Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

VYUŽITÍ PROGRAMU MAPLE PŘI STUDIU MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce
RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Vypracovala
Tereza Ochozková

duben 2010

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích 2010

Abstrakt

Tématem této bakalářské práce je využití programu Maple při studiu matematiky. Zaměřuje se především na oblast diferenciálního a integrálního počtu. Jednotlivé kapitoly na sebe postupně navazují tak, aby se čtenář seznámil se základními operacemi programu Maple až po zmíněnou oblast diferenciálního a integrálního počtu.

V závěru práce je provedeno celkové zhodnocení jak nám program Maple může pomoci při studiu matematiky.

Abstract

The theme of this bachelor work is a utilization of the program Maple for studying mathematics. It focuses on the sphere of the differential and integral calculus. All chapters concur step by step to provide information from basic operations up to the already mentioned sphere of the differential and integral calculus.

In the conclusion of the work there is accomplished the general evaluation how the program Maple can help with the study of mathematics.

OBSAH

1 Úvod

Do rukou se Vám dostala bakalářská práce na téma ,,Využití programu Maple při studiu matematiky“, která se zaměřuje především na problematiku diferenciálního a integrálního počtu. Touto prací bych chtěla ulehčit práci studentům středních i vysokých škol, kteří se zabývají studiem matematiky, ale i ostatním zájemcům o matematiku. Především by tato práce měla studentům ušetřit čas při počítání příkladů, aby si mohli kontrolovat výsledky vypracovaných úkolů pomocí programu Maple.

Program Maple je již využíván na mnoha vysokých školách v České republice. To se samozřejmě projevuje při přípravě výuky a cvičení, ale také u ročníkových prací a u zkoušek.

Tím, že umí nalézt extrémy a limity funkce jedné a více proměnných, dále symbolicky derivovat, integrovat funkce, řešit lineární a nelineární rovnice, soustavy nerovnic, obyčejné a parciální diferenciální rovnice a jejich soustavy. Program můžeme uplatnit pro testování a kontrolu znalostí studentů i z jiných vědních oborů (např. fyziky nebo chemie). Na první pohled můžeme v programu Maple nalézt řešení, které se nám nebude jevit správným. Pomocí různých příkazů umí Maple zjednodušit a upravit výrazy a tak si správnost řešení lehce ověříme.

Napadá mě otázka, jak může Maple změnit a především zkvalitnit způsob výuky matematiky? Na tuto otázku lze najít mnoho článků s celou řadou informací a to především na internetu. Studenti místo zdlouhavého provádění symbolických výpočtů a ruční manipulací s výrazy mají více času věnovat se výběru vhodné metody řešení a interpretaci výsledku.

Byla bych ráda, kdyby tato práce sloužila jako příručka programu Maple pro úplné začátečníky, kteří se chtějí s programem Maple seznámit a využívat jej.

Práce je členěna do šesti hlavních kapitol a dalších podkapitol. Přímo do textu jsou plynule zařazeny příklady řešené v Maple a barevně odlišeny. Příkazy jsou značeny červenou barvou a výsledky, které Maple vypíše, jsou modrou barvou. Na konci každé kapitoly jsou uvedeny řešené příklady v programu Maple. Příklady, které jsou zde použity jsem čerpala z literatury [1], [3], [4], [5], [6], [7], [10].

2 Program Maple

2.1 Základní popis programu

Maple je počítačové prostředí, které bylo vyvinuto na univerzitě Waterloo v Kanadě, pro snazší používání matematiky. A proč zrovna název Maple? Doslovný překlad Maple je javor, což je kanadský národní strom. Javor je tedy spojen se zemí původu, ale jak je vidět nemá javor s matematikou nic společného. Jiné odvození jména programu je uvedeno v publikaci [2], a to z anglického spojení **Ma**thematics **ple**asure (matematika potěšením). Maple je program pro řešení matematických problémů. Maple umožňuje provádět jak symbolické a numerické výpočty, tak vytvářet grafy funkcí, programovat vlastní funkce či procedury, ukládat data v několika formátech a dokonce provádět export do programovacích jazyků (např. *C*, *Fortran 77*, …). Funkce v Maple pokrývají širokou oblast matematiky od základů lineární algebry a matematické analýzy, diferenciálního a integrálního počtu, přes diferenciální rovnice, geometrii až k logice. Systém je primárně určen pro symbolické operace v matematice, numerické výpočty a zobrazování grafů.

Tuto práci jsem zpracovávala v programu Maple 9.5 v Classic Worksheet. Kdo má zájem dozvědět se více informací o programu Maple, je vytvořen Český klub uživatelů Maple na internetových stránkách http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple . Z těchto stránek jsem také převzala následující informace: *Maple 9.5 pokračuje v dlouhé tradici společného vývoje algoritmů skupinami expertů nejprestižnějších světových institucích. Obsahuje 3000 matematických funkcí pokrývajících mnoho oblastí symbolických a numerických výpočtů.*

- *Větší matematická síla (např. vylepšené algoritmy v oblastech numerických výpočtů a diferenciálních rovnic)*
- *Vylepšené uživatelské rozhraní, palety pro jednodušší vkládání výrazů a funkcí.*
- *Převod Maple aplikací do jiných formátů - např. Microsoft Excel, Matlab, C, Fortran*
- *Export worksheetů do HTML, LaTeXu, RTF*

- *Export grafů do různých formátů*
- *Podpora XML a HTML (publikování výsledků ve formě XML dat nebo WWW stránek) a podpora MathML 2.0*
- *TCP/IP spojení (přístup k datům na Internetu nebo vytvořených systémem Maple běžícím na jiném stroji).*
- *Matematický technický slovník obsahující okolo 5000 pojmů.*
- *Balík Student pro intuitivní výuku základů matematiky (Calculus1, Precalculus) s využitím grafických Mapletů*
- *Podpora e-learningu v aplikacích MapleNet a Maple T.A.*

2.2 Důležitá pravidla

- protože je Maple kanadský program, je vhodné používat anglickou klávesnici
- používání desetinné tečky místo desetinné čárky
- Maple je citlivý na malá a velká písmena
- každý příkaz ukončit středníkem **;**
- za znakem křížek **#** můžete psát poznámky, které Maple přeskakuje

3 Matematické příkazy v programu Maple

3.1 Základní matematické operace

Po spuštění programu vypíše Maple znak > (tzv. prompt) a hned za ním umístí kurzor. Za tímto znakem je prostor pro psaní Mapleovských příkazů, které musí být vždy ukončeny středníkem **;** , aby se operace vypsala na obrazovku. Po zadání příkazu stiskněte klávesu Enter a Maple vypíše výsledek. Příkaz je také možno ukončit dvojtečkou **:** , ale operace se na monitoru nezobrazí . Program barevně rozlišuje řádky, příkazy jsou červenou a výsledky modrou barvou.

Ukažme si rozdíl mezi použitím středníku a dvojtečky na příkladu:

```
> 24-2*3;
```

$$18$$

```
> 24-2*3:
>
```

Výsledek předchozího řádku zjistíme pomocí symbolu **%**. Pojďte se podívat jak to funguje:

```
> 12+8:
> %-3;
```

$$17$$

Je vidět, že výsledek po dvojtečce se nevypíše, ale Maple si tento výsledek pamatuje. V další operaci je nahrazen **%** .

Aritmetické operace zapíšeme v Maple obvyklým způsobem jako v matematice. Přehledně je to vidět v následující tabulce:

Operace	Symbol	Příklad
sčítání	+	**> 3+1;** 4
odčítání	-	**> 12-3;** 9

násobení	*	`> 3*5;` 15
dělení	/	`> 15/3;` 5
celočíselné dělení	iquo(...)	`> iquo(12,5);` 2
zbytek po cel.dělení	irem(...)	`> irem(10,6);` 4
mocnina	^	`> x^2+4^2;` $x^2 + 16$
druhá odmocnina	sqrt(...)	`> sqrt(36);` 6
absolutní hodnota	abs(...)	`> abs(-3);` 3
faktoriál	!	`> 6!;` 720
čitatel zlomku	numer(...)	`> numer(2/3);` 2
jmenovatel zlomku	denom(...)	`> denom(2/3);` 3

Tabulka 1.1: Aritmetické operace v Maple

V programu si musíme dávat pozor na psaní znaménka „krát“. V případech, kdy běžně znaménko „krát“ vynecháváme jako např.: 5*x*, 3sin(*x*) apod., Maple tyto příklady bez znaménka násobení nepřečte a vypíše chybu, že v příkazu chybí operátor. A proto je třeba psát **5*x**, **3*sin(x)** atd.. Názorně je to vidět na příkladu:

```
> 2x+3y+x+2y;
Error, missing operator or `;`
> 2*x+3*y+x+2*y;
```

$$3\,x + 5\,y$$

Program Maple má svá pravidla na pořadí prováděných matematických operací. Provádí základní matematické operace v tomto pořadí: mocniny, násobení a dělení, sčítání a odčítání. Jak je uvedeno v následujícím příkladě:

```
> 2+5*4-6/7;
```

$$\frac{148}{7}$$

V tabulce 1.1 je uveden příkaz pouze pro výpočet druhé odmocniny. V případě, že potřebujeme jinou odmocninu, budeme používat příkaz pro mocniny a exponent ve tvaru zlomku. Například pro výpočet $\sqrt[3]{75}$ použijeme příkaz ve tvaru:

```
> 75^(1/3);
```

$$75^{(1/3)}$$

Pozn.: Pokud by jsme nepoužili závorky, Maple by spočítal nejprve 75^1 a toto číslo vydělil 3:

```
> 75^1/3;
```

$$25$$

Dále bych uvedla jeden příkaz, který je pro práci v Maple důležitý. Je to příkaz **evalf(...)**, který nám číselně vypočítá zadaný příklad. Maple se snaží vždy dát přesný výsledek, ale nám třeba nevyhovující. Pomůže nám tento příkaz jak je názorně uvedeno v následující ukázce:

```
> sqrt(9);
```

$$3$$

```
> 9^(1/2);
```

$$\sqrt{9}$$

```
> evalf(%);
```

$$3.000000000$$

Po zadání druhé odmocniny z 9 pomocí příkazu **sqrt(...)** Maple rovnou vypsal číselný výsledek roven 3. Pokud se druhá odmocnina z 9 zapíše jako 9^(1/2), Maple sice rozpozná, že je to druhá odmocnina z 9, ale nenapíše výsledek roven 3, ale pouze matematický zápis $\sqrt{9}$. Maple prostě z nějakého důvodu neumí tyto zlomkové mocniny vyjádřit rovnou, proto je třeba použít příkaz **evalf(%)**:

```
> sqrt(5)-2*sqrt(7);
```

$$\sqrt{5} - 2\sqrt{7}$$

```
> evalf(%);
```

$$-3.055434645$$

3.2 Mnohočleny

Ještě na začátek si uvedeme další tři důležité příkazy při práci s mnohočleny. Pro roznásobení výrazů používáme příkaz **`expand(...)`**. Chceme-li rozložit mnohočlen na součin několika mnohočlenů nižších stupňů, použijeme příkaz na rozložení výrazu **`factor(...)`**. Potřebujeme-li výraz zjednodušit použijeme příkaz **`simplify(...)`**. Podívejme se jak tyto příkazy fungují na jednoduchých příkladech:

```
> (a+b)*(3*a-b);
```

$$(a + b)\,(3\,a - b)$$

```
> expand(%);
```

$$3\,a^2 + 2\,a\,b - b^2$$

```
> (2*a^3-2*a);
```

$$2\,a^3 - 2\,a$$

```
> factor(%);
```

$$2\,a\,(a - 1)\,(a + 1)$$

```
> (a^2-a*b)/(a*b-b^2);
```

$$\frac{a^2 - a\,b}{a\,b - b^2}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{a}{b}$$

Pozn.: Maple vůbec neřeší podmínky, za kterých má daný výraz smysl.

3.3 Rovnice

Pojmem rovnice rozumíme vztah, kdy *f(x)=g(x)*. Kde *f(x)* a *g(x)* jsou funkce s proměnou *x*. Řešením rovnice jsou všechna *x* z definičního oboru. Rovnici dělíme na levou a pravou stranu. Někdy potřebujeme získat jen pravou nebo levou stranu rovnice. K tomu slouží následující příkazy: **`lhs (...)`** -levá strana rovnice

`rhs (...)` -pravá strana rovnice

```
> lhs(y-5=3*x+y);
```

$$y-5$$

```
> rhs(y-5=3*x+y);
```

$$3\,x+y$$

Rovnice lze pomocí ekvivalentních úprav upravovat za podmínky, že nezměníme definiční obor nově vzniklé rovnici. V Maple řešíme rovnice pomocí příkazu **`solve(...)`** jak je uvedeno na následujícím příkladu:

```
> solve(x+1=2*x-4);
```

$$5$$

V případě že řešíme rovnici s několika neznámými a my chceme výsledek jen pro jednu neznámou v závislosti na ostatních, potom v příkazu **`solve`** musíme uvést pro jakou neznámou chceme rovnici řešit. Ukažme si to na předchozím příkladě:

```
> solve(x+1=2*x-4,x);
```

$$5$$

Vidíme, že žádná změna se neprovedla, protože v zadání rovnice je jen jedna proměnná. Ale na dalším příkladě již vidíme změnu:

```
> solve(2*x+a/2=a-3*x,a);
```

$$10\,x$$

```
> solve(2*x+a/2=a-3*x,x);
```

$$\frac{a}{10}$$

Výsledek se nám změnil podle zadané proměnné.

Rovnice můžeme rozdělit na lineární, kvadratické, goniometrické, exponenciální a logaritmické. Obecně rovnice v Maple řešíme pomocí příkazu **solve(...)**. Musíme si dávat pozor na správný zápis rovnic, aby to Maple přečetl.

- Lineární rovnice

Tvar lineární rovnice je $ax + b = 0$ pro *a* Î *R* a *b* Î ***R***. Rovnice má jeden kořen $x = -b/a$ v případě, že *a* ¹ *0*. Rovnice má nekonečně mnoho řešení v případě, že $a = 0$ a $b = 0$. Rovnice nemá řešení pro případ, kdy $a = 0$ a *b* ¹ *0*.

Ukážeme si lineární rovnice, které : a) nemají žádné řešení

b) mají nekonečně mnoho řešení

a) rovnice: $$\frac{(x+1)(x+2)}{3} - \frac{x^2}{6} + 1 = \frac{(x+3)^2}{6}$$

```
> solve((x+1)*(x+2)/3-x^2/6+1=(x+3)^2/6,x);
>
```

Maple vůbec nic nevypsal a to znamená, že rovnice nemá žádné řešení.

b) rovnice: $$\frac{(25x+6)}{15} - \frac{2}{3x} - x(x-1) = \frac{7}{5}$$

```
> solve((25*x+6)/15-2/3*x-(x-1)=7/5,x);
```

$$x$$

Výsledek je roven *x*, to znamená, že pro každé *x* z ***R*** má rovnice řešení. Ale tady pozor! Jak už jsem uvedla v kapitole 3.2, Maple neumí pracovat s podmínkami. Nevypíše, pokud pro nějaké *x* příklad nemá smysl. V tomto případě se za *x* nesmí dosadit nula, protože *x* je ve jmenovateli. Uživatel si tedy musí podmínky ověřovat zvlášť.

- Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice má tvar $ax^2 + bx + c = 0$. Čísla *a, b, c* nazýváme koeficienty kvadratické rovnice. Rovnici můžeme řešit v *R* podle vzorce: $x_{1,2} = \dfrac{-b+-\sqrt{D}}{2a}$.

D se nazývá diskriminant a platí $D = b^2 - 4ac$. Pro výpočet diskriminantu existuje v Maple příkaz **discrim(...)**. Takto to funguje na příkladu:

```
> discrim(5*x^2-18*x-8,x);
```

$$484$$

V závislosti na hodnotě diskriminantu **D** můžou nastat 3 situace: D>0, D=0 nebo D<0.

1) Pro D>0 má rovnice dva různé reálné kořeny, jak je vidět v následující ukázce:

```
> x^2-3*x-108=0;
```

$$x^2 - 3\,x - 108 = 0$$

```
> solve(%);
```

$$12,\ -9$$

Můžeme si ještě ověřit, že diskriminant je opravdu větší jak nula:

```
> discrim(x^2-3*x-108,x);
```

$$441$$

2) Pro D=0 má rovnice jediný reálný kořen:

```
> solve(4*x^2+4*x+1=0);
```

$$\frac{-1}{2},\ \frac{-1}{2}$$

Pozn.: Všimněte si, že dvojnásobný kořen se vypsal dvakrát.

Vypočteme, že diskriminant se opravdu rovná nule:

```
> discrim(4*x^2+4*x+1,x);
```

$$0$$

3) Pro D<0 má rovnice dva komplexně sdružené kořeny. Maple rovnou vypíše výsledek v komplexním tvaru:

```
> 5*x^2-6*x+2=0;
```

$$5\,x^2 - 6\,x + 2 = 0$$

```
> solve(%);
```

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,I,\ \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\,I$$

Zkontrolujeme, že diskriminant je záporný:

```
> discrim(5*x^2-6*x+2,x);
```

$$-4$$

• Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice obsahují neznámou nebo výraz s neznámou v argumentu goniometrických funkcí. V Maple pro tyto funkce používáme příkazy: **`sin(...)`**, **`cos(...)`**, **`tan(...)`**, **`cot(...)`** kde je v závorce uveden argument. Závorky u těchto příkazů jsou vždy nutné.

Ukažme si příklad s goniometrickou rovnicí:

```
> solve(sin(x)=1/2,x);
```

$$\frac{\pi}{6}$$

Je vidět, že Maple vždy nenalezne všechna řešení. Jak by správně mělo být v tomto příkladě: K=$\{\pi/6+2k\pi,\ 5/6\pi+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\}$.

• Exponenciální rovnice

V exponenciálních rovnicích se neznámá vyskytuje v exponentu. Podívejme se na řešení tohoto typu rovnice v Maple:

```
> solve(3^(x)=9);
```

$$2$$

A ještě jeden příklad na exponenciální rovnice:

```
> solve(3^(x)-2^(x)=2^(x+1)+3^(x-2));
```

$$\frac{\ln\left(\frac{27}{8}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

```
> evalf(%);
```

$$2.999999999$$

Pozn.: Pokud si dáte práci a zlomek si na papíru upravíte, zjistíte, že správným výsledkem je 3. Maple neupravoval výraz, ale rovnou dosazoval hodnoty logaritmů, čímž vznikl nepřesný výsledek.

• Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice mají neznámou jako základ v logaritmu nebo jako logaritmovaný výraz. Pro zápis logaritmické funkce v Maple používáme následující příkazy: **ln(x)** (ale také **log(x)**) pro přirozený logaritmus, **log10(x)** pro logaritmus se základem 10, **log[b](x)** pro logaritmus se základem b.

```
> ln(10);
```

$$\ln(10)$$

```
> log(10);
```

$$\ln(10)$$

```
> evalf(%);
```

$$2.302585093$$

Pozn.: V běžném matematickém zápisu je log(x) brán jako logaritmus x o základu 10, ale jak je vidět v předchozí ukázce, Maple s příkazem **log(x)** počítá jako s přirozeným logaritmem.

Příklad logaritmické rovnice v Maple:

```
> solve(log10(x)+3/log10(x)=4);
```

$$10, 1000$$

Vidíme, že Maple našel dvě řešení a oddělil je čárkou: 10, 1000.

Příkaz na řešení rovnic **solve** lze využít i k vyjadřování neznámé ze vzorce. Vyjádření neznámé ze vzorce pomocí programu Maple lze tak používat nejen v matematice, ale i ve fyzice nebo v chemii. Vyjádříme si neznámou ***t*** ze vzorečku pro rychlost rovnoměrného pohybu v = s/t:

```
> v=s/t;
```

$$v = \frac{s}{t}$$

```
> t=solve(v=s/t,t);
```

$$t = \frac{s}{v}$$

Ještě bych poznamenala, že program Maple umí řešit i rovnice s parametrem jak jsem ukázala v př.17 na str.28.

3.4 Soustavy rovnic

Pro řešení soustav rovnic se v Maple nabízí více možností řešení. Jedna z možností je řešení pomocí aktivní knihovny lineární algebry, další řešení je např. převedení soustavy do matice a řešit dále soustavu rovnic jako matici. My si ukážeme příkaz solve, který už známe, ale tentokrát trošku v jiné podobě: **solve(**množina rovnic**,** množina neznámých**)**.

Ještě si musíme seznámit s typem množina. Množina se zadává do složených závorek a jednotlivé prvky se oddělují čárkou. Jako je to v následující ukázce:

```
> {3*x-2*y=4,x+3*y=5};
```

$$\{3x - 2y = 4, x + 3y = 5\}$$

```
> solve(%);
```

$$\{x = 2, y = 1\}$$

Po zadání příkazu **solve(%)** se nám množina neboli soustava rovnic vyřešila. Ukažme si jak tyto dva kroky můžeme zapsat do jednoho příkazu:

```
> solve({3*x-2*y=4,x+3*y=5},{x,y});
```

$$\{x = 2, y = 1\}$$

Jestliže se nám pomocí příkazu **solve** nepodaří nalézt řešení soustavy, můžeme zkusit použít příkaz **evalf**. Pokud ani to nepomůže, musíme použít příkaz **fsolve(**množina rovnic**,** množina neznámých**)**, který nalezne numerické řešení. Jako v následujícím příkladu:

```
> solve(2*cos(x)=x);
```

$$\mathrm{RootOf}(\_Z - 2\cos(\_Z))$$

```
> evalf(%);
```

$$1.029866529$$

```
> fsolve(2*cos(x)=x);
```

$$1.029866529$$

Na dalším příkladu uvidíme, že ani příkaz **evalf** není všemocný:

```
> rovnice:=cos(x)+tan(x)+x=1;
```

$$rovnice := \cos(x) + \tan(x) + x = 1$$

```
> solve(rovnice,x);
> evalf(%);
```

$$\cos(x) + \tan(x) + x = 1.$$

Je třeba řešit rovnici přibližně a zadat interval, ve kterém budeme hledat řešení. Příkaz bude ve tvaru **fsolve(**rovnice**,** proměnná**,** meze intervalu**)**:

```
> fsolve(rovnice,x,1..3);
```

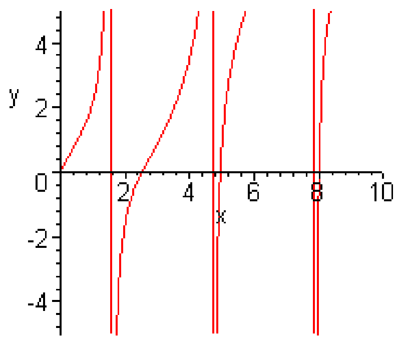
$$2.524808251$$

```
> fsolve(rovnice,x,1..2);
```

$$\mathrm{fsolve}(\cos(x) + \tan(x) + x = 1, x, 1 .. 2)$$

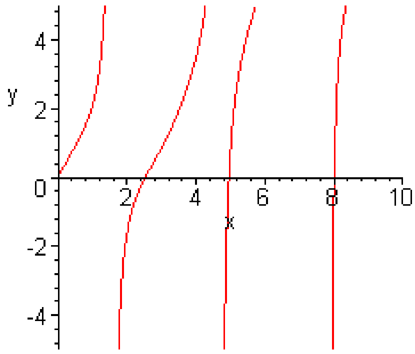
V prvním případě jsme našli přibližné řešení v intervalu [1,3]. V druhém případě jsme zadali interval, ve kterém není řešení a v tom případě rovnice nebyla vyřešena. Pro nalezení intervalu s řešením je dobré použít graf . My máme zadanou rovnici a na graf potřebujeme funkci, kterou vytvoříme z rovnice převedením pravé strany na levou. S grafem funkce se podrobněji seznámíme až v kapitole 3.5, ale pro názornost předchozího příkladu se podívejte na graf funkce f: $x = \cos(x) + \tan(x) + x - 1$:

```
> plot(cos(x)+tan(x)+x-1,x=0..10,y=-5..5);
```



Ještě malá poznámka ke grafu předešlé funkce: Maple v bodech kde není funkce definovaná udělá svislé čáry, které nejsou součástí funkce. Pokud nám tyto svislé čáry vadí, do příkazu přidáme formuli: **diskont=true** a Maple si poté už nevšímá bodů, ve kterých není funkce definovaná (nebo spojitá):

```
> plot(cos(x)+tan(x)+x-1,x=0..10,y=-5..5,discont=true);
```



Občas může nastat opačná situace, kdy **fsolve** si s příkladem neporadí, ale **solve** ho zvládne, např.: když je výsledek komplexní číslo:

```
> fsolve(x^2+1=0,x);
>
> solve(x^2+1=0);
```

$$I, -I$$

Rozdíl mezi příkazem **solve** a **fsolve** není na první pohled dobře vidět. příkaz **fsolve** také můžeme použít na zrychlení práce, protože vlastně funguje jako **solve** + **evalf** (pokud chceme přesné vyjádření). Pokud chceme raději symbolický zápis výsledku, je lepší zvolit **solve**, viz následující příklad:

```
> solve(cos(x)=-(sqrt(2))/2,x);
```

$$\frac{3\,\pi}{4}$$

```
> evalf(3/4*Pi);
```

$$2.356194490$$

```
> fsolve(cos(x)=-(sqrt(2))/2,x);
```

$$2.356194490$$

3.5 Graf funkce

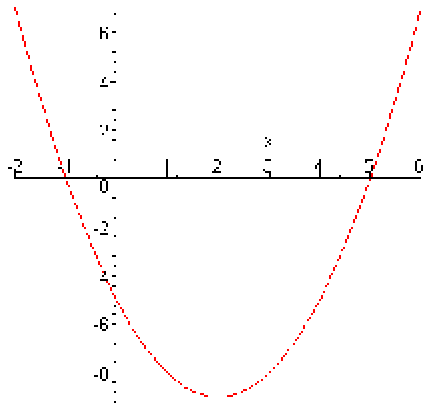
Maple umí zobrazit a vykreslit dvourozměrné a třírozměrné grafy. Pro dvourozměrný graf se používá příkaz **plot(**funkce**,** meze intervalu na ose x**)**. Nejprve si ukážeme jak zadáme do Maple funkci např.: $x^2 - 4x - 5$

```
> f:=x->x^2-4*x-5;
```

$$f := x \rightarrow x^2 - 4\,x - 5$$

A teď k této funkci zobrazíme graf:

```
> plot(f(x),x=-2..6);
```

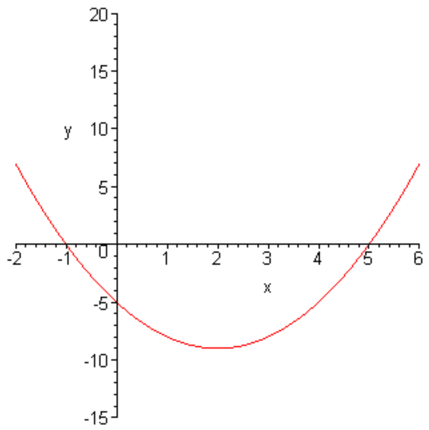


Vidíme jak se nám graf přehledně zobrazil. Do příkazu **plot(...)** jsme zadali meze na ose *x*, neboli vertikální interval, a Maple už automaticky sám přizpůsobil rozsah horizontálního intervalu, neboli meze na ose y, zadané funkci. Ale v případě potřeby, je možno zadat meze na ose *y* v příkazu hned za meze na ose *x* jak je ukázáno na stejném příkladu:

```
> f:=x->x^2-4*x-5;
```

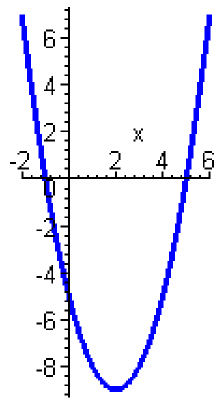
$$f := x \rightarrow x^2 - 4\,x - 5$$

```
> plot(f(x),x=-2..6,y=-15..20);
```



Pro zachování stejného měřítka na osách můžeme použít příkaz **scaling=constrained**, dalším příkazem můžeme změnit barvu grafu: **color=...** (místo teček doplníme anglický název barvy: red, green, blue, black apod.) Můžeme si nastavit i tloušťku čar pomocí příkazu **thickness=...** , kde zvolíme číslo od 0 do 3 (číslo 3 představuje nejtlustší čáru). Všechny tyto příkazy si ukažme na příkladu:

```
> plot(x^2-4*x-5,x=-2..6,scaling=constrained, color=blue,
> thickness=3);
```



Maple umí nalézt hodnotu maxima i minima pomocí příkazů **minimize(**funkce**,** meze intervalu**)** a **maximize(**funkce**,** meze intervalu**)** a dále vypočítat funkční hodnotu v daném bodě. Podívejme se jak tyto příkazy fungují na předchozím příkladě pro funkci: $f(x)=6x-2x^2+3$

```
> maximize(f(x),x=-6..8);
```

$$\frac{15}{2}$$

```
> f(4);
```

$$-5$$

```
> solve(f(x)=15/2);
```

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$$

Je vidět jak snadno jsme pomocí Maple zjistili maximum funkce, funkční hodnotu v bodě $x = 4$ a funkční hodnotu v bodě maxima.

Další možnosti, které nám Maple nabízí, jsou například zakreslení dvou i více funkcí do jednoho grafu a graf popsat. Do příkazu **plot(...)** zapíšeme místo jedné funkce dvě jako typ množina tzn. do složených závorek a oddělené čárkou. Pro popis grafu slouží příkaz **title = '...'**, který se umístí do příkazu **plot(...)** hned za meze intervalu. Jak je to použito v následující ukázce:

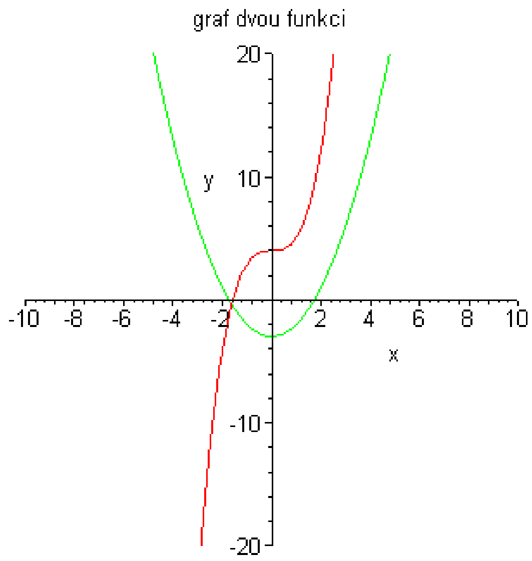
```
> f:=x->x^3+4;
```

$$f := x \to x^3 + 4$$

```
> g:=x->x^2-3;
```

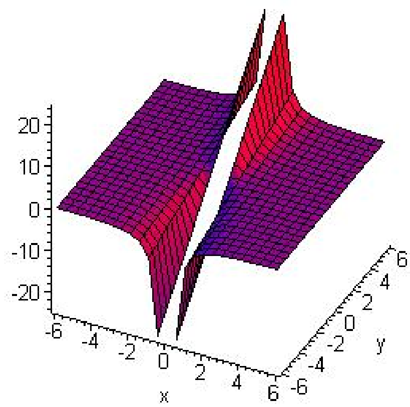
$$g := x \to x^2 - 3$$

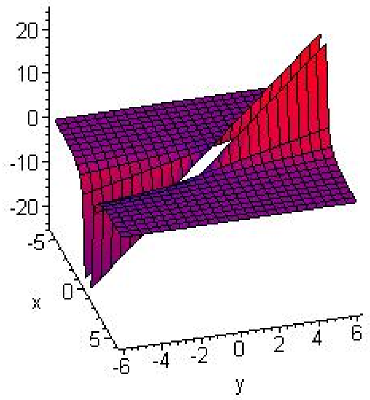
```
> plot({f(x),g(x)},x=-10..10,y=-20..20,title=`graf dvou
> funkci`);
```

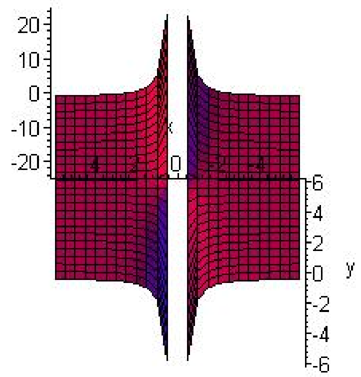


Jak už bylo zmíněno, Maple umí také vykreslit trojrozměrné grafy funkcí. K tomu se používá příkaz **plot3d(...)** v závorkách jsou stejné parametry jako v příkazu pro dvojrozměrný graf **plot(...)**. V následující ukázce jsou různé pohledy stále na stejný trojrozměrný graf:

```
> plot3d(y/x^2,x=-6..6,y=-6..6);
```







Trojrozměrné grafy můžeme v programu Maple otáčet a prohlížet si je ze všech stran. A to pomocí stisknutím levého tlačítka myši na grafu a s myší jednoduše pohybovat.

3.6 Řešené příklady

1) Upravte výraz: $\dfrac{9^2 - 12 + 4}{3 - 2}$

```
> (9^2-12+4)/(3-2);
```

$$73$$

2) Vypočítejte $\sqrt[5]{14}$.

Odmocninu přepíšeme jako exponent ve tvaru zlomku. A poté použijeme evaluační příkaz `evalf(%)`.

```
> 14^(1/5);
```

$$14^{(1/5)}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.695218203$$

3) Vypočítejte $\sqrt{12}$.

```
> sqrt(12);
```

$$2\sqrt{3}$$

```
> evalf(%);
```

$$3.464101616$$

4) Zjistěte hodnotu daného výrazu a vypište na 30 desetinných míst: $2\pi + e^5$.

```
> evalf(2*Pi+exp(5));
```

$$154.6963444$$

Pozn.: Pokud chceme více desetinných míst, můžeme do příkazu `evalf` přidat parametr. Ale pozor tento parametr určuje počet tzv. platných číslic, tedy počítá číslice od první nenulové zleva. Parametr je pevně nastaven na hodnotu 10.

V našem případě při vypsání 30-ti desetinných míst, je třeba uvést parametr 33 (3 místa před desetinnou čárkou + 30 desetinných míst):

```
> evalf(2*Pi+exp(5),33);
```

$$154.696344409756189898040866807111$$

V tomto příkladě jsme použili Ludolfovo číslo $\boldsymbol{\pi}$ (pi). Pozor v Maple je třeba zadávat velká písmena, takže `Pi`. A také Eulerovo číslo **e**, které zapisujeme ve tvaru `exp(...)`, kde v závorce uvádíme exponent .

5) Vypočítejte $\frac{1}{800}$ a vypište na 2 platné číslice.

```
> evalf(1/800);
```

$$0.001250000000$$

```
> evalf(1/800,2);
```

$$0.0012$$

6) Zjistěte absolutní hodnotu výrazu: $\left|8-|-10-2|-12+3\right|$

```
> abs(8-abs(-10-2)-12+3);
```

$$13$$

7) Vypočítejte hodnotu výrazu: 6! + (12·3)!

```
> 6!+(12*3)!;
```

$$371993326789901217467999448150835200000720$$

8) Zjednodušte daný výraz: $\frac{3uv+9v-2u-6}{3uv-2u-9v+6}$

```
> simplify((3*u*v+9*v-2*u-6)/(3*u*v-2*u-9*v+6));
```

$$\frac{u+3}{u-3}$$

9) Zjednodušte výraz v komplexním tvaru: $\frac{(1+2i)^8}{1+3i}$

```
> simplify(((1+2*I)^8)/(1+3*I));
```

$$\frac{481}{10}+\frac{1917}{10}I$$

V tomto příkladě jsme pro zápis imaginární jednotky *i* použili znak `I`.

10) Vypočítej: (3x - 2)(x + 1)

```
> expand((3*x-2)*(x+1));
```

$$3\,x^2 + x - 2$$

11) Rozlož daný výraz: $9x^2$ - 3x - 2.

```
> factor((9*x^2-3*x-2));
```

$$(3\,x+1)\,(3\,x-2)$$

12) Rozložte výraz: $4x^2$ + 3x + 1.

```
> factor((4*x^2+3*x+1));
```

$$4\,x^2 + 3\,x + 1$$

Zde je vidět, že Maple neumí vše. Nelze přesně spočítat kořeny a proto jen výraz opsal ze zadání. Kořeny jsou komplexní čísla, pro zjištění těchto kořenů použijeme následující příkaz:

```
> solve(%);
```

$$-0.3750000000 + 0.3307189139\,I,\ -0.3750000000 - 0.3307189139\,I$$

13) Vyřešte lineární rovnici: $\frac{3-x}{2} - \left(\frac{7-x}{3} - \frac{x+3}{4}\right) + \frac{7-x}{6} - \frac{9+7x}{8} + x = 0$

```
> solve((3-x)/2-((7-x)/3-(x+3)/4)+(7-x)/6-((9+7*x)/8)+x=0);
```

$$1$$

14) Vyřešte rovnici s absolutní hodnotou: $|x+3| = 4$

```
> solve(abs(x+3)=4);
```

$$1,\ -7$$

15) Vyřešte rovnici s absolutní hodnotou: $\big|\,|x+1|-3\,\big| = 1$

```
> solve(abs(abs(x+1)-3)=1);
```

$$3,\ -5,\ 1,\ -3$$

16) Z daného vzorce vyjádřete neznámou *a*: $S = \left(\frac{(a+c)v}{2}\right)$

```
> solve(S=((a+c)*v)/2,a);
```

$$-\frac{-2\,S + c\,v}{v}$$

17) Vyřešte rovnici s parametrem $a \in \mathrm{R}$ a neznámou $x \in \mathrm{R}$: $\dfrac{x}{3a+x} - \dfrac{x}{x-3a} = \dfrac{a^2}{9a^2 - x^2}$

```
> solve(x/(3*a+x)-x/(x-3*a)=a^2/(9*a^2-x^2),x);
```

$$\frac{a}{6}$$

Maple vyřešil rovnici správně, ale neumí vypsat podmínky. K={a/6} platí pouze pro případ kdy *a*^{1}*0*. Maple úplně vynechal případ, kdy *a=0* a v tomto případě se K=R-{0}.

18) Máme obdélník o obvodu 22 cm a obsahu 24 cm^2. Určete délky jeho stran *a*, *b*.

Tento příklad vyřešíme soustavou rovnic o dvou neznámých a použijeme vzorečky pro výpočet obvodu(*2*^{y}*(a+b)*) a obsahu obdélníka(*a*^{y}*b*). Poté bude jedna rovnice 22=a(a+b) a druhá rovnice 24=a·b. Řešení v Maple bude následující:

```
> o:=2*(a+b);
```

$$o := 2\,a + 2\,b$$

```
> s:=a*b;
```

$$s := a\,b$$

```
> s=24;
```

$$a\,b = 24$$

```
> o=22;
```

$$2\,a + 2\,b = 22$$

```
> solve({s=24,o=22},{a,b});
```

$$\{b = 3,\ a = 8\},\ \{b = 8,\ a = 3\}$$

19) Řešte soustavu rovnic: x + y - 2z = -1

4x + 3y - 3z = -1

5x + y + 5z = 2

```
> solve({x+y-2*z=-1,4*x+3*y-3*z=-1,5*x+y+5*z=2},{x,y,z});
```

$$\{z = 1,\ y = 2,\ x = -1\}$$

20) Vyřešte soustavu rovnic: $(x + y)^2 - x(2y - 1) + y = 18$

$(x - y)(x + y + 1) = 6$

```
> solve({(x+y)^2-x*(2*y-1)+y=18,(x-y)*(x+y+1)=6},{x,y});
```

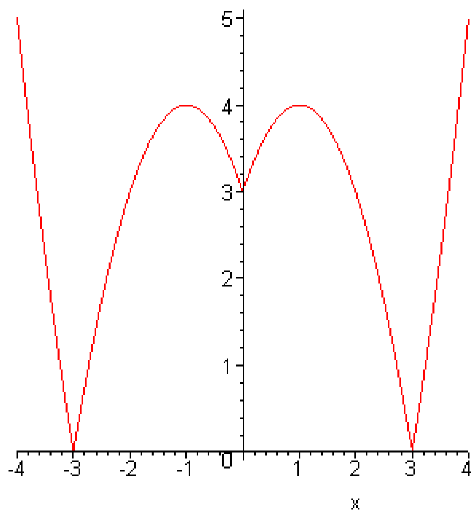
$$\{x = -4, y = -3\}, \{y = 2, x = -4\}, \{y = -3, x = 3\}, \{y = 2, x = 3\}$$

21) Sestrojte graf funkce f:y = $|x^2-2|x|-3|$ a zjistěte minimum funkce a funkční hodnoty v bodech x=0 a y=3.

```
> f:=x->abs(x^2-2*abs(x)-3);
```

$$f := x \rightarrow |x^2 - 2|x| - 3|$$

```
> plot(f(x),x=-4..4);
```




```
> minimize(f(x),x=-4..4);
```

$$0$$

```
> f(0);
```

$$3$$

```
> f(x)=3:
> solve(%);
```

$$1 + \sqrt{7}, -1 - \sqrt{7}, 0, 2, -2$$

22) Do jednoho grafu nakreslete dvě funkce: f:*y* = tg(*x*/2) a g:*y* = sin(*x*/3) na intervalu (-2π,2π).

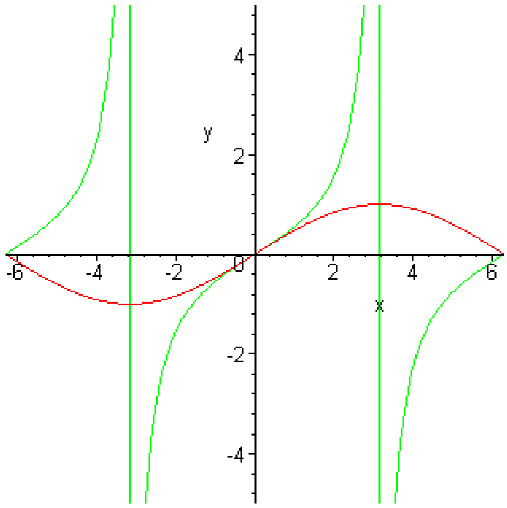
```
> f:=x->tan(x/2);
```

$$f := x \rightarrow \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$$

```
> g:=x->sin(x/2);
```

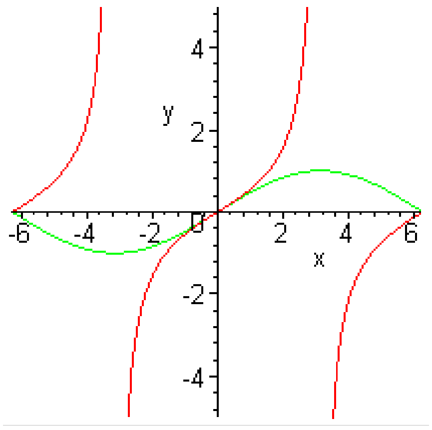
$$g := x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=-2*Pi..2*Pi,y=-5..5);
```



U funkcí tangens a cotangens se v grafu v bodech, kde není funkce definovaná, objeví svislé čáry. Pokud je v grafu nechceme zobrazit použijeme příkaz **`discont=true`**:

```
> plot({tan(x/2),sin(x/2)},x=-2*Pi..2*Pi,y=-5..5,
> discont=true);
```



4 Diferenciální počet

4.1 Limita funkce

Limita funkce je jedna ze základních a nejdůležitějších vlastností funkce. Pro funkci *y* = *f(x)*, která má v bodě ***a*** limitu *A* musí platit:

- že je definovaná pro všechna *x* z nějakého okolí bodu ***a***.
- ke každému číslu *e* > *0* existuje takové číslo *d* > *0*, že pro všechna *x* ¹ ***a*** z *d*-okolí bodu ***a*** náleží odpovídající funkční hodnoty *f(x)* do *e*-okolí bodu *A*

Limitu funkce zapisujeme takto: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Příkaz, který v programu Maple vypočítá limitu funkce *f(x)* v bodě ***a***, má tvar: `limit(f,x=a)`:

```
> f:=x->3*x^7-x^2+1;
```

$$f := x \to 3\,x^7 - x^2 + 1$$

```
> limit(f(x),x=-1);
```

$$-3$$

Pokud zapíšeme příkaz s velkým počátečním písmenem: `Limit(f,x=a)` limita se pouze opíše a nevypočítá:

```
> Limit(f(x),x=-1);
```

$$\lim_{x \to (-1)} 3\,x^7 - x^2 + 1$$

Může nastat devět typů případů, které si postupně ukážeme na příkladech:

I) ***a*** Î **R**, ***A*** Î **R**

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

```
> f:=x->abs(sign(x));
```

$$f := x \to |\operatorname{sign}(x)|$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$1$$

II) ***a*** Î **R**, ***A*** Î ¥

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

```
> f:=x->1/x^2;
```

$$f := x \to \frac{1}{x^2}$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$\infty$$

III) ***a*** Î **R**, ***A*** Î **–¥**

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

```
> f:=x->-1/abs(x);
```

$$f := x \to -\frac{1}{|x|}$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$-\infty$$

IV) ***a*** Î **¥**, ***A*** Î **R**

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Jestliže potřebujeme v programu Maple zadat + nebo – nekonečno, použijeme výraz `infinity` nebo `– infinity`.

```
> f:=x->1/x;
```

$$f := x \to \frac{1}{x}$$

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

$$0$$

V) ***a*** Î **¥**, ***A*** Î ¥

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

```
> f:=x->abs(x);
```

$$f := x \to |x|$$

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

$$\infty$$

VI) ***a* Î ¥, *A* Î –¥**

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

```
> f:=x->-abs(x);
```

$$f := x \to -|x|$$

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

$$-\infty$$

VII) ***a* Î –¥, *A* Î R**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

```
> f:=x->1+1/x;
```

$$f := x \to 1 + \frac{1}{x}$$

```
> limit(f(x),x=-infinity);
```

$$1$$

VIII) ***a* Î –¥, *A* Î ¥**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

```
> f:=x->abs(x);
```

$$f := x \to |x|$$

```
> limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\infty$$

IX) ***a* Î –¥, *A* Î –¥**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

```
> f:=x->-abs(x);
```

$$f := x \to -|x|$$

```
> limit(f(x),x=-infinity);
```

$$-\infty$$

Teď jsme si ukázali všechny možnosti, které můžou nastat při řešení limit. Ještě může nastat jedna možnost a to v případě, že limita neexistuje jako v následujícím příkladě:

```
> f:=x->1/x;
```

$$f := x \to \frac{1}{x}$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$undefined$$

Předchozí limita neexistovala, protože jednotlivé limity zleva a zprava se nerovnají. To si s pomocí programu Maple můžeme jednoduše ověřit. Na vyřešení limity zleva i zprava v bodě $x=a$ slouží příkazy **left** a **right**, které se uvedou do příkazu **limit(f(x),x=a,left)**:

```
> f:=x->1/x;
```

$$f := x \to \frac{1}{x}$$

```
> limit(f(x),x=0,left);
```

$$-\infty$$

```
> limit(f(x),x=0,right);
```

$$\infty$$

Chceme-li zobrazit výsledek společně se zadáním limity, použijeme následující spojení příkazů:

```
> f:=x->((sin(3*x))/x);
```

$$f := x \to \frac{\sin(3\,x)}{x}$$

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3\,x)}{x} = 3$$

4.2 Derivace funkce

Derivace funkce je dalším základním pojmem diferenciálního počtu. Derivace funkce je speciální případ limity. Limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nazýváme derivací funkce *y=f(x)* v bodě x_0 . Derivaci obvykle označujeme $f'(x_0)$ a píšeme $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Derivace funkce v bodě geometricky představuje směrnici tečny funkce *f* v bodě x_0. Libovolná funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu derivaci. Má-li funkce v bodě x_0 derivaci pak je v tomto bodě zaručeně spojitá. Není-li funkce spojitá v bodě x_0, nemá v tomto bodě ani derivaci.

Pro výpočet první derivace funkce v programu Maple použijeme příkaz **diff(**funkce**,** proměnná, podle které derivujeme**)**:

```
> f:=x->x^5;
```

$$f := x \to x^5$$

```
> diff(f(x),x);
```

$$5\,x^4$$

Chceme-li vypočítat derivace vyšších řádu, musíme to uvést do příkazu **diff(**funkce**,** proměnná**$**stupeň derivace**)**:

```
> f:=x->x^5;
```

$$f := x \to x^5$$

```
> diff(f(x),x$3);
```

$$60\,x^2$$

V tomto případě je také možné zadat stupeň derivace tak, že například při druhé derivaci zapíšeme proměnou *x* dvakrát:

```
> f:=x->x^5;
```

$$f := x \to x^5$$

```
> diff(f(x),x,x);
```

$$20\, x^3$$

Předchozí zápis pro vyšší stupeň derivace je vhodný zejména při počítání derivací, kdy se nám v průběhu mění proměnná. Chceme-li spočítat např. třetí derivaci cos(*xy*) nejprve dvakrát podle *x* a jednou podle *y*:

```
> diff(cos(x*y),x,x,y);
```

$$\sin(x\, y)\, x\, y^2 - 2\cos(x\, y)\, y$$

Můžeme použít i následující příkaz, který vede ke stejnému výsledku:

```
> diff(cos(x*y),x$2,y);
```

$$\sin(x\, y)\, x\, y^2 - 2\cos(x\, y)\, y$$

4.3 Řešené příklady

1) Vyřešte limity funkcí ve vlastním bodě:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}p} (\sin x + \cos x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} (\log(10x) - \ln x)$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+5x-2}{27x^3-1}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 5\sin x + 2}$ f) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x}-3\sqrt{2}}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{4}} (\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tg}\, 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} (x+\mathrm{e}^x)^{1/x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{\arctan x} \lim$

a)

```
> f:=x->(x^2+2*x-1)/(x+1);
```

$$f := x \to \frac{x^2+2\, x-1}{x+1}$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$-1$$

b)

```
> f:=x->sin(x)+cos(x);
```

$$f := x \to \sin(x) + \cos(x)$$

```
> limit(f(x),x=3/4*Pi);
```

$$0$$

c)

```
> f:=x->log10(10*x)-ln(x);
```

$$f := x \to \mathrm{log10}(10\,x) - \ln(x)$$

```
> limit(f(x),x=1);
```

$$1$$

d)

```
> f:=x->(3*x^2+5*x-2)/(27*x^3-1);
```

$$f := x \to \frac{3\,x^2 + 5\,x - 2}{27\,x^3 - 1}$$

```
> limit(f(x),x=1/3);
```

$$\frac{7}{9}$$

e)

```
> f:=x->(2*(sin^2)(x)+sin(x)-1)/(2*(sin^2)(x)-5*sin(x)+2);
```

$$f := x \to \frac{2\,(\sin^2)(x) + \sin(x) - 1}{2\,(\sin^2)(x) - 5\,\sin(x) + 2}$$

```
> limit(f(x),x=Pi/6);
```

$$-1$$

f)

```
> f:=x->(sqrt(x)-3)/(sqrt(2*x)-3*sqrt(2));
```

$$f := x \to \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{2\,x} - 3\,\sqrt{2}}$$

```
> limit(f(x),x=9);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

g)

```
> f:=x->(tan(x))^tan(2*x);
```

$$f := x \to \tan(x)^{\tan(2\,x)}$$

```
> limit(f(x),x=Pi/4);
```

$$\mathbf{e}^{(-1)}$$

h)

```
> f:=x->(x+exp(x))^(1/x);
```

$$f := x \to (x + \mathbf{e}^{x})^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$\mathbf{e}^{2}$$

i)

```
> f:=x->(cos(sqrt(x))-1)/arctan(x);
```

$$f := x \to \frac{\cos(\sqrt{x}\,) - 1}{\arctan(x)}$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$\frac{-1}{2}$$

2) Vypočítejte limity funkcí v nevlastním bodě:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2+3}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4+3x^2+5}{3-x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}+3\sqrt{x^2-6}}{2x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sin 1/x + \cos 1/x)^x$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\left(2+e^{3x}\right)}{\log\left(3+e^{2x}\right)}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

a)

```
> f:=x->(2^(x+3)+4)/(2^(x-1)+1);
```

$$f := x \to \frac{2^{(x+3)}+4}{2^{(x-1)}+1}$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^{(x+3)}+4}{2^{(x-1)}+1} = 16$$

b)

```
> f:=x->(x+2)/(x^2+3);
```

$$f := x \to \frac{x+2}{x^2+3}$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x^2+3} = 0$$

c)

```
> f:=x->(x^4+3*x^2+5)/(3-x);
```

$$f := x \to \frac{x^4+3\,x^2+5}{3-x}$$

```
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{x^4+3\,x^2+5}{3-x} = \infty$$

d)

```
> f:=x->sqrt(2*x^2+x)/x;
```

$$f := x \to \frac{\sqrt{2\,x^2+x}}{x}$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+x}}{x} = \sqrt{2}$$

e)

```
> f:=x->(sqrt(x+2)+3*sqrt(x^2-6))/(2*x+1);
```

$$f := x \rightarrow \frac{\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x^2-6}}{2\,x+1}$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x^2-6}}{2\,x+1} = \frac{3}{2}$$

f)

```
> f:=x->(sin(x^(-1))+cos(x^(-1)))^x;
```

$$f := x \rightarrow \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$$

```
> Limit(f(x),x=-infinity)=limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = \mathbf{e}$$

g)

```
> f:=x->log(2+exp(3*x))/log(3+exp(2*x));
```

$$f := x \rightarrow \frac{\log(2+\mathbf{e}^{(3\,x)})}{\log(3+\mathbf{e}^{(2\,x)})}$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+\mathbf{e}^{(3\,x)})}{\ln(3+\mathbf{e}^{(2\,x)})} = \frac{3}{2}$$

h)

```
> f:=x->arccos(sqrt(x^2+x)-x);
```

$$f := x \rightarrow \arccos(\sqrt{x^2+x} - x)$$

```
> Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi - \arccos(-\sqrt{x^2+x} + x) = \frac{\pi}{3}$$

3) Vypočítejte jednostranné limity:

a) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x+1}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+3}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{7}{(2-x)^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos\sqrt{x}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\log x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

a)

```
> f:=x->(2*x+1)/(x-5);
```

$$f := x \to \frac{2\,x+1}{x-5}$$

```
> Limit(f(x),x=5,left)=limit(f(x),x=5,left);
```

$$\lim_{x\to 5-}\frac{2\,x+1}{x-5} = -\infty$$

b)

```
> f:=x->(x+3)/x;
```

$$f := x \to \frac{x+3}{x}$$

```
> Limit(f(x),x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x+3}{x} = \infty$$

c)

```
> f:=x->7/(2-x)^3;
```

$$f := x \to \frac{7}{(2-x)^3}$$

```
> Limit(f(x),x=2,right)=limit(f(x),x=2,right);
```

$$\lim_{x\to 2+}\frac{7}{(2-x)^3} = -\infty$$

d)

```
> f:=x->(1-cos(x)*cos(sqrt(x)))/x;
```

$$f := x \to \frac{1 - \cos(x)\cos(\sqrt{x})}{x}$$

```
> Limit(f(x),x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos(x)\cos(\sqrt{x})}{x} = \frac{1}{2}$$

e)
```
> f:=x->x^(1/log(x));
```

$$f := x \to x^{\left(\frac{1}{\log(x)}\right)}$$

```
> Limit(f(x),x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} x^{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)} = \mathbf{e}$$

Pozn.: Pro Maple je ln(x) a log(x) to samé, obojí bere a počítá jako přirozený logaritmus. Všimněte si jak v zadání opsal log(x), ale ve výsledku vždy píše ln(x).

f)
```
> f:=x->arccos(x)/sqrt(1-x^2);
```

$$f := x \to \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

```
> Limit(f(x),x=1,left)=limit(f(x),x=1,left);
```

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$$

4) Určete derivace funkcí (y´= první derivace, y´´= druhá derivace, ...):

a) f: y=sin2x y´=?

b) f: y=$e^{3\cos x}$ y´=?

c) f: y= $(e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})$ y´=?

d) f: y=xlnx y´=?, y´´=?

e) f: y=$\cos 3x^2$ y´=?

f) f: y=$x^4-2x^3+3x^2-4x+5$ y´´´=?

a)
```
> f:=x->sin(2*x);
```

$$f := x \to \sin(2\,x)$$

```
> y´:=diff(f(x),x);
```

$$y\acute{} := 2\cos(2\,x)$$

b)

```
> f:=x->exp(3*cos(x));
```

$$f := x \to \mathbf{e}^{(3\cos(x))}$$

```
> y´:=diff(f(x),x);
```

$$y\acute{} := -3\sin(x)\,\mathbf{e}^{(3\cos(x))}$$

c)

```
> f:=x->(exp(x)-exp(-x))/(exp(x)+exp(-x));
```

$$f := x \to \frac{\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{(-x)}}{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{(-x)}}$$

```
> y´:=diff(f(x),x);
```

$$y\acute{} := 1 - \frac{(\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{(-x)})^{2}}{(\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{(-x)})^{2}}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{4}{(\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{(-x)})^{2}}$$

Teď zkusíme stejný příklad zadat do Maple trochu jinak, ale matematicky správně a uvidíme, co se stane s výsledkem. Místo e^{-x} napíšeme $1/e^{x}$.

```
> f:=x->(exp(x)-1/exp(x))/(exp(x)+1/exp(x));
```

$$f := x \to \frac{\mathbf{e}^{x} - \dfrac{1}{\mathbf{e}^{x}}}{\mathbf{e}^{x} + \dfrac{1}{\mathbf{e}^{x}}}$$

```
> diff(f(x),x);
```

$$1-\frac{\left(\mathbf{e}^{x}-\frac{1}{\mathbf{e}^{x}}\right)^{2}}{\left(\mathbf{e}^{x}+\frac{1}{\mathbf{e}^{x}}\right)^{2}}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{4\,\mathbf{e}^{(2\,x)}}{(\mathbf{e}^{(2\,x)}+1)^{2}}$$

Výsledky jsou na první pohled odlišné, ale je to stejný výsledek jen pokaždé v jiném matematickém zápisu. Proto při počítání v programu Maple zaleží i na způsobu zadání zápisu.

d)

```
> f:=x->x*ln(x);
```

$$f := x \rightarrow x\ln(x)$$

```
> y´:=diff(f(x),x);
```

$$y´ := \ln(x)+1$$

```
> y´´:=diff(f(x),x,x);
```

$$y´´ := \frac{1}{x}$$

e)

```
> f:=x->cos(3*x^2);
```

$$f := x \rightarrow \cos(3\,x^{2})$$

```
> y´:=diff(f(x),x);
```

$$y´ := -6\sin(3\,x^{2})\,x$$

Teď se podívejte jaké mohou nastat komplikace při nesprávném zadání příkladu:

```
> f:=x->cos(3*x)^2;
```

$$f := x \rightarrow \cos(3\,x)^{2}$$

```
> y´:=diff(f(x),x);
```

$$y´ := -6\cos(3\,x)\sin(3\,x)$$

```
> f:=x->cos3*x^2;
```

$$f := x \rightarrow \mathrm{cos3}\,x^{2}$$

```
> y´:=diff(f(x),x);
```

$$y' := 2\cos 3\, x$$

V obou případech dojdeme k chybnému výsledku. Musíme si dát pozor na správný zápis do programu Maple.

f)

```
> f:=x->x^4-2*x^3+3*x^2-4*x+5;
```

$$f := x \to x^4 - 2\,x^3 + 3\,x^2 - 4\,x + 5$$

```
> y´´´:=diff(f(x),x$3);
```

$$y''' := 24\,x - 12$$

5 Integrální počet

5.1 Neurčitý integrál

Máme funkce *F(x)* a *f(x)*, které jsou definované na otevřeném intervalu *(a,b)*. Pokud pro všechna *x* Î *(a,b)* platí *F´(x)=f(x)*, řekneme, že funkce *F(x)* je v intervalu *(a,b)* primitivní funkcí k funkci *f(x)*. Potom platí:

- když je funkce *f(x)* spojitá v intervalu *(a,b)*, existuje k ní v tomto intervalu primitivní funkce .
- těchto primitivních funkcí je nekonečně mnoho a je-li *F(x)* jednou z nich, pak všechny ostatní jsou tvaru *F(x)* + *C*, kde ***C*** je libovolná konstanta.

Primitivní funkci neboli neurčitý integrál zapisujeme takto: $\int f(x)dx = F(x) + C$, kde funkci *f(x)* nazýváme integrandem, symbol $\int$ integračním znakem, *C* je konstanta a symbol *dx* slouží k odlišení integrační proměnné *x* od případných dalších parametrů.

Když máme za úkol najít primitivní funkci k dané funkci, je tato úloha většinou formulována jako výpočet neurčitého integrálu dané funkce.

Příkaz, který v programu Maple vypočítá neurčitý integrál (primitivní funkci) z výrazu podle integrační proměnné, má tvar: **int(**výraz**,** integrační proměnná**)**. Následující příkaz vypočítá neurčitý integrál z funkce f(x)=x+1/x^2.

```
> f:=(x+1/(x^2));
```

$$f := x + \frac{1}{x^2}$$

```
> int(f,x);
```

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$$

Když se podíváme na výsledek, který nám Maple vypočítal, je zde rozdíl od obvyklého zápisu v matematice. V Maple platí úmluva, že se vypouští z výsledku konstanta, tj. $\int \, dx = x$ místo obvyklé definice $\int \, dx = x + C$, kde C je konstanta.

Stejně jako u limity můžeme použít příkaz s velkým počátečním písmenem a výraz se nevypočítá, ale pouze opíše zadání:

```
> Int(f,x);
```

$$\int x + \frac{1}{x^2} \, dx$$

5.2 Určitý integrál

Máme funkce $F(x)$ a $f(x)$, které jsou definované na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$. Jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé *x Î* $\langle a,b \rangle$, potom derivací funkce F v bodech a a b rozumíme derivaci zprava(v bodě a) a zleva(v bodě b). Říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu $\langle a,b \rangle$, potom určitým integrálem funkce f v mezích od a do b nazveme rozdíl $F(b)$-$F(a)$ funkčních hodnot funkce F v bodech a a b.

Určitý integrál zapisujeme takto: $\int_a^b f \, dx$

Číslo a se nazývá dolní mez a číslo b horní mez určitého integrálu.

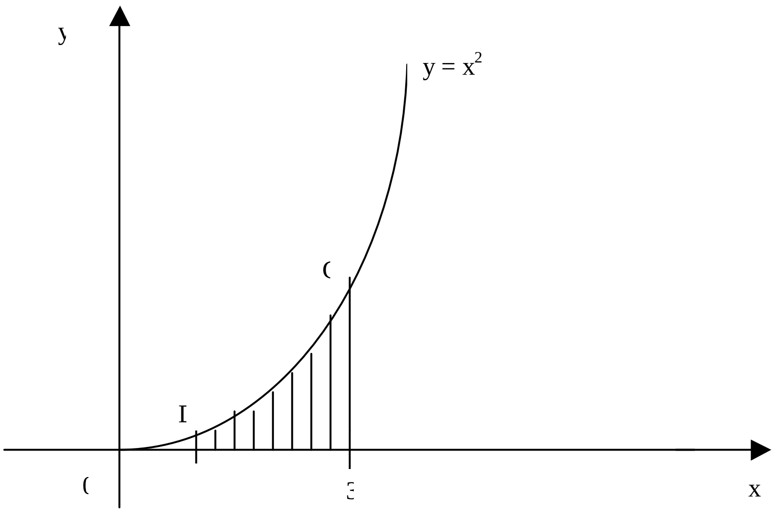
Pro výpočet určitého integrálu se v programu Maple používá příkaz: **int(**výraz**,** integrační proměnná**=**dolní mez**..**horní mez**)**. Použití tohoto příkazu je vidět na příkladě, kdy se počítá určitý integrál v intervalu á-2,2ñ z funkce f(x)=4-x^2:

```
> Int(4-x^2,x=-2..2)=int(4-x^2,x=-2..2);
```

$$\int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx = \frac{32}{3}$$

5.3 Užití integrálního počtu

Určitý integrál lze aplikovat v geometrii, fyzice, technice a v dalších oborech. My si ukážeme jak používat určitý integrál pří výpočtu obsahu útvaru a objemu těles.



Obr.1

Na obr.1 je nakreslen rovinný obrazec ABCD, který je omezen úsečkou AB na ose *x*, úsečkami AD a BC rovnoběžnými s osou *y* a ještě grafem funkce $y = x^2$. Souřadnice bodu A jsou [1,0] a bodu B[3,0]. Abychom uměli vypočítat obsah tohoto obrazce, je zapotřebí znát integrální počet, respektive určitý integrál, s kterým jsme se seznámili v předchozí podkapitole 5.2.

Program Maple nám samozřejmě při počítání těchto příkladů může pomoci. Jak tedy spočítáme obsah útvaru, který je zobrazen na Obr.1? Obsah spočítáme jako určitý integrál funkce $f(x)=x^2$ v uzavřeném intervalu $\langle 1,3 \rangle$:

```
> f:=x^2;
```

$$f := x^2$$

```
> int(f,x=1..3);
```

$$\frac{26}{3}$$

V předchozím příkladě jsme měli útvar zadaný grafem funkce, osou x a dvěma přímkami x =1 a x =3. Můžou nastat ještě dva případy: útvar omezený grafem funkce a osou nebo útvar omezený dvěma různými grafy funkcí. Pojďme si přehledně oba případy ukázat na příkladech.

I)

Případ, kdy rovinný útvar vznikne zadanou funkcí a osou x. Zadání příkladu zní:

Vypočítejte obsah útvaru omezeného křivkou $y = f(x) = -x^2 + 4$ a osou x.

Řešení v programu Maple:

1) Zadáme danou funkci do programu

```
> f:=-x^2+4;
```

$$f := -x^2 + 4$$

2) Vypočítáme průsečíky funkce $f(x)$ s osou x, tzn. $y=0$ z toho vyplývá, že $f(x)=0$

```
> 0=f;
```

$$0 = -x^2 + 4$$

```
> solve(%);
```

$$2, -2$$

3) Teď vypočítáme určitý integrál funkce $f(x)$ v intervalu $\langle -2,2 \rangle$

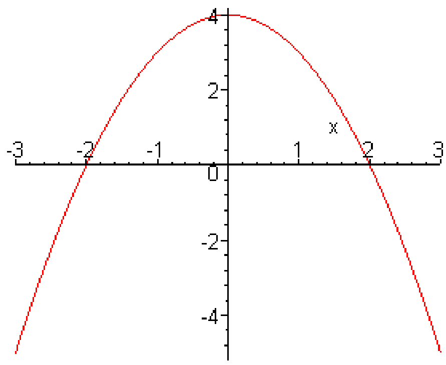
```
> int(f,x=-2..2);
```

$$\frac{32}{3}$$

Obsah zadaného útvaru je roven 32/3.

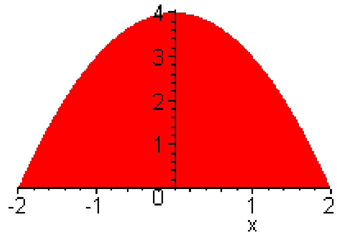
4) Pro znázornění příkladu si můžeme nakreslit graf.

```
> plot(f(x),x=-3..3);
```



Na grafu jsou vidět průsečíky funkce *f(x)* s osou *x*, proto jsme si graf zadané funkce mohli nakreslit již na začátku příkladu a nemuseli jsme pak počítat průsečíky funkce *f(x)* s osou *x*. Vypočítali jsme obsah tohoto útvaru:

```
> plot(f(x),x=-2..2,filled=true);
```



II)

Případ, kdy útvar vznikne zadáním dvou funkcí. Zadání příkladu zní:

Vypočítejte obsah útvaru omezeného křivkami *f(x)*=Ö*x* a *g(x)*=*x*^{2}.

Řešení v programu Maple:

1) Zadáme dané funkce *f(x)* a *g(x)* do programu.

```
> f:=sqrt(x);
```

$$f := \sqrt{x}$$

```
> g:=x^2;
```

$$g := x^2$$

2) Vypočítáme průsečíky funkce *f(x)* s funkcí *g(x)*.

```
> f=g;
```

$$\sqrt{x} = x^2$$

```
> solve(%);
```

$$0, 1$$

Tyto dva kroky můžeme spojit v jeden následujícím příkazem:

```
> solve(f=g,x);
```

$$0, 1$$

3) Nakonec vypočítáme určitý integrál z rozdílu funkcí *f(x)* a *g(x)* v intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

```
> int(g-f,x=0..1);
```

$$\frac{-1}{3}$$

Nemůže nám vyjít záporný výsledek obsahu útvaru. Aby jsme předešli podobným případům, musíme integrál dát do absolutní hodnoty.

```
> abs(int(g-f,x=0..1));
```

$$\frac{1}{3}$$

Obdobný případ může nastat, když prohodíme dolní a horní mez integrálu nebo odečteme funkce v opačném pořadí. Všechny možnosti, které mohou nastat vidíme na následujících příkladech:

```
> int(f-g,x=1..0);
```

$$\frac{-1}{3}$$

```
> int(f-g,x=0..1);
```

$$\frac{1}{3}$$

```
> int(g-f,x=1..0);
```

$$\frac{1}{3}$$

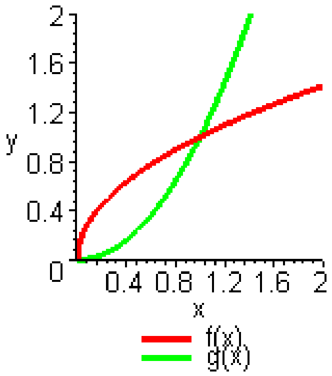
```
> int(g-f,x=0..1);
```

$$\frac{-1}{3}$$

Jak už bylo řečeno, tomuto problému předejdeme použitím absolutní hodnoty: **abs(int(f-g,x=**meze intervalu**))**. Potom už nezáleží na tom, v jakém pořadí funkce odečteme a jestli zaměníme horní a dolní meze intervalu.

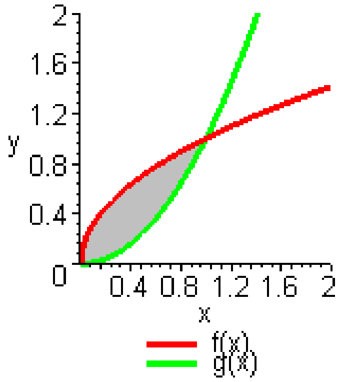
4) Můžeme si v programu Maple nakreslit graf obou funkcí.

```
> plot([f,g],x=0..2,y=0..2,legend=["f(x)","g(x)"],
  thickness=3);
```

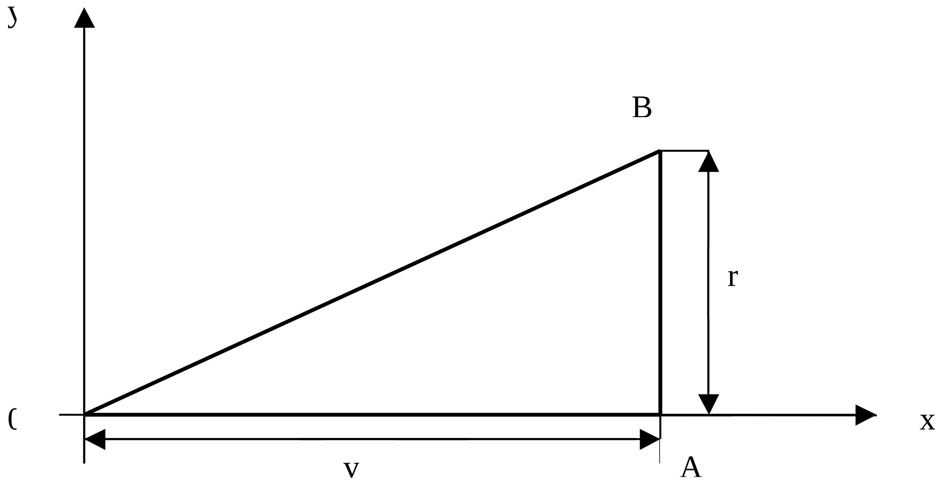


Nyní si označíme vzniklý útvar mezi oběma funkcemi šedou barvou. Tento útvar má obsah roven určitému integrálu z rozdílu funkcí *f(x)* a *g(x)* v intervalu $\langle 0,1\rangle$, to je 1/3. V programu Maple použijeme následující příkazy:

```
> with(plots):
> n1:=plot(x^2,x=0..1,y=0..1,color=white,filled=true):
> n2:=plot(sqrt(x),x=0..1,y=0..1,color=grey,filled=true):
> n3:=plot([f,g],x=0..2,y=0..2,legend=["f(x)","g(x)"],
  thickness=3):
> display(n1,n2,n3);
```



Určitý integrál lze také využít při výpočtu objemu tělesa, které vznikne rotací daného útvaru kolem osy *x*. Útvar je dán křivkou o rovnici *y=f(x)*, která je grafem spojité funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$. Objem takto vzniklého tělesa vypočítáme dle vztahu $V = p\int_a^b f^2(x)dx$.



Obr.2

Na Obr.2 je zakreslen trojúhelník 0AB. Jeho rotací kolem osy *x* vznikne rotační kužel s výškou *v* a poloměrem podstavy *r*. Naším úkolem bude odvodit vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele:

1) Rotuje-li trojúhelník 0AB kolem osy *x* můžeme použít vztah pro výpočet objemu pomocí určitého integrálu: $V = p\int_a^b f^2(x)dx$. Nejprve musíme určit rovnici funkce *f(x)*, jejímž grafem je přímka 0B. Tu určíme jako rovnici přímé úměrnosti s konstantou $k = \frac{r}{v}$, tedy $f(x) = \frac{r}{v}x$.

2) Pomocí programu Maple vypočítáme objem zkoumaného rotačního kužele:

```
> f:=(r/v)*x;
```

$$f := \frac{r\,x}{v}$$

```
> int(Pi*f^2,x=0..v);
```

$$\frac{\pi\, r^2\, v}{3}$$

Vidíme, že nám vyšel známý vzorec z geometrie pro výpočet objemu rotačního kužele $V = \frac{1}{3}pr^2v$.

Při počítání objemu těles pomocí určitého integrálu, může nastat ještě jedna varianta výpočtu, a to v případě, že vzniklé těleso se nedotýká osy *x*. Jak je tomu v následujícím příkladě: Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=2$ kolem osy *x*. Výpočet tohoto příkladu bude v programu Maple vypadat takto:

1) Zadáme do programu Maple funkce a zakreslíme si graf:

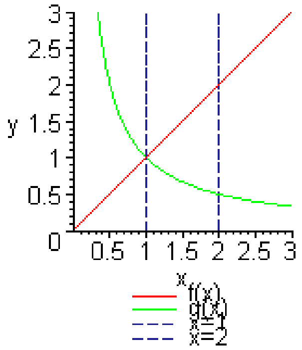
```
> f:=x;
```

$$f := x$$

```
> g:=1/x;
```

$$g := \frac{1}{x}$$

```
> with(plots):
> p1:=plot([f,g],x=0..3,y=0..3,legend=["f(x)","g(x)"]):
> p2:=plot([1,t,t=0..3],color=navy,linestyle=3,numpoints=2,
  thickness=1,legend=["x=1"]):
> p3:=plot([2,t,t=0..3],color=navy,linestyle=3,numpoints=2,
  thickness=1,legend=["x=2"]):
> display(p1,p2,p3);
```



2) Objem zkoumaného rotačního tělesa je $V=V_1-V_2$. Kde V_1 je objem tělesa, které vzniklo mezi funkcí *f(x)* a osou *x* v intervalu od 1 do 2. A V_2 je objem tělesa, které vzniklo mezi funkcí *g(x)* a osou *x* v intervalu od 1 do 2. Postupně si spočítáme jednotlivé objemy těles:

```
> V1:=int(Pi*f^2,x=1..2);
```

$$V1 := \frac{7\pi}{3}$$

```
> V2:=int(Pi*g^2,x=1..2);
```

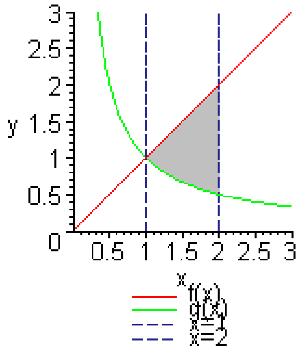
$$V2 := \frac{\pi}{2}$$

```
> V:=V1-V2;
```

$$V := \frac{11\pi}{6}$$

3) V grafu si můžeme vyznačit plochu, která rotuje kolem osy *x* a vytváří nám dané těleso:

```
> with(plots):
> p1:=plot(1/x,x=1..2,y=1/2..2,color=white,filled=true):
> p2:=plot(x,x=1..2,y=1/2..2,color=grey,filled=true):
> p3:=plot([f,g],x=0..3,y=0..3,legend=["f(x)","g(x)"]):
> p4:=plot([1,t,t=0..3],color=navy,linestyle=3,
 numpoints=2,thickness=1,legend=["x=1"]):
> p5:=plot([2,t,t=0..3],color=navy,linestyle=3,
 numpoints=2,thickness=1,legend=["x=2"]):
> display(p1,p2,p3,p4,p5);
```



5.4 Řešené příklady

1) Vypočítejte neurčité integrály:

a) $\int (x^{1/2}+3x^{-1/3})\,dx$ b) $\int (2(\sqrt[3]{x})+3)/x\,dx$ c) $\int (x^3-8)/(x-2)\,dx$

d) $\int (x^3+2x^2-10x)/(x-2)\,dx$ e) $\int \cos(3x+1)\,dx$ f) $\int (\sin x/2+\pi/4)\,dx$

g) $\int (\cos 2x)/(\cos x - \sin x)\,dx$ h) $\int (\mathrm{cotg}^2 x+1/\sin^2 x)\,dx$

i) $\int \cos x(\sin x+7)^2\,dx$ j) $\int e^x \cos x\,dx$ k) $\int xe^x\,dx$

l) $\int x \ln x\,dx$ m) $\int \cos^2 6x\,dx$ n) $\int \sin x\,\sqrt{(\cos x+\pi/2)}\,dx$

o) $\int x\cdot\arctan x\,dx$ p) $\int e^{x^2}\,dx$ q) $\int \arctan^4 x\,dx$

a)

```
> f:=x->x^(1/2)+3*x^(-1/3);
```

$$f := x \to \sqrt{x} + \frac{3}{x^{(1/3)}}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{2\,x^{(3/2)}}{3} + \frac{9\,x^{(2/3)}}{2}$$

b)

```
> f:=x->(2*x^(1/3)+3)/x;
```

$$f := x \to \frac{2\,x^{(1/3)}+3}{x}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$6\,x^{(1/3)} + 3\ln(x)$$

c)

```
> f:=x->(x^3-8)/(x-2);
```

$$f := x \to \frac{x^3-8}{x-2}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4\,x$$

d)

```
> f:=x->(x^3+2*x^2-10*x)/(x-2);
```

$$f := x \to \frac{x^3 + 2\,x^2 - 10\,x}{x - 2}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{x^3}{3} + 2\,x^2 - 2\,x - 4\ln(x - 2)$$

e)

```
> f:=x->cos(3*x+1);
```

$$f := x \to \cos(3\,x + 1)$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{1}{3}\sin(3\,x + 1)$$

f)

```
> f:=x->sin(x/2)+Pi/4;
```

$$f := x \to \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) + \frac{\pi}{4}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$-2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi\,x}{4}$$

g)

```
> f:=x->cos(2*x)/(cos(x)-sin(x));
```

$$f := x \to \frac{\cos(2\,x)}{\cos(x) - \sin(x)}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\sin(x) - \cos(x)$$

h)

```
> f:=x->cot^2*(x)+1/(sin^2*(x));
```

$$f := x \to \cot^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{\cot^2 x^2}{2} + \frac{\ln(x)}{\sin^2}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2} \frac{\cot^2 x^2 \sin^2 + 2 \ln(x)}{\sin^2}$$

i)

```
> f:=x->cos(x)*(sin(x)+7)^2;
```

$$f := x \to \cos(x)\,(\sin(x) + 7)^2$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{1}{3}(\sin(x) + 7)^3$$

j)

```
> f:=x->exp(x)*cos(x);
```

$$f := x \to \mathbf{e}^x \cos(x)$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{1}{2}\mathbf{e}^x \cos(x) + \frac{1}{2}\mathbf{e}^x \sin(x)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2}\mathbf{e}^x (\sin(x) + \cos(x))$$

k)

```
> f:=x->x*exp(x);
```

$$f := x \to x\,\mathbf{e}^x$$

```
> int(f(x),x);
```

$$(-1 + x)\,\mathbf{e}^x$$

l)

```
> f:=x->x*ln(x);
```

$$f := x \rightarrow x \ln(x)$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

m)

```
> f:=x->cos(6*x)^2;
```

$$f := x \rightarrow \cos(6\,x)^2$$

```
> int(f(x),x);
```

$$\frac{1}{12} \cos(6\,x) \sin(6\,x) + \frac{x}{2}$$

n)

```
> f:=x->sin(x)*sqrt(cos(x)+Pi/2);
```

$$f := x \rightarrow \sin(x) \sqrt{\cos(x) + \frac{\pi}{2}}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$-\frac{1}{12} (4 \cos(x) + 2\,\pi)^{(3/2)}$$

o)

```
> f:=x*arctan(x);
```

$$f := x \arctan(x)$$

```
> int(f,x);
```

$$\frac{1}{2} \arctan(x)\, x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

p)

```
> f:=exp(x^2);
```

$$f := \mathbf{e}^{(x^2)}$$

```
> int(f,x);
```

$$\frac{-1}{2} I \sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(x\, I)$$

Program Maple má s tímto příkladem problémy, nelze jej spočítat pomocí reálné analýzy, proto Maple spočítal tento příklad pomocí komplexní analýzy. Odtud pak to **I** ve výsledku. Ve výsledku se ještě objevilo erf, což je funkce definovaná pomocí integrálu z funkce exp($-x^2$). Podrobnosti o funkci zájemce najde v Nápovědě Maple v kapitole Integration.

q)

```
> f:=(arctan(x))^4;
```

$$f := \arctan(x)^4$$

```
> int(f,x);
```

$$\frac{2\, I \arctan(x)^4}{1+\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}} - 2\, I \arctan(x)^4 + 4 \arctan(x)^3 \ln\left(1+\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) - 6\, I \arctan(x)^2 \operatorname{polylog}\left(2, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) + 6 \arctan(x) \operatorname{polylog}\left(3, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) + 3\, I \operatorname{polylog}\left(4, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right)$$

```
> simplify(%);
```

$$\left(-\arctan(x)^4\, I + \arctan(x)^4\, x^2\, I + 2 \arctan(x)^4\, x + 4 \arctan(x)^3 \ln\left(\frac{2\, I}{x+I}\right) + 4\, I \arctan(x)^3 \ln\left(\frac{2\, I}{x+I}\right) x - 6\, I \arctan(x)^2 \operatorname{polylog}\left(2, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) + 6 \arctan(x)^2 \operatorname{polylog}\left(2, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) x + 6 \arctan(x) \operatorname{polylog}\left(3, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) + 6\, I \arctan(x) \operatorname{polylog}\left(3, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) x + 3\, I \operatorname{polylog}\left(4, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) - 3 \operatorname{polylog}\left(4, -\frac{(1+x\, I)^2}{1+x^2}\right) x\right) / (1+x\, I)$$

Pozn.: Pokud pracujete v nějaké nižší verzi programu Maple, je možné, že se Vám u tohoto příkladu nezobrazil výsledek žádný. S každou vyšší verzí se totiž Maple naučí nové věci a umí spočítat více příkladů.

2) Vypočítejte určité integrály v mezích daného intervalu z funkce f(x):

a) $\langle -3,3\rangle$, $f(x) = 2x - 5$

b) $\langle 1,3\rangle$, $f(x) = x^2 + 2x$

c) $\langle -2,1\rangle$, $f(x) = (x + 3)^2$

d) $\langle 0,\pi/2\rangle$, $f(x) = \sin x$

e) $\langle 1,2\rangle$, $f(x) = (x^4-1)/(x^2+1)$

f) $\langle -3,3\rangle$, $f(x) = \sqrt{(2x+10)}$

g) $\langle -1,1\rangle$, $f(x) = e^x$

h) $\langle -1,5\rangle$, $f(x) = 1/(4x+5)$

i) $\langle -2,3\rangle$, $f(x) = x/(x^2+1)$

a)

```
> f:=2*x-5;
```

$$f := 2\,x - 5$$

```
> int(f,x=-3..3);
```

$$-30$$

b)

```
> f:=x^2+2*x;
```

$$f := x^2 + 2\,x$$

```
> int(f,x=1..3);
```

$$\frac{50}{3}$$

c)

```
> f:=(x+3)^2;
```

$$f := (x+3)^2$$

```
> int(f,x=-2..1);
```

$$21$$

d)

```
> f:=sin(x);
```

$$f := \sin(x)$$

```
> int(f,x=0..Pi/2);
```

$$1$$

e)

```
> f:=(x^4-1)/(x^2+1);
```

$$f := \frac{x^4 - 1}{1 + x^2}$$

```
> int(f,x=1..2);
```

$$\frac{4}{3}$$

f)

```
> f:=sqrt(2*x+10);
```

$$f := \sqrt{2\,x + 10}$$

```
> int(f,x=-3..3);
```

$$\frac{56}{3}$$

g)

```
> f:=exp(x);
```

$$f := \mathbf{e}^x$$

```
> int(f,x=-1..1);
```

$$-\mathbf{e}^{(-1)} + \mathbf{e}$$

h)

```
> f:=1/(4*x+5);
```

$$f := \frac{1}{4\,x + 5}$$

```
> int(f,x=-1..5);
```

$$\frac{1}{2}\ln(5)$$

i)

```
> f:=x/(x^2+1);
```

$$f := \frac{x}{1 + x^2}$$

```
> int(f,x=-2..3);
```

$$\frac{1}{2}\ln(2)$$

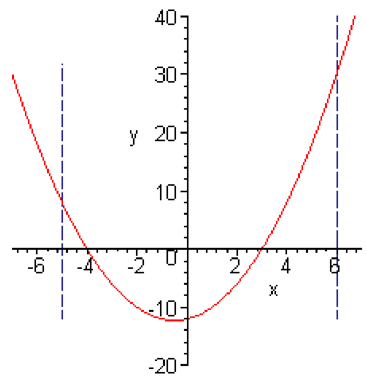
3) Vypočítejte obsah útvaru omezeného křivkou y = f(x) = $x^2 + x - 12$, osou x a přímkami x = -5, x = 6.

Pro názornost si zakreslíme graf:

```
> with(plots):
> f:=x^2+x-12;
```

$$f := x^2 + x - 12$$

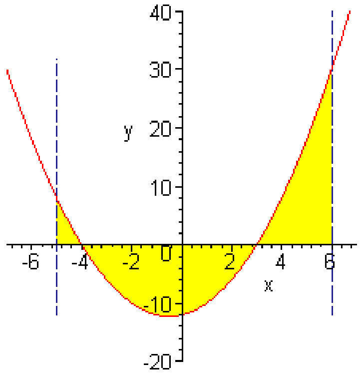
```
> p1:=plot(f,x=-7..7,y=-20..40):
> p2:=plot([-5,t,t=-12..32],color=navy,linestyle=3,
  numpoints=2,thickness=1):
> p3:=plot([6,t,t=-12..40],color=navy,linestyle=3,
  numpoints=2,thickness=1):
> display(p1,p2,p3);
```



Z grafu vidíme průsečíky s osou x: [-5, 0], [-4, 0], [3, 0], [6, 0]. Útvar se skládá ze třech částí, které si na grafu můžeme označit:

```
> with(plots):
> p1:=plot(f,x=-5..-4,y=0..8,color=yellow,filled=true):
> p2:=plot(f,x=-4..3,y=-12..0,color=yellow,filled= true):
> p3:=plot(f,x=3..6,y=0..30,color=yellow,filled= true):
> p4:=plot(f,x=-7..7,y=-20..40):
```

```
> p5:=plot([-5,t,t=-12..32],color=navy,linestyle=3,
  numpoints=2,thickness=1):
> p6:=plot([6,t,t=-12..40],color=navy,linestyle=3,
  numpoints=2,thickness=1):
> display(p1,p2,p3,p4,p5,p6);
```



Nejprve spočítáme obsahy jednotlivých částí, které sečteme a zjistíme výsledný obsah útvaru:

```
> S1:=int(f,x=-5..-4);
```

$$S1 := \frac{23}{6}$$

```
> S2:=int(f,x=-4..3);
```

$$S2 := \frac{-343}{6}$$

Obsah druhé části nám vyšel záporný, protože graf funkce f(x) se nachází pod osou x. Tomuto problému můžeme předejít dvěma způsoby: 1) určitý integrál nebudeme počítat z funkce f(x) ale z funkce opačné, tedy –f(x). 2) určitý integrál z funkce f(x) dáme do absolutní hodnotu, jak je to použito v tomto příkladu:

```
> S2:=abs(int(f,x=-4..3));
```

$$S2 := \frac{343}{6}$$

```
> S3:=int(f,x=3..6);
```

$$S3 := \frac{81}{2}$$

```
> S:=S1+S2+S3;
```

$$S := \frac{203}{2}$$

Obsah útvaru je 203/2.

4) Vypočtěte objem rotačního paraboloidu o poloměru podstavy r = 3 cm a výšce v = 6 cm.

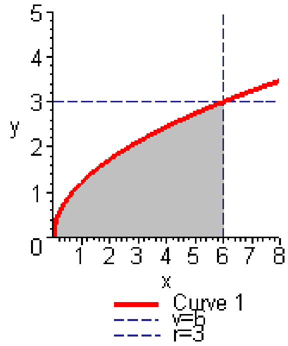
Zakreslíme si část paraboly, která rotuje kolem osy *x*. Poloměr podstavy si znázorníme na ose *y* a výšku na ose *x*. Musíme ještě určit rovnici paraboly z obecné rovnice paraboly $y^2 = 2qx$, kde za [*x*, *y*] dosadíme [v, r]=[6, 3] a vypočítáme 2q = 3/2. Potom dostaneme rovnici hledané paraboly $y^2 = 3/2\ x$.

```
> f:=3/2*x;
```

$$f := \frac{3\,x}{2}$$

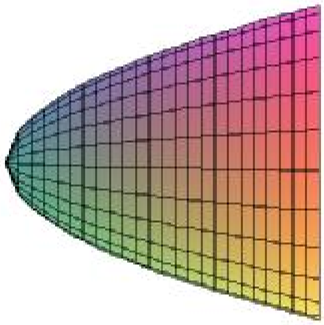
Pro zakreslení do grafu použijeme jen část paraboly pomocí odmocniny: `sqrt(f)`:

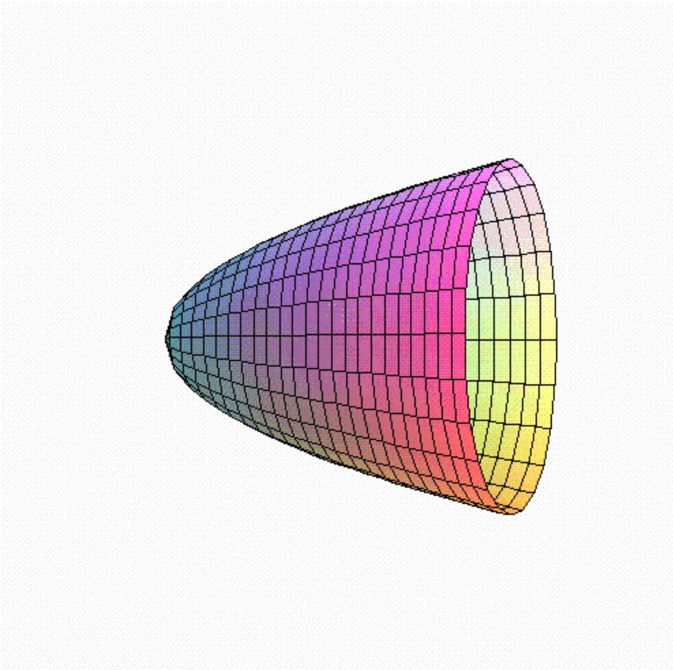
```
> with(plots):
> p1:=plot(sqrt(f),x=0..8,y=0..5,thickness=3):
> p2:=plot([6,t,t=0..5],color=navy,linestyle=3,numpoints=2,
  thickness=1,legend=["v=6"]):
> p3:=plot(3,x=0..8,color=navy,linestyle=3,numpoints=2,
  thickness=1,legend=["r=3"]):
> p4:=plot(sqrt(3/2*x),x=0..6,filled=true,color=grey):
> display(p1,p2,p3,p4);
```



Pomocí trojrozměrného grafu si můžeme daný paraboloid lépe představit:

```
> plot3d([x,sqrt(3/2*x)*cos(t),sqrt(3/2*x)*sin(t)],x=0..6,
  t=0..2*Pi);
```





Vypočítáme objem rotačního paraboloidu:

```
> V:=Pi*int(f,x=0..6);
```

$$V := 27\,\pi$$

Objem rotačního paraboloidu je 27 π cm^3.

6 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit Vás s programem Maple a ukázat jeho využití při studiu matematiky.

Dnešní propojení matematiky a počítačové technologie je v centru zájmu mnoha diskuzí. Na toto téma se uskutečňují různé konference a semináře. Konference na téma ,,Užití počítačů ve výuce matematiky" se koná každý rok na podzim i v Českých Budějovicích, kde ji pořádá Katedra matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a Společnost učitelů matematiky JČMF. Diskutuje se o vlivu počítače při výuce matematiky, jakou roli může sehrát počítač při vyučování nebo jakou roli má učitel při výuce, která je podporovaná počítačem. Více informací můžete zjistit na webových stránkách loňské konference: http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2009/ .

Ve své práci jsem ukázala mnohé výhody programu Maple. Umí provádět jednoduché matematické operace, pracovat s mnohočleny, řešit různé typy rovnic a jejich soustavy, zobrazovat grafy a další. Ale musíme dodržovat pravidla Maple, protože i trochu odlišné zadání příkladu, i když matematický správné, nám může vypsat jiné řešení. Maple je výbornou pomůckou při studiu matematiky, ale pozor, protože spoléhat se můžete především jen sami na sebe. Počítačová technologie stále prochází novým vývojem a každá vyšší verze programu Maple umí další věci navíc, ale není a myslím, že nikdy nebude bezchybná. Maple například vůbec neumí řešit podmínky za kterých má daný výraz smysl, proto si jej musí každý spočítat sám.

Zaměřila jsem se především na oblast diferenciálního a integrálního počtu. Program Maple nám může pomoci s vyřešením limit ve vlastním i v nevlastním bodě, umí i jednostranné limity a derivace, určitý a neurčitý integrál. Jak jsem ukázala na příkladech lze využít i pro užití integrálního počtu.

Došla jsem k závěru, že počítač je nenahraditelná pomůcka při studiu matematiky, která nám otevírá širokou škálu matematických programů. Jeden z nich je právě program Maple. Ano, počítač využívat, ale nezapomenout na úskalí, která v sobě skrývá.

Seznam použité literatury

[1] Boucník, P., Herman, J. aj.: Odmaturuj z matematiky 3, 1. vydání, Brno: Didaktis, 2004, ISBN 80-7358-010-1

[2] Buchar, J. aj.: Úvod do programového souboru Maple V, Brno: Vysoká škola zemědělská v Brně, 1994, ISBN 80-7157-177-2

[3] Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky, 2. vydání, Brno: Didaktis, 2003, ISBN 80-86285-97-9

[4] Čermák, P.: Odmaturuj z matematiky 2, 1. vydání, Brno: Didaktis, 2004, ISBN 80-86285-84-7

[5] Černý, I., Diferenciální a integrální počet 1, 2.vydání, Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2002, ISBN 80-7083-647-4

[6] Hrubý, D., Kubát, J.: Diferenciální a integrální počet, 1. vydání, Praha: Prometheus, 1997, ISBN 80-7196-063-2

[7] Petáková, J.: Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, 1.vydání, Praha: Prometheus, 2005, ISBN 80-7196-099-3

[8] http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple (ze dne 15.1.2010)

[9] manuál k programu Maple verze 9.5

[10] studijní materiály k předmětům Matematická analýza 1, 2, 3 na Pedagogické fakultě Jihočeské Univerzity v Českých Budějovicích 1 25 73