JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Pedagogická fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

České Budějovice 2009 Zbyněk Vala

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

ZBYNĚK VALA

III. ročník — kombinované studium

METODY URČOVÁNÍ KOŘENŮ POLYNOMŮ VYŠŠÍCH STUPŇŮ

Diplomová práce

Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, PhD.

České Budějovice 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jen uvedených pramenů a literatury.

V Českých Budějovicích 27. 11. 2009

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji Mgr. Petru Chládkovi, PhD. za odborné vedení diplomové práce.

Anotace diplomové práce

Jméno a příjmení: Zbyněk Vala
Katedra: matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích
Název práce: Metody určování kořenů polynomů vyšších stupňů
Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, PhD.
Počet stran:38
Počet pramenů: 7
Klíčová slova: kořeny polynomů, algebraické rovnice, numerické metody

Resumé

Diplomová práce je zaměřena na hledání kořenů polynomů. Pro polynomy prvního až čtvrtého stupně jsem problematiku řešil pomocí známých algebraických postupů. Pro algebraické rovnice pátého a vyššího stupně jsem vybral několik metod z oblasti numerické matematiky. Všechny předvedené přístupy jsem demonstroval na příkladech.

Obsah

1 Úvod

Diplomová práce se zabývá metodami určování kořenů polynomů vyšších stupňů.

Toto téma své závěrečné práce jsem si zvolil proto, že neexistuje pojednání podávající ucelený přehled o problematice nalezení kořenů polynomů různých stupňů. Mým cílem bylo vytvořit metodickou příručku pro obecné i praktické řešení dané problematiky.

Diplomovou práci jsem rozdělil do dvou hlavních částí — a to algebraické a numerické.

V algebraické části definuji pojem algebraické rovnice n-tého stupně nad tělesem komplexních čísel. v této pasáži pojednávám o polynomech prvního až čtvrtého stupně a s pomocí známých algebraických postupů a algoritmů vyšetřuji příslušné kořeny.

Numerickou částí jsem se pokusil osvětlit problematiku při hledání kořenů polynomů pátého a vyššího stupně včetně jejich separace. Pro tyto účely jsem v textu uvedl několik vybraných numerických metod.

Praktická část práce obsahuje početní řešení příkladů definovaných výše. Pro větší představivost jsou v některých pasážích příklady vhodně doplněny grafickým znázorněním a výsledky vyšetřování jsou zaneseny do přehledných tabulek. Důraz je kladen na efektivní vyřešení daného příkladu.

2 Algebraické rovnice 1. stupně, tzv. lineární rovnice

Věta 1. *Každá lineární rovnice tvaru $a_1x + a_0 = 0$, kde $a_1, a_0 \in C, a_1 \neq 0$, má právě jedno řešení.*

Důkaz. Je-li c kořenem rovnice $a_1x + a_0 = 0$, pak $a_1c + a_0 = 0$. Vzhledem k podmínce, že $a_1 \neq 0$, dostaneme

$$c = \frac{-a_0}{a_1} \in C \qquad (1)$$

■

Z výše uvedeného vyplývá, že x je neznámá a koeficient a_1 je různý od nuly, neboť pro $a_1 = 0$ by se jednalo o rovnici $a_0 = 0$, jenž by neměla řešení ($a_0 \neq 0$), nebo naopak nekonečně mnoho řešení ($a_0 = 0$).

Příklad 1. Řešme algebraickou rovnici $\frac{2}{3}x - 2i = 0$ nad C

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 2i &= 0 \\ \frac{2}{3}x &= 2i \\ x &= 3i, \end{aligned}$$

což splňuje podmínku (1).

3 Algebraické rovnice 2. stupně, tzv. kvadratické rovnice

Definice 1. *Kvadratickou rovnicí (rovnicí druhého řádu) nazveme rovnici tvaru* $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$*, kde* $a_2, a_1, a_0 \in C, a_2 \neq 0$.

Postup řešení kvadratické rovnice:

1. zavedeme substituci

$$x = y + m \tag{2}$$

   a dosadíme:

$$\begin{aligned} a_2(y+m)^2 + a_1(y+m) + a_0 &= 0 \\ a_2y^2 + (a_1 + 2a_2m)y + a_2m^2 + a_1m + a_0 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

2. jestliže $a_1 + 2a_2m = 0$, pak

$$m = \frac{-a_1}{2a_2} \tag{4}$$

   a zpětným dosazením do (3) dostáváme

$$a_2y^2 - \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2} = 0 \tag{5}$$

3. dále dělíme obě strany rovnice (5) prvkem $a_2 \neq 0$ a dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2} &= 0 \\ y_{1,2} &= \pm\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \end{aligned}$$

4. dosadíme-li řešení y_1, y_2 do (2), pak s využitím (4) dostáváme řešení:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \tag{6}$$

Prvek $a_1^2 - 4a_0a_2$ nazveme *diskriminantem* kvadratické rovnice a značíme jej D. Je-li $D = 0$, má tato rovnice jedno dvojnásobné řešení, jesliže je $D \neq 0$, pak má rovnice dvě různá řešení.

a) Jestliže $D > 0$, pak má rovnice dvě různá reálná řešení.

b) Je-li $D < 0$, má rovnice dvě různá imaginární řešení (dvě komplexně sdružená čísla):

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

Tuto rovnici lze zapsat ve tvaru $a_2(x - x_1)(x - x_2) = 0$, kde kořeny $x_1, x_2 \in C$.

Poznámka 1. Za předpokladu, že v kvadratické rovnici $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ dle Definice 1 platí, že $a_2 = 1$, můžeme nalézt její kořeny také pomocí tzv. *Viétových vzorců:*

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= a_0 \\ x_1 + x_2 &= -a_1. \end{aligned}$$

V případě, že řešíme kvadratickou rovnici s imaginárními koeficienty, lze s výhodou pro usnadnění výpočtu použít následující řešení (tedy vynecháme goniometrické řešení, jež se s hojností využívá na středních školách):

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+b^2})}\right) & \text{pokud } \ b > 0 \\ \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+b^2})}\right) & \text{pokud } \ b < 0, \end{cases} \tag{7}$$

kde $z = a + bi$.

Příklad 2. Řešme algebraickou rovnici $x^2 - (3 + 2i)x + 5 + i$ nad C.

- Dosadíme do (6):
$$x_{1,2} = \frac{3 + 2i \pm \sqrt{-15 + 8i}}{2},$$
kde $a_2 = 1, a_1 = -(3 + 2i), a_0 = 5 + i$. Poté využijeme vztahů (7) pro určení diskriminantu, kde $z = -15 + 8i$, z čehož plyne, že $b > 0$. Po dosazení tedy dostáváme
$$\begin{aligned} \sqrt{-15+8i} &= \\ &= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{(-15)^2 + 8^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{(-15)^2 + 8^2})}\right) = \\ &= \pm(1 - 4i). \end{aligned}$$

- Takto spočtený diskriminant dosadíme do (6) a dostáváme

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{3+2i \pm (1+4i)}{2} \\ x_1 &= \frac{4+6i}{2} = 2+3i \\ x_2 &= \frac{2-2i}{2} = 1-i, \end{aligned}$$

kde x_1, x_2 jsou řešením původní rovnice.

4 Algebraické rovnice 3. stupně, tzv. kubické rovnice

Definice 2. *Kubickou rovnicí (rovnicí 3. stupně) nazveme rovnici tvaru* $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$*, kde* $a_3, a_2, a_1, a_0 \in C, a_3 \neq 0$.

Postup řešení kubické rovnice:

Pro zjednodušení následujících operací upravíme vždy kubickou rovnici tak, aby $a_3 = 1$.

1. zavedeme substituci $x = y - \frac{a_2}{3}$, čímž odstraníme kvadratický člen a dostaneme rovnici
$$y^3 + py + q = 0, \tag{8}$$
kde $p = a_1 - \frac{a_2^2}{3}, q = a_0 + \frac{2a_2^2 - 9a_2a_1}{27} \in C$. Rovnici (8) nazveme *redukovaným tvarem* kubické rovnice.

2. Položíme nyní $y = u + v$ v (8), tímto máme po dosazení
$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \tag{9}$$

3. Cardano[1] následně zavedl podmínku $3uv + p = 0$, tedy $uv = \frac{-p}{3}$ a následně dostáváme $u^3 + v^3 = -q$ (vznikne po dosazení do (9)). Dále také
$$\begin{aligned} uv &= \frac{-p}{3} \\ u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned} \tag{10}$$

4. Z těchto vztahů (10) a Newtonových vzorců dostáváme rovnici
$$r^2 + qr - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{11}$$
kde u^3 a v^3 jsou řešením této rovnice. Tato rovnice (11) se nazývá *kvadratická resolventa* kubické rovnice.

[1] **Gerolamo Cardano** (1501-1576) Je znám především jako významný italský matematik. V roce 1545 publikoval spis *Ars magna* (Velké umění), ve kterém popsal řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně. Odtud tedy termín *Cardanovy vzorce*

5. Řešením (11) dostáváme

$$\begin{aligned}
r_1 = u^3 &= \frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \\
r_2 = v^3 &= \frac{-q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \\
u &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} \\
v &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}
\end{aligned}$$

Poznámka 2. Člen $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ v rovnicích značíme jako *diskriminant* algebraických rovnic 3. stupně. V případě, že kubická rovnice s reálnými koeficienty bude mít diskriminant záporný, nastane tzv. "casus irreducubilis" (nerozložitelný případ), kdy řešení dostaneme v imaginární formě. Využijeme tedy řešení goniometrické:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\frac{\gamma}{3} \\
x_2 &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos(\frac{\gamma}{3} - \frac{\pi}{3}) \\
x_3 &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos(\frac{\gamma}{3} + \frac{\pi}{3}),
\end{aligned}$$

kde γ lze vypočítat z rovnice

$$\cos\gamma = \frac{\frac{-q}{2}}{\sqrt{(\frac{|p|}{3})^3}}.$$

Toto nás vede k 9-ti různým řešením. Redukované kubické rovnici (8) ovšem vyhovují pouze tyto tři, jež nazýváme *Cardanovy vzorce*:

$$\begin{aligned}
y_1 &= u + v \\
y_2 &= \varphi u + \varphi^2 v \\
y_3 &= \varphi^2 u + \varphi v
\end{aligned}$$

Jestliže je diskriminant kubické rovnice různý od 0, dostáváme 3 různá řešení. V případě rovnosti pak máme nejméně jedno dvojnásobné řešení.

Poznámka 3. φ v Cardanových vzorcích značí jednu ze tří primitivních odmocnin z jedné, tedy:

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

což je speciální případ binomické rovnice $x^n - 1 = 0$.

Příklad 3. Řešme algebraickou rovnici $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$ nad C.

- Využijeme substituce $x = y - \frac{a_2}{3}$, tedy $x = y - 2$. Dosazením do původní rovnice máme:

  $$y^3 + py + q = 0,$$

  kde

  $$\begin{aligned} p &= a_1 - \frac{a_2^2}{3} = 6 - \frac{6^2}{3} = -6 \\ q &= a_0 + \frac{2a_2^2 - 9a_2a_1}{27} = 5 + \frac{432 - 324}{27} = 9 \end{aligned}$$

Poznámka 4. Abychom se substitucí a převodem původní rovnice na redukovaný tvar vyhnuli nepříjemným početním úpravám, lze s výhodou využít Hornerova schématu pro určení p, q, kde původní rovnici vyjádříme jako Taylorův rozvoj polynomu v bodě 2 ([3]).

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 6 & 6 & 5 \\ \hline -2 & & -2 & -8 & 4 \\ & 1 & 4 & -2 & 9 = q \\ & & -2 & -4 & \\ & 1 & 2 & -6 = p & \\ & & -2 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

Substituce:
$x = y - \frac{a_2}{3}$
$x = y - \frac{6}{3}$
$y = x + 2$

Po dosazení:
$y^3 - 6y + 9 = 0$

- za použití substituce $y = u + v$ a s využitím vztahu (11) dopočítáme u, v.

  $$\begin{aligned} u^3 &= \frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \\ u^3 &= \frac{-9}{2} + \sqrt{(\frac{-9}{2})^2 + (\frac{-6}{3})^3} \\ u &= \sqrt[3]{-1} = -1 \end{aligned}$$

S využitím vztahů (10) máme

$$\begin{aligned} uv &= \frac{-p}{3} \\ v &= \frac{-p}{3u} \\ v &= -2 \end{aligned}$$

- dosadíme do Cardanových vzorců:

$$\begin{aligned} y_1 &= u+v = -1+(-2) = -3 \\ y_2 &= \varphi u + \varphi^2 v = (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(-1) + (-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(-2) = \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_3 &= \varphi^2 u + \varphi v = (-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(-1) + (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(-2) = \frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

- Na závěr y_1, y_2, y_3 dosadíme do původní substituce $x = y - 2$ a dostáváme:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3-2 = -5 \\ x_2 &= \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_3 &= \frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou hledanými kořeny kubické rovnice.

5 Algebraické rovnice 4.stupně, tzv. bikvadratické rovnice

Definice 3. *Algebraickou rovnicí čtvrtého stupně nazveme rovnici* $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$*, kde* $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in C$*,* $a_4 \neq 0$*.*

Postup řešení bikvadratické rovnice:

V případě bikvadratických rovnic postupujeme analogicky jako u rovnic kubických jen s tím, že v určitých substitucích zavedeme vždy jednu proměnnou navíc.

1. Zavedeme substituci $x = y - \frac{a_3}{4}$, čímž odstraníme člen x^3 a dostáváme rovnici

$$y^4 + py^2 + qy + s = 0, \tag{12}$$

kde

$$\begin{aligned} p &= \frac{a_2}{a_4} - \frac{3a_3^2}{8a_4^2} \\ q &= \frac{a_1}{a_4} - \frac{a_2a_3}{2a_4^2} + \frac{a_3^3}{8a_4^3} \\ s &= \frac{a_0}{a_4} - \frac{3a_3^4}{256a_4^4} + \frac{a_2a_3^2}{16a_4^3} - \frac{a_1a_3}{4a_4^2} \end{aligned}$$

Rovnici (12) opět nazveme *redukovaným tvarem*, tentokrát však bikvadratické rovnice.

2. Položíme nyní $2y = u + v + w$ ve (12), tímto máme po dosazení.

$$\begin{aligned} & (u^2 + v^2 + w^2) + 4(u^2 + v^2 + w^2 + 2p)(uv + uw + vw) + \\ + \; & p(u^2 + v^2 + w^2) + 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8(uvw + q)(u + v + w) + \\ + \; & 16s = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

3. Dle Cardana zavedeme další dvě podmínky

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2p = 0 \tag{14}$$

a $uvw + q = 0$, tedy

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2p \tag{15}$$

$$u^2v^2w^2 = q^2 \tag{16}$$

a následně dostáváme rovnici

$$u^2v^2 + u^2w^2 + vw^2 \;=\; p^2 - 4s, \tag{17}$$

jež vznikne dosazením (14) do (13).

4. Ze vztahů (15),(16),(17) a Viétovy věty vzniká rovnice

   $$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4s)z - q^2 \;=\; 0, \tag{18}$$

   kde z_1, z_2, z_3 jsou řešením této rovnice (18), jež se nazývá kubická rezolventa bikvadratické rovnice.

5. Položíme $z_1 = u^2, z_2 = v^2, z_3 = w^2$; odtud tedy dostáváme $u = \sqrt{z_1}$, $v = \sqrt{z_2}$, $w = \sqrt{z_3}$. Každé z pod odmocninou vyjadřuje dvě hodnoty, jež zvolíme libovolně, třetí z nich dopočítáme ze vztahu $uvw + q = 0$.

   Mimo vztah (u, v, w) vyhovuje podmínce $uvw+q = 0$ také ještě $(u, -v, -w)$,$(-u, v, -w)$, $(-u, -v, w)$.

   Dosazením těchto vztahů do substituce $2y = u+v+w$ získáváme řešení redukovaného tvaru bikvadratické rovnice (12), tedy y_1, y_2, y_3, y_4.

6. Dosazením y_1, y_2, y_3, y_4 do substituce $x = y - \frac{a_3}{4}$ dostáváme všechna řešení algebraické rovnice 4. stupně, tedy x_1, x_2, x_3, x_4.

Příklad 4. Řešme algebraickou rovnici $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$ nad C.

- Zavedeme substituci $x = y - \frac{a_3}{4}$, tedy $x = y + \frac{3}{2}$. Dosazením do původní rovnice máme:

  $$y^4 + py^2 + qy + s = 0,$$

  kde nám při výpočtu p, q, s pomůže Hornerovo schéma pro $\frac{3}{2}$ (vyhneme se složitému dosazování):

  $$\begin{array}{c|ccccc}
   & 1 & -6 & 10 & -2 & -3 \\
  \hline
  \frac{3}{2} & & \frac{3}{2} & \frac{-27}{4} & \frac{39}{8} & \frac{69}{16} \\
   & 1 & \frac{-9}{2} & \frac{13}{4} & \frac{23}{8} & \frac{21}{16} = s \\
   & & \frac{3}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-15}{18} & \\
   & 1 & -3 & \frac{-5}{4} & 1 = q & \\
   & & \frac{3}{2} & \frac{-9}{4} & & \\
   & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2} = p & & \\
   & & \frac{3}{2} & & & \\
   & 1 & 0 & & & \\
   & 1 & & & &
  \end{array}$$

  Z Hornerova schématu dostáváme rekukovaný tvar: $y^4 - \frac{7}{2}y^2 + y + \frac{21}{16} = 0$, kde $p = \frac{-7}{2}, q = 1, s = \frac{21}{16}$.

- Dosazením p, q, s do (18) obdržíme rovnici ve tvaru $z^3 - 7z^2 + 7z - 1 = 0$ (kubická resolventa bikvadratické rovnice).

- Pokud bychom se pokusili vyřešit tuto kubickou rovnici za pomoci Cardanových vzorců, zjistili bychom, že tento případ vede na "casus irreducubilis" ($D < 0$). Pomocí metody určování racionálních kořenů (kapitola 6.2) zjistíme, že rovnici $z^3 - 7z^2 + 7z - 1 = 0$ vyhovuje kořen $z_1 = 1$. Pak tedy vydělíme levou část rovnice dvojčlenem $(z-1)$, čímž snížíme její stupeň na druhý. Odtud pak snadno určíme zbylé dva kořeny $z_2, z_3 = 3 \pm \frac{\sqrt{32}}{2}$.

- Nyní položíme $z_1 = u^2$, $z_2 = v^2$, $z_3 = w^2$. Pak tedy $u = \sqrt{z_1}$, $v = \sqrt{z_2}$, $w = \sqrt{z_3}$. Každé ze tří z pod odmocninou vyjadřuje dvě hodnoty, z nichž dvě si libovolně zvolíme a třetí dopočítáme dle vztahu

$$uvw + q = 0 \tag{19}$$

$u = 1$, $v = \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}$, $q = 1$, $w = ?$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (3 + \frac{\sqrt{32}}{2})w + 1 &= 0 \\ w &= \frac{-1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} \end{aligned}$$

Vztahu (19) vyhovuje mimo (u, v, w) ještě také $(u, -v, -w)$, $(-u, v, -w)$, $(-u, -v, w)$.

- Dosazením těchto vztahů do substituce $2y = u + v + w$ máme všechna řešení rekukovaného tvaru bikvadratické rovnice (12), tedy y_1, y_2, y_3, y_4.

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} - \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) \\ y_2 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} + \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) \\ y_3 &= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} + \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) \\ y_4 &= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} - \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) \end{aligned}$$

- Nyní dosadíme y_1, y_2, y_3, y_4 do původní substituce $x = y + \frac{3}{2}$, kde x_1, x_2, x_3, x_4 jsou hledanými kořeny původní bikvadratické rovnice.

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} - \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) + \frac{3}{2} = 3 \\
x_2 &= y_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} + \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) + \frac{3}{2} = 1 \\
x_3 &= y_3 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} + \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) + \frac{3}{2} = 1 + \sqrt{2} \\
x_4 &= y_4 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}} - \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{32}}{2}}) + \frac{3}{2} = 1 - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Substituční medota Jednou z metod, jak lze efektivně řešit některé algebraické rovnice je nalézt vhodnou substituci, čímž si následné hledání kořenů výrazně usnadníme.

Příklad 5. Najděme všechny kořeny algebraické rovnice $3x^4 - 15x^2 + 18 = 0$ nad C.

Využijeme substituce $x^2 = y$, čímž snížíme stupeň polynomu ze čtvrtého na druhý a dostáváme $3y^2 - 15y + 18 = 0$. Tuto rovnici vyřešíme (kapitola 3).

$$\begin{aligned}
y_{1,2} &= \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 18}}{2 \cdot 3} \\
y_1 &= 3 \\
y_2 &= 2
\end{aligned}$$

Dosazením do původní substituce máme

$$\begin{aligned}
x^2 = 3 \quad &\text{tedy} \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \\
x^2 = 2 \quad &\text{tedy} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Hledanými kořeny jsou tedy $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{2}$, což lze snadno ověřit dosazením do původní rovnice.

6 Algebraické rovnice 5. a vyššího stupně

Počátkem 19. století podal významný francouzský matematik Évariste Galois odpověď na otázku, se kterou si lámaly hlavu generace matematiků před ním. Dokázal, že existuje algebraická rovnice pátého stupně, která není algebraicky řešitelná. Galois přiřadil každé rovnici tzv. Galoisovu grupu. Poté odvodil řešitelnost rovnice pomocí radikálů z vlastností dané grupy. Nalezením vhodné grupy našel také konkrétní rovnici pátého stupně, kterou nelze řešit pomocí radikálů. Předchozí postup ilustruje hlavní myšlenku důkazu následující věty.

Věta 2. (Galoisova) *Existuje algebraická rovnice 5. stupně, která není algebraicky řešitelná.*

I přesto, že obecně nelze nalézt všechny kořeny polynomů pátého a vyššího stupně algebraickým postupem, existují algoritmy pro nalezení určitého typu kořenů daného polynomu. V této kapitole předvedu postup, jak odstranit násobnost řešení a nalézt racionální kořeny.

S rozvojem výpočetní techniky a numerické matematiky nalezli matematici přibližné metody pro hledání kořenů polynomů, které obecně nelze řešit algebraicky. Některé z těchto metod předvedu v následující kapitole.

6.1 Vícenásobné kořeny

Nejprve se zaměříme na to, jak v polynomu $f(x)$ odstraníme vícenásobné kořeny. Postup je následující:

1. Nejprve příslušnou algebraickou rovnici (polynom) zderivujeme; $f'(x)$
2. Vyjádříme největšího společného dělitele ($D(x)$) daného polynomu a jeho derivace.
3. Dále potom $\frac{f(x)}{D(x)} = h(x)$, kde $h(x)$ má stejné kořeny jako $f(x)$, s tím rozdílem, že u $h(x)$ jsou všechny jednoduché (zatímco u $f(x)$ jsou některé vícenásobné).
4. Najdeme už tedy jen kořeny $h(x)$ a zbylé vícenásobné kořeny z $f(x)$ určíme za pomoci Hornerova schématu.

Příklad 6. Odstraňme vícenásobné kořeny v algebraické rovnici $x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = 0$.

- Nejprve polynom $f(x)$ na levé straně rovnice zderivujeme: $f'(x) = 5x^4 - 45x^2 + 20x + 60$.

- V dalším kroku pomocí Eukleidova algoritmu nalezneme největšího společného dělitele $f(x)$ a $f'(x)$ a to následujícím způsobem:

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72) : (5x^4 - 45x^2 + 20x + 60) = \frac{1}{5}x \\
\underline{-(x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 12x)} \\
\qquad\quad - 6x^3 + 6x^2 + 48x - 72 \approx x^3 - x^2 - 8x + 12
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(5x^4 - 45x^2 + 20x + 60) : (x^3 - x^2 - 8x + 12) = 5x + 5 \\
\underline{-(5x^4 - 5x^3 - 40x^2 + 60x)} \\
\qquad\quad 5x^3 - 5x^2 - 40x + 60 \\
\qquad \underline{-(5x^3 - 5x^2 - 40x + 60)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$D(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

Poznámka 5. V Eukleidově algoritmu jsme využili vlastností asociovaných polynomů. Největší společný dělitel je v polynomech určen jednoznačně až na asociovanost. Pro asociované polynomy $P(x) \approx Q(x)$ vždy platí, že stupeň obou polynomů je stejný a navíc $P(x) = rQ(x)$, kde $r \in R$. Dále také kořeny asociovaných polynomů jsou stejné ([3]).

- Následujícím krokem, kde dělíme původní polynom $f(x)$ největším společným dělitelem $D(x)$, je vlastně odstraňování vícenásobných kořenů ukončeno.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72) : (x^3 - x^2 - 8x + 12) = x^2 + x - 6 \\
\underline{-(x^5 - x^4 - 8x^3 + 12x^2)} \\
\qquad\quad x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 60x - 72 \\
\quad \underline{-(x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x)} \\
\qquad\qquad - 6x^3 + 6x^2 + 48x - 72 \\
\qquad \underline{-(-6x^3 + 6x^2 + 48x - 72)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Polynom tvaru x^2+x-6 má tedy tytéž kořeny jako polynom $x^5-15x^3+10x^2+60x-72$, ale všechny jednoduché.

- Nakonec již jen určíme kořeny polynomu x^2+x-6 (viz kapitola 3) a pomocí Hornerova schématu ověříme jejich násobnost.

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6))}}{2 \cdot 1} \\
x_1 &= \frac{-1+5}{2} = 2 \\
x_2 &= \frac{-1-5}{2} = -3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -15 & 10 & 60 & -72 \\
\hline
2 & & 2 & 4 & -22 & -24 & 72 \\
 & 1 & 2 & -11 & -12 & 36 & 0 \\
2 & & 2 & 8 & -6 & -36 & \\
 & 1 & 4 & -3 & -18 & 0 & \\
2 & & 2 & 12 & 18 & & \\
 & 1 & 6 & 9 & 0 & & \\
2 & & 2 & 18 & & & \\
 & 1 & 8 & 27 & & &
\end{array}
$$

Tedy 2 je trojnásobný kořen polynomu $f(x)$.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -15 & 10 & 60 & -72 \\
\hline
-3 & & -3 & 9 & 18 & -84 & 72 \\
 & 1 & -3 & -6 & 28 & -24 & 0 \\
-3 & & -3 & 18 & -36 & 24 & \\
 & 1 & -6 & 12 & -8 & 0 & \\
-3 & & -3 & 27 & -117 & & \\
 & 1 & -9 & 39 & -125 & &
\end{array}
$$

Tedy -3 je dvojnásobným kořenem polynomu $f(x)$.

6.2 Racionální kořeny

Další algebraickou metodou, kterou můžeme při hledání kořenů polynomu využít, je metoda nalezení racionálních řešení algebraické rovnice. Nejdříve ovšem vyslovíme větu, na které je celý algoritmus hledání racionálních kořenů založen.

Věta 3. *Jestliže má libovolná algebraická rovnice (nebo též polynom $f(x) = 0$)*

$$x^n a_n + \cdots + x^2 a_2 + x a_1 + a_0 \;=\; 0, \tag{20}$$

kde $a_n \neq 0, n \geq 1; a_n, \ldots, a_0$ jsou celočíselné koeficienty, racionální kořen $u = \frac{v}{w}$, kde $w \neq 0$ a v, w jsou dvě nesoudělná celá čísla, pak platí, že

$$v | a_0 \qquad a \qquad w | a_n. \tag{21}$$

Dále platí následující:

$$(i) \quad \text{Jestliže } t \in Z \text{ a } f(t) \neq 0, \text{ pak je-li } u \text{ kořenem } f(x), \text{ platí } (v - wt)|f(t). \tag{22a}$$

$$(ii) \quad \text{Jestliže } f(1) \neq 0, \text{ pak } (v - w)|f(1). \tag{22b}$$

$$(iii) \quad \text{Jestliže } f(-1) \neq 0, \text{ pak } (v + w)|f(-1). \tag{22c}$$

Příklad 7. Najděme všechny racionální kořeny algebraické rovnice $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0$.

Při řešení využijeme vztahů (21) a po dosazení dostáváme $(v|20)$ a $(w|1)$. Tomuto vyhovuje následující výčet čísel pro $v \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4 \pm 5 \pm 10\}, w \in \{\pm 1\}$.

Prostým dosazením do původní rovnice vypočítáme $f(1) = 0$, $f(-1) = 20$. Následně postupným dosazením v, w do vztahů (22), tedy $(v + w)|20$ zjistíme, že vztahům (22) vyhovují $\pm 1, -2, 4$. Opětovným dosazením do původní rovnice dostáváme jediné racionální kořeny, tedy 1 a -2. O jejich násobnosti bychom se následně mohli přesvědčit Hornerovým schématem.

	1	3	4	3	−15	−16	20
1		1	4	8	11	−4	−20
	1	4	8	11	−4	−20	0
1		1	5	13	24	20	
	1	5	13	24	20	0	
1		1	6	19	33		
	1	6	19	33	53		

Tedy 1 je dvojnásobným kořenem, $x_{1,2} = 1$.

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 3 & 4 & 3 & -15 & -16 & 20 \\
\hline
-2 & & -2 & -2 & -4 & 2 & 26 & -20 \\
 & 1 & 1 & 2 & -1 & -13 & 10 & 0 \\
-2 & & -2 & 2 & -8 & 18 & 10 & \\
 & 1 & -1 & 4 & -9 & 5 & 0 & \\
-2 & & -2 & 6 & -20 & & & \\
 & 1 & -3 & 10 & -29 & & &
\end{array}
$$

Tedy -2 je dvojnásobným kořenem, $x_{3,4} = -2$.

Opětovným užitím Hornerova schématu pro -2 a 1 snížíme stupeň polynomu až na druhý (tj. odstraníme tyto kořeny z polynomu), tedy $x^2 + x + 5 = 0$. Řešením kvadratické rovnice dostáváme zbylé dva kořeny:

$$
\begin{aligned}
x_{5,6} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\
x_5 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{19}}{2} \\
x_6 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{19}}{2}
\end{aligned}
$$

7 Vybrané numerické metody pro řešení algebraických rovnic 5. a vyššího stupně

V případě hledání kořenů polynomu za pomoci některé z numerických metod postupujeme dle následujícího algoritmu:

1. Odstraníme vícenásobné kořeny a určíme racionální kořeny zkoumaného polynomu.
2. Ve druhém kroku provedeme příslušnou separaci zbylých kořenů, tzn. nalezneme vhodné intervaly, ve kterých leží vždy právě jeden kořen polynomu.
3. S využitím jedné z aproximačních metod (s danou přesností) nakonec určíme všechny kořeny zkoumaného polynomu.

Separace kořenů Separaci kořenů provedeme tak, že nalezneme interval $\langle a, b\rangle$ takový, kde funkce $f(x)$ je na intervalu spojitá, platí že $f(a)f(b) < 0$, pak v každém takovémto intervalu $\langle a, b\rangle$ leží alespoň jeden kořen funkce $f(x)$.

Nyní uvedeme několik vět, které jsou užitečné při separaci kořenů.

Věta 4. *Všechny reálné kořeny polynomu $P(x)$ leží v intervalu $\langle b-1, a+1\rangle$, kde a značí nejvyšší hodnotu koeficientu $a_0, a_1, \ldots, a_n$, b značí nejmenší hodnotu koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_n$.*

Věta 5. (*Descartova věta) Jsou-li všechny koeficienty polynomu $P(x)$ různé od nuly, pak počet kladných kořenů polynomu $P(x)$ je nanejvýš roven počtu znaménkových změn v polynomu $P(x)$ nebo o sudé číslo menší. (Pro záporné kořeny platí věta obdobná: Jestliže budeme uvažovat polynom s opačnými znaménky, než polynom původní, tedy $-P(x)$, pak počet záporných kořenů polynomu je roven počtu znaménkových změn v polynomu nebo o sudé číslo menší.)*

Věta 6. *Polynom $P(x)$ má v intervalu (a, b) sudý počet kořenů, nebo žádný, jestliže platí $a < b$ a současně $f(a)f(b) > 0$. (Lichý počet kořenů v intervalu (a, b) má polynom $P(x)$ za předpokladu, že platí $a < b$ a $f(a)f(b) < 0$).*

Věta 7. *Mějme dány dva různé reálné kořeny polynomu $P(x)$, který má reálné koeficienty. Pak mezi těmito dvěma kořeny leží alespoň jeden kořen polynomu $P'(x)$.*

Hranice kořenů polynomu Jednou z metod, jak určit hranici kořenů polynomu je použít následující vztah:

$$\frac{1}{1+\frac{B}{|a_n|}} \leq \beta_n \leq 1 + \frac{A}{|a_0|},$$

kde $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ značíme kořeny algebraické rovnice $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $A = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$, $B = \max(|a_0|, \ldots, |a_n|)$.

Pokud bychom chtěli určit přesný počet reálných kořenů algebraické rovnice (Descartova věta nám tuto odpověď dát nemusí), je vhodné použít metodu Sturmovu.

Věta 8. *Počet reálných kořenů polynomu $P(x)$ v intervalu $a \leq x \leq b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ představuje počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$ polynomů (viz. příklad 8).*

Příklad 8. Určeme počet reálných kořenů algebraické rovnice $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$.

- V prvním kroku sestavíme Sturmovu posloupnost $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \\ P_1(x) &= -P_0'(x) = -3x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

- Další členy Sturmovy posloupnosti, tedy $P_2(x), P_3(x), \ldots, P_m(x)$ určíme pomocí Eukleidova algoritmu pro $P_0(x)$ a $P_1(x)$. Pokud označíme $P_0 = V_2 P_1 + c_2$, tedy c_2 je zbytek po dělení polynomu $P_0(x)$ polynomem $P_1(x)$, pak $-c_2$ přestavuje další člen Sturmovy posloupnosti $P_2(x)$. Obecně tedy $P_{n-1} = V_{n+1} P_n + c_{n+1}$, přičemž platí, že $-c_{n+1} = P_{n+1}$. Dále si všimněme, že s každým následujícím krokem stupeň nového členu Sturmovy posloupnosti klesá, tedy výpočet zastavíme v momentě, kdy obdržíme c_{n+1} s nulovým stupněm.

$$\begin{array}{l} (x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}) : (-3x^2 + 3x - 1) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \\ \underline{-(x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x)} \\ \quad - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{2} \\ \quad \underline{-(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6})} \\ \qquad\qquad \frac{1}{6}x - \frac{4}{3} \qquad\qquad P_2(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (-3x^2 + 3x - 1) : (\frac{1}{6}x - \frac{4}{3}) = -18x - 126 \\ \underline{-(-3x^2 + 24x)} \\ \qquad - 21x - 1 \\ \quad \underline{-(-21x + 168)} \\ \qquad\qquad 168 \qquad\qquad P_3(x) = 168 \end{array}$$

- Posledním krokem bude sestavení tabulky pro určení počtu reálných kořenů.

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	$-$	$-$	$+$	$+$	1
$+\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0	$-$	$-$	$+$	$+$	1
1	$-$	$-$	$+$	$+$	1
2	$+$	$-$	$+$	$+$	2

Z tabulky plyne:

$$\begin{aligned} W(+\infty) - W(-\infty) = 1 &\quad\Rightarrow\quad 1 \text{ reálný kořen} \\ W(+\infty) - W(0) = 1 &\quad\Rightarrow\quad 1 \text{ kladný kořen} \\ W(2) - W(1) = 1 &\quad\Rightarrow\quad 1 \text{ kořen v intervalu } \langle 2, 1\rangle. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme přistoupit k samotné aproximaci reálných kořenů za pomoci následujících metod, jež budou podrobně popsány, bude předveden příslušný algoritmus řešení vždy doplněný praktickou ukázkou na konkrétním příkladu.

7.1 Metoda půlení intervalů (bisekce)

Způsobem popsaným na začátku kapitoly 7 nalezneme separovaný interval (a_0, b_0), který rozpůlíme tak, že $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$, kde x_0 značí střed tohoto intervalu a a_0, b_0 jeho krajní body.

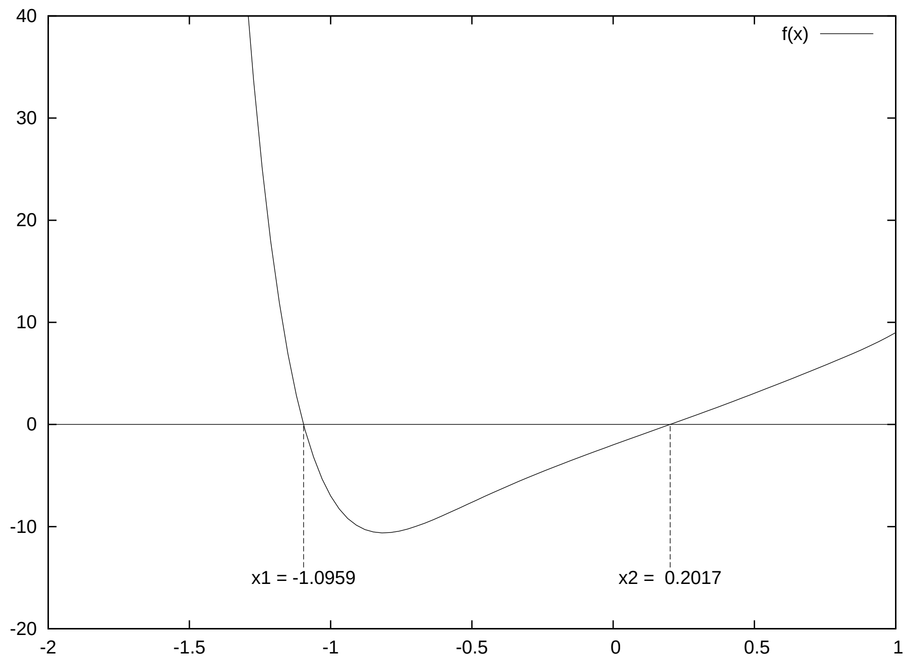
Z nově vzniklých intervalů $\langle a_0, x_0\rangle$, $\langle x_0, b_0\rangle$ vybereme ten, ve kterém je zaručena existence kořene, tedy musí platit $f(a_0)f(x_0) < 0$. (Pokud je taková podmínka splněna, použijeme v dalším kroku interval $\langle a_0, x_0\rangle$, v opačném případě interval $\langle x_0, b_0\rangle$.)

Takto pokračujeme v půlení, kde nám postupně budou vznikat nové intervaly $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$, atd., dokud nebude platit, že $f(x) = 0$ (zde jsme nalezli kořen polynomu a výpočet ukončíme).

Ačkoli je tato metoda početně velmi jednoduchá, počet kroků k nalezení kořene bývá obvykle dost velký, proto hledaný kořen můžeme určit s danou přesností α, tedy $b_k - a_k < 2\alpha$, kde $k = 0, 1, ..., n$. Přibližný kořen je tedy poté roven středu posledního nalezeného intervalu $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$.

Poznámka 6. Počet kroků k nalezení kořene s předem danou přesností zjistíme tak, že musí platit: $\frac{l}{2^k} < 2\alpha$, kde l značí délku intervalu, k počet kroků půlení intervalu. Tedy $k > \frac{\ln \frac{l}{2\alpha}}{\ln 2}$.

Příklad 9. Metodou bisekce (půlení intervalů) najděme kořeny algebraické rovnice $4x^8 - 5x^7 + x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 10x - 2 = 0$ nad R s přesností $\alpha = 0.000000001$.



Obrázek 1: Graf polynomu $f(x) = 4x^8 - 5x^7 + x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 10x - 2$ a jeho reálné kořeny na intervalu $(-2, 1)$

- Poté, co jsme se přesvědčili, že rovnice nemá žádné vícenásobné ani racionální kořeny, jsme pomocí algoritmů uvedených na počátku této kapitoly separovali dva intervaly $(-2, 0)$ a $(0, 1)$, kde v každém z nich leží právě jeden reálný kořen algebraické rovnice.

- Jeden kladný kořen rovnice leží v intervalu $(0, 1)$. Tento interval rozpůlíme následujícím způsobem:
$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0.5.$$

- Po ověření podmínky $f(a_0)f(x_0) < 0$ zjistíme, že této podmínce vyhovuje nově vzniklý interval $\langle 0, 0.5\rangle$, který dále rozpůlíme stejným způsobem. Takto pokračujeme v půlení, dokud nedosáhneme požadované přesnosti $\alpha = 0.000000001$.

- Výsledky půlení jsou seřazeny do tabulky a doplněny grafickým znázorněním.

Tabulka 1: Metoda bisekce, interval $(0, 1)$

k	x_k
0	0.5000000000
1	0.2500000000
2	0.1250000000
5	0.2031250000
10	0.2016601600
20	0.2017712600
25	0.2017715400
26	0.2017715300

- Výpočet jsme zastavili v 26. kroku, kde jsme s požadovanou přesností $\alpha = 0.000000001$ nalezli kladný kořen algebraické rovnice, tedy $x_{26} = 0.2017715300$, tedy platí $|a_{26} - b_{26}| < 2\alpha$.

- Analogicky postupujeme i u zkoumaného intervalu $(-2, 0)$.

Tabulka 2: Metoda bisekce, interval $(-2, 0)$

k	x_k
0	-1.0000000000
1	-1.5000000000
2	-1.2500000000
5	-1.0937500000
10	-1.0966797000
20	1.0959425000
24	-1.0959425000

- Hledaným kořenem algebraické rovnice na intervalu $(-2, 0)$ s přesností $\alpha = 0.000000001$ je $x_{24} = -1.0959425000$, tedy platí $|a_{24} - b_{24}| < 2\alpha$.

7.2 Metoda tětiv (regula falsi)

Separovaný interval (a_0, b_0) rozpůlíme sečnou vedenou body $[a_0, f(a_0)]$, $[b_0, f(b_0)]$ tak, že nově vzniklý bod x_0, představuje průsečík mezi touto sečnou a osou x:

$$x_0 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(b_0).$$

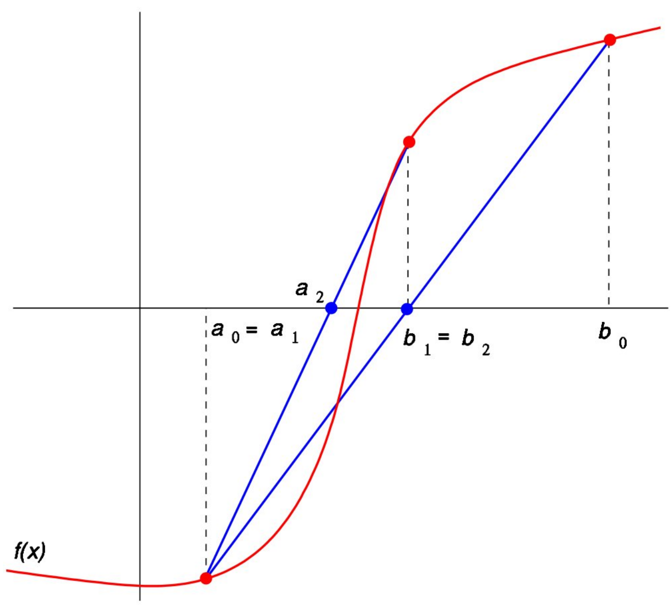
Z nově vzniklých intervalů $\langle a_0, x_0\rangle$, $\langle x_0, b_0\rangle$ vybereme opět ten, ve kterém je zaručena existence kořene, tedy musí platit $f(a_0)f(x_0) < 0$ nebo $f(x_0)f(b_0) < 0$.

Takto pokračujeme v půlení, kde nám opět postupně budou vznikat nové intervaly $\langle a_1, b_1\rangle$,$\langle a_2, b_2\rangle$ atd., dokud nebude platit, že $f(x_k) = 0$ (zde jsme nalezli kořen polynomu a výpočet ukončíme).

Pokud hledaný kořen určujeme s předem danou přesností α, ve výpočtu pokračujeme, dokud neplatí

$$|x_k - x_{k-1}| < \alpha.$$

Tedy musí platit $f(x_k)f(x_k + \alpha) < 0$ nebo $f(x_k)f(x_k - \alpha) < 0$, tzn. hledaný kořen leží s jistotou v intervalu $\langle x_k - \alpha, x_k\rangle$, nebo $\langle x_k, x_k + \alpha\rangle$.



Obrázek 2: Grafické znázornění metody regula falsi

Příklad 10. Metodou regula falsi řešme příklad 9.

- Sestavíme opět dvě tabulky pro separované intervaly $(-2, 0)$, $(0, 1)$, které zužujeme postupným dosazováním do rovnice:

$$x_0 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(b_0),$$

pro x_k, a_k, b_k, kde $k = 0, 1, \ldots, n$, za podmínky, že $f(a_k)f(b_k) < 0$.

Tabulka 3: Metoda regula falsi, interval $(-2, 0)$

k	x_k
0	-0.0024038463
99	-0.4066771300
199	-1.0455002000
299	-1.0957577000
389	-1.0959420000

Tabulka 4: Metoda regula falsi, interval $(0, 1)$

k	x_k
0	0.1818181900
1	0.1994245700
2	0.2014920100
3	0.2017381800
4	0.2017675700
5	0.2017710200
6	0.2017714400
7	0.2017715000
8	0.2017715000

- Hledanými kořeny algebraické rovnice s požadovanou přesností $\alpha = 0.000000001$ jsou pro interval $(-2, 0)$ kořen $x_{389} = -1.0959420000$, tedy $|x_{389} - x_{388}| < \alpha$ a pro interval $(0, 1)$ je to kořen $x_8 = 0.2017715000$, tedy $|x_8 - x_7| < \alpha$.

7.3 Newtonova metoda (metoda tečen)

Separovaný interval (a_0, b_0) rozpůlíme pomocí tečny vedené v bodě $[x_0, f(x_0)]$ ke grafu příslušné funkce (polynomu). Průsečík tečny s osou x značíme x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

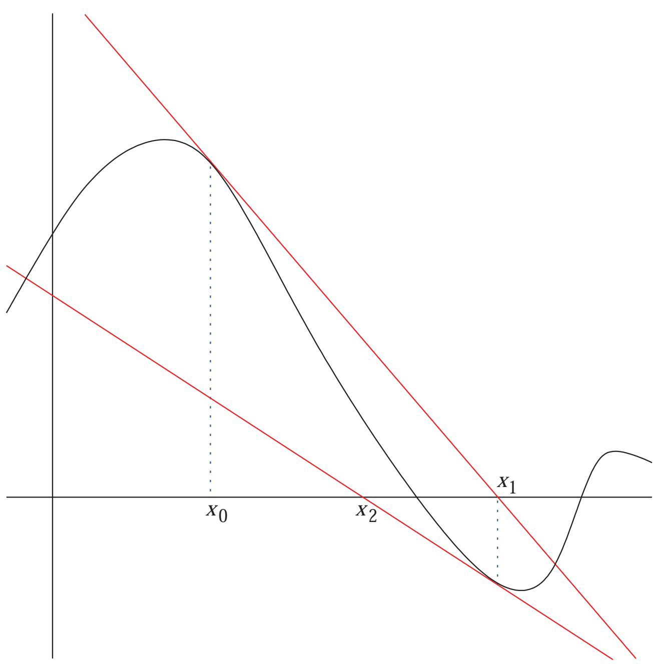
Následně pokračujeme v zužování intervalu, dokud nebude platit $f(x_k) = 0$ (tzn., že jsme nalezli kořen a výpočet ukončíme).

Poznámka 7. Počáteční bod $x_0 \in (a_0, b_0)$ zvolíme libovolně, ale tak aby platila podmínka $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Pokud hledaný kořen určujeme s předem danou přesností α, ve výpočtu pokračujeme, dokud neplatí (stejně jako u "metody tětiv"):

$$|x_k - x_{k-1}| < \alpha.$$

Tedy musí platit $f(x_k)f(x_k+\alpha) < 0$ a $f(x_k)f(x_k-\alpha) < 0$, tzn. hledaný kořen leží s jistotou v intervalu $\langle x_k - \alpha, x_k\rangle$, nebo $\langle x_k, x_k + \alpha\rangle$.



Obrázek 3: Grafické znázornění Newtonovi metody

Příklad 11. Newtonovou metodou řešme příklad 9.

- Víme, že hledané kořeny leží v intervalech $(-2, 0)$ a $(0, 1)$. Poté, co se přesvědčíme, že oba tyto intervaly pro každý bod splňují podmínku $f(x_0)f''(x_0) > 0$, zvolíme pro každý interval počáteční aproximaci x_0, tedy -1 pro interval $(-2, 0)$ a 0.5 pro interval $(0, 1)$.
- Další aproximace pro tyto intervaly spočítáme pomocí vztahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n$.

Tabulka 5: Newtonova metoda, počáteční aproximace -1

k	x_k
0	-1.0000000000
1	-1.1458334000
2	-1.1033993000
3	-1.0961348000
4	-1.0959431000
5	-1.0959430000
6	-1.0959430000

Tabulka 6: Newtonova metoda, počáteční aproximace 0.5

k	x_k
0	0.5000000000
1	0.2129221900
2	0.2017792500
3	0.2017715400
4	0.2017715400

- Hledanými kořeny algebraické rovnice s požadovanou přesností $\alpha = 0.000000001$ jsou pro interval $(-2, 0)$ kořen $x_6 = -1.0959430000$, tedy $|x_6 - x_5| < \alpha$ a pro interval $(0, 1)$ je to kořen$x_4 = 0.2017715400$, tedy $|x_4 - x_3| < \alpha$.

7.4 Metoda prosté iterace

Funkci $f(x) = 0$ převedeme na tvar

$$x = h(x), \tag{23}$$

kde h budeme nazývat iterační funkcí. Nehledáme tedy průsečík s osou x, nýbrž průsečík grafu funkce h s přímkou $y = x$, tzv. pevný bod funkce h. U této funkce (23) musí platit

$$|h'(x)| \leq \alpha, \quad \text{kde} \quad x \in \langle a, b \rangle, \;\; \alpha \in \langle 0, 1). \tag{24}$$

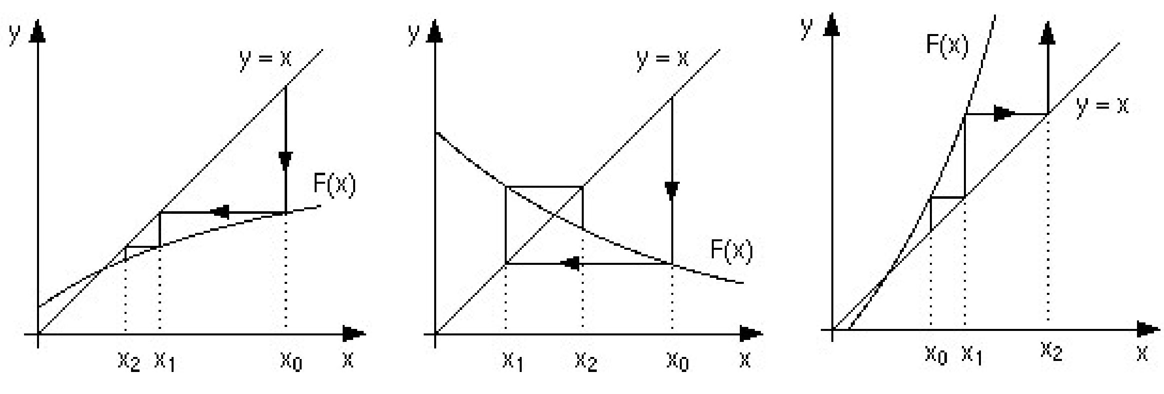
Poznámka 8. Proměnnou x vyjádříme z $f(x)$ tak, že vydělíme $f(x)$ její 1. derivací, poté rovnici vydělíme -1 a k oběma stranám rovnice přičteme x.

Jako počáteční aproximaci x_0 zvolíme bod ležící v separovaném intervalu (a, b). Další aproximace pevného bodu vyjádříme následovně:

$$x_{k+1} = h(x_k).$$

Ve výpočtu pokračujeme tak dlouho, dokud nenarazíme na pevný bod funkce $h(x)$, popřípadě nebude-li opět platit podmínka

$$|x_k - x_{k-1}| < \alpha.$$



Obrázek 4: Grafické znázornění iterační metody

Poznámka 9. Hledání kořene polynomu $f(x)$ iterační metodou odpovídá hledání pevného bodu iterační funkce $h(x)$, tedy takového δ, pro které platí $f(\delta) = \delta$.

Řekneme, že pevný bod δ funkce $h(x)$ je *atrahující* (přitahující), pokud existuje interval (a, b) takový, že pro $x_0 \in (a, b)$ se posloupnost $x_0, h(x_0), h(h(x_0)), \ldots$ blíží postupně k δ.

V případě, že kořen x polynomu $f(x)$ je atrahující pevný bod iterační funkce $h(x)$, iterační metoda používající h takový kořen nalezne.

Řekneme, že pevný bod je *repulzivní* (odpuzující), pokud se posloupnost $x_0, h(x_0), h(h(x_0)), \ldots$ dostane mimo interval (a, b). V tomto případě iterační metoda používající $h(x)$ kořen x nenalezne.

Příklad 12. Prostou iterační metodou řešme příklad 9.

- V prvním kroku algebraickou rovnici převedeme z tvaru $f(x) = 0$ na iterační funkci $x = h(x)$, například následujícím způsobem:

$$x = \frac{-4x^8 + 5x^7 - x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 + 2}{10}.$$

  Zvolená iterační funkce splňuje podmínku (24) pouze na intervalu $(0, 1)$. Pro výpočet iterační funkce pro interval $(-2, 0)$ použijeme postup uvedený v poznámce 8, tedy

$$x = x - \frac{-4x^8 + 5x^7 - x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 - 10x + 2}{32x^7 - 35x^6 + 6x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 2x + 10}.$$

- Jako počáteční aproximaci zvolíme (libovolně) u intervalu $(-2, 0)$ bod -1 a bod 0.5 u intervalu $(0, 1)$.
- Další aproximace budou vznikat opětovným užitím vztahu $x_{k+1} = h(x_k)$.

Tabulka 7: Metoda prosté iterace, počáteční aproximace -1

k	x_k
0	-1.0000000000
1	-1.1458334000
2	-1.1033993000
3	-1.0961348000
4	-1.0959431000
5	-1.0959430000
6	-1.0959430000

- Hledanými kořeny algebraické rovnice s požadovanou přesností $\alpha = 0.000000001$ jsou pro interval $(-2, 0)$ kořen $x_6 = -1.0959430000$, tedy $|x_6 - x_5| < \alpha$ a pro interval $(0, 1)$ je to $x_5 = 0.2017715700$, tedy $|x_5 - x_4| < \alpha$.

Tabulka 8: Metoda prosté iterace, počáteční aproximace 0.5

k	x_k
0	0.5000000000
1	0.1945312500
2	0.2017180500
3	0.2017711400
4	0.2017715700
5	0.2017715700

7.5 Müllerova metoda

Jedná se o zobecnění metody sečen. Využíváme zde tři aproximace: x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, přičemž křivku definovanou jako $y = f(x)$ aproximujeme parabolou definovanou těmito body. Průsečík osy x a této paraboly, který je nejblíže k x_k, položíme rovno x_{k+1}.

Postup řešení je následující:

- Mějme dány počáteční aproximace x_0, x_1, x_2.
- Sestavíme polynom $P(x) = a_2(x - x_2)^2 + a_1(x - x_2) + a_0$, který prochází body $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1), [x_2, f(x_2)]$, kde

$$\begin{aligned} a = a_2 &= f(x_2), \\ b = a_1 &= \frac{(x_0 - x_2)^2(f(x_1) - f(x_2)) - (x_1 - x_2)^2(f(x_0) - f(x_2))}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}, \\ c = a_0 &= \frac{(x_0 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) - (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2))}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)}. \end{aligned}$$

- Iterační vztah pro hledání kořene polynomu je tvaru:

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

  kde $\pm$ nahradíme znaménkem $+$ nebo $-$ tak, aby jmenovatel zlomku byl v absolutní hodnotě největší.
- V následujících krocích pokračujeme s aproximacemi x_1, x_2, x_3; x_2, x_3, x_4 atd. až po nalezení kořene (nebo dle předem dané přesnosti α).

Příklad 13. Müllerovou metodou řešme algebraickou rovnici $x^3 - x - 1 = 0$ s přesností $\alpha = 0.001$.

- Separujeme interval $(-1, 2)$, na kterém zvolíme počáteční aproximace takto: $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 2$.

Tabulka 9: Müllerova metoda, interval $(-1, 2)$

k	x_k
0	-1.00000000
1	0.00000000
2	2.00000000
3	0.61803399
4	1.17827569
5	1.30978731
6	1.32509032
7	1.32471777

- Hledaným kořenem algebraické rovnice na intervalu $(-1, 2)$ s přesností $\alpha = 0.001$ je kořen $x_7 = 1.32471777$, tedy $|x_7 - x_6| < \alpha$.

8 Závěr

Ve své práci jsem se zabýval problematikou hledání kořenů polynomů. Za největší přínos své práce považuji skutečnost, že jsem ukázal různé přístupy, které se v literatuře vyskytují odděleně, v jednom celku. Nezabývám se důsledným odvozením jednotlivých metod ani dokazováním uvedených matematických vět, ale spíše jsem vytvořil “kuchařku” algoritmů, která má sloužit více k praktickému užití než k teoretickému poznání.

Reference

[1] BARTSCH, HANS-JOCHEN. *Matematické vzorce.* Přeložil Zdeněk Tichý. Praha: Academia, 2006. ISBN 80-200-1448-9.

[2] HOROVÁ, IVANA - ZELINKA, JIŘÍ. *Numerické metody.* Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. ISBN 80-210-3317-7

[3] EMANOVSKÝ, PETR. *Algebra 2.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0289-0.

[4] EMANOVSKÝ, PETR. *Algebra 3.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0490-7.

[5] EMANOVSKÝ, PETR. *Cvičení z algebry (Polynomy, Alg. rovnice).* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1998. ISBN 80-7067-281-1.

[6] KOPKA, HELMUT - DALY, PATRICK W. *LATEX: Kompletní průvodce.* Přeložil Jan Gregor. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-722-6973-9.

[7] webové stránky: *www.wikipedia.org*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Regula_falsi`, `http://en.wikipedia.org/wiki/Newton_method`