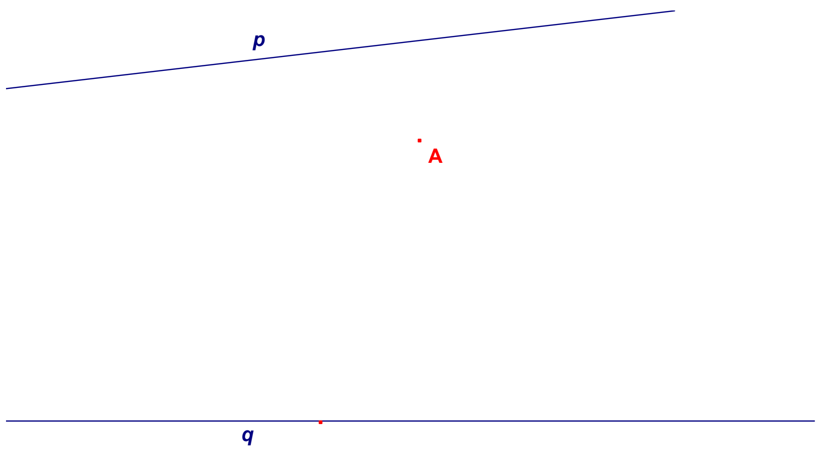
Diskuse:

Pro libovolný ostroúhlý trojúhelník lze tímto způsobem sestrojit vepsaný čtverec.

4.2.6. Pracovní list č. 7

Zadání:

Sestrojte přímku, která prochází bodem A a nepřístupným průsečíkem přímek p, q. Řešte pomocí stejnolehlosti. [3]

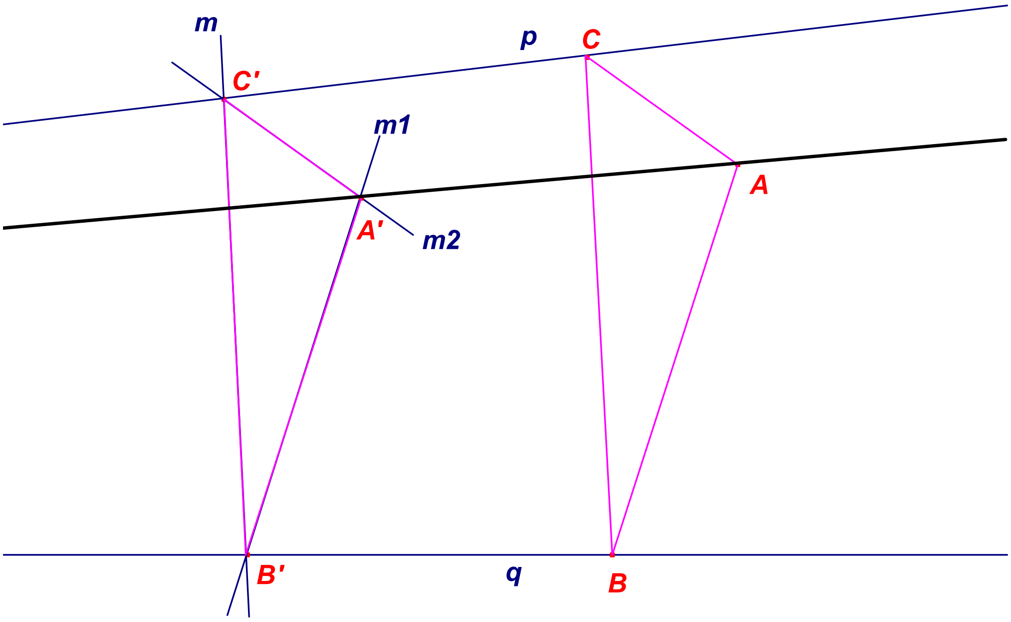


Obr. PL07

Řešení:

Představíme si, že námi hledaný nepřístupný průsečík je středem stejnolehlosti. Potom libovolné dvě rovnoběžné úsečky, jejichž krajní body leží na přímkách p, q jsou stejnolehlé právě podle tohoto středu. Zkonstruujeme libovolný trojúhelník ABC tak, aby $B \in q \wedge C \in p$ a pomocí rovnoběžek sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ k němu stejnolehlý. Hledaná přímka bude přímka AA'.

- B; B zvolím libovolně na přímce q
- C; C zvolím na přímce p tak, aby ABC nebyly kolineární
- trojúhelník ABC
- C´; C´ libovolně na p, C se nesmí rovna C´
- m; přímka m je rovnoběžná s CB, C´ náleží m
- B´; B´ náleží průniku přímek m a q
- m1; přímka m1 je rovnoběžná s BA, B´ náleží m1
- m2; přímka m2 je rovnoběžná CA, C´ náleží m2
- A´; A´ je průnik m2 a m1
- trojúhelník A´B´C´
- AA´; AA´ je naše hledaná přímka



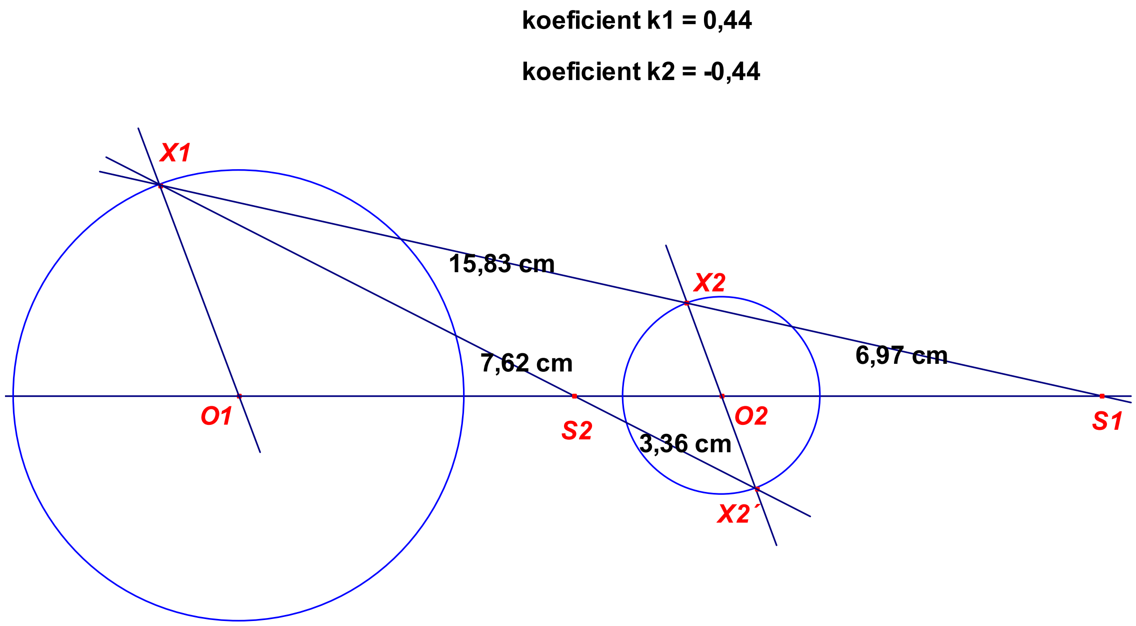
Obr. reseniPL07

Diskuse:

V případě, že bod A leží na některé z přímek p nebo q, pak hledanou přímkou je právě ta přímka, na které leží. V ostatních polohách bodu A je postup řešení shodný s výše uvedeným postupem.

4.3. Stejnolehlost kružnic a využití stejnolehlosti v konstrukčníc úlohách

Kružnice je specifický útvar, kterému je třeba věnovat zvláštní pozornost. Jako motivaci a představu, jak se tento útvar chová, poslouží následující obrázek v CABRI, ve kterém si studenti mohou vyzkoušet, jak stejnolehlost kružnic funguje.

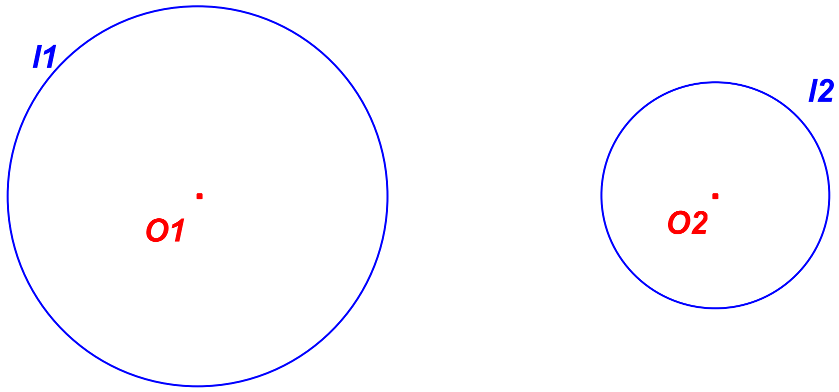


Obr. motivacekruznice

4.3.1. Pracovní list č. 8

Zadání:

Jsou dány kružnice $l_1(O_1; 2{,}5\,cm)$, $l_2(O_2; 1{,}5\,cm)$. Určete středy a koeficienty stejnolehlostí, v nichž je obrazem kružnice l_1 kružnice l_2. [3]

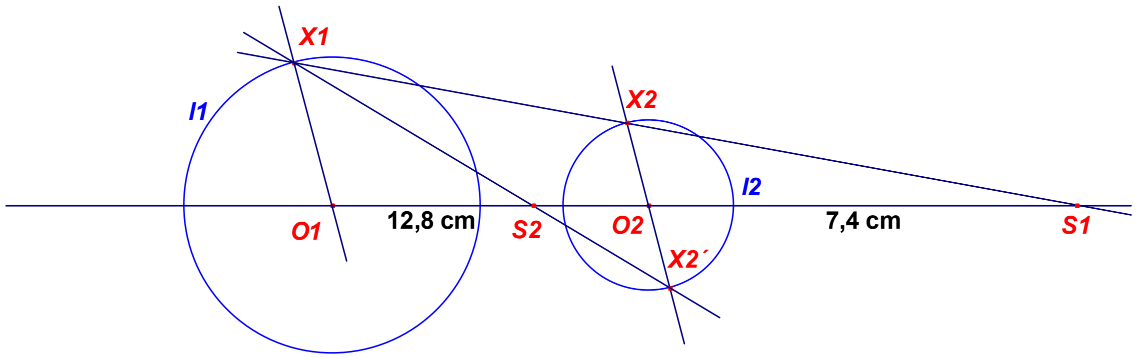


Obr. PL08

Řešení:

Pokud má být jedna kružnice obrazem druhé, tak střed stejnolehlosti musí ležet na přímce O_1O_2. Dále si zvolíme libovolný bod kružnice O_1 a označíme ho X_1. Zvolíme ho tak, aby nebyl kolineární s body O_1, O_2. Využijeme rovnoběžnosti ve stejnolehlosti a zobrazíme úsečku O_1X_1 kružnice l_1 na kružnici l_2. Dostaneme tak X_2, X_2' jako obrazy bodu X_1. Středy stejnolehlostí zobrazujících jednu kružnici na druhou pak leží na průsečících přímky O_1O_2 s přímkami X_1X_2, X_1X_2'.

přímka O1O2
X1; X1 libovolný bod kružnic l1, X1 nenáleží přímce O1O2
přímka O1X1
p; p je rovnoběžná s O1X1, O2 náleží p
X2, X2´; X2, X2´ jsou průsčíky l2 a p
přímka X1X2
S1; S1 je průsečík přímek O1O2 a X1X2
přímka X1X2´
S2; S2 je průsečík přímek O1O2 a X1X2´
|S1O2| = 7,4 cm
|S1O1| = 12,8 cm
|S1O2| / |S1O1| = 0,6 = koeficient k1
koeficient k2 = -0,6



Obr. reseniPL08

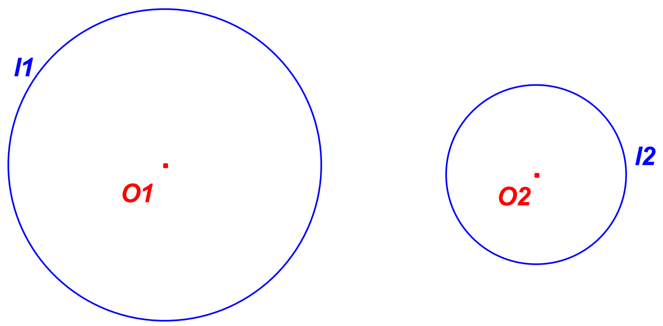
Diskuse:

Ke každým dvěma kružnicím o různých poloměrech lze tímto způsobem sestrojit středy stejnolehlosti.

4.3.2. Pracovní list č. 9

Zadání:

Máme dvě kružnice o různých poloměrech. S využitím stejnolehlosti sestrojte jejich společné tečny. V diskusi uvažte různé polohy kružnic vůči sobě v závislosti na počtu hledaných tečen. [3]

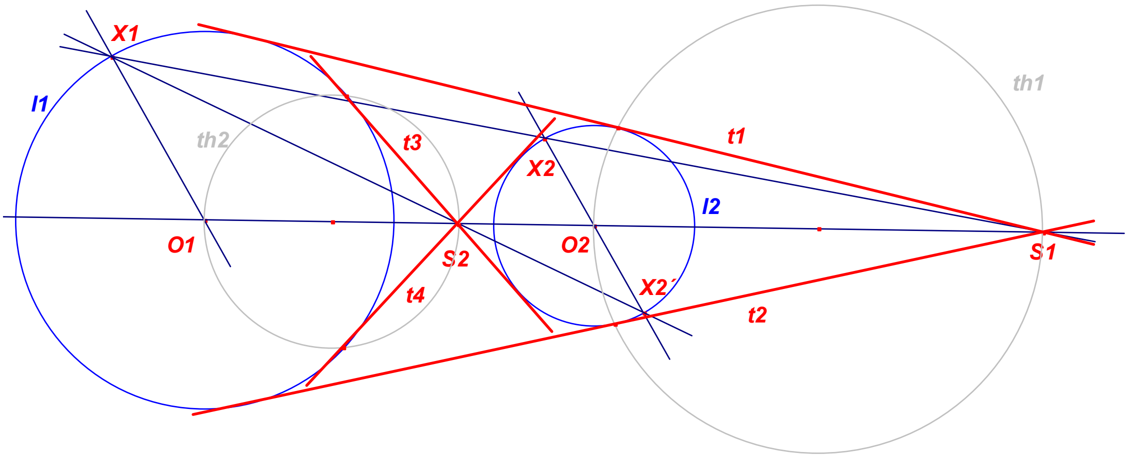


Obr. PL09

Řešení:

Vycházíme z toho, že body dotyku tečny společné oběma kružnicím musí být stejnolehlé podle středu jejich stejnolehlosti. Sestrojíme tedy nejdříve středy stejnolehlostí a potom s využitím Thaletovy kružnice najdeme body dotyku tečen.

- přímka O1O2
- X1; X1 libovolný bod kružnic l1, X1 nenáleží přímce O1O2
- přímka O1X1
- p; p je rovnoběžná s O1X1, O2 náleží p
- X2, X2´; X2, X2´ jsou průsčíky l2 a p
- přímka X1X2
- S1; S1 je průsečík přímek O1O2 a X1X2
- přímka X1X2´
- S2; S2 je průsečík přímek O1O2 a X1X2´
- th1; th1 je thaletova kružnice nad O2S1
- t1, t2; t1, t2 jsou hledané tečny procházející bodem S1 a průsečíky kružnic th1 a l2
- th2; th2 je thaletova kružnice nad O1S2
- t3, t4; t3, t4 jsou hledané tečny procházející bodem S2 a průsečíky kružnic th2 a l1



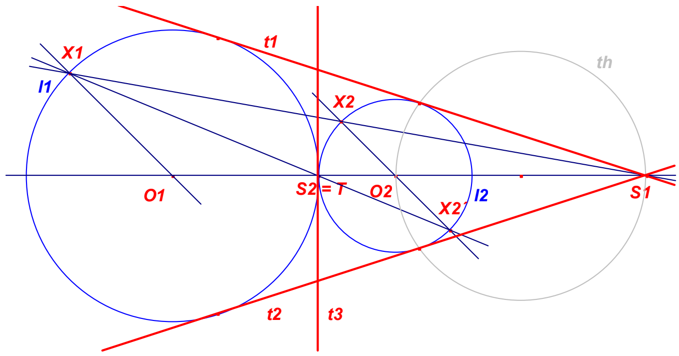
Obr. reseniPL09

Diskuse:

Počet společných tečen závisí na poloze obou kružnic vůči sobě.

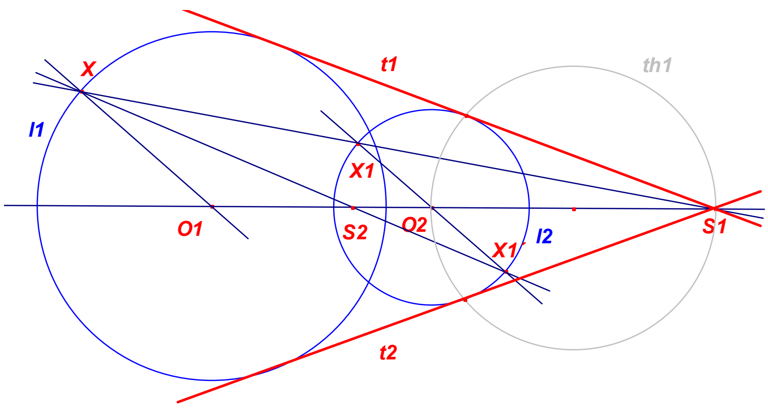
a) 4 tečny – viz předcházející obrázek

b) 3 tečny – v případě, že obě kružnice mají vnější dotyk



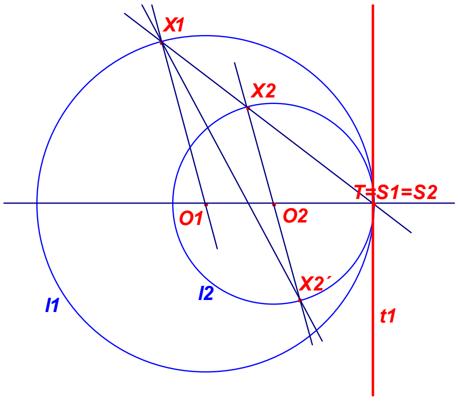
Obr reseniPL09_db

c) 2 tečny – v případě, že se kružnice protínají



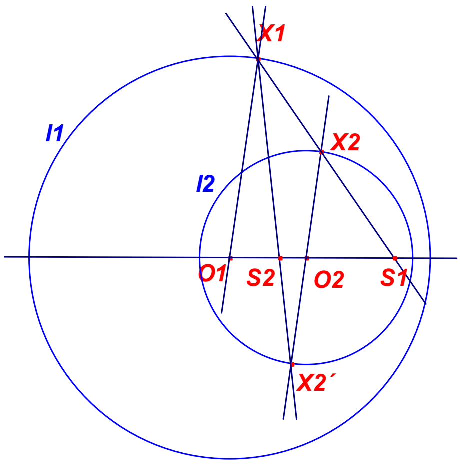
Obr. reseniPL09_dc

d) 1 tečna – v případě, že obě kružnice mají vnitřní dotyk



Obr. reseniPL09_dd

e) 0 tečen – v případě, že jedna kružnice leží uvnitř kruhu ohraničeném druhou kružnicí

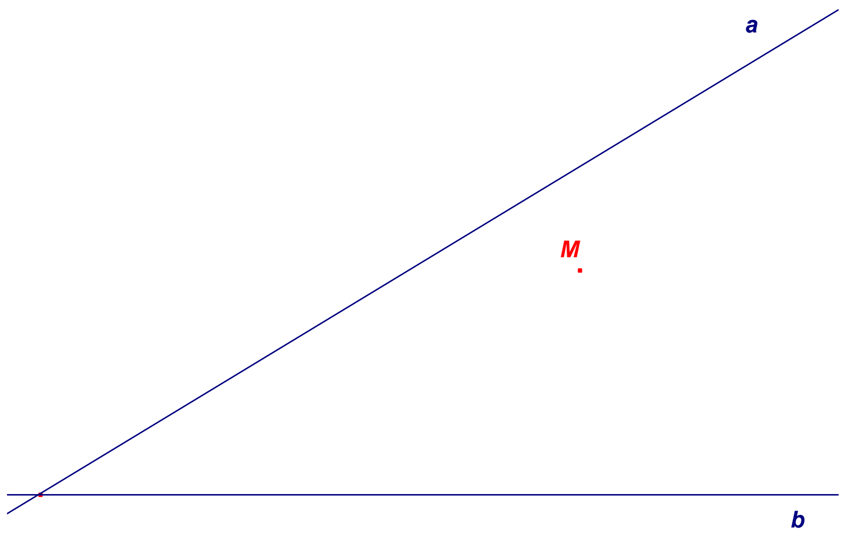


Obr. reseniPL09_de

4.3.3. Pracovní list č. 10

Zadání:

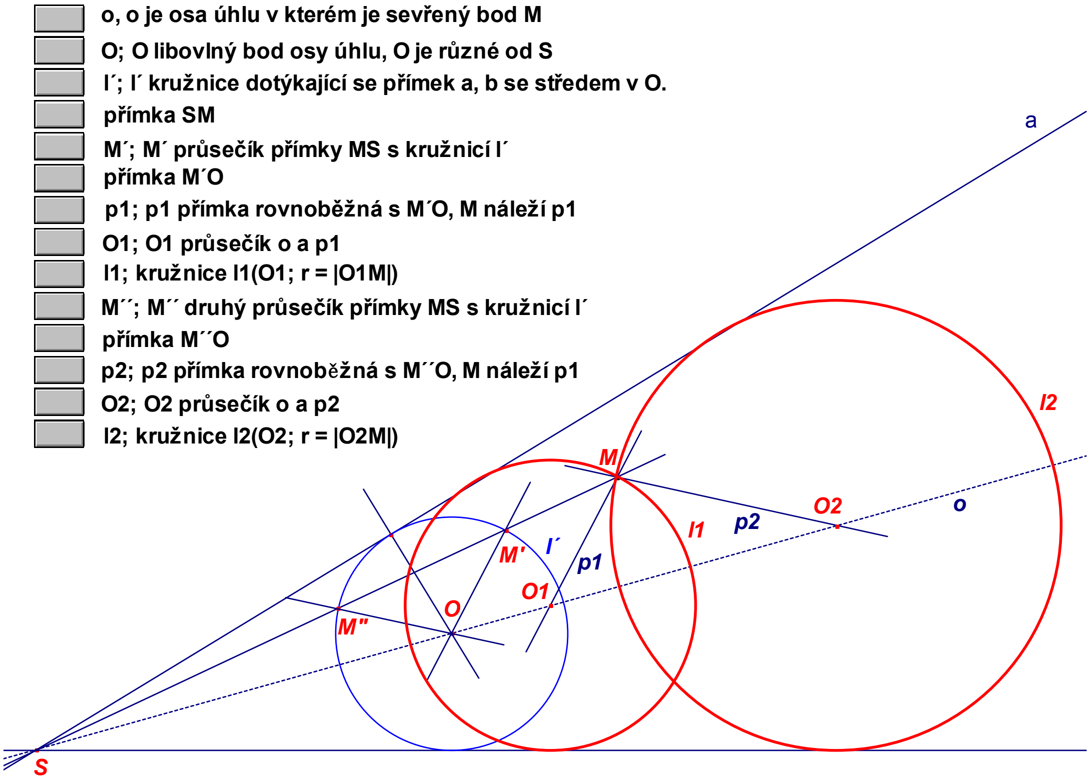
Jsou dány dvě různoběžky *a*, *b* a bod $M(M \notin a, M \notin b)$. Sestrojte kružnici, která prochází bodem *M* a dotýká se přímek *a*, *b*. Řešte pomocí stejnolehlosti. [3]



Obr. PL10

Řešení:

Nejdříve si sestrojíme osu přímek *a*, *b*, neboť na ní musí ležet středy všech kružnic, které se přímek dotýkají. Kružnice, kterou potřebujeme sestrojit, bude určitě ve stejnolehlosti s libovolnou kružnicí dotýkající se přímek *a*, *b* ve stejné výseči, jako je bod *M*. Střed stejnolehlosti pak bude v průsečíku přímek *a*, *b*. Jednu takovou libovolnou kružnici si sestrojíme a označíme *l´*. Abychom zjistili střed hledané kružnice, musíme nejprve zjistit, kam na kružnici *l´* se bod *M* zobrazí. Vytvoříme tedy přímku obsahující body *M*, *S*, a kde nám protne kružnici *l´*, tam je náš hledaný bod. Protne ji dokonce ve dvou bodech, tzn. že budeme mít řešení dvě. Tyto body potom spojíme se středem O a bodem M s nimi vedeme rovnoběžky. Kde nám protnou osu o, tam jsou středy našich hledaných kružnic.



Obr. reseni10

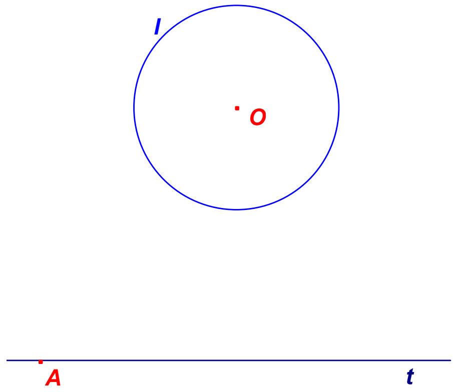
Diskuse:

Již při rýsování se ukázalo, že úloha má dvě řešení. Jinak žádné jiné možnosti nejsou.

4.3.4. Pracovní list č. 11

Zadání:

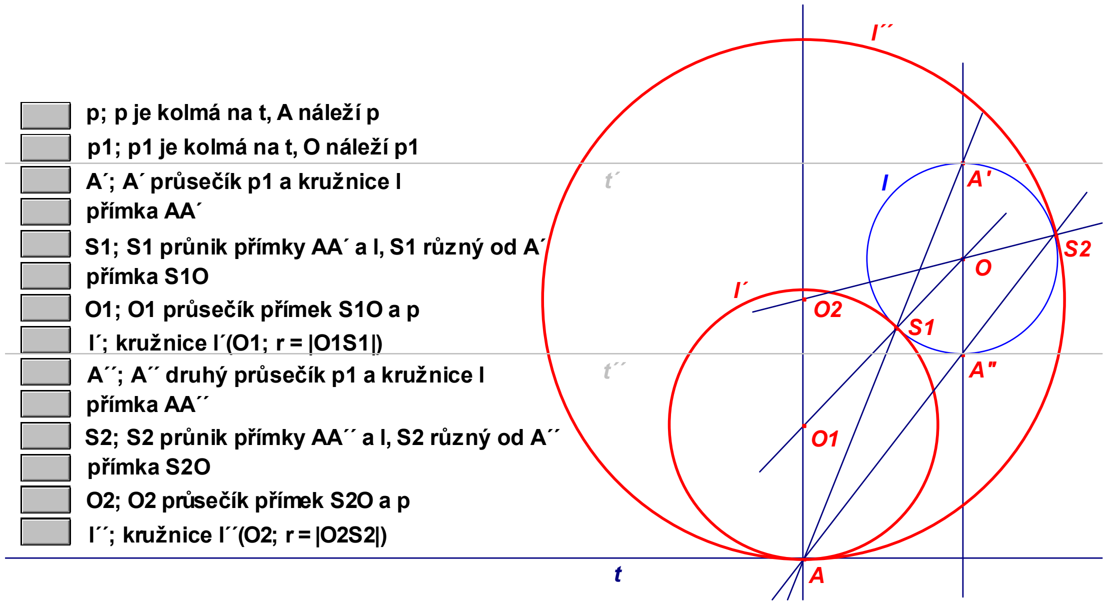
Je dána kružnice $l(O;r)$ a její vnější přímka t s bodem A. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky t v bodě A a dané kružnice l. Řešte pomocí stejnolehlosti. [3]



Obr. PL11

Řešení:

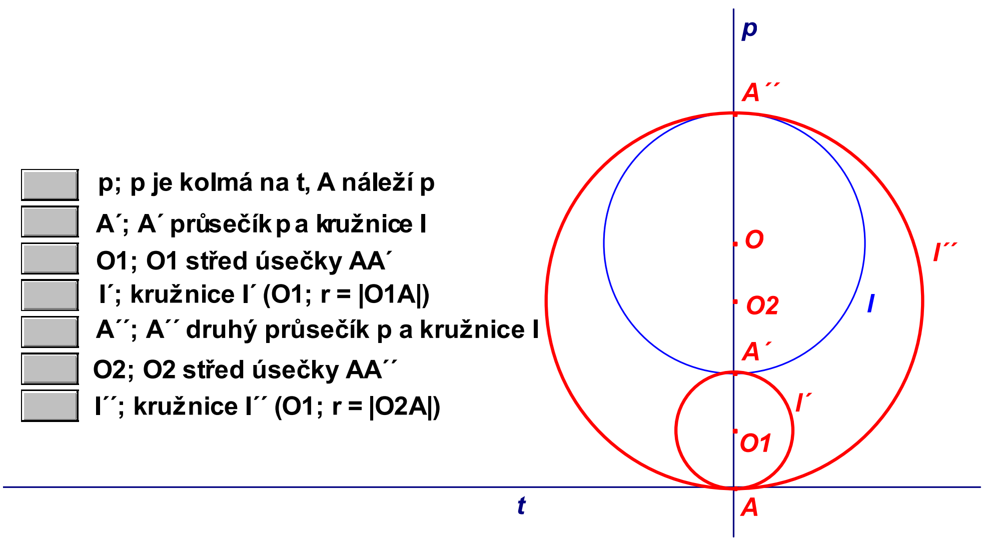
Střed hledané kružnice musí ležet na kolmici p k přímce t procházející bodem A. Jelikož původní a hledaná kružnice mají vnější dotyk, je v tomto bodě jeden střed stejnolehlosti. Tečna t s bodem dotyku A se ve stejnolehlosti musí zase zobrazit na tečnu, která bude s t rovnoběžná. Takové tečny jsou dvě, čili budeme mít 2 řešení. Najdeme body dotyku těchto tečen s kružnicí l, což budou vlastně obrazy bodu A. Těmito obrazy A', A'' vedeme přímky, které prochází bodem A. Průniky těchto přímek s kružnicí l jsou středy hledané stejnolehlosti. Pak už jen stačí najít obrazy bodu s využitím nalezených stejnolehlostí a přímky p.



Obr. reseniPL11

Diskuse:

V případě, že bod $O \in p$, lze kružnice jednoduše sestrojit bez užití stejnolehlosti.



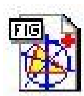
Obr. reseniPL11_d

4.3.5. Pracovní list č. 12

Zadání:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $\alpha = 60°, \beta = 75°, r = 1{,}6\,cm$. Řešte pomocí stejnolehlosti. [2]

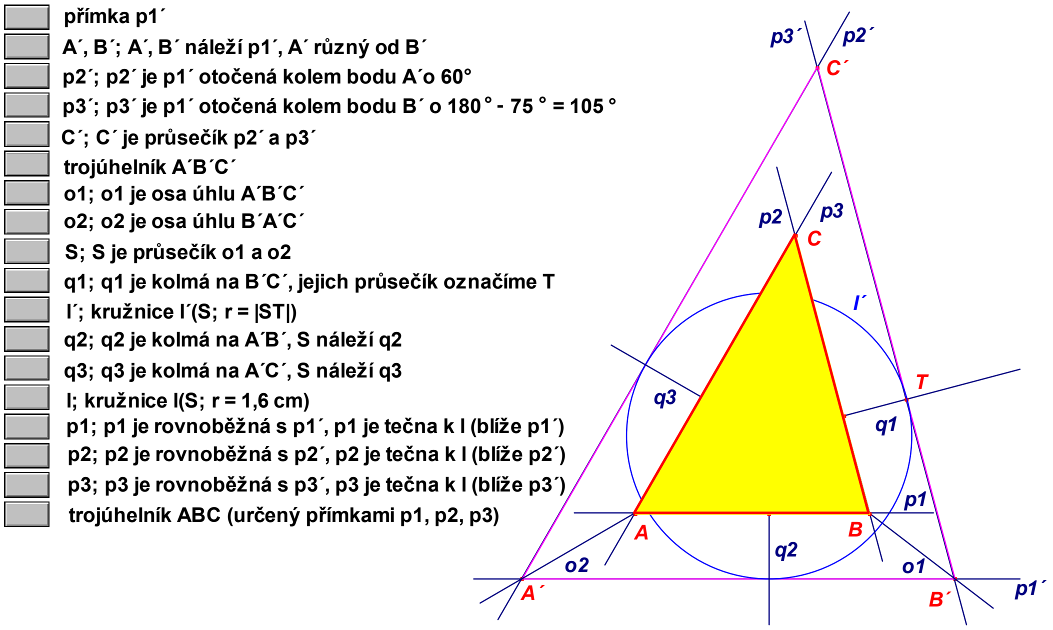
r = 1,6 cm
alfa = 60 °
beta = 75 °



Obr. PL12

Řešení:

Nejdříve si vytvoříme libovolný podobný trojúhelník, který bude mít shodné úhly α, β. K tomuto trojúhelníku sestrojíme kružnici vepsanou. Střed této kružnice bude středem stejnolehlosti, která nám zobrazí námi vytvořený trojúhelník na trojúhelník hledaný. Sestrojíme kružnici se středem ve středu stejnolehlosti a poloměru r, a pak využijeme stejnolehlosti k sestrojení řešení.



Obr. reseniPL12

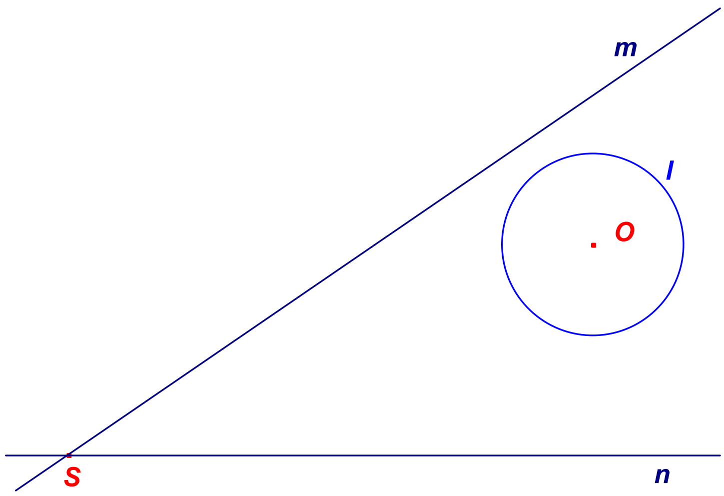
Diskuse:

Ještě bychom mohli použít stejnolehlost se záporným koeficientem, takže přímky *p1*, *p2*, *p3* by byly jako vzdálenější tečny. Dostali bychom však jen shodný trojúhelník, pouze otočený o 180°.

4.3.6. Pracovní list č. 13

Zadání:

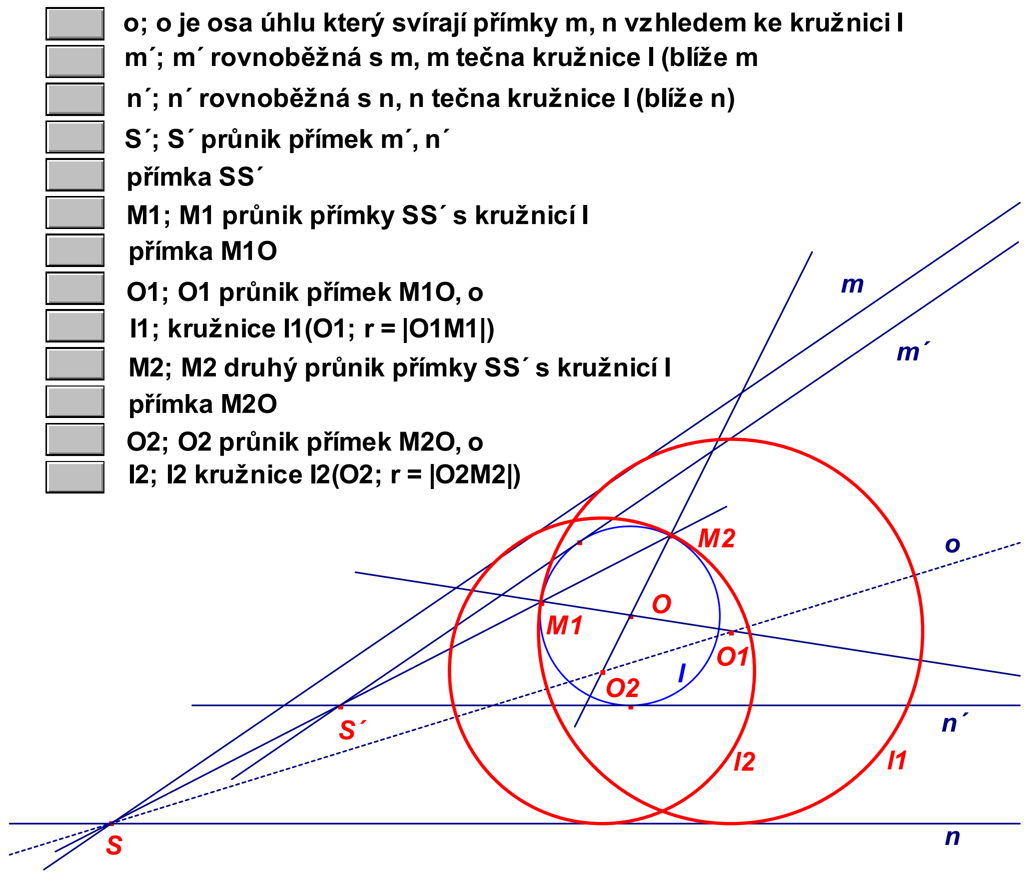
Je dána kružnice k a přímky *m*, *n*. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek *m*, *n* a kružnice *k*. Řešte pomocí stejnolehlosti. [1]



Obr. PL13

Řešení:

Body dotyku kružnice *l* s hledanými kružnicemi budou středy stejnolehlosti, která převede kružnici *l* na kružnici, kterou hledáme. Sestrojíme tedy tečny kružnice *l* rovnoběžné s přímkami *m*, *n*, protože ty budou právě obrazem těchto přímek v uvažované stejnolehlosti. Průnik těchto přímek *S´* bude obrazem bodu *S*. Na přímce *SS´* musí ležet střed stejnolehlosti, který ovšem musí ležet i na kružnici *l*. Průniky přímky a kružnice jsou dva M_1, M_2, budou tedy dvě řešení. Dále využijeme toho, že střed hledané kružnice musí ležet na ose úhlu sevřeném přímkami *m*, *n*. Využijeme stejnolehlosti a střed *O* zobrazíme ve stejnolehlosti na osu *o*. Získáme tak středy námi hledaných kružnic.



Obr. reseniPL13

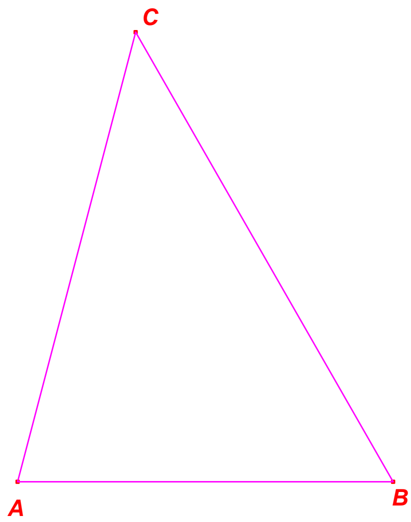
Diskuse:

Tato úloha má 2 řešení.

4.3.7. Pracovní list č. 14

Zadání:

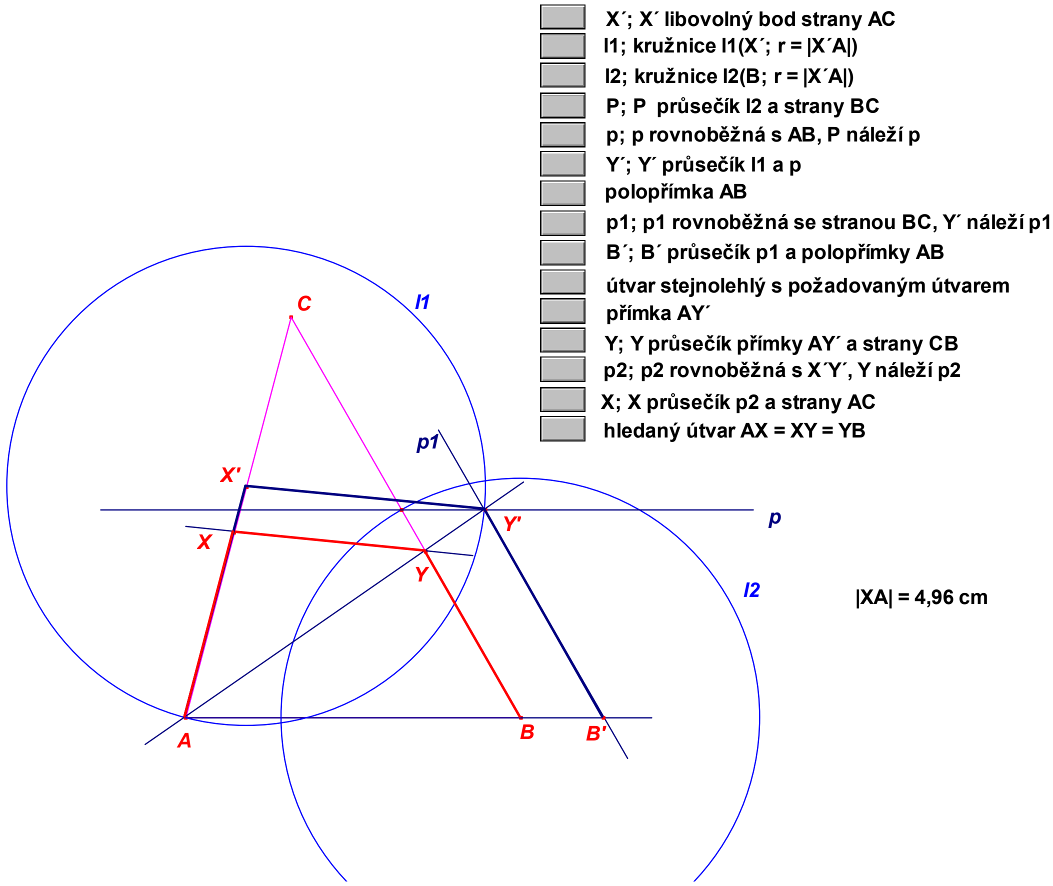
Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte úsečku XY tak, aby bylo $AX = XY = YB$, a aby bod X ležel na přímce AC, bod Y na přímce BC. Řešte pomocí stejnolehlosti. [4]

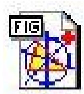


Obr. PL14

Řešení

Nejdříve sestrojíme podobný útvar, kde $A = A'$, X' náleží straně AC, B' náleží polopřímce $\mapsto AB$ a bod Y' je od bodů X', B' ve vzdálenosti $|AX'| \wedge B'Y' \parallel BC$. Uděláme to tak, že na straně AC si zvolíme libovolný bod X' a tomuto bodu opíšeme kružnici $l_1(X'; r = |AX'|)$. Chceme, aby $B'Y'$ bylo rovnoběžné s BC, proto na BC naneseme vzdálenost $|AX'|$ a vzniklým bodem vedeme rovnoběžku p s AB. Průnik přímky p a kružnice l_1 je bod Y'. Pro úplnost můžeme ještě vytvořit bod B'. Hledaný bod Y pak leží na průniku přímky obsahující body Y', A a strany BC. X sestrojíme jako průsečík přímky rovnoběžné s úsečkou $X'Y'$ a stranou AC.





Obr. reseniPL14

Diskuse:

Při volbě X' si musíme dávat pozor, aby $|AX'| < |BC|$.

5. Závěr

Ve své práci jsem se snažil za pomoci programu CABRI II Plus připravit vhodné pomůcky a metodický materiál pro výuku stejnolehlosti na středních školách. Metodika při zavádění stejnolehlosti není samozřejmě závazná. Je to spíše návrh, který si každý může upravit podle svého uvážení.

První část práce je věnována výzkumu. Tento výzkum se zabýval tím, jaké mají studenti základní znalosti o stejnolehlosti. Ukázalo se, že i naprosté základy tohoto zobrazení dělaly studentům veliké problémy. Tato práce by jim mohla s pochopením dané tématiky pomoci.

Druhá část obsahuje teorii k danému tématu. Všechny uvedené věty jsou opatřeny názornými obrázky, vytvořenými v programu CABRI II Plus. Některé věty jsou doplněny důkazy.

Následují stěžejní kapitoly této práce, které se věnují metodice zavedení stejnolehlosti. K tomu jsou určeny motivační příklady zhotovené v CABRI II Plus. Studenti si díky nim mohou udělat vlastní zkušenost o vlastnostech zobrazení ve stejnolehlosti. Tyto kapitoly také obsahují řešené úlohy, které mohou být studentům předkládány ve formě pracovních listů. Součástí těchto řešení jsou i interaktivní obrázky s postupným odkrýváním jednotlivých kroků. Jsou opět vytvářeny v programu CABRI II Plus. Je možno si je spustit přímo z diplomové práce, pokud se podrží klávesa CTRL a klikne se na ikonku v pravém dolním rohu obrázku. Pracovní listy se zadáním, řešené pracovní listy a veškeré obrázky naleznete v přiloženém CD.

Součástí CD je také demoverze programu CABRI II Plus, takže učitelé, kteří ještě neměli možnost se s tímto programem seznámit, si ho mohou vyzkoušet. Věřím, že se jim zalíbí natolik, že ho do své výuky v nějaké formě zařadí.

6. Seznam použité literatury

[1] *Kuřina, F.:* DESET GEOMETRICKÝCH TRANSFORMACÍ, Prometheus, Praha 2002

[2] *Polák, J.:* Středoškolská MATEMATIKA v úlohách II, Prometheus, Praha 1999

[3] *Pomykalová, E.:* Matematika pro gymnázia – Planimetrie, Prometheus, Praha 2006

[4] *Šedivý, J.:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, Mladá Fronta, Praha 1980