Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Diferenciální rovnice 1.řádu

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr.Chládek Petr,Ph.D.
Rok odevzdání:2009

Vypracoval:
Baštář Vít
FIMk, III.ročník

Prohlášení:

Prohlašuji,že uvedenou bakalářskou práci jsem zpracoval samostatně, pod vedením Mgr.Chládka Petra,Ph.D, s použitím uvedené literatury.

Obsah:

Úvod

První kapitola vysvětluje základní pojmy.

Ve druhé kapitole uvádím výčet základních typů diferenciálních rovnic 1. řádu rozřešených vzhledem k derivaci, jako jsou homogenní lineární diferenciální rovnice, nehomogenní lineární diferenciální rovnice, rovnice se separovanými proměnnými, lineární, Bernoulliova a další, dále rovnic 1. řádu nerozřešených vzhledem k derivaci - rovnice nezávisející na neznámé funkci, Clairautova a Lagrangeova rovnice.
K jednotlivým typům rovnic uvádím i obvyklý způsob řešení.

V kapitole třetí se věnuji dalším metodám, které se používají při řešení diferenciálních rovnic. Připojil jsem i několik ilustrujících příkladů, které by měly sloužit k lepší názornosti. Ne vždy se diferenciální rovnice vyskytují pouze v uvedených základních tvarech, a to i přesto že jsou snadno řešitelné, uvádím tedy postup (tzv. metodu integračního faktoru), pomocí kterého lze některé rovnice převést na rovnici exaktní.

Čtvrtá kapitola se zabývá řešením autonomních rovnic a jejich soustav, uvádím i výčet typů singulárních bodů.

Závěrečná, pátá kapitola zahrnuje nejvýznamnější uplatnění diferenciálních rovnic při řešení úloh, předkládám výpočet několika modelových situací z praxe, při jejichž řešení jsou diferenciální rovnice nepostradatelné. Cílem této kapitoly bylo vytvořit alespoň základní představu o tom, k čemu se vlastně diferenciální rovnice používají.

Kapitola 1. - Základní pojmy

Diferenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých se neznámá funkce *y(x)* vyskytuje spolu se svými derivacemi. Obecně lze tedy tyto rovnice rozdělit do skupin podle řádu nejvyšší derivace, která se v nich vyskytuje.

Řekneme tedy, že **diferenciální rovnice je n-tého řádu**, pokud v ní vystupuje derivace řádu n, $y^{(n)}$, a neexistuje $k > n$, $k \in$ N takové, aby derivace $y^{(k)}$ byla v rovnici také obsažena.

Obecně je tedy diferenciální rovnice tvaru $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, kde $y=y(x)$ je hledaná funkce. Tato práce je zaměřena na diferenciální rovnice 1. řádu.

Definice: Nechť G je neprázdná oblast (tj. otevřená a souvislá množina) v euklidovském prostoru R^2 a f je reálná funkce, která je definovaná na G. Rovnice tvaru $y' = f(x, y)$, kde $y' = dy/dx$, se nazývá **diferenciální rovnicí 1. řádu**.

Pozn.1: *Euklidovský prostor se v lineární algebře obvykle definuje jako konečně rozměrný unitární prostor nad množinou reálných čísel.*
Proto je na něm definován skalární součin.Zavedeme-li v n-rozměrném euklidovském prostoru kartézskou soustavu souřadnic, pak vzdálenost d mezi dvěma body X a Y o souřadnicích $(x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)$ *je určena vztahem*

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Řešením diferenciální rovnice rozumíme nalezení reálné funkce jedné reálné proměnné $y=y(x)$, která je diferencovatelná na nějakém intervalu I a splňuje podmínky: $[x, y(x)] \in$ G a $y'(x) = f(x, y(x))$ pro každé $x \in$ I.

Řešení diferenciálních rovnic dělíme na:

- obecné - jako obecné řešení označujeme takové řešení diferenciální rovnice, které obsahuje libovolnou integrační konstantu. Přiřadíme-li každé konstantě obecného řešení určitou číselnou hodnotu, získáme řešení partikulární.
- partikulární (částečné) - partikulární řešení je řešení diferenciální rovnice, které získáme přiřazením určité číselné hodnoty každé integrační konstantě obecného řešení.
- singulární (výjimečné) - některá řešení nelze získat z obecného řešení. Taková řešení, která se vyskytují pouze u některých rovnic, popř. v některých bodech oboru, označujeme jako singulární nebo výjimečná.

Při hledání řešení dané diferenciální rovnice obvykle postupujeme tak, že ji pomocí různých operací převádíme na novou diferenciální rovnici. Pokud nová rovnice splňuje podmínku, že každé její řešení je zároveň i řešením rovnice původní a obráceně, hovoříme o tzv. ekvivalentních rovnicích a provedené úpravy nazýváme rovněž ekvivalentní. Ekvivalentnost úprav hraje při hledání řešení velmi významnou roli. Aplikací neekvivalentní úpravy totiž může dojít k tomu, že nová rovnice ztratí nebo naopak získá další řešení oproti rovnici původní.

Při určování řešení diferenciální rovnice je tedy potřeba určit i množinu M, na které je funkce $y(x)$ řešením.
Ve většině případů bývá tato množina totožná s oborem řešení - funkce $y(x)$.

Definice: Nechť $[x_0, y_0]$ je libovolný bod v oblasti G. Úloha určit řešení rovnice $y' = f(x,y)$, která splňují počáteční (Cauchyovu) podmínku $y(x_0)=y_0$, se nazývá počáteční (Cauchyova) úloha.

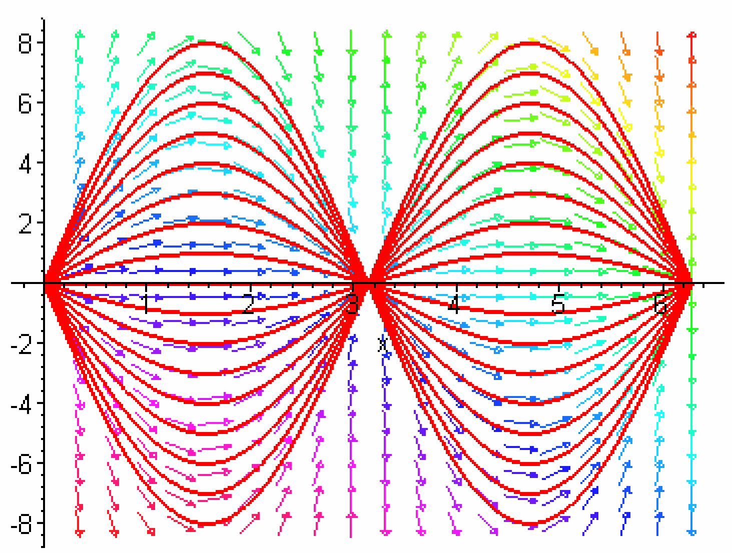
Pozn.2: *Proč se podmínce $y(x_0)=y_0$ říká počáteční podmínka? Důvodem je tato skutečnost: Pomocí diferenciálních rovnic můžeme popisovat procesy probíhající v čase a nezávisle proměnná x zde má fyzikální význam času, např.řešíme problémy, jak budou probíhat procesy popsané pomocí diferenciálních rovnic v čase $x > x_0$, je-li znám stav v tzv.počátečním časovém okamžiku x_0.*

V tomto případě se tedy soustředíme na hledání takového řešení diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$**,** které prochází daným bodem $[x_0, y_0] \in G$. Takové řešení však nemusí existovat nebo může nastat situace, kdy daný počáteční problém může mít více řešení. Nastane-li taková situace, že existuje řešení *y* počátečního problému $y' = f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$, které není zúžením žádného jiného řešení tohoto problému, nazývá se *y* úplné řešení.

Existuje-li úplné řešení počátečního problému takové, že každé jiné řešení tohoto problému je jeho zúžením, budeme stručně říkat, že daný problém má právě jedno řešení.

Definice: V souladu s předchozím dělením řešení na obecné, partikulární a singulární, pak obecným řešením rovnice $y' = f(x, y)$ budeme rozumět funkci závisející na jednom parametru C takovou, že speciální volbou C lze získat řešení libovolného počátečního problému $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Definice: Graf řešení nazýváme integrální křivkou dané diferenciální rovnice.



Obr.1: ukázka grafického vyjádření řešení diferenciální rovnice $y' = y.\cot g(x)$

Kapitola 2. - Druhy diferenciálních rovnic

1) Rovnice rozřešené vzhledem k derivaci

Pokud jsme schopni vyjádřit diferenciální rovnici F(x, y, y') = 0, ve tvaru

$$y' = f(x, y) \quad ,$$

pak říkáme, že rovnice je rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci.

1a) Lineární homogenní diferenciální rovnice

Lineární homogenní diferenciální rovnicí označujeme rovnici, kterou v obecném tvaru lze zapsat jako

$$y' + a(x)y = 0 \quad ,$$

kde *a(x)* je reálná funkce reálné proměnné a je spojitá na nějakém intervalu $J \subseteq R$.
Jedná se o speciální případ rovnice se separovanými proměnnými
(viz.Kapitola 2, část 1c)).

Rovnici $y' + a(x)y = 0$ upravíme na tvar

$\dfrac{y'}{y} = -a(x)$, integrujeme a dostaneme vztah

$\ln y = -\int a(x)dx + \ln C$, kde C je integrační konstanta.

Rovnici upravíme na tvar

$\ln y = \ln e^{-\int a(x)dx} + \ln C$, odstraníme přirozený logaritmus a můžeme napsat

$$\underline{y = Ce^{-\int a(x)dx}} \quad , \qquad C \in R \quad .$$

Toto je obecné řešení homogenní rovnice.

1b) Lineární nehomogenní diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnici prvního řádu lze v obecném tvaru zapsat jako

$$y' + a(x)y = b(x) \quad ,$$

kde $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce.

Tuto rovnici označujeme pro $b(x) \neq 0$ jako nehomogenní rovnici, lineární diferenciální rovnici s pravou stranou nebo také úplnou lineární diferenciální rovnici.

Obecné řešení diferenciální rovnice $y' + a(x)y = b(x)$ se rovná součtu obecného řešení diferenciální rovnice $y' = -a(x)y$ a libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice $y' + a(x)y = b(x)$.

Jednou z metod nalezení obecného řešení nehomogenní diferenciální rovnice $y' + a(x)y = b(x)$ je metoda variace konstant neboli Lagrangeova metoda .

Řešení touto metodou spočívá v tom, že řešení nehomogenní rovnice $y' + a(x)y = b(x)$ hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$, tzn. tvar řešení předpokládáme stejný, jako v případě homogenní rovnice, ale C zde nepředstavuje konstantu, ale neznámou funkci $C(x)$, kterou určíme takovým způsobem, aby řešení vyhovovalo nehomogenní rovnici.

Derivujeme vztah

$$y = C(x)e^{-\int a(x)dx} \quad \text{a dostaneme}$$

$$y' = C'(x)e^{-\int a(x)dx} + C(x)\left[-a(x)\right]e^{-\int a(x)dx} \quad .$$

Oba výše uvedené vztahy dosadíme za y a y' do rovnice $y' + a(x)y = b(x)$, kde po úpravě obdržíme

$$C'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \quad \text{, rovnici upravíme do tvaru}$$

$$C'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx} \quad \text{a po integraci získáme}$$

$$C(x) = \int \left[b(x)e^{\int a(x)dx} \right] dx + C_1$$, kde C_1 je integrační konstanta.

Dosazením do rovnice $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$ dostaneme rovnici

$$y = \left\{ \int \left[b(x)e^{\int a(x)dx} \right] dx + C_1 \right\} e^{-\int a(x)dx} \quad ,$$

což je obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu.

1c) Separovatelné diferenciální rovnice

Separovatelné jsou takové diferenciální rovnice 1.řádu , u kterých můžeme separovat proměnné. To znamená, že lze rozepsat původní funkci *f* na součin dvou funkcí jedné proměnné, z nichž jedna má za proměnnou *x* a druhá *y*.

Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$y' = f(x, y).$$

Uvedená diferenciální rovnice pak získá tvar

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad .$$

V této rovnici oddělíme (separujeme) proměnné, čímž dostaneme vztah

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx.$$

Integrací obou stran rovnice získáme obecné řešení, tzn.

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C \quad ,$$

kde *C* je integrační konstanta.

1d) Homogenní rovnice

Předpokládejme, že funkce *f* je spojitá na nějakém intervalu I.

Jedná se o diferenciální rovnici typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Substitucí $u = \frac{y}{x}$ ji převedeme na diferenciální rovnici s neznámou funkcí u proměnné x, která je řešitelná metodou separace proměnných.

Když tedy položíme $u = \frac{y}{x}$, platí

$y' = u'x + u$

a rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se transformuje na rovnici

$u'x + u = f(u)$,

v níž lze separovat proměnné

$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$.

Je-li y řešení rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0)=y_0$,

pak je $u = \frac{y}{x}$ řešením rovnice $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ splňující počáteční podmínku

$u(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ a obráceně.

Protože zobrazení množiny všech řešení rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ na množinu všech řešení rovnice $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ je vzájemně jednoznačné, dostaneme tímto způsobem prostřednictvím rovnice $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ všechna řešení rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

1e) Rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$

Předpokládejme, že funkce *f* je spojitá na nějakém intervalu I. Platí-li, že $\gamma = c = 0$,

rovnici $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$ zapíšeme ve tvaru $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y}{ax + by}\right)$.

Pokud dále platí, že:

a) $\alpha b - a\beta \neq 0$, lze rovnici převést na rovnici homogenní $y' = f\left(\frac{\alpha + \beta \frac{y}{x}}{a + b\frac{y}{x}}\right)$.

b) $\alpha b - a\beta = 0$, je rovnice $y' = f\left(\frac{\alpha + \beta \frac{y}{x}}{a + b\frac{y}{x}}\right)$ tvaru $y' =$ konst..

<u>V obou případech již lze rovnici bez problému vyřešit pomocí předchozích metod.</u>

- Zaměřme se tedy na situaci, kdy $\gamma^2 + c^2 \neq 0$. Zde můžeme rozlišit dva

případy:

a) $\alpha b - a\beta \neq 0$

Pak existuje jediná dvojice čísel **m**, **n** taková, že splňuje podmínky

$$\alpha m + \beta n + \gamma = 0, \quad am + bn + c = 0 \quad .$$

Položme tedy $x = u + m,\ y = v + n$.

Pak platí $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ a rovnici $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$ lze transformovat na rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{\alpha u + \beta v}{au + bv}\right),$$

kterou lze převést na rovnici homogenní.

Protože zobrazení definované rovnicemi ($\alpha \mathrm{m} + \beta \mathrm{n} + \gamma = 0,\quad a\mathrm{m} + b\mathrm{n} + c = 0$) je prosté, dostaneme z řešení této homogenní rovnice všechna řešení rovnice $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$.

b) $\alpha b - a\beta = 0$

Je-li $\alpha = a = 0$ nebo $\beta = b = 0$, má rovnice $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$ separované proměnné.

Nechť tedy $\alpha^2 + a^2 \neq 0$ a $\beta^2 + b^2 \neq 0$.

Je-li $b \neq 0$, pak ze vztahu $\alpha b - a\beta = 0$ plyne $\alpha = \frac{a\beta}{b}$ a rovnice $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$ je tvaru

$$y' = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma}{ax + by + c}\right).$$

Zavedeme substituci $z = z(x) = ax + by$, můžeme tedy psát

$$y' = f\left(\frac{\frac{\beta}{b} z + \gamma}{z + c}\right).$$

Derivací substitučního vztahu dostaneme $z' = a + by'$.

Dosazením rovnice $y' = f\left(\dfrac{\dfrac{\beta}{b}z + \gamma}{z + c}\right)$ dostáváme vztah

$\underline{z' = a + by' = a + bf\left(\dfrac{Kz + \gamma}{z + c}\right)}$, kde zápis $K = \dfrac{\beta}{b}$ představuje konstantu.

<u>Tato rovnice je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci z.</u>

1f) Bernoulliova rovnice

Bernoulliovou rovnicí označujeme diferenciální rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$y' + a(x)y = b(x)y^n$, kde *n* je konstanta.

1)Pro *n* = 0 přejde Bernoulliova rovnice na <u>nehomogenní lineární rovnici</u>.

2)Pro *n* = 1 pak přejde na <u>homogenní lineární rovnici</u>.

3)Pro $n \neq 0,1$ Bernoulliovu rovnici lze řešit tak, že ji vydělíme y^n a zavedeme substituci $z = y^{-n+1}$.

Bernoulliova rovnice pak přejde na lineární diferenciální rovnici pro funkci *z(x)*, tedy

$$\frac{dz(x)}{dx} + (-n+1)a(x)z(x) = (-n+1)b(x) .$$

1g) Exaktní rovnice

Diferenciální rovnici

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0 \quad ,$$

kde $p(x,y)$, $q(x,y)$ jsou spojité funkce na oblasti D (včetně prvních derivací), označujeme jako exaktní, jestliže levou stranu lze vyjádřit jako totální diferenciál nějaké funkce $F(x,y)$, která se nazývá kmenová funkce.

V takovém případě platí

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

Srovnáním předchozích vztahů tedy platí

$$p(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$$

$$q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \quad .$$

Ze spojitosti prvých derivací funkcí $p(x,y)$,$q(x,y)$ a jejich vyjádření pomocí smíšených derivací funkce $F(x,y)$ vyplývá rovnost parciálních derivací funkce $F(x,y)$, tzn.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} \end{aligned}\right\} \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$$

Předchozí vztah představuje podmínku exaktnosti dané diferenciální rovnice.

Při řešení exaktní diferenciální rovnice vyjdeme ze vztahů

$$p(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \qquad q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \quad .$$

Integrací těchto vztahů dostaneme

$$F(x,y) = \int p(x,y)dx + f_1(y)$$
$$F(x,y) = \int q(x,y)dy + f_2(x)$$

Funkce $f_1(y)$ představuje integrační konstantu, neboť při integraci přes x můžeme považovat y za konstantní. Podobně je tomu pro $f_2(x)$ ve vztahu k druhé proměnné.

Řešení exaktní diferenciální rovnice získáme z předchozích vztahů tak, že oba integrály sečteme, přičemž členy, které se vyskytují v obou integrálech započítáme pouze jednou. Je-li $F(x,y)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar $F(x,y) = C$, $C \in$ R.

2) Rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci (implicitní rovnice)

Ne vždy se nám podaří rozřešit rovnici F(x,y,y')=0 vzhledem k derivaci y'.

Proto je někdy výhodné rozřešit danou rovnici buď vzhledem k x nebo y.

Tak dostaneme diferenciální rovnice tvaru $x=f(y,y')$ nebo $y=f(x,y')$, jejichž speciálními případy jsou rovnice tvaru $x=f(y')$ a $y=f(y')$.

2a) Rovnice tvaru $x=f(y')$, $y=f(y')$

Zavedeme funkci $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Způsob řešení ukážeme na rovnici $y=f(y')$.

Po dosazení zavedené funkce do rovnice $y=f(y')$ dostaneme

$y = f(p)$ a po jejím derivování dle proměnné x

$$p = f'(p)\frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p}{f'(p)} \quad .$$

Toto je rovnice se separovanými proměnnými. Pokud definiční interval funkce neobsahuje 0, můžeme řešení napsat ve tvaru

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} \quad .$$

Postup řešení rovnice $x=f(y')$je zcela analogický.

2b) Clairautova rovnice

Jedná se o rovnici $y = xy' + g(y')$.

Zavedeme parametr $p = \dfrac{dy}{dx} = y'$.

***Pozn.3*: K řešení rovnice předpokládejme,že funkce g má spojitou derivaci $g'(p)$ na intervalu J. Dále nechť má $g(p)$ v intervalu J druhou derivaci, která je od nuly různá pro všechna p .

Platí: $y(x) = xp + g(p)$, a po derivaci

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx} \; .$$

Dále dosadíme do rovnice $p = \frac{dy}{dx} = y'$ a dostaneme

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = (x + g'(p))\frac{dp}{dx} \; .$$

Musí tedy platit $\frac{dp}{dx} = 0$, nebo $x = -g'(p)$.

- Dle první rovnosti platí: $\frac{dp}{dx} = 0$, takže p = C, C ϵ R a po dosazení do rovnice $y(x) = xp + g(p)$, dostaneme obecné řešení

  $y(x) = Cx + g(C)$, kde C ϵ R , je libovolná konstanta.

- Z druhé rovnosti dostaneme parametrické vyjádření singulárního řešení,

  tzn.platí: $x = -g'(p)$, po dosazení do rovnice $y(x) = xp + g(p)$ dostaneme

  $y = -pg'(p) + g(p)$, kde p je parametr.

Ke Clairautově diferenciální rovnici vedou mnohé úlohy o tečnách a o systémech přímek $y = ax + b$, kde mezi parametry a a b platí nějaký vztah $b = g(a)$.

Protože $y'=a$, dosazením za a a b do rovnice tohoto systému přímek dostaneme diferenciální rovnici

$$y = xy' + g(y') \; ,$$

tj. Clairautovu diferenciální rovnici.

Jejími řešeními jsou přímky daného systému.

2c) Lagrangeova rovnice

Jedná se o rovnici $y = f(y')x + g(y')$.

Řešíme ji zavedením parametru p a metodou derivování. Označme tedy $y' = p$.

Rovnici $y = f(y')x + g(y')$ můžeme přepsat do tvaru $y = f(p)x + g(p)$.

Rovnici $y = f(p)x + g(p)$ derivujeme podle proměnné x:

$$p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = (xf'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx}$$

Řešení rovnice $p - f(p) = (xf'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx}$, za předpokladu:

a) $\boldsymbol{p - f(p) = 0}$

aa) v obecném případě, tedy za předpokladu $p = f(p)$, přechází rovnice

$y = f(p)x + g(p)$ do rovnice

$y = px + g(p)$, což je Clairautova rovnice .

ab) pokud zadáme, že $p \equiv c$, pak

$$y(x) = cx + c_1$$

je singulárním řešením dané rovnice. Konstantu c_1 určíme dosazením do dané rovnice:

$cx + c_1 = xf(c) + g(c)$, po úpravě

$$c_1 = x(f(c) - c) + g(c) \quad ,$$

a poněvadž $f(c) = c$, je $c_1 = g(c)$.

Singulární řešeni Lagrangeovy rovnice tedy je

$$y(x)=cx+g(c) \quad ,$$

kde c je řešením rovnice $c = f(c)$ (je pevným bodem funkce f).

b) $\boldsymbol{p - f(p) \neq 0}$

dostaneme

$$\frac{dx}{dp}=\frac{xf'(p)+g'(p)}{p-f(p)}=\frac{f'(p)}{p-f(p)}x+\frac{g'(p)}{p-f(p)} \quad ,$$

což je lineární diferenciální rovnice. Je-li $x = \Phi(p,c)$ obecné řešení této rovnice, pak

$$x=\Phi(p,c) \quad , \quad y=f(p)\Phi(p,c)+g(p) \ ,$$

je parametrickým vyjádřením obecného řešeni Lagrangeovy rovnice.

Kapitola 3. – Metody,způsoby a příklady řešení diferenciálních rovnic

1) Metoda variace konstant

Použití této metody je popsáno v části Kapitola 2. - Druhy diferenciálních rovnic , v rámci způsobu řešení Lineární nehomogenní diferenciální rovnice .

2) Metoda integračního faktoru

Při řešení exaktní rovnice je vždy nutné ověřit podmínku exaktnosti.Pokud není splněna podmínka exaktnosti diferenciální rovnice, tzn. platí

$$\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x} \quad ,$$

pak daná rovnice není exaktní rovnicí. Může však existovat tzv. integrační (integrující) faktor μ, kterým vynásobíme (neexaktní) rovnici, čímž ji převedeme do exaktního tvaru, tzn. dostaneme exaktní rovnici

$$\mu(x,y)\,p(x,y)dx + \mu(x,y)q(x,y)dy = 0$$

Podmínka exaktnosti má pak tvar

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu q)}{\partial x}$$

Integrační faktor vyhovuje podle těchto podmínek exaktnosti rovnici

$$\mu(x,y)\left[\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} q(x,y) - \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} p(x,y)$$

Nalezení integračního faktoru $\mu(x,y)$ z předchozí rovnice je obvykle velmi těžké.
V mnoha případech je však možné nalézt faktor μ, který závisí pouze na proměnné x nebo y, tzn. $\mu(x)$ nebo $\mu(y)$.

Pokud integrační faktor μ závisí pouze na *x*, pak

$\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ a tedy výraz $\dfrac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x}}{q}$, závisí pouze na *x*.

Integrační faktor $\mu(x)$ pak určíme ze vztahu

$$\ln|\mu| = \int \frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x}}{q} dx \quad .$$

Podobně pokud integrační faktor μ závisí pouze na *y*, tedy $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$,

bude výraz $-\dfrac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x}}{p}$ záviset pouze na *y*.

Integrační faktor $\mu(y)$ pak určíme ze vztahu

$$\ln|\mu| = -\int \frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x}}{p} dx$$

<u>Integračním faktorem vynásobíme zadanou diferenciální rovnici a dále postupujeme jako u exaktní diferenciální rovnice.</u>

3) Příklady - výpočty lineárních diferenciálních rovnic

3.1) Separovatelné rovnice

Př.: Hledáme řešení rovnice: $y'\sqrt{1-x^2}-y^2-1=0$

$\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2}=y^2+1$, po úpravě

$\sqrt{1-x^2}\,dy=(y^2+1)dx$, rovnici podělíme, upravíme a integrujeme :

$$\int\frac{1}{(y^2+1)}dy=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$, a dostaneme výsledek:

$$\operatorname{arctg} y = \arcsin x + C$$,

tj. $\underline{y = \operatorname{tg}(\arcsin x + C)}$, kde C je integrační konstanta.

Př.: Hledáme řešení rovnice: $y'=(2y+1)\operatorname{cotg} x$, splňující počáteční podmínku: $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

Pozn.4: Nejdříve spočítáme obecné řešení, na konci dosadíme počáteční podmínku.

$y'=(2y+1)\operatorname{cotg} x$

$\frac{dy}{dx}=(2y+1)(\cos x/\sin x)$, rovnici dále upravíme na tvar

$$\frac{dy}{(2y+1)}=(\cos x/\sin x)\;dx$$, na tvar s integrály

$\frac{1}{2}\int\frac{2dy}{(2y+1)}=\int\;(\cos x/\sin x)\;dx$, po integraci dostaneme

$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|\sin x| + \ln C$, kde C je konstanta,

$\sqrt{2y+1} = C\sin x$, z tohoto plyne obecné řešení

$\underline{y = \frac{(C\sin x)^2 - 1}{2}}$ → po dosazení poč.podmínky $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ dostaneme

$\frac{1}{2} = \frac{(C\sin\frac{\pi}{4})^2 - 1}{2}$, vypočítáme konst.$C$ → $\underline{C^2 = 4}$,

dosadíme do obecného řešení a dostaneme partikulární řešení:

$$y = \frac{C^2\sin^2 x - 1}{2} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{4\sin^2 x - 1}{2}}}$$

3.2) Lineární homogenní diferenciální rovnice

Př.: Máme najít řešení diferenciální rovnice $y' = -\frac{x}{1+x^2}y$ splňující počáteční podmínku : $y(1) = -3$.

$\frac{1}{y}y' = -\frac{x}{1+x^2}$ **,** po doplněním integrálů a s malou úpravou můžeme psát rovnici

$\int\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}$ → druhý integrál řešíme

pomocí substituce $s = 1+x^2$ → $ds = 2xdx$, doplníme do rovnice a máme tvar

$\int\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{s}ds$, po integraci dostaneme $\ln y = -\frac{1}{2}\ln s + \ln C$.

Po zpětném doplnění vztahu $s = 1+x^2$ obdržíme $\ln y = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C$,

kde C je integrační konstanta.

Z rovnice odstraníme přirozený logaritmus a dostaneme tvar obecného řešení

$$y = C\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} \quad .$$

Doplníme počáteční podmínky , tzn. $-3 = C\frac{1}{\sqrt{(1+1)}} \quad \rightarrow \quad C = -3\sqrt{2}$,

a po dosazení do $y = C\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ obdržíme partikulární řešení $\underline{\underline{y = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}}}}$.

3.3) Řešení nehomogenní rovnice

Pro výpočet řešení nehomogenní rovnice nejdříve vypočítáme <u>**a)** homogenní rovnici</u>, pro výpočet neznámé funkce $C(x)$ (viz. Kapitola 2, část 1a,1b) a obecného řešení budeme poté počítat <u>**b)** nehomogenní rovnici</u>.

Př.: Určeme obecné řešení diferenciální rovnice $y' + \frac{x-3}{x^2-1}y = (x-1)\sin x$.

a) $y' + \frac{x-3}{x^2-1}y = 0$, rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{y} = -\left(\frac{x-3}{x^2-1}\right) = \frac{3-x}{x^2-1}$$, pravou stranu rovnice rozložíme na

parciální zlomky $\rightarrow$

$\rightarrow$ rozklad na parciální zlomky : $\left[\begin{array}{l} \frac{3-x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ A = 1 \\ B = -2 \\ \\ \end{array}\right]$

Po výpočtu členů zlomků A a B v čitateli, rovnici upravíme na vztah:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3-x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$, po doplnění integrálů má tvar

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx$$, po integraci

$$\ln y = \ln \frac{x-1}{(x+1)^2} + \ln C$$, odstraníme přirozený logaritmus a můžeme

psát tvar obecného řešení:

$$\underline{y = \frac{x-1}{(x+1)^2}C}$$

Pro výpočet hodnoty $C(x)$ budeme potřebovat znát hodnotu y' , tedy derivaci rovnice obecného řešení y :

$$y' = \frac{C'(x^2-1) + C(3-x)}{(x+1)^3}$$

b) *Hodnotu $C(x)$ vypočteme z následující nehomogenní rovnice:*

$$y' + \frac{x-3}{x^2-1}y = (x-1)\sin x$$, kam doplníme za y a y' vztahy, vypočítané v části ***a)***

$$\frac{C'(x^2-1) + C(3-x)}{(x+1)^3} + \frac{(x-3)}{x^2-1}\left(\frac{x-1}{(x+1)^2}C\right) = (x-1)\sin x \quad ,$$

po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\underline{C' = (x+1)^2 \sin x} \quad .$$

Hodnotu $C(x)$ vypočítáme po integraci výše vypočítaného vztahu, tedy:

$$C = \int (x+1)^2 \sin x dx = \int x^2 \sin x dx + 2\int x \sin x dx + \int \sin x dx$$

Výpočet dílčích integrálů:

- $\int x^2 \sin x dx \rightarrow$ metoda per partes

substituce $\rightarrow \begin{bmatrix} u = x^2 \rightarrow u' = 2x \\ v' = \sin x \rightarrow v = -\cos x \end{bmatrix}$.

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$$

$\int x \cos x \rightarrow$ per partes

substituce $\rightarrow \begin{bmatrix} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = \cos x \rightarrow v = \sin x \end{bmatrix}$

$$\int x \cos x = x \sin x - \int \sin x dx = \underline{x \sin x + \cos x}$$

$$\underline{\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x}$$

- $2\int x \sin x dx \rightarrow$ metoda per partes

substituce $\rightarrow \begin{bmatrix} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = \sin x \rightarrow v = -\cos x \end{bmatrix}$.

$$2\int x \sin x dx = 2[-x \cos x + \int \cos x dx] = \underline{-2x \cos x + 2\sin x}$$

- $\int \sin x dx \rightarrow$ přímý výpočet

$$\int \sin x dx = \underline{-\cos x}$$

Pro výpočet C jednotlivé vypočtené hodnoty integrálů sečteme, tzn:

$$C = \int (x+1)^2 \sin x dx = \int x^2 \sin x dx + 2\int x \sin x dx + \int \sin x dx$$

$$C = \int (x+1)^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x - 2x \cos x + 2\sin x - \cos x + K$$

$C = \int (x+1)^2 \sin x dx = 2(x+1)\sin x - (x^2+2x-1)\cos x + K$, K = int. konst.

Obecné řešení získáme po dosazení hodnoty C do obecného řešení homogenní rovnice:

$$y = \frac{x-1}{(x+1)^2}\left[2(x+1)\sin x - (x^2+2x-1)\cos x + K\right]$$

Př.: Řešme diferenciální rovnici $y' + 2y = 4x$

a) $y' + 2y = 0$, rovnici upravíme na tvar

$\frac{dy}{dx} = -2y$, integrujeme

$\int \frac{dy}{y} = -\int 2dx$, po integraci a úpravě dostaneme vztah

$\ln y = \ln e^{-2x} + \ln C$, po odstranění přirozeného logaritmu obdržíme

$\underline{y = Ce^{-2x}}$, $C \in R$.

b) *Hodnotu $C(x)$ vypočteme z rovnice* $y = C(x)e^{-2x}$

derivujeme a dostaneme

$$y' = C'e^{-2x} + Ce^{-2x}(-2)$$

y a *y´*doplníme do rovnice *y´+2y=4x* a dostaneme

$C'e^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 4x$, po úpravě

$\underline{C'e^{-2x} = 4x}$

Výpočet *C(x)* provedeme metodou per-partes.

Pozn.5: Obecně pro metodu per-partes platí: $\int uv' = uv - \int u'v$

$$C=\int 4xe^{2x}dx=2xe^{2x}-\int 2e^{2x}dx=\underbrace{2xe^{2x}-e^{2x}+K}_{C}$$

Výše vypočítaný vztah pro $C(x)$ vložíme do rovnice $y=C(x)e^{-2x}$, dostaneme

$$y=\underbrace{(2xe^{2x}-e^{2x}+K)}_{C}e^{-2x}$$ a po úpravě

$$\underline{\underline{y=Ke^{-2x}+2x-1}}$$

Př.: Řešme lineární diferenciální rovnici $y'-\dfrac{y}{1+x}=e^{x}(1+x)$

a) $y'-\dfrac{y}{1+x}=0$, upravíme na tvar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x} \quad\to\quad \frac{1}{y}dy=\frac{1}{1+x}dx$$, integrujeme

$\int\dfrac{1}{y}dy=\int\dfrac{1}{1+x}dx$, po integraci dostaneme vztah

$\ln y=\ln(1+x)+\ln C$, kde po úpravě píšeme

$\underline{y=(1+x)C}$, $C\in R$.

b) *Hodnotu* $C(x)$ *vypočteme z následující nehomogenní rovnice*:

Derivací $y=(1+x)C$ získáme vztah $y'=C'(1+x)+C$

Vztahy doplníme do rovnice $y'-\dfrac{y}{1+x}=e^{x}(1+x)$, tzn.

$C'(1+x)+C-\dfrac{C(1+x)}{1+x}=e^{x}(1+x)$, po jednoduché úpravě dostaneme

$C' = e^x$ $\rightarrow$ integrací získáme vztah

$\underline{C = e^x + K}$, kde K je integrační konstanta.

Obecné řešení získáme po dosazení hodnoty C do obecného řešení homogenní rovnice a obdržíme:

$$\underline{\underline{y = (1+x)(e^x + K)}}$$

3.4) Příklad výpočtu exaktní rovnice

Př.: Určeme řešení diferenciální rovnice

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Řešení:
Ověříme exaktnost , tzn. musí platit

$$\frac{dp}{dy} = 12xy \quad = \quad \frac{dq}{dx} = 12xy$$ $\rightarrow$ jedná se o exaktní rovnici.

Postup výpočtu na základě řešení dvou integrálů:

$$\int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2$$

$$\int (6x^2y + 4y^3)dy = 3x^2y^2 + y^4 \quad ,$$

a nyní napíšeme každý člen, který nám vyšel, pokud se opakuje v obou výsledcích, napíšeme ho jen jednou.

$$F(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 \quad ,$$

a obecné řešení je ve tvaru: $\underline{\underline{x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C}}$

3.5) Příklad výpočtu – Bernoulliova rovnice

Př.: Řešme rovnici $y' + xy = xy^3$.

Vzhledem k tomu, že exponent u y na pravé straně není roven 0 ani 1, řešíme rovnici zavedením substituce $z = y^{-n+1}$,

V případě rovnice $y' + xy = xy^3$ je substituce rovna

$$\frac{1}{y^2} = z \ .$$

Její derivací podle x dostaneme: $-2y^{-3}y' = z'$,

jednoduchou úpravou upravíme na $\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z'$.

Po dosazení substitučních vztahů do rovnice $\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x$, dostaneme separovatelnou diferenciální rovnici

$$-\frac{1}{2}z' + xz = x$$, upravíme na tvar

$$-\frac{1}{2}z' = x - xz \ \rightarrow \ \frac{1}{2}z' = x(z-1) \ \rightarrow \ \frac{dz}{z-1} = 2xdx \ ,$$

po doplnění integrálů vztah přepíšeme do tvaru

$$\int \frac{dz}{z-1} = \int 2xdx$$, po integraci upravíme

$$\ln(z-1) = x^2 + \ln C \ \rightarrow \ \ln(z-1) = \ln e^{x^2} + \ln C$$

$$\ln(z-1) = \ln Ce^{x^2}$$, kde po odstranění přirozeného logaritmu

$$z-1 = Ce^{x^2} \ \rightarrow \ \underline{z = Ce^{x^2} + 1} \ , \ C \in R \ .$$

Vypočítaný vztah $z = Ce^{x^2} + 1$ dosadíme do substituce $\frac{1}{y^2} = z$, a dostaneme

$\frac{1}{y^2} = Ce^{x^2} + 1$ a po úpravě

$$\underline{y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{x^2} + 1}}} \quad .$$

3.6) Příklad výpočtu – rovnice tvaru $x=f(y')$, $y=f(y')$

Př.: Máme řešit diferenciální rovnici , která explicitně neobsahuje proměnnou x.

$$y = y'^2 + y'^3 \quad .$$

Rovnice $y = p^2 + p^3$ je spojitá na intervalu $(-\infty,+\infty)$ a pro $p\neq 0$ a $p\neq -2/3$ má zde spojitou nenulovou derivaci $f'(p) = 2p + 3p^2$.

Lze ji řešit metodou derivace podle x:

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2p+3p^2}{p} \qquad \rightarrow \qquad x = 2p + \frac{3}{2}p^2 + C \ , \quad C \in R$$

Parametrické řešení je ve tvaru:

$$\underline{\underline{y = p^2 + p^3}} \quad , \qquad \underline{\underline{x = 2p + \frac{3}{2}p^2 + C}} \qquad , \text{kde } C \in R$$

3.7) Příklad výpočtu Clairautovy rovnice

Př.: Řešme diferenciální rovnici $y = xy' + 4\sqrt{1+y'^2}$

Zavedeme parametr : $p = y'$, rovnici přepíšeme do tvaru

$y = xp + 4\sqrt{1+p^2}$, dále derivujeme podle x a dostaneme

$\dfrac{dy}{dx} = p + x\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{4p}{\sqrt{1+p^2}}\dfrac{dp}{dx}$, po úpravě a aplikaci $p = y'$, píšeme

$$0 = x\frac{dp}{dx} + \frac{4p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} = \left(x + \frac{4p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}$$

Řešení: **a)** $y = xc + 4\sqrt{1+c^2}$, neboť z první podmínky, tzn. $0 = \dfrac{dp}{dx}$, plyne volba libovolného $p = c$, $c \in$ R .

b) toto řešení vychází ze druhé podmínky, tzn. $0 = x + \dfrac{4p}{\sqrt{1+p^2}}$,

které upravíme na tvar $x = -\dfrac{4p}{\sqrt{1+p^2}}$.

Po dosazení do

$y = xp + 4\sqrt{1+p^2}$, dostaneme vztah

$$y = -\frac{4p}{\sqrt{1+p^2}}p + 4\sqrt{1+p^2} = \frac{4}{\sqrt{1+p^2}} .$$

Vztahy:

$$x = -\frac{4p}{\sqrt{1+p^2}} \quad , \quad y = \frac{4}{\sqrt{1+p^2}}$$

jsou parametrickým vyjádřením řešení **b)**.

Pokud vyloučíme parametr p, tzn. :

rovnici $y = \dfrac{4}{\sqrt{1+p^2}}$, upravíme na tvar $p = \sqrt{\dfrac{16-y^2}{y^2}}$

a doplníme do vztahu $x = -\dfrac{4p}{\sqrt{1+p^2}}$, dostaneme tvar řešení

$$x^2 + y^2 = 16$$

Kapitola 4. Autonomní rovnice a soustavy

Rovnici nebo soustavu rovnic nazveme autonomní, jestliže její pravá strana explicitně nezávisí na nezávislé proměnné. Autonomní rovnici prvního řádu tak můžeme zapsat ve tvaru

$$y' = f(y) \,,$$

autonomní lineární rovnice s konst. koeficienty má tvar $y' + ay = b$, kde $a, b \in$ R.

Autonomní soustavu rovnic lze tedy zapsat $y' = f(y)$, lineární soustava $y' +\ \ y =$ obsahuje matici konstantních koeficientů $\in \mathrm{R}^{n \times n}$ i konstantní vektor .

Ve fyzikálních aplikacích obvykle nezávisle proměnnou x je čas. Pojem autonomní rovnice (systém) je proto přirozený – jde o jevy, při kterých se s časem x nemění podmínky jevu, které tvoří data úlohy.

Pozn.6**:** Definujme pojem trajektorie řešení soustavy rovnic. Zatímco graf řešení **y :** $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{R}^n$ je křivka $\{(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \mid x \in \mathrm{I}\}$ v prostoru R^{n+1}, trajektorie je průmět řešení $y(x)$ do prostoru hodnot řešení, tzv. ***fázového prostoru***, tj. křivka $\{(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \in \mathrm{R}_n \mid x \in \mathrm{I}\}$ v R^n. Přitom šipka označující orientaci křivek popisuje orientaci pohybu hodnoty řešení po trajektorii při rostoucím času x.

Jestliže $y(x)$ je řešením autonomní rovnice (soustavy) na intervalu (a, b), potom funkce $y_c(x) = y(x - c)$ je také řešením, které je definované na intervalu
$(a + c, b + c)$. Grafy obou řešení se liší o posunutí ve směru osy x, obě řešení mají proto identické trajektorie.

4.1) Autonomní rovnice prvního řádu

Autonomní rovnici prvního řádu zapisujeme ve tvaru $y' = f(y)$. Předpokládáme, že funkce $f(y)$ je definovaná a spojitá na množině $G \subset$ R.

Trajektorie konstantního řešení je jednobodová množina – degenerovaná úsečka, v tomto případě mluvíme o singulárním řešení a singulární trajektorii.
Pro tento případ je určení trajektorií a tzv. fázového portrétu řešení jednoduché.

Singulární trajektorie jsou kořeny rovnice $f(y) = 0$. Otevřené úsečky množiny bodů, v kterých je hodnota $f(y)$ kladná, tvoří trajektorie rostoucích řešení; úsečky, kde $f(y)$ je záporná, tvoří trajektorie klesajících řešení.
Pokud funkce $f(y)$ je navíc lipschitzovská, řešení je jednoznačné, a proto trajektorie úplných řešení jsou buďto disjunktní nebo totožné.

***Pozn.7*:** Lipschitzovsky spojité zobrazení, nebo také lipschitzovské zobrazení, je zobecněním spojitého zobrazení na metrických prostorech. Jméno je podle významného německého matematika Rudolfa Lipschitze (1832-1903). Funkce je lipschitzovsky spojitá, nebo lipschitzovská, pokud existuje konstanta $K > 0$ tak, že pro každé x,y platí

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le K \left| x - y \right|$$

Podívejme se , jak bude vypadat trajektorie lineární autonomní rovnice $y' + ay = b$ ve speciálních případech, kdy:

a) *$a \neq 0$, $b=0$*

Rovnici $y' + ay = b$ přepíšeme do tvaru $y' + ay = 0$ a upravíme na tvar

$\frac{y'}{y} = -a$, integrujeme a dostaneme vztah

$\ln y = -ax + \ln C$, po úpravě

$y = Ce^{-ax}$, $C \in R$.

Rozlišíme dva případy:

aa) $a>0$ - singulární trajektorií je polopřímka na intervalu $(0, \infty)$, orientovaná v záporném směru souřadnicové osy y.

ab) $a<0$ - singulární trajektorií je polopřímka na intervalu $(0, \infty)$, orientovaná v kladném směru souřadnicové osy y.

b) <u>$a=0$, $b\neq 0$</u>

Rovnici $y'+ay=b$ přepíšeme do tvaru $y'=b$, integrujeme a dostaneme vztah

$y=bx+C$, $C\in R$.

Rozlišíme dva případy:

ba) $b>0$ - trajektorií je přímka na intervalu $(-\infty, \infty)$, orientovaná v kladném směru souřadnicové osy y.

bb) $b<0$ - trajektorií je přímka na intervalu $(-\infty, \infty)$, orientovaná v záporném směru souřadnicové osy y.

c) <u>$a=0$, $b=0$</u>

Rovnici $y'+ay=b$ přepíšeme do tvaru $y'=0$, integrujeme a dostaneme vztah

$y=konst.$, tzn. všechna řešení jsou konstantní a body $y \in R$ tvoří singulární trajektorie.

4.2) Autonomní soustava rovnic prvního řádu

Počáteční úlohu pro autonomní soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu zapisujeme ve tvaru

$$y' = f(y)\ , \qquad\qquad y(x_0) = y_0\ ,$$

kde vektorová funkce $f : G \to \mathrm{R}^n$ je definovaná a spojitá v oblasti $G \subset \mathrm{R}^n$ a $y_0 \in \mathrm{R}^n$.

Ke spojitosti vektorové funkce f, která zaručuje existenci řešení počáteční úlohy pro libovolné y_0 přidáme podmínku lipschitzovskosti funkce f, abychom zaručili jednoznačnost řešení.

Definiční obor G funkce $f(y)$ (na kterém je f spojitá a lipschitzovská) v prostoru hodnot (fázovém prostoru) se tak rozpadá na:

- singulární bod (kritický bod, stacionární bod, rovnovážný bod) – řešení $y(x)$ je konstantní, řešením soustavy rovnic $f(y) = 0$ je jednobodová množina $\{y_0\}$.
- cyklus (uzavřená křivka) – řešení $y(x)$ je periodické.
- otevřená neprotínající se křivka – trajektorie řešení představuje prosté zobrazení otevřeného intervalu $I = (a, b)$ (včetně případů $a = -\infty$ nebo $b = \infty$) do fázového prostoru.

<u>Typy singulárních bodů v rovině</u>

Budeme se zabývat autonomní soustavou dvou rovnic

$$y' = f(y,z)\ , \qquad z' = g(y,z) \quad .$$

Trajektorie řešení soustavy jsou křivky $\{ (y(x), z(x)) \in \mathrm{R}^2 \mid x \in I \}$ ve dvourozměrném fázovém prostoru – rovině.

Mohu zopakovat,že trajektorie jsou tří typů:

1) body – singulární body
2) uzavřené křivky – cykly
3) neprotínající se křivky

Podíváme se, jak vypadají tyto trajektorie lokálně. Bod (y_0, z_0), který není singulární, leží proto na orientované křivce (oblouku, úsečce). V jeho okolí trajektorie představují stejně orientované křivky.
Jiná situace je v okolí singulárních bodů. Tyto singulární body mohou tvořit souvislé množiny, např. trajektorie soustavy y´ = 0, z´ = 0 jsou singulární body, které vyplňují celou rovinu. Budeme se zabývat izolovanými singulárními body, tj. singulárními body, které ve svém dostatečně malém okolí nemají žádné jiné singulární body. Rozlišíme několik typů těchto singulárních bodů.

Izolovaný singulární bod (y_0, z_0) nazveme

1) **střed** – pokud každým bodem ryzího okolí (y_0, z_0) prochází trajektorie typu uzavřené křivky – cyklus.
2) **uzel** – pokud každým bodem ryzího okolí (y_0, z_0) prochází trajektorie ($y(x)$, $z(x)$), $x \in (-\infty,\infty)$ typu otevřené křivky, jejíž konec (limita pro $x \to \infty$ nebo $x \to -\infty$) je singulární bod (y_0, z_0), přičemž směrnice tečny trajektorie ($y´(x)$, $z´(x)$) má konečnou limitu.Pokud se body ($y(x)$, $z(x)$) blíží k bodu (y_0 , z_0) při $x \to \infty$, mluvíme o atraktivním (přitahujícím, přitažlivém) uzlu, pokud naopak body ($y(x)$, $z(x)$) se blíží k bodu (y_0, z_0) při $x \to -\infty$, tj. při $x \to \infty$ se vzdalují, mluvíme o repulzivním (odpuzujícím, odpudivém) uzlu.
3) **ohnisko** – každým bodem ryzího okolí (y_0, z_0) prochází trajektorie typu otevřené křivky, jejíž jeden konec (limita pro $x \to \infty$ nebo $x \to -\infty$) je singulární bod (y_0, z_0), přičemž směrnice tečny řešení ($y´(x)$, $z´(x)$) nemá vlastní limitu (orientovaný úhel tečného vektoru neomezeně roste, případně neomezeně klesá).Pokud se body ($y(x)$, $z(x)$) blíží k bodu (y_0, z_0) při $x \to \infty$, mluvíme o atraktivním (přitahujícím, přitažlivém) ohnisku. Pokud se body ($y(x)$, $z(x)$) blíží k bodu (y_0, z_0) při $x \to -\infty$ (tj. při $x \to \infty$ se řešení vzdaluje od singularity), mluvíme o repulzivním (odpuzujícím, odpudivém) ohnisku.

4) **sedlo** – pokud v ryzím okolí bodů (y_0, z_0) existují jak trajektorie, které se při rostoucím *x* blíží k (y_0, z_0), tak trajektorie se při rostoucím *x* vzdalují od (y_0, z_0).

Typy singulárních bodů lineární soustavy rovnic v rovině

V předchozím odstavci jsme studovali singulární bod (y_0, z_0) v obecné poloze. Posunutím, tj. transformací $(y, z) \rightarrow (y^*, z^*) = (y - y_0, z - z_0)$, lze singulární bod (y_0, z_0) převést do počátku (0, 0) a studovat chování řešení v okolí singulárního bodu (0, 0). Dále linearizací funkcí $f(y, z)$ a $g(y, z)$ v okolí počátku (0, 0)

$$f(y, z) \approx a\, y + b\, z\,, \qquad g(y, z) \approx c\, y + d\, z$$

pomocí konstant

$$a = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \qquad b = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0) \qquad c = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \qquad d = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0),$$

lze typ singulárního bodu (y_0, z_0) nelineární soustavy studovat pomocí přidružené soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} \qquad .$$

Napišme charakteristickou rovnici této soustavy

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - (a + d)\,\lambda + (ad - cb) = 0.$$

Snadno odvodíme tvrzení o typu příslušného singulárního bodu.

Pokud uvažujme soustavu lineárních rovnic a její odpovídající charakteristickou rovnici

$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb) = 0$ s kořeny λ_1, λ_2, pak:

- pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, <u>singulární bod je odpuzující uzel.</u>
- pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, <u>singulární bod je přitažlivý uzel.</u>
- pokud oba kořeny jsou reálné, jeden kladný a druhý záporný, tj. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, <u>singulární bod je sedlo.</u>
- pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \omega \pm i\,v$, ($\omega > 0$, $v \neq 0$), <u>singulární bod je odpuzující ohnisko.</u>
- pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \omega \pm i\,v$, ($\omega < 0$, $v \neq 0$), <u>singulární bod je přitahující ohnisko.</u>
- pokud kořeny jsou komplexně sdružené s nulovou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \omega \pm i\,v$, ($\omega = 0$, $v \neq 0$), <u>singulární bod je střed.</u>

Kapitola 5. Příklady využití diferenciálních rovnic v praxi

Abychom mohli zkoumat reálné situace, potřebujeme je nejdříve popsat pomocí určitého matematického modelu. Ten se snažíme zkonstruovat tak, aby jeho chování co nejpřesněji odpovídalo vlastnostem zkoumaného objektu. Model tedy lze chápat jako standard idealizovaného chování, na jehož pozadí můžeme posuzovat realitu. Následující matematická analýza vede k získání teoretických důsledků. Nyní je třeba ověřit, zda jsou v souladu s praktickými poznatky.

Je nutné zdůraznit, že matematický model je pouze přibližným popisem reálné skutečnosti (vybíráme pouze některé vlastnosti zkoumaného objektu, nedokonalá znalost zákonitostí popisujících chování reálného světa, nepřesné měření vstupních údajů, různé aproximace zjednodušující skutečnost).

Dalším problémem je, že soustavy diferenciálních rovnic popisujících zkoumanou skutečnost mohou být velmi složité, a proto se při rozboru modelu využívá jiných metod než jejich přímé řešení.

5.1) Růstové modely

Označme $x(t)$ nějakou číselnou "míru" velikosti jisté populace v čase t. Populací zde rozumíme nejen společenstvo živých organismů, například lidí, ale také souhrn atomů radioaktivní látky apod. Příkladem vhodné míry velikosti populace může být počet milionů lidí žijících na Zemi nebo samotný počet přítomných atomů.
Předpokládejme, že $b(t,x)$ vyjadřuje míru přidávání jednotek (jedinců) k populaci za jednotku času na každou jednotku populace v čase t při velikosti populace x. Podobně nechť $d(t,x)$ značí míru, ve které jednotky populace umírají nebo jsou z ní odstraňovány. Budeme předpokládat, že $b(t,x)$, $d(t,x)$ jsou spojité nezáporné funkce a že velikost populace $x = x(t)$ je diferencovatelná funkce. Uvažujme nyní změnu velikosti populace na časovém intervalu $< t, t + \Delta t >$, kde Δt je malé.

Vzhledem k výše uvedeným podmínkám lze předpokládat, že

$$x(t+\Delta t)-x(t)=b(t,x(t))x(t)\Delta t-d(t,x(t))x(t)\Delta t \quad . \tag{5.1.1}$$

Výše uvedený vztah podělíme Δt a dostáváme

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=b(t,x(t))x(t)-d(t,x(t))x(t)=x(t)[b(t,x(t))-d(t,x(t))] \quad .$$

Limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ získáme diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{dx}{dt}=\mu(t,x)x$$

kde funkce $\mu(t,x) = b(t,x) - d(t,x)$ se nazývá specifická míra růstu.

Po stanovení předpokladů kladených na funkci $\mu(t,x)$ se rovnice $\frac{dx}{dt}=\mu(t,x)x$ stává matematickým modelem.

5.2) Model radioaktivního rozpadu

Nyní si představme model, kde za populaci považujeme radioaktivní atomy v nějakém izotopu chemického prvku. Víme, že tyto atomy ve svém jádře obsahují daný počet neutronů *(u různých izotopů daného prvku zůstává počet protonů v jádře stejný, mění se jen počet neutronů).* Běžná míra velikosti této populace v čase *t* je tedy dána počtem přítomných atomů. Označme ho *N(t)*. Radioaktivita je přirozený nebo uměle vyvolaný samovolný rozpad atomového jádra doprovázený vysíláním radioaktivního záření. Radioaktivní rozpad poskytl první důkaz toho, že zákony řídící subatomový svět mají statistický charakter.

Vezměme například jako vzorek 1 mg kovového uranu. Ten obsahuje 2,5 . 10^{18} atomů ^{238}U s velmi dlouhou dobou života. Jádra těchto atomů existovala od doby, kdy vznikla – dlouho před utvářením naší sluneční soustavy.

Během každé sekundy se v našem vzorku rozpadne pouhých 12 jader. Při rozpadu emituje jádro α − částice a přeměňuje se na ^{234}Th.

Ernest Rutheford (novozélandský fyzik, 1871-1937) dokázal, že rychlost tohoto rozpadu je přímo úměrná počtu atomů příslušného prvku. V rovnici **(5.1.1)** tedy máme $x(t) = N(t)$, $b(t,x) = 0$ a $d(t,x) = \lambda$, kde $\lambda > 0$ je tzv. přeměnová konstanta prvku.

Pokud tedy rovnici

$$x(t+\Delta t) - x(t) = b(t, x(t))x(t)\Delta t - d(t, x(t))x(t)\Delta t$$

upravíme na tvar

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = b(t, x(t))x(t) - d(t, x(t))x(t) = x(t)[b(t, x(t)) - d(t, x(t))] \ ,$$

zaměníme a doplníme výše zmíněné indexy, dostaneme

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(0-\lambda)$$ a po úpravě můžeme napsat

$$\underline{\frac{dN}{dt} = -\lambda N} \quad .$$

Statistickou podstatu procesu rozpadu můžeme tedy vyjádřit tvrzením, že pro vzorek s N radioaktivními jádry je rychlost rozpadu $\frac{dN}{dt}$ a je úměrná λ, tzn.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Dostáváme tak diferenciální rovnici se separovanými proměnnými:

$$N' = -\lambda N \,,$$

která má řešení $\underline{N(t) = N(0)e^{-\lambda t}}$,

kde $N(0)$ je počet radioaktivních jader ve vzorku v čase $t = 0$ a $N(t)$ je počet zbylých jader v libovolném následujícím okamžiku t.

Nyní se budeme věnovat výpočtu tzv.poločasu rozpadu.

Pozn.8: Poločas rozpadu $T_{1/2}$ je doba, za níž se původní počet radioaktivních jader daného izotopu sníží na polovinu.

Při výpočtu budeme vycházet z rovnice $N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}$,

kterou upravíme na tvar $\dfrac{N(t)}{N(0)} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

S pomocí znění definice poločasu rozpadu (viz. ***Pozn.8:***), kdy platí, že $\dfrac{N(t)}{N(0)} = \dfrac{1}{2}$,

můžeme rovnici upravit na tvar $\dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, po doplnění přirozeného logaritmu

dostaneme $\ln\dfrac{1}{2} = -\lambda t \ln \mathrm{e} \;= -\lambda t$.

Čas t je poločasem rozpadu $T_{1/2}$, tzn. $\ln\dfrac{1}{2} = -\lambda T_{1/2}$ a po úpravě obdržíme vztah pro

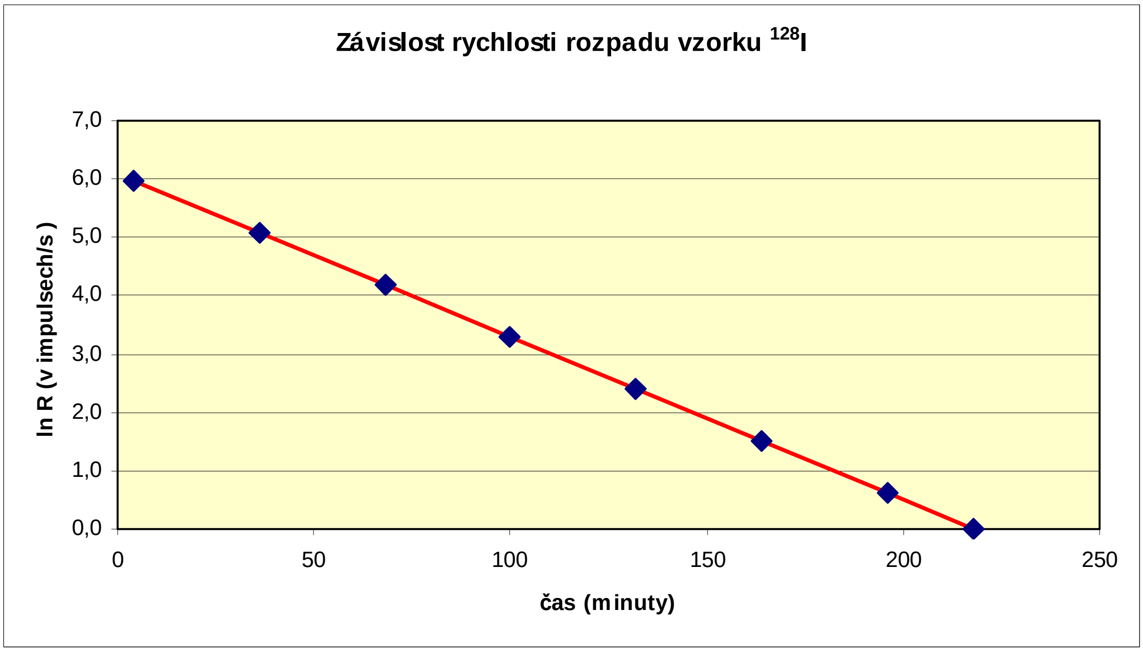
výpočet poločasu rozpadu: $\underline{T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}}$ [s] .

Pozn.9: Přeměnovou konstantu λ buď známe, nebo ji můžeme poměrně jednoduše vypočítat. Má charakteristickou hodnotu pro každý radionuklid. Její jednotka je [s^{-1}].

Použití vztahu pro výpočet poločasu rozpadu si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 5.2.1.
Radioaktivní rozpad vzorku jódu ^{128}I. Tento radionuklid se velice často užívá v lékařství pro měření rychlosti usazování jódu ve štítné žláze. Nás zajímá, za jak dlouho poklesne počet původních jader na poloviční hodnotu – tedy zajímá nás poločas rozpadu.
Většina známých radionuklidů je radioaktivní, rozpadají se samovolně rychlostí $R = \dfrac{dN}{dt}$, která je přímo úměrná počtu radioaktivních atomů N .

Pozn.9: Rychlost rozpadu R je měřena počtem impulsů , které příslušný nuklid vydává, za 1 sekundu.



Rovnici $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ (viz.5.2 Model radioaktivního rozpadu), můžeme upravit , po dosazení rovnice rychlosti rozpadu , na tvar

$$R(t) = R(0)e^{-\lambda t} \quad .$$

Doplníme do rovnice přirozený logaritmus a obdržíme vztah

$$\ln R(t) = \ln R(0) - \lambda t \quad .$$

Ve výše vyobrazeném grafu je vynesena závislost $\ln R$ na t , výsledkem je přímka se směrnicí $-\lambda$.

Vztah $\ln R(t) = \ln R(0) - \lambda t$ upravíme a s využitím hodnot uvedených ve výše vyobrazeném grafu rychlosti rozpadu , vypočítáme hodnotu λ

$$\lambda = \frac{\ln R(0) - \ln R(t)}{t} = \frac{6-0}{13080} = 4{,}587 * 10^{-4} \ [s^{-1}]$$

(do rovnice je dosazen čas v sekundách, tzn. 218 min =13080 s).

Poločas rozpadu vypočítáme snadno dosazením do rovnice

$$T_{1/2} = \ln 2 \frac{1}{\lambda} = \frac{\ln 2}{4{,}587 * 10^{-4}} = 1511 \quad [s]$$

$$T_{1/2} = \ln 2 \frac{1}{\lambda} = 25{,}18 \quad [min]$$

Můžeme tedy říci, že aktivita daného vzorku ^{128}I poklesne na poloviční hodnotu počátečního stavu za cca 25 min.

Příklad 5.2.2.

Měření vzorku horniny z Měsíce na hmotnostním spektrometru ukázala, že poměr počtu přítomných (stabilních) atomů argonu ^{40}Ar k počtu (radioaktivních) atomů draslíku ^{40}K je 10,3.

Předpokládejme, že všechny argonové atomy vznikly rozpadem draslíku s poločasem rozpadu $T_{1/2}$ = 1,25.10^9 roku. Jaké je stáří horniny?

Tato otázka je jistě velmi zajímavá, neboť z výsledku lze s velkou pravděpodobností zjistit stáří sluneční soustavy.

Řešení: Jestliže hornina obsahovala $N_K(0)$ atomů draslíku v čase, kdy se tvořila tuhnutím z roztavené látky, bude v čase analýzy počet draslíkových atomů dán rovnicí

$$N_K = N_K(0)\, e^{-\lambda t}$$

kde t je stáří horniny. Každý rozpadlý atom draslíku vytvořil atom argonu.

V čase analýzy je tedy počet argonových atomů

$$N_{Ar} = N_K(0) - N_K \quad .$$

Hodnotu $N_K(0)$ nemůžeme měřit, vyloučíme ji proto z výše uvedených rovnic .

Pro výpočet t vycházíme tedy z těchto rovnic:

$N_K / e^{-\lambda t} = N_K(0)$ a $N_{Ar} + N_K = N_K(0)$, po vyloučení $N_K(0)$ dostaneme

$N_K / e^{-\lambda t} = N_{Ar} + N_K$, upravíme na tvar

$$N_K = (N_{Ar} + N_K)\, e^{-\lambda t} \;\rightarrow\; N_K\, e^{\lambda t} = N_{Ar} + N_K \;\rightarrow\; e^{\lambda t} = (N_{Ar} / N_K) + 1 .$$

Doplníme přirozený logaritmus a po úpravě můžeme psát rovnici

$$\lambda t = \ln [\, 1 + (N_{Ar} / N_{\mathrm{K}})\,]$$

ve které je možné poměr N_{Ar} / N_{K} měřit. Vyjádříme-li t z této rovnice a použijeme-li rovnici vzájemného vztahu poločasu rozpadu a přeměnové konstanty λ

$$T_{1/2} = \ln 2 \frac{1}{\lambda} \quad ,$$

pro nahrazení λ, dostaneme

$$t = [T_{1/2} \ln(1 + N_{Ar}/N_K)]/\ln 2 = \{(1{,}25.10^9)[\ln(1 + 10{,}3)]\}/\ln 2$$

$$\underline{t = 4{,}037.10^9 \text{ roků}}$$

Podle výsledku můžeme říci,že sluneční soustava je stará asi 4 miliardy let.

Pozn.10: U měsíčních nebo pozemských vzorků bylo zjištěno i menší stáří, ale nikdy podstatně větší.

Závěr

Téma diferenciálních rovnic 1. řádu jsem zvolil proto, abych si vytvořil přehled o základních typech diferenciálních rovnic a způsobech jejich řešení, ale také, abych se dozvěděl něco bližšího o jejich využití v praxi.

Rozsah práce a složitost řešených příkladů v rámci příslušného typu diferenciální rovnice jsem volil tak, aby co nejvhodněji ilustrovaly zmiňované metody řešení. Proto jsem se zaměřil na příklady z oblasti přírodních věd, konkrétně na modely radioaktivního rozpadu a určování stáří hornin. Domnívám se, že tyto příklady jsou vhodným modelem k vysvětlení způsobu, jakým lze převádět reálné situace do matematického jazyka a jak dojít prostřednictvím řešení daných diferenciálních rovnic k velmi zajímavým závěrům.

Tyto modely jsou však jen nepatrným zlomkem skutečných možností využití matematických modelů popisovaných pomocí diferenciálních rovnic. Diferenciální rovnice totiž nacházejí své uplatnění v mnoha oblastech každodenního života, ať už se jedná například o medicínu, ekologii, nebo vědecko-technický rozvoj.

Použitá literatura:

[1] Kurzweil J. , Státní pedagogické nakladatelství ,*Obyčejné diferenciální rovnice*, 1978

[2] Kalas J., Ráb M., Masarykova univerzita Brno, *Obyčejné diferenciální rovnice*, 2001

[3] Ráb M., Masarykova univerzita Brno , *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, 2004

[4] *Wikipedie, Otevřená encyklopedie http://wikipedia.org/wiki/Obyčejné diferenciální rovnice/*

[5] Janout Z., Kubišta J. , ČVUT, *Úlohy z jaderné a subjaderné fyziky*, 1997

[6] Kaňka M., Henzler J., Vysoká škola Ekonomická v Praze, *Matematika II*, 1995

[7] Šiňajová E., Vondráčková J., ČVUT, *Cvičení z matematické analýzy*, 1996