Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakutla - Katedra fyziky

Bakalářský práce

Diferenciální rovnice a jejich využití při počítačovém modelování

Autor: Jitka Březinová

Vedoucí práce: RNDr. Petr Bartoš, Ph.D.

České Budějovice 2009

Prohlášení:

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stánkách.

V Českých Budějovicích dne.................. ....

podpis

Poděkování:

Za odborné vedení, trpělivost, připomínky, podporu a pomoc při vzniku této práce děkuji vedoucímu práce RNDr. Petru Bartošovi, Ph. D. Poděkování také patří rodině za trpělivost a podporu.

Anotace

Práce má řešeršní formu. Cílem práce bylo sjednotit a ucelenou formou podat řešení diferenciálních rovnic. Práce je využijetelná jako učební materiál při řešeních daných rovnic. Práce obsahuje jak řešení teortických příkladů, tak i reálné fyzikální problémy, čímž poukazuje na praktické využití.

Annotation

This thesis is research based. It‘s objective is to provide the solution of differential equations in consolidated and compact form. It includes solutions to both theoretical examples and real physical problems, whereby indicating its practical use, namely as teaching material.

Contents

Part I

Úvod

Práce je zaměřena na diferenciální rovnice. Především na rozdělené těchto rovnic, postupu při řešení jednotlivých typů a řešené příklady, které pomáhají s použitím popsaného postupu. Příklady jsou řešené, jak matematické bez uvedeného kontextu, tak i fyzikální s představením daného problému.

Cílem práce je především sjednotit různé typy rovnic a jejich následné řešení.

Práce je složena z kapitol diferenciální rovnice prvního řádu, druhého řádu a nástin metod numerické matematiky. Kapitola obsahující diferenciální rovnice prvního řádu má spíše doplňující charakter, jelikož při řešení diferenciálních rovnic druhého řádu potřebujeme někdy řešit právě rovnice prvního řádu.

Part II

Diferenciální rovnice

1 Historie

Dějiny diferenciálních rovnic začínají koncem 17.století pracemi I. Newtona (1642 - 1727) a G. W. Leibnize (1646 - 1716), i když se otázky patřící do teorie diferenciálních rovnic vynořily už na rozhraní 16. a 17. století v numerické matematice v pracích J. Napiera (1550 - 1617) při výpočtu logaritmů čísel. V matematické fyzice objev zákona lomu světla vedl R. Descartesa (1596 - 1650) ke konstrukci křivek z vlastností jejich tečen nebo normál.

Dne 11.11.1675 užil Leibniz poprvé integrálního znaku ve vztahu $\int y dy = \frac{1}{2}y^2$ a v roce 1676 začal používat pojmu "aequatio differentiale" v souvislosti s označením vztahu mezi diferenciály dx a dy proměnných x a y.

Na začátku 18.století se úsilí matematiků soustředilo na hledání metod řešení nejjednodšších diferenciálních rovnic 1.řádu. Byly položeny základy klasifikace těchto rovnic podle metod řešení, ale studium těchto otázek mělo v té době empirický, neucelený charakter, takže zatím nelze hovořit o nějaké obecné teorii diferenciálních rovnic.

Koncem 18. století vzrostl neobyčejně význam diferenciálních rovnic; staly se jednou z nejdůležitějších dosciplín a základním nástrojem matematické fyziky. Byly nalezeny hlavní třídy obyčejných diferenciálních rovnic integrovaných kvadraturami, systematické metody přibližného řešení a byla zavedena řada nových základních pojmů. Současně narůstal počet úkolů vedoucích k diferenciálním rovnicím, na jejichž řešení závisel osud nových zákonů a objevů v nejrůznějších oblastech techniky a přírodních věd.

Vedle těchto vnějších popudů, které působily jako hybná síla na rozvoj toerie diferenciálních rovnic, vznikaly i vniřtní síly podporující účinně výstavbu této teorie: narůstaly vnitřní rozpory projevující se v různých formách. Na jedné straně vyvstal problém, jak poznat strukturu a vlastnosti řešení rovnice, kterou nelze řešit explicitně, ale lze ji převést na kvadratury; jeho řešení podnítilo rozvoj teorie speciálních funkcí. Na druhé straně marná snaha, jak najít obecný algoritmus, který by umožnil řešit danou rovnici, nakonec vyústila v úsilí najít podmínky existence a jednoznačnosti řešení, což mělo ohromný význam pro další rozvoj. První etapu dějin diferenciálních rovnic dovršil S. Lie (1842 - 1899), který užitím teorie grup klasifikoval diferenciální rovnice podle infinitesimálních transformací a ukázal, že kvadraturami lze řešit jen malý okruh rovnic, takže problém integrace ztratil tak svůj původní význam a bylo jasné, že obecnou teorii nelze budovat tímto směrem.

Mezitím vznikaly v různých oborech nebeské mechaniky problémy vyžadující studium funkcí definovaných diferenciálními rovnicemi v celém jejich existenčním rozsahu. To dalo podnět k budování kvalitativní teorie H. Poincarém (1854 - 1912) a A. M. Ljapunovu (1857 - 1918). Jejich práce měly ohromný význam pro celý další rozvoj teorie diferenciálních rovnic a jejich aplikací na studium oscilací různých fyzikálních a mechanických soustav.

Další rozvoj teorie diferenciálních rovnic zejména v posledních desetiletích je tak obrovský, že se zcela vymyká jednotnému zpracování. Pro ilustraci je v publikaci [1] uveden seznam disciplin teorie diferenciálních rovnic podle předmětového klasifikačního schématu "AMS (MOS) Subject Classification Scheme (1970)", v němž jsou uvedeny diferenciální rovnice pod kódovacím číslem 34.

---

34 - XX Obyčejné diferenciální rovnice.

- 01 Elementární výklad středoškolské úrovně.

- 02 Přehledné články.

- 03 Historie.

- 04 Programy a výpočty užitím strojové techniky.

34 A XX Obecná teorie

A 05 Elementární metody řešení.

A 10 Existence a jednoznačnost řešení počátečního problému; závislost řešení na poč. podmínkách a parametrech.

A 15 Prodlužování řešení.

A 20 Rovnice v komplexním oboru.

A 25 Analytická teorie: řešení řadami, operační počet atd.

A 35 Rovnice nekonečného řádu.

A 40 Diferenciální nerovnosti.

A 45 Teorie aproximace řešení.

A 50 Numerická aproximace.

34 B XX Okrajové problémy.

B 05 Lineární problémy.

B 10 Vícebodové problémy.

B 15 Nelineární problémy.

B 20 Weylova teorie a její zobecnění.

B 25 Spektrální teorie.

B 30 Speciální rovnice.

34 C XX Kvalitativní teorie.

C 05 Limitní cykly a singulární body.

C 10 Oscilační asymptotické vlastnosti.

C 15 Nelineární oscilace.

C 20 Transformace.

C 25 Periodická a skoroperiodická řešení.

C 30 Metoda průměrů.

C 35 Dynamické systémy.

C 40 Rovnice na varietách.

34 D XX Teorie stability.

D 05 Asymptotické vlastnosti, char. exponenty.

D 10 Perturbace.

D 15 Singulární perturbace.

D 20 Ljapunovská stabilita.

D 25 Stabilita ve smyslu Popova.

D 30 Strukturální stabilita a analogické pojmy.

D 35 Stabilita variet řešení.

34 E XX Asymptotika řešení.

E 05 Asymptotické rozvoje.

E 10 Perturbace.

E 15 Singulární perturbace.

E 20 Metoda WKB.

34 F 05 Rovnice s náhodnou proměnnou.

34 G 05 Rovnice v Banachových a jiných abstraktních prostorech.

34 H 05 Regulace.

34 J XX Funkcionální diferenciální rovnice,

J 05 Obecná teorie.

J 10 Diferenční diferenciální rovnice.

34 K XX Funkcionální diferenciální rovnice s odkloněným argumentem.

K 05 Obecná teorie.

K 10 Okrajové problémy.

K 15 Kvalitativní teorie.

K 20 Teorie stability.

K 25 Asymptotika řešení.

2 Základní názvosloví

2.1 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je matematická rovnice, ve které jako proměnné vystupují derivace funkcí. Diferenciální rovnice stojí v základech fyziky a jejich aplikace najdeme ve většině oblastí lidského vědění.

Matematická teorie diferenciálních rovnic se zabývá existencí řešení, jednoznačností (čili zda je řešení jedno), závislostí řešení na počátečních a okrajových podmínkách.

Ve fyzice a dalších aplikacích je zajímavé zejména získávání analytického řešení, tedy funkce $y(x)$, která rovnici řeší. Pokud taková funkce nejde vyjádřit, vstupuje do hry numerické řešení diferenciálních rovnic.

2.2 Typy diferenciálních rovnich

Základní dělení diferenciálních rovnic je podle typu obsažených derivací:

- **Obyčejné diferenciální rovnice** (ODR): jsou rovnice, obsahují derivace hledané funkce jen podle jedné proměnné . Obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu zapisujeme v obecném tvatu jako

$$F\left(x, y, \mathrm{y'}, y", \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

- **Parciální diferenciální rovnice** (PDR): jsou rovnice, ve kterých se vyskytují derivace hledané funkce podle více proměnných, tedy parciální derivace. Obecně lze parciální diferenciální rovnici zapsat ve tvaru

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x_n^k}, \dots\right) = 0 \tag{2}$$

- **Diferenční algebraická rovnice** (DAE) je diferenciální rovnice zahrnujících diferenční a algebraické požadavky, dané v implicitním formě.

- **Zpožďovací diferenciální rovnice** (DDE) je diferenciální rovnice obsahující funkce jedné závislé proměnné, derivace dané proměnné a je závislá na předchozích stavech závislých proměnných.

Každá těchto kategorií je rozdělena do lineárních a nelineárních podkategorií.

Pokud je dáno m diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí, pak hovoříme o **soustavě diferenciálních rovnic**.

2.3 Rozdělení diferenciálnich rovnic

Diferenciální rovnice dělíme podle různých kriterií.

2.3.1 Podle zápisu

Funkce můžeme zadat různými způsoby, nejčastěji analyticky, graficky a tabulkou.

a) ***Analyticky***

Analytickým předpisem rozumíme zadání funkce ve tvaru $y = f(x)$, říkáme, že funkce je zadána *explicitním vyjádřením* (explicitní funkce). Funkci můžeme vyjádřit také v implicitním tvaru (implicitní funkce) jako $F(x, y) = 0$. Dalším způsobem je zápis v parametrickém tvaru (parametrická funkce) soustavou rovnice $x = f_1(t), y = f_2(t)$, kde t je vhodný parametr.

b) ***Graficky***

Při grafickém zadání funkci vyjádříme grafem.

c) ***Tabulkou (výčtem hodnot)***

Funkční předpis může být zadán také výčtem hodnot, který obvykle uspořádáme do tabulky.

2.3.2 Podle řádu diferenciální rovnice

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která je v ní obsažená. Za řád soustavy diferenciálních rovnic považujeme hodnotu nejvyšší derivace, která se v soustavě vyskytuje. Podle řádu bývají diferenciální rovnice děleny na diferenciální rovnice prvního řádu a diferenciální rovnice vyšších řádů.

Příkladem diferenciální rovnice 1.řádu je rovnice:

$$a_1 y' + a_0 y = b(x) \tag{3}$$

Příkladem diferenciální rovnice 2.řádu je rovnice:

$$a_2 y" + a_1 y' + a_0 y = b(x) \tag{4}$$

2.3.3 Podle lineárnosti

Diferenciální rovnice, v nichž se hledaná funkce vyskytuje pouze lineárně, přičemž se nikde nevyskytují ani součiny hledané funkce s jejími derivacemi, ani součiny derivací této funkce, označujeme jako **lineární diferenciální rovnice**. Také počáteční a okrajové podmínky musí být lineární. Pokud jedna z uvedených podmínek není splněna, hovoříme o **nelineárních diferenciálních rovnicích**.

Lineární diferenciální rovnice musí být zapisovatelná ve tvaru:

$$a_n y^{(n)} + a_{n\text{-}1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x) \tag{5}$$

Nelineární diferenciální rovnice je rovnice, která není lineární. Tato věta naznačuje, jak se pojednává literatuře [8], že mohou být různě “silné” nelinearity. U diferenciálních rovnic druhého řádu, pokud bereme rovnice stacionární (nezávislé na čase), rozeznáváme tyto rovnice:

- *rovnice semilineární* nebo *rovnice s kompaktní nelinearitou* - lineární rovnice s nelineárním členem, který závisí na nederivované neznámé, například

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + g(z) = f \tag{6}$$

kde g je spojitá nelineární funkce, například $g(z) = z^3$. Přitom záleží na růstu funkce g, nelinearita je slabá, pokud g se “příliš” neliší od lineární funkce.

- *kvazilineární rovnice* - rovnice lineární pouze v nejvyšších derivacích

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, z, Dz)\, D^\alpha z = b(x, z, Dz), \tag{7}$$

kde $D^\alpha z$ je (klasická) parciální derivace

$$(\partial^\alpha z) / (\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}). \tag{8}$$

Příkladem je rovnice minimální plochy

$$\left(1 + z_x^2\right) z_{xx} + 2 z_x z_y z_{xy} + \left(1 + z_x^2\right) z_{yy} = 0 \tag{9}$$

- *nelineární rovnice* - rovnice nelineární i v nejvyšší derivaci, obecně ji lze napsat ve tvaru $F\left(x, z, Dz, D^2 z\right) = 0$. Modelovým příkladem je rovnice s nelineárním Laplaceovým operátorem tzv. p-Laplaciánem ($p > 1$):

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|^{p-2} \frac{\partial z}{\partial y}\right) = f, \tag{10}$$

který zobecňuje klasický Laplaceův operátor v případě $p = 2$.

- nelineární úlohou je i lineární rovnice s *nelienární okrajovou podmínkou.*

- místo rovnosti můžeme požadovast nerovnost; z rovnice (1) poté dostaneme nerovnost, která už je úlohou nelineární. Také v okrajových podmínkách mohou být nerovnosti.

- *úlohy s volnou hranicí.* Uvažujeme vedení tepla v prostředí vody a ledu. Poloha rozhraní vody a ledu je další neunámou, kterou je nutno určit, v případě evolučních úloh se toto rozhraní v čase mění. Ve fyzice je takovým příkladem třeba růst tenkých vstev.

- *úlohy s neznámou oblastí* jsou úlohy, ve kterých neznámou je i oblast, ve které rovnici uvažujeme. Příkladem je úloha optimalizace tvaru (optimal design), kdy hledáme optimální tvar součástky; například tvar, kdy součástka má minimální hmotnost, ale při určených zatíženích v ní napětí nepřekročí určenou hranici.

2.3.4 Podle výrazu na pravé straně

Nechť 11 je diferenciální rovnice n-tého řádu tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n\text{-}1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)\,, \qquad (11)$$

tedy rovnici (5).

Homogenní diferenciální rovnice se nazývá diferenciální rovnice, jejíž pravá strana je rovna nule, tedy platí $b(x) = 0$. Těmto rovnicím se také někdy říká zkrácené.

Nehomogenní diferenciální rovnice je taková, jejíž funkce na pravé straně je různá od nuly, tedy $b(x) \neq 0$. Takový typ rovnice bývá někdy v literatuře označován jako úplná diferenciální rovnice.

Je-li funkce na pravé straně rovna jedné, tedy je-li $b(x) = 1$, mluvíme o této rovnici jako o normované.

2.3.5 Podle koeficientů

Diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty je např. rovnice (5), kde $a_i(x)$ jsou koeficienty obecně závislé na x. Jsou-li koeficienty konstanty, jesná se o *diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.* Homogenní rovnice n-tého řádu má tvar:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (12)$$

2.4 Řešení diferenciální rovnice

Za řešení (integrál) diferenciální rovnice (v daném oboru) považujeme každou funkci, která má příslušné derivace a vyhovuje dané diferenciální rovnici. Řešením (integrálem) soustavy diferenciálních rovnic je množina funkcí s derivacemi potřebného řádu, které vyhovují všem rovnicím dané soustavy.

Řešení diferenciálních rovnic dělíme na:

- ***obecné*** - Jako obecné řešení označujeme takové řešení diferenciální rovnice, které obsahuje libovolnou integrační konstantu. Graf funkce, která je řešením diferenciální rovnice, nazýváme *integrální čárou diferenciální rovnice*. Jestliže máme obecné řešení diferenciální rovnice, pak při různých volbách konstanty dostáváme různá řešení, a tedy i různé integrální čáry. Potom se jedná o *soustavu integrálních čar*. Konstantu lze pokládat za parametr této soustavy.

- **partikulární řešení (částečné)** - Partikulární (částečné) řešení je řešení diferenciální rovnice, které získáme přiřazením určité číselné hodnoty každé integrační konstantě obecného řešení. Partikulární řešení můžeme v případě jednoduchých diferenciálních rovnic vypočítat analyticky. Nicméně ve velkém množství případů je analytické řešení příliš obtížné a diferenciální rovnice se řeší numericky. Partikulární řešení odpovídá konkrétnímu fyzikalnímu řešení. Např. pokud uvažujeme barometrickou rovnici, tak tlak počáteční tlak $p_0$určuje další tlaky v dané výšce. V obecném řešení počáteční tlak nevystupuje.

- **singulární (výjimečné)** - Některá řešení nelze získat z obecného řešení. Taková řešení, která se vyskytují pouze u některých rovnic, popř. v některých bodech oboru, označujeme jako singulární nebo výjimečná. Singulární řešení má tu vlastnost, že v každém jeho bodě je porušena jednoznačnost. Graf singulárního řešení se nazývá *singulární integrální čára.*

2.5 Podmínky

Obsahuje-li řešení diferenciální rovnice r integračních konstant, můžeme tyto konstanty eliminovat a omezit tak obecné řešení diferenciální rovnice tím, že budeme požadovat, aby řešení splňovalo r podmínek. Tyto podmínky mohou být okrajové nebo počáteční.

Počáteční podmínky určují, jak má vypadat funkce, popř. její derivace v určitém časovím okamžiku na celé oblasti, na níž diferenciální rovnici řešíme. Řešení rovnic s počátečními podmínkami označujeme jako *Cauchyovy úlohy (problémy)* nebo *úlohy (problémy) s počátečními podmínkami.*

$$y_0 = y\left(x_0\right), y_0' = y'\left(x_0\right) \tag{13}$$

Počáteční podmínky jsou častou situací, která se ve fyzice řeší. Máme danou situaci na počátku a zajímá nás, jak bude problém vypadat během dalších časových okamžiků.

Okrajové podmínky jsou takové podmínky, které musí funkce, popř. její derivace splňovat v určitých bodech. Tyto body obvykle leží na okraji oblasti, na níž diferenciální rovnici řešíme.

Okrajové podmínky se vyskytují tam, kde souřadnice vystupují jako nezávisle proměnné. V publikacích [20] a [21] jsou popsány 4 typy okrajových podmínek:

- 1. druhu - Dirichletova podmínka: "Hodnota závisle proměnné v místě $x_0$je známou funkcí ostatních souřadnic a času."
  - zadáváme hodnoty na hranici oblasti (v případě lineárních diferenciálních rovnic)
  - Příklad: Koncentrace částic v krabici $N_0 = 10^{27} m^3$.
- 2. druhu - Neumannova podmínka: "Hodnota derivace závisle proměnné podle jedné souřadnice (např. podle x v bodě x_0) je známou funkcí ostatních souřadnic a času."
  - zadáváme prostorové derivace funkce (v případě lineárních diferenciálních rovnic)
  - Příklad: Nulový tok plochou $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, kde $\overrightarrow{n}$ je normálový vektor, $\overrightarrow{j}$ představuje tok a $\cdot$ zastupuje skalární součin.
- 3. druhu - Newtonova-Fourierova podmínka: "Hodnota lineární kombinace hodnoty závisle proměnné z v bodě x_0 a její derivace podle x v místě x_0 je známou funkcí ostatních souřadnic a času. Konstanty a, b jsou koeficienty lineární kombinace."
- 4. druhu - Vyjadřuje podmínku rovnosti plošných toků energie na rozhraní mezi dvěma oblastmi v dokonalém styku, mající různé fyzikální vlastnosti."

Přísné rozlišování mezi počátečními a okrajovými podmínkami je zdůvodněno především tím, že věty o existenci a jednoznačnosti řešení počátečního resp. okrajového problému je nutno formulovat rozdílným způsobem.

3 Diferenciální rovnice prvního řádu

Většina fyzikálních zákonů je formulována ve formě diferenciálních rovnic. Jsou to buď parciální nebo obyčejné diferenciální rovnice. V této části se budeme zabývat obyčejnými doferenciálními rovnicemi. Tyto rovnice nejčastěji popisují závislost fyzikálních veličin na čase. Hlavním představitelem těchto rovnic ve fyzice jsou rovnice pohybové, které popisují pohyb těles pod vlivem vnějších ale i vzájemných sil.

3.1 Rovnice se separovatelnými proměnnými

Tato rovnice se dá vyjádřit ve tvaru:

$$y' = f\left(x\right) \cdot g\left(y\right). \tag{14}$$

Řešení diferenciální rovnice lze provést následujícím algoritmem.

Převedeme diferenciál y' na $\frac{dy}{dx}$ a pravá strana se vyjádří jakou součin dvou oddělených funkcí.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x\right) \cdot g\left(y\right) \tag{15}$$

Upravíme tak, aby byly na jedné straně rovnice pouze funkce jedné proměnné a zintegrujeme, čímž získáme výsledek pro funkci y.

$$\int \frac{dy}{g\left(y\right)} = \int f\left(x\right) dx \tag{16}$$

Příklad:

Zadání:

$$y' = \frac{y}{x} \tag{17}$$

Řešení:

Nejprve pomocí algoritmu popsaného výše nahradíme diferenciál $y\acute{}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad y \neq 0. \tag{18}$$

Předpokládáme nenulovou funkci y. V případě, že by funkce byla nulová, by i difenciál byl nulový a jednolo by se o triviální úlohu.

Upravíme rovnice a integrujeme.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \tag{19}$$

Jelikož máme neurčitý integrál, tedy nejsou stanoveny meze, nesmíme zapomenout, že primitivní funkce je rozšířena o konstantu $c_1$na levé starně a c_2 na straně pravé. Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, jedná se o křivky, které jsou "posunuty" právě o danou konstantu, která je v po derivaci nulová.

$$ln\,|y| + c_1 = ln\,|x| + c_2 \tag{20}$$

Jestliže víme, že integrační konstanta je libovolné číslo (určitelné v počátečních a okrajových podmínek), můžeme rovnice upravovat.

$$ln\,|y| = ln\,|x| + c_2 - c_1 \tag{21}$$

Zavedeme jednotnou konstantu, kterou získáme sloučením obou jednotlivých konstant. Z matematického hlediska se rovnice ani řešení tímto krokem nezmění.

$$c_2 - c_1 = c \tag{22}$$

Pomocí jednoduché matematické úpravy dostaneme z původní konstantu tvaru c konstantu tvaru $ln\,e^c$. Opět jsme hodnotu nezměnili, pouze jsme ji upravili do tvaru, který nám umožné lepší manipulaci s rovnicí.

$$ln\,|y| = ln\,|x| + ln\,e^c \tag{23}$$

Upravíme pravou stranu podle věty o součtu logaritmů, tedy že součet logaritmů o stejném základu je roven logaritmu součinu o daném základu.

$$ln\,|y| = ln\,e^c\,|x| \tag{24}$$

Provedeme substituci, kdy nahradíme výraz e^c a zavedeme označení k. Jedná se pouze o formální úpravu.

$$e^c = k \tag{25}$$

Výsledné řešení dostáváme tedy ve tvaru:

$$y = k \cdot x. \tag{26}$$

3.2 Rovnice homogenní

Homogenní diferenciální rovnice je rovnice zapsatelná ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{27}$$

Rovnici řešíme pomocí substituce

$$u = \frac{y}{x}; \qquad y = ux. \tag{28}$$

Následně zderivujeme (28) a dostáváme

$$y' = u'x + u. \tag{29}$$

Dosadíme do rovnice (27)

$$u'x + u = f\left(u\right). \tag{30}$$

Opět upravíme, abychom osamostatnili diferenciál.

$$u' = \frac{f\left(x\right) - u}{x} \tag{31}$$

Tímto postupem jsme dostali diferenciální rovnici prvního řádu se separovatelnými proměnnými, jejíž řešení je popsané v (3.1)

Příklad:
Zadání:

$$x\,y' = y\,ln\frac{y}{x} \tag{32}$$

Řešení:

Nejprve převedeme danou rovnici do tvaru diferenciál y na levou stranu rovnice a zbylé funkce na stranu pravou. Dostáváme tedy rovnici

$$y' = \frac{y}{x}\,ln\frac{y}{x}. \tag{33}$$

Nyní použijeme substituci

$$u = \frac{y}{x}, \tag{34}$$

upravíme a dostadíme do původní rovnice.

$$y' = u'x + u \tag{35}$$

$$u'x = u\,ln\,u - u \tag{36}$$

Získali jsme rovnici se separovatelnými proměnnými, kterou budeme řešit převedením diferenciálu na derivaci.

$$u' = \frac{u\,ln\,u - u}{x} \tag{37}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u\,ln\,u - u}{x} \tag{38}$$

Pokud máme rovnici v tomto tvaru, můžeme ji integrovat.

$$\int \frac{du}{u\,(ln\,u - 1)} = \int \frac{dx}{x} \tag{39}$$

Musíme zohlednit podmínku, abychom nedostali ve jmenovateli nulu, zavedeme proto podmínku

$$u\,(ln\,u - 1) \neq 0. \tag{40}$$

Po integraci dostáváme

$$ln\,|ln\,u - 1| = ln\,x + ln\,e^c. \tag{41}$$

V zájmu přehlednosti zavede substituci

$$e^c = k. \tag{42}$$

Upravíme součet logaritmů na logaritmus součinu

$$ln\,|ln\,u - 1| = ln\,k\,|x| \tag{43}$$

a odlogaritmujeme obě strany rovnice

$$ln\,u - 1 = kx. \tag{44}$$

Potřeujeme zjistit, jak vypadá funkce u, tedy ji osamostatníme

$$ln\,u = kx + 1. \tag{45}$$

Odtraníme logaritmus

$$u = e^{kx+1} \tag{46}$$

a dosadíme obrácenou substituci

$$\frac{y}{x} = e^{kx+1}. \tag{47}$$

Upravením dostáváme výslednou rovnici

$$y = xe^{kx+1} \quad pro\ k \in R. \tag{48}$$

3.3 Rovnice tvaru $y' = f\,(ax + by + c)$

Rovnice tohoto tvaru řešíme pomocí substituce

$$u = ax + by + c. \tag{49}$$

Rovnici zderivujeme a upravíme, čímž dostaneme následující rovnice.

$$u' = a + by' \tag{50}$$

$$y' = \frac{u' - a}{b} \tag{51}$$

Tímto postupem jsme získali rovnici se separovatelnými proměnnými, řešení podle (3.1).

Příklad:
Zadání:

$$y' = (2x + y)^2 \tag{52}$$

Řešení:

Srovnáním s obecným tvarem zjistíme, že hodnoty jednových koeficientů jsou

$$a = 2;\ b = 1;\ c = 0. \tag{53}$$

Substituce po dosazení hodnot vypadá následovně

$$u = 2x + y. \tag{54}$$

Zderivujeme a upravíme tak, aby na levé straně stál samostatný diferenciál y.

$$u' = 2 + y' \tag{55}$$

$$y' = u' - 2 \tag{56}$$

Do původní rovnice dosadíme rovnice (55) a (56)

$$u' - 2 = u^2. \tag{57}$$

Opět izolujeme diferenciál a dosadíme za diferenciál derivaci

$$u' = u^2 + 2 \tag{58}$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 2. \tag{59}$$

Proměnné separujeme a integrujeme.

$$\int \frac{du}{u^2 + 2} = \int dx \tag{60}$$

Zintegrujeme nejprve levou stranu. Výraz upravíme,aby jej bylo možné integrovat.

$$\int \frac{du}{u^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg \frac{u}{\sqrt{2}} \tag{61}$$

Po integraci obou stran rovnice dostáváme

$$\frac{\sqrt{2}}{2} arctg \frac{u}{\sqrt{2}} + c_1 = x + c_2. \tag{62}$$

Zavedeme substituci a nahradíme obě integrační konstanty jednou.

$$arctg \frac{u}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x + k \tag{63}$$

Úpravou izolujeme proměnnou u.

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = tg\sqrt{2}x + k \tag{64}$$

$$u = \sqrt{2}\left(tg\sqrt{2}x + k\right) \tag{65}$$

Dosadíme za substituci (54).

$$2x + y = \sqrt{2}\left(tg\sqrt{2}x + k\right) \tag{66}$$

Upravíme a dostaneme hledanou výslednou rovnici pro y

$$y = \sqrt{2}\left(tg\sqrt{2}x + k\right) - 2x. \tag{67}$$

3.4 Rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$

U těchto rovnic rozlišujeme tři typy řešení.

1) $c = C = 0$

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{Ax+By}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{A+B\frac{y}{x}}\right) \tag{68}$$

Tímto jsme rovnici převedli na rovnici homogenní, jejíž řešení jsme rozebrali v 3.2.

2) $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} a = h \cdot A \\ b = h \cdot B \end{matrix}$

$y' = g\,(ax + by)$

použijeme substituci $u = ax + by$

nebo

$y' = g\,(Ax + By)$

poté použijeme substituci $u = Ax + By$

3) $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{aligned} x &= u + k \\ y &= v + l \\ dx &= du \\ dy &= dv \end{aligned} \tag{69}$$

k,l volíme tak, aby

$$\begin{aligned} ak + bl + c &= 0 \\ Ak + Bl + C &= 0 \end{aligned} \tag{70}$$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{Au+Bv}\right) \tag{71}$$

Řešení nalezneme ad 1) v sekci 3.4.

Příklad

Zadání:

$$y' = \frac{x+y+1}{2x+2y-1} \tag{72}$$

Řešení:

Nejprve určíme, o který typ se jedná, spočítáme tedy následující determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Zjistili jsme, že se jedná o druhý typ, rovnice tedy můžeme přepsat do tvaru

$$y' = \frac{x + y + 1}{2(x + y) - 1}. \tag{73}$$

Použijeme tedy substituci $u = x + y$.

$$u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1 \tag{74}$$

A dosadíme do upravé rovnice (73)

$$u' - 1 = \frac{u + 1}{2u - 1}. \tag{75}$$

Osamostatníme diferenciál a nahradíme jej derivací.

$$u' = \frac{u + 1}{2u - 1} + 1 \tag{76}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u}{2u - 1} \tag{77}$$

Separujeme neznámé a integrujeme

$$\int \frac{2u - 1}{3u} du = \int dx. \tag{78}$$

Po integraci nesmíme zapomenout na integrační konstantu c.

$$\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}ln\,|u| = x + c \tag{79}$$

Nyní již stačí dosadit použitou substituci a získáváme vyslednou rovnici

$$\frac{2}{3}(x + y) - \frac{1}{3}ln\,|(x + y)| = x + c. \tag{80}$$

3.5 Rovnice lineární

Je rovnice zapsatelná ve tvaru

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{81}$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité funkce na zkoumaném intervalu.

Je-li $q(x) = 0$, potom hovoříme o zkrácené LDR, která má separovatelné preměnné.

Je-li $q(x) \neq 0$, hovoříme o úplné LDR, jež se dá řešit pomocí dvou metod, Lagrangeovou metodou variací konstant a Bernouliovou substitucí.

Metody řešení:

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

  1. Určíme obecné řešení příslušné zkrácené lineární diferenciální rovnice

  $$y' + p(x) \cdot y = 0, \tag{82}$$

  ozn.

  $$\tilde{y} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}. \tag{83}$$

  2. Obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice hledáme ve tvaru

  kde $C(x)$ je funkce.

Rovnici (83) zderivujeme a dostáváme

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x). \tag{84}$$

Dosadíme do zadání $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \tag{85}$$

Z prvního členu předešlé rovnice zjistíme, že derivace konstanty C, má

$$C'(x) = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \tag{86}$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\, dx + K \tag{87}$$

$$y = \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\, dx + K \right) \cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{88}$$

- *Bernouliova substituce*

Předpokládáme, že obecné řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' + p(x) \cdot y = 0 \tag{89}$$

má tvar

$$y(x) = u(x) \cdot v(x). \tag{90}$$

Toto obecné řešení a jeho derivaci $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ dosadíme do zadání

$$u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot p(x) = q(x) \tag{91}$$

$$u' \cdot v + [u \cdot v' + u \cdot v \cdot p(x)] = q(x) \tag{92}$$

$$u' \cdot v + u \cdot [v' + v \cdot p(x)] = q(x) \tag{93}$$

Zavádí se volitelná podmínka $v' + v \cdot p(x) = 0$.

$$v = e^{-\int p(x)dx} \tag{94}$$

Dosadíme do rovnice a dostaneme $u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$

$$u = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\, dx + K \tag{95}$$

$$u = \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\, dx + K \right) \cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{96}$$

Pozn. Jak si můžeme všimnout, počítané integrály vyjdou v obou případech stejně.

Příklad:
Zadání:

$$y' + 3y = 5x \tag{97}$$

Řešení:
Zavedeme substituci

$$y = u \cdot v. \tag{98}$$

Zderivujeme a dosadíme do zadání.

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{99}$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 3u \cdot v = 5x \tag{100}$$

Upravíme vytknutím

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + 3v) = 5x. \tag{101}$$

Zvoléme podmínku $v' + 3v = 0$ a po úpravě

$$v' = -3v. \tag{102}$$

Nahradíme diferenciál derivací

$$\frac{dv}{dx} = -3v \tag{103}$$

a zintegrujeme, čímž dostaneme

$$\int \frac{dv}{v} = \int -3dx \tag{104}$$

$$ln\, v = -3x \tag{105}$$

Daný výsledek odlagaritmujeme

$$v = e^{-3x}. \tag{106}$$

Dosadíme do (101)

$$u' \cdot e^{-3x} = 5x \tag{107}$$

a následně integrujeme

$$u = \int 5x \cdot e^{3x} dx = \left| \begin{array}{cc} a = 5x & a' = 5 \\ b' = e^{3x} & b = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{5}{3}x \cdot e^{3x} - \frac{5}{3}\int e^{3x} dx = \frac{5}{3}x \cdot e^{3x} - \frac{5}{9}e^{3x} + C. \tag{108}$$

Dosadíme do zavedené substituce (98)

$$y = \frac{5}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right)e^{-3x}. \tag{109}$$

Po algebraické úpravě dostaneme řešení ve tvaru

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}. \tag{110}$$

Příklad:

Zadání:

$$y' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot y = x^2 + 1 \tag{111}$$

Řešení:

Jedná se o úplnou lineární diferenciální rovnici prvního řádu, kde

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2+1} \tag{112}$$

a

$$q(x) = x^2 + 1. \tag{113}$$

Ukážeme řešení této rovnice pomoci obou uvedených metod.

1) Nejprve pomocí Lagrangeovy metody variace konstant

Příslušná zkrácená lineární diferenciání rovnice má tvar

$$y' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot y = 0. \tag{114}$$

Nalezneme její obecné řešení ve tvaru

$$\hat{y} = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{115}$$

tedy

$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{2x}{x^2+1}dx = -ln\left|x^2+1\right| = -ln\left(x^2+1\right) \tag{116}$$

$$\hat{y} = Ce^{ln\left(x^2+1\right)} \implies \hat{y} = C\left(x^2+1\right). \tag{117}$$

Variance konstanty: obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C(x)\left(x^2+1\right), \tag{118}$$

odkud plyne

$$y' = C'(x)\left(x^2+1\right) + C(x)\,2x \tag{119}$$

po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$C'(x)\left(x^2+1\right) + C(x)\,2x - \frac{2x}{x^2+1}C(x)\left(x^2+1\right) = x^2+1 \tag{120}$$

$$C'(x)\left(x^2+1\right) = x^2+1 \implies C'(x) = 1 \implies C(x) = x + K. \tag{121}$$

Tedy obecné řešení má tvar

$$y = (x + K)\left(x^2 + 1\right). \tag{122}$$

2) Nyní provedeme řešení pomocí Bernoulliovy substituce.

Obecné řešení hledáme ve tvaru $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Ze vztahu

$$y = uv \tag{123}$$

po derivaci plyne

$$y' = u'v + u \cdot v', \tag{124}$$

a po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$u'v + u \cdot v' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot u \cdot v = x^2 + 1, \tag{125}$$

odtud po úpravě

$$u \cdot v' + v\left(u' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot u\right) = x^2 + 1. \tag{126}$$

Volitelná podmínka pro funkci

$$u(x):\ u' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot u = 0, \tag{127}$$

vede k soustavě rovnic

$$u \cdot v' = x^2 + 1 \tag{128}$$

$$u' - \frac{2x}{x^2+1} \cdot u = 0 \tag{129}$$

Druhá z těchto rovnic (129) je zkrácená lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u(x)$ a její řešení lze zapsat ve tvaru

$$u = e^{-\int p(x)dx}, \tag{130}$$

tedy

$$u = x^2 + 1. \tag{131}$$

Dosazením této funkce do první rovnice (128) soustavy dostaneme

$$\left(x^2 + 1\right) \cdot v' = x^2 + 1 \implies v' = 1 \implies v = x + K \tag{132}$$

Obecné řešení jsme hledali ve tvaru $y = u \cdot v$, tedy po dosazení

$$y = \left(x^2 + 1\right)(x + K)\,. \tag{133}$$

Jak vidíme v obou případech nám obecné řešení vyšlo stejné. Volba metody řešení je tedy zcela na nás, na výsledek nemá vliv.

3.6 Rovnice Bernoulliova

$$y' + p(x) \cdot y = y^m \cdot q(x)\,, \tag{134}$$

kde $m \in R$, $m \neq 0$, $m \neq 1$, funkce $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité na zkoumaném intervalu a platí $q(x) \neq 0$. Bernoulliovu diferenciální rovnici převádíme substitucí $z = y^{1-m}$ na lineární diferenciální rovnici.Je-li $m > 0$, potom funkce $y = 0$ je řešením Bernoulliovy diferenciální rovnice. Podobně jako u lineárních diferenciálních rovnic můžeme řešení hledat ve tvaru $y = u \cdot v$.

$$y' + p(x) \cdot y = y^m \cdot q(x) \;/:\; y^m \tag{135}$$

$$\frac{y'}{y^m} + \frac{p(x) \cdot y}{y^m} = q(x) \tag{136}$$

$$y' \cdot y^{-m} + p(x) \cdot y^{1-m} = q(x) \tag{137}$$

Zavedeme substituci $a = y^{1-m}$. Nyní provedeme derivaci $a' = (1 - m) \cdot y^{-m} \cdot y'$. Dosadíme substituci do rovnice (137) a dostaneme

$$\frac{a'}{1-m} + p(x) \cdot a = q(x) \tag{138}$$

Substitucí jsme převedli danou rovnici na rovnici lineární, jejíž řešení nalezneme výše v (3.5).

Příklad:
Zadání:

$$y' + y = x \cdot \sqrt{y} \tag{139}$$

Řešení:

$$y' = x \cdot \sqrt{y} - y \qquad / \, y \neq 0 \tag{140}$$

Funkce y je nenulová, můžeme tedy dělit její druhou odmocninou. Dle pravidel o počítání s mocninami, můžeme druhou derivaci zapsat také jako

$$\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}. \tag{141}$$

Po vydělení dostáváme rovnici tvaru

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} = -y^{\frac{1}{2}} + x. \tag{142}$$

Dle návodu zavedeme substituci

$$a = y^{\frac{1}{2}} \tag{143}$$

a zderivujeme

$$a' = \frac{1}{2} y' \cdot y^{-\frac{1}{2}}. \tag{144}$$

Z předešlé rovnice jsme vyjádřili y' a následně jsme dosadili rovnice (143) a (144) do rovnice (142). Takto dosatneme rovnici

$$\frac{a'}{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}} = -a + x. \tag{145}$$

Po algebraické úpravě vypadá rovnice následovně

$$a' = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x. \tag{146}$$

Nyní vyřešíme tuto lineární rovnici pomocí Bernoulliovy substituce. Dle předepsaného postupu vynásobíme

$$a' = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x \qquad / \cdot e^{-\int -\frac{1}{2}dx} \tag{147}$$

$$a' \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}a \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \tag{148}$$

Levá strana může být přepsaná do tvaru derivace.

$$\int \left(a \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)' = \int \frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \tag{149}$$

Integrací zderivované funkce získáme funkci samotnou. Pravou stranu zintegrujeme.

$$\int \frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x}dx = \left| \begin{array}{cc} u = \frac{1}{2}x & u' = \frac{1}{2} \\ v' = e^{\frac{1}{2}x} & v = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \end{array} \right| = x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int e^{\frac{1}{2}x}dx = x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{\frac{1}{2}x} \tag{150}$$

Musíme přidat integrační konstantu. Rovnice tedy nabyla tvaru

$$a \cdot e^{\frac{1}{2}x} = x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{\frac{1}{2}x} + C. \tag{151}$$

Osamostatníme proměnnou a vydělením výrazu v součinu

$$a = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{\frac{1}{2}x} + C \right) \tag{152}$$

a po úpravě dostáváme rovnici

$$a = x - 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{2}x}. \tag{153}$$

Odstraníme substituci, tedy dosadíme do rovnice (143)

$$y^{\frac{1}{2}} = x - 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \tag{154}$$

a algebraicky upravíme. Dostaneme řešení v podobě

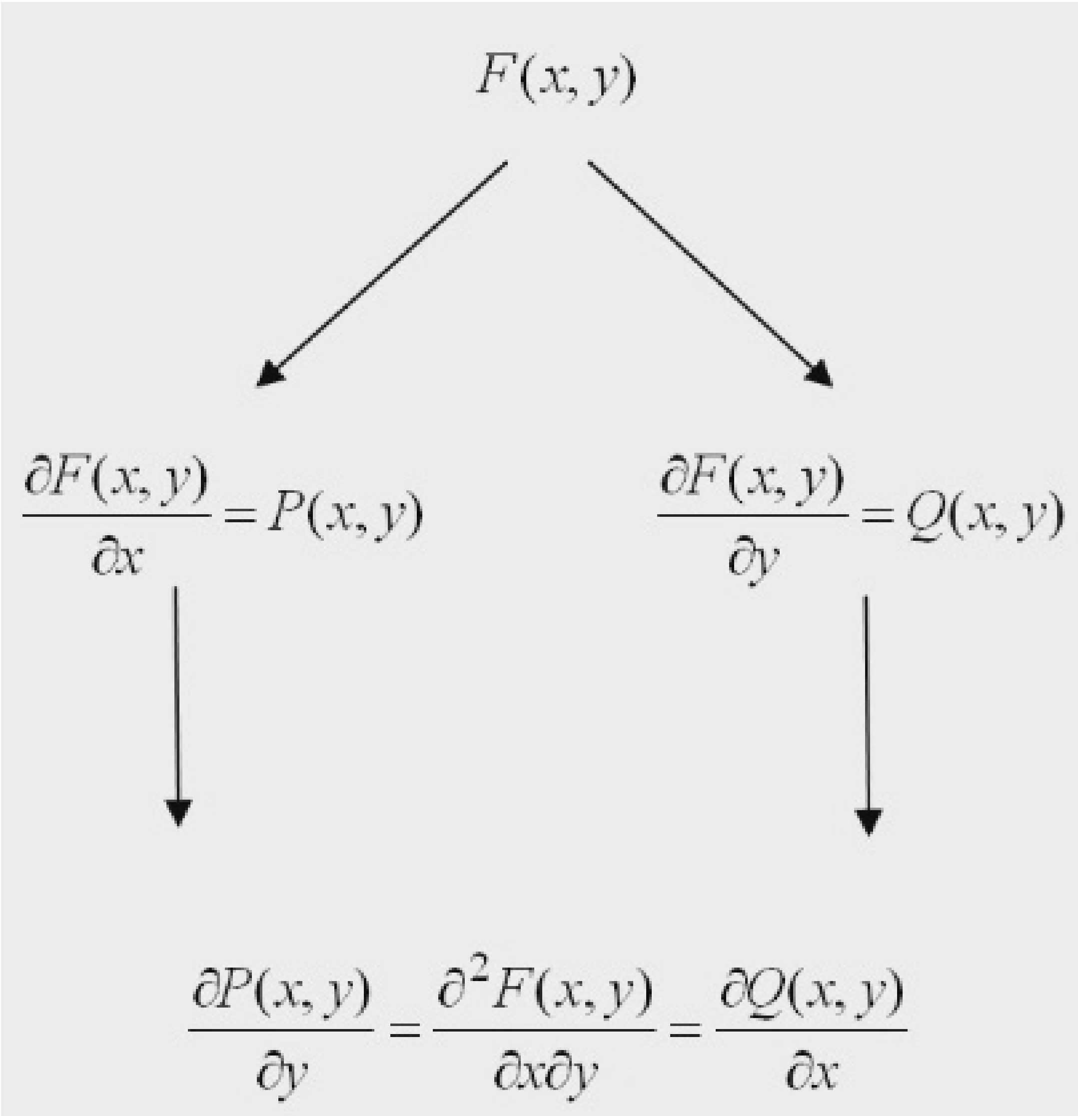
$$y = \left(x - 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \right)^2. \tag{155}$$

3.7 Rovnice exaktní

Jedná se o rovnici ve tvaru

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0. \tag{156}$$

Rovnici tohoto tvaru nazýváme exaktní, je-li její levá strana (zvaná někdy *Pfaffova forma*) totálním diferenciálem funkce $F(x, y)$, kterou nazýváme kmenová funkce.



Obrázek: Schéma exaktních rovnic

Diferenciální rovnice (156) je exaktní, je-li

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \tag{157}$$

Určení kmenové funkce:

Nejprve zintegrujeme $P(x,y)$ podle proměnné x, protože jak je vidět na schématu výše, funkce $P(x,y)$ vznikla derivací podle této funkce. Tedy

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y)\,. \tag{158}$$

Jelikož jsme integrovali neurčitý integrál, dostáváme primitivní funkci plus konstanta C. Protože jsme integrovali podle proměnné x, konstanta C nemůže záviset na proměnné x, ale může záviset na proměnné y, proto jsme místo C použili jako konstantu $\varphi(y)$.

Kvůli přehlednosti označíme $U(x,y) = \int P(x,y)\,dx$. Takže rovnice (158) nabude tvar

$$F(x,y) = \frac{dF}{dy} = \frac{dU}{dy} + \frac{d\varphi}{dy}. \tag{159}$$

Nyní využijeme druhou funkci, $Q(x,y)$, o které víme, že vznikla parciální derivací kmenové funkce podle proměnné y. Proto zderivujeme rovnici kmenové funkce (158), získanou předchozí integrací, podle y. Po algebraické úpravě bude její tvar

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q(x,y) - \frac{dU}{dy}. \tag{160}$$

Pokud dosadíme do rovnice (159), získáme hledanou kmenovou funkci $F(x,y)$.

Příklad:

<u>Zadání:</u>

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0 \tag{161}$$

<u>Řešení:</u>

Než přistoupíme k samotnému řešení rovnice, musíme ověřit, zda se opravdu jedná o exaktní diferenciální rovnici.

$$\frac{dP}{dy} = 0 \qquad = \qquad \frac{dQ}{dx} = 0 \tag{162}$$

Ověřili jsme, že se opravdu jedná o exaktní rovnici. Toto ověření musíme provést vždy, pokud si myslíme, že daná rovnice je exaktní. Použijeme z návodu rovnici (158) a dostaneme

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)\,. \tag{163}$$

Nyní potřebujeme určit, jak vypadá funkce $\varphi(y)$. Pomocí (160) zjistíme, že

$$\frac{d\varphi}{dy} = y, \tag{164}$$

protože U není závislé na y, tedy derivace bude nulová

$$\frac{dU}{dy} = 0 \tag{165}$$

Tedy po integraci je

$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2}. \tag{166}$$

Dosazením do (163) získáme výslednou kmenovou funkci ve tvaru

$$F(x, y) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C. \tag{167}$$

3.8 Integrační faktor

Není-li Pfaffova forma, tedy levá strana rovnice (156) , totálním diferenciálem některé kmenové funkce, násobíme tuto rovnici (156) takovým faktorem $\mu = \mu(x, y)$, abychom dostali exaktní diferenciální rovnici. Faktor μ se pak nazývá **integrační faktor**, nebo **Eulerův multiplikátor**. Pak rovnice

$$\mu(x, y) \cdot P(x, y)\, dx + \mu(x, y) \cdot Q(x, y)\, dy = 0 \tag{168}$$

je exaktní, a platí

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{169}$$

neboli po derivaci platí

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{170}$$

Po krátké algebraické úpravě dostaneme rovnici

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q - \frac{\partial \mu}{\partial y}P. \tag{171}$$

Tímto jsme dostali pro integrující faktor μ parciální rovnici (171), jejíž řešení je obecně obtížnější než řešení původní rovnice. Ve speciálních případech však můžeme integrující faktor μ určit poměrně snadno. Je to zvláště v těchto dvou případech:

a) Integrující faktor $\mu = \mu(x)$, tj. závisí jen na argumentu x. Pak je $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, takže rovnice (171) je pak tvaru

$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$

neboli

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx. \tag{172}$$

Protože levá strana této rovnice je funkcí jen argumentu x, musí totéž platit i o pravé straně. Je-li naopak pravá strana rovnice (172) funkcí pouze argumentu x, pak je $\mu = \mu(x)$. V tom případě platí

$$ln\,|\mu| = \int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx. \tag{173}$$

b) Integrující faktor $\mu = \mu(y)$, tj. závisí pouze na argumentu y. Pak je $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ a rovnice (171) přejde v rovnici

$-\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = P\frac{\partial \mu}{\partial y}$

neboli

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dy \tag{174}$$

Zde je levá strana rovnice závislá pouze na y, a tedy i pravá strana musí záviset jen na argumentu y. Je-li naopak pravá strana rovnice (174) funkcí pouze argumentu y, pak je též $\mu = \mu(y)$.

Příklad:

Zadání:

$$\left(y + y^3\right) dx + \left(x \cdot y^2 + x + 1\right) dy = 0. \tag{175}$$

Řešení:

Zde máme

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 3y^2 - y^2 - 1 = 2y^2 \neq 0. \tag{176}$$

Proto se pokusíme použitím vztahů (172), popř. (174) určit integrující faktor μ. Prvně vypočteme

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2y^2}{x \cdot y^2 + x + 1}, \tag{177}$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2y^2}{y + y^3} = \frac{2y}{1 + y^2}. \tag{178}$$

V druhém případě je uvedený výraz funkcí pouze argumentu y, takže podle (174) platí

$$ln\,|\mu| = -\int \frac{2y}{1 + y^2} dy = -ln\left(1 + y^2\right) = ln\frac{1}{1 + y^2}. \tag{179}$$

Je tedy

$$\mu = \frac{1}{1+y^2}. \tag{180}$$

Příslušná exaktní rovnice je tedy tvaru

$$\frac{y\left(1+y^2\right)}{1+y^2}dx + \frac{xy^2+x+1}{1+y^2}dy = 0 \tag{181}$$

neboli po úpravě

$$y\,dx + \left(x + \frac{1}{1+y^2}\right)dy = 0, \tag{182}$$

přičemž je $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Nyní použijeme funkce $P = y$, $Q = x + \frac{1}{1+y^2}$ k výpočtu kmenové funce.

$$F(x,y) = \int y dx + \int \left(0 + \frac{1}{1+y^2}\right)dy. \tag{183}$$

Hledané obecné řešení je tedy

$$x \cdot y + arctg\, y = C. \tag{184}$$

3.9 Clairautova rovnice

Tato rovnice je tvaru

$$y = x \cdot y' + f(y') \tag{185}$$

a) Obecný integrál této rovnice je tvaru

$$y = C \cdot x + f(C) \tag{186}$$

a dostaneme jej tak, že do rovnice (185) dosadíme místo y' konstantu C.

b) Singulární integrál této rovnice se dostane (pokud existuje) jako *obálka* soustavy přímek

$$y = C \cdot x + f(C), \tag{187}$$

které představují obecný integrál této rovnice.

Příklad:

Zadání:

$$y = x \cdot y' + \left(y' - y'^2\right) \tag{188}$$

Řešení:

Jde o Clairautovu diferenciální rovnici, takže její obecný integrál je tvaru

$$y = C \cdot x + C - C^2. \tag{189}$$

Příslušný singulární integrál dostaneme jako obálku právě určené soustavy integrálních čar. Její rovnici dostaneme vyloučením parametru C z této rovnice a z rovnice, která vznikne jejím derivováním podle C, tj. z rovnice

$$0 = x + 1 - 2C, \tag{190}$$

takže

$$C = \frac{1}{2}(x+1). \tag{191}$$

Dosazením za C uvedené hodnoty do rovnice (189) dostaneme rovnici

$$y = \frac{1}{4}(x+1)^2. \tag{192}$$

Poznámka:

Diferenciální rovnice Clairautova patří mezi diferenciální rovnice prvního řádu, které jsou vzhledem k derivaci y' vyjádřeny *implicitně*, tj, ve tvaru $F(x, y, y') = 0$. Tyto rovnice lze někdy řešit tím, že z nich y'(explicitně) vyjádříme, tj. určíme ve tvaru $y' = f(x, y)$. Někdy však toto vyjádření je velmi složité, popř. je nelze určit (v konečném tvaru vzhledem k elementárním funkcím). V tom případě používáme jiných metod. Poměrně jednoduchým způsobem lze řešit následující Lagrangeovu rovnici, jejímž speciálním případem je právě uvedená Clairautova rovnice.

3.10 Lagrangeova rovnice

Rovnice typu

$$y = x\,h(y') + f(y'). \tag{193}$$

Tuto rovnici řešíme tak, že ji derivujeme podle x a položíme $y' = p = p(x)$, čímž ji převedeme na nezkrácenou lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

Příklad:

Zadání:

$$y = 2xy' + y'^3 \tag{194}$$

Řešení:

Po derivaci dané rovnice podle x a dosazením $y' = p = (x)$ obdržíme rovnici

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} \tag{195}$$

neboli
$$\frac{dp}{dx}\left(2x+3p^2\right)=-p. \tag{196}$$
Odtud pro $p\neq 0$ máme
$$\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}=-3p. \tag{197}$$
Dostali jsme nezkrácenou lineární rovnici pro $x=x\,(p)$. Příslušná zkrácená rovnice má obecný integrál
$$x=C\,p^{-2}. \tag{198}$$

- Pozn. Pro další řešení této rovnice použijeme metodu variace konstant.

  Metoda variace konstant pro řešení úplné lineární diferenciální rovnice

  Mějme lineární diferenciální rovnici
  $$a_2y" + a_1y' + a_0y = B\,(x)\,. \tag{199}$$
  Nejprve vyřešíme zkrácenou diferenciální rovnici
  $$a_2y" + a_1y' + a_0y = 0. \tag{200}$$
  Její řešení je
  $$\tilde{y}=C_1\cdot y_1\,(x)+C_2\cdot y_2\,(x)\,. \tag{201}$$
  Obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice má tvar
  $$y=C_1\,(x)\cdot y_1\,(x)+C_2\,(x)\cdot y_2\,(x)\,. \tag{202}$$
  Derivujeme ho a dostaneme
  $$y'=C_1'\,(x)\cdot y_1\,(x)+C_1\,(x)\cdot y_1'\,(x)+C_2'\,(x)\cdot y_2\,(x)+C_2\,(x)\cdot y_2'\,(x)\,. \tag{203}$$
  Vhodná volitelná podmínka
  $$C_1'\,(x)\cdot y_1\,(x)+C_2'\,(x)\cdot y_2\,(x)=0. \tag{204}$$
  Potom je
  $$y'=C_1\,(x)\cdot y_1'\,(x)+C_2\,(x)\cdot y_2'\,(x)\,. \tag{205}$$
  Opět derivujeme

$$y'' = C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_1(x) \cdot y_1''(x) + C_2(x) \cdot y_2''(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x)\,. \quad (206)$$

Derivace y'', y' a y dosadíme do zadané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme

$$\begin{gathered} C_1\left(A_2 \cdot y_1'' + A_1 \cdot y_1' + A_0 \cdot y_1\right) + C_2\left(A_2 \cdot y_2'' + A_1 \cdot y_2' + A_0 \cdot y_2\right) + \\ + A_2\left(C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2'\right) = B(x) \end{gathered} \quad (207)$$

$$A_2 \cdot y_1'' + A_1 \cdot y_1' + A_0 \cdot y_1 = 0 \quad (208)$$

$$A_2 \cdot y_2'' + A_1 \cdot y_2' + A_0 \cdot y_2 = 0 \quad (209)$$

tedy

$$A_2\left(C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2'\right) = B(x) \quad (210)$$

$$\left(C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2'\right) = \frac{B(x)}{A_2} \quad (211)$$

Dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \quad (212)$$

$$C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = \frac{B(x)}{A_2} \quad (213)$$

Soustavu rovnic (212), (213) řešíme Cramerovým pravidlem.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (214)$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{B(x)}{A_2} & y_2' \end{vmatrix} \quad (215)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1' & \frac{B(x)}{A_2} \end{vmatrix} \quad (216)$$

Determinanty W, W_1, W_2 nazýváme Wronskiány.

$$C_1' = \frac{W_1}{W} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \int \frac{W_1}{W}\,dx \quad (217)$$

$$C_2' = \frac{W_2}{W} \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \int \frac{W_2}{W}\, dx \tag{218}$$

Nesmíme zapomenout dosadit do (201).

Proto obecný integrál rovnice nezkrácené bude (podle metody variace konstanty) tvaru $x = C\,(p)\,p^{-2}$. Jeho dosazením do předešlé rovnice obdržíme

$$\frac{\dot{C}\,(p)}{p^2} = -3p. \tag{219}$$

Odtud je

$$\dot{C}\,(p) = -3p^3 \tag{220}$$

a tedy

$$C\,(p) = -\frac{3}{4}p^4 + C. \tag{221}$$

Proto

$$x = -\frac{3}{4}p^2 + Cp^{-2} \tag{222}$$

a dále

$$y = 2px + p^3. \tag{223}$$

Tyto rovnice vyjadřují hledaný obecný integrál v parametrickém tvaru (pro $p \neq 0$). V případě $p = 0$ obdržíme z dané rovnice $y = 0$, což je další řešení.

4 Diferenciální rovnice druhého řádu

Kvalitativní teorii rovnic 2. řádu dal základ v roce 1836 J. C. F. Sturm svým slavným pojednáním "Mémoire sur les équations différentialles linéaires du second ordre", v němž studoval oscilační vlastnosti řešení a odvodil srovnávací věty, které hrají v celé teorii prvořadou úlohu. Na jeho výzkumy navázal J. Beernoulli, který se v období 1835 - 1841 zabýval řešením okrajového problému (tzv. Sturm-Liouvilleova). Odtud vzešel podnět ke studiu asymptotických vlastností užitím integrálních rovnic. Za zmínku stojí skutečnost, že teprve v 1. polovině 20. století se dostala teorie diferenciálních rovnic 2. řádu opět do středu pozornosti a v dnešní době tvoří jednu z jejích nejrozsáhlejších a nejpropracovanějších disciplin.

Nyní se podíváme na řešení nejjednodušších případů obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.

4.1 Diferenciální rovnice typu $y" = f(x)$

Tato rovnice se řeší postupnou dvakrát opakovou integrací. Při každé integraci dostaneme jednu libovolnou konstantu, takže obecné řešení rovnice $y" = f(x)$ obsahuje dvě integrační konstanty Je

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1 = F(x) + C_1, \tag{224}$$

kde $F(x)$je primitivní funkce k funkci $f(x)$; odtud obecný integrál rovnice $y" = f(x)$

$$y = \int F(x)\,dx + C_1 x + C_2 \tag{225}$$

Příklad:

Těleso bylo vrženo svisle vzhůru rychlostí v (> 0). Určíme zákon tohoto pohybu $s(t)$ pro počáteční podmínky: $s(0) = 0$, $s'(0) = v$, nebudeme přihlížet k odporu prostředí. Zrychlení u tohoto pohybu je stálé, tento pohyb je dán rovnicí

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a \quad (a = konst). \tag{226}$$

V tomto případě je $a = -g$; tedy

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g. \tag{227}$$

Je

$$s' = \frac{ds}{dt} = -g \int dt = -gt + C_1, \tag{228}$$

$$s = \int (-gt + C_1)\, dt = C_1 t - \frac{1}{2} g t^2 + C_2. \tag{229}$$

Z počátečních podmínek plyne jak $C_1 = v$, tak $C_2 = 0$. Zákon svislého vrhu vzhůru určuje partikulární integrál rovnice (227)

$$s = vt - \frac{1}{2} g t^2, \tag{230}$$

kde v je počáteční rychlost vrženého tělesa.

4.2 Diferenciální rovnice typu $y" = f(y)$

Zde funkce f nezávisí ani na x ani na y'. Je to tedy speciální případ rovnice tvaru 4.4, ale rozeberu jej odděleně, protože se vyskytuje v řadě problémů mechaniky.

Rovnice tohoto typu se řeší tak, že nejprve vynásobíme obě strany rovnice funkcí y', bude

$$y" \cdot y' = f(y) \cdot y'. \tag{231}$$

Odtud plyne

$$\frac{1}{2} \left[(y')^2 \right]' = y' f(y) \tag{232}$$

neboli

$$(y')^2 = 2 \int f(y)\, dy + C_1 = F(y) + C_1. \tag{233}$$

Je tedy

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{F(y) + C_1}} = dx \tag{234}$$

a odtus dostaneme

$$x + C_2 = \int \frac{\pm dy}{\sqrt{F(y) + C_1}}. \tag{235}$$

Příklad:

Jako příklad použití rovnice typu $y" = f(y)$je popis rovinného matematického kyvadla, tj. hmotného bodu o hmotnosti m zavěšeného na (nehmotné) niti délky l. Pokud chceme popsat výkyv φ od svislé polohy jako funkci času, $\varphi = \varphi(t)$, dojdeme k rovnici rovnováhy sil

$$ml\ddot{\varphi}(t) + mg\, sin\varphi(t) = 0, \tag{236}$$

kde g je gravitační konstanta, a odtud k diferenciální rovnici (vydělením obou stran rovnice výrazem ml)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} sin\varphi = 0. \tag{237}$$

Pro malé výkyvy lze $sin\varphi$ nahradit hodnotou φ a dostaneme tzv. linearizovanou rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{238}$$

Tuto rovnici budeme schopni později řešit.

Podle uvedeného postupu rovnici

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\, sin\varphi \tag{239}$$

funkcí $\dot{\varphi}$ke vztahu

$$ml\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = -mg\, sin\varphi\dot{\varphi} \tag{240}$$

daný vztah zintegrujeme a vynásobíme číslem l, dojdeme tak ke vztahu

$$\frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\, cos\varphi = C, \tag{241}$$

což je diferenciální rovnice prvního řádu. Označíme-li $E = mgl + C$, můžeme poslední vztah přepsat takto:

$$\frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\,(1 - cos\varphi) = E, \tag{242}$$

což je tzv. energetická věta. Zde je $E_{kin} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$ kinetická energie,
$E_{pot} = mgl\,(1 - cos\varphi)$ potenciální energie. Řešení vede na výpočet integrálu tvaru

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{sin^2 \frac{\alpha}{2} - sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \tag{243}$$

kde αje jistý parametr, $0 < \alpha < \pi$. Tento integrál nelze spočítat elementárními metodami, lze ho však převést na integrál tvaru

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, s\right) = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\alpha}{2} sin^2 t}}, \tag{244}$$

což je tzv. eliptický integrál prvního druhu. Hodnoty funkce F lze najít
v tabulkách a pomocí inverzní funkce F^{-1}dojdeme ke vztahu

$$\varphi\,(t) = 2arcsin\left[k\, sinF^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{g}{l}t}\right)\right], \tag{245}$$

kde $k = sin\frac{\alpha}{2}$.

4.3 Diferenciální rovnice typu $y" = f(x, y')$

Zde se funkce f vyskytuje nezávisle na proměnné y. Zavedeme-li novou neznámou funkci z vztahem

$$z(x) = y'(x) \tag{246}$$

dostaneme pro z rovnici

$$z' = f(x, z) \tag{247}$$

tj. diferenciální rovnici prvního řádu. Vzhledem k počátečním podmínkám

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0^1 \end{aligned} \tag{248}$$

rozřešíme nejprve počáteční úlohu

$$z(x_0) = y'(x_0) = y_0^1 \tag{249}$$

a hledanou funkci dostaneme z (246) přímo integrací, přičemž vzhledem k první podmínce v (248) bude

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} z(t)\, dt. \tag{250}$$

Příklad:

Mějme lano upevněné na dvou bodech A, B a působením zemské tíže prohnuté. Tuto situaci popisuje diferenciální rovnice tvaru

$$y" = a\sqrt{1 + (y')^2}. \tag{251}$$

Konstanta a je určena vlastnostmi lana (jeho průřezem, specificku vahou atd.). Řešení rovnice (251) se nazývá řetězovka.Dle výše popsané postupu použijeme substituci (246) a dostaneme rovnici tvaru (247), tj.

$$z' = a\sqrt{1 + z^2} \tag{252}$$

a metodou separace proměnných zjistíme, že

[1]

$$z(x) = sinh(ax + C_1). \tag{253}$$

Podle (250) je tedy řetězovka popsána funkcí

$$y(x) = \frac{1}{a} cosh(ax + C_1) + C_2.$$

Hodnoty zatím libovolných konstant C_1, C_2 určíme pomocí souřadnic bodů A a B.

4.4 Diferenciální rovnice typu $y" = f(y, y')$

Zde tedy funkce f nezávisí na proměnné x. Budeme předpokládat, že derivace řešení, tj. funkce $y´$, kterou zatím neznáme, je nenulová, tj. buď všude kladná nebo všude záporná. Pak je funkce y ryze monotonní a existuje tedy funkce k ní inverzní

$$x = g(y). \tag{254}$$

Zavedeme-li novou funkci $p = p(y)$ předpisem

$$p(y) = y'(g(y)), \tag{255}$$

bude

$$p'(y) = \frac{dp}{dy} = y"(g(y)) \frac{dg}{dy} = y"(g(y)) \frac{1}{p(y)}, \tag{256}$$

neboť podle pravidla o derivování inverzních funkcí je

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'(g(y))} = \frac{1}{p(y)}. \tag{257}$$

Protože

$$y" = f(y, y') = f(y, p), \tag{258}$$

dostáváme pro funkci $p(y)$diferenciální rovnici prvního řádu

$$p' = \frac{1}{p} f(y, p). \tag{259}$$

Příklad:

[1]Hyperbolický sinus je definován vztahem

$$sinh\, x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

Uvažujme mechanický kmitající systém, tvořený hmotným bodem o hmotnosti m a pružinou o tuhosti k. Výkyvy hmotného bodu ve směru osy x v čase t označíme $x\left(t\right)$.Bereme-li v úvahu tlumení, úměrné čtverci rychlosti (s konstantou úměrnosti c), dostaneme z rovnice rovnováhy sil diferenciální rovnici

$$m\,x" + c\,x' + k\,x = 0, \tag{260}$$

je-li $x' > 0$.

Pozn: Jedná se o rovnici typu $y" = f\left(y, y'\right)$, pouze píšeme x místo y a t místo x.

Upravíme rovnici (260) do tvaru

$$x" = -\frac{c}{m}x'^2 - \frac{k}{m}x \tag{261}$$

Zavedeme-li tedy funkci $p\left(x\right) = x'\left(g\left(x\right)\right)$, kde $t = g\left(x\right)$ je funkce inverzní k hledané funkci $x = x\left(t\right)$, dostaneme rovnici (259), tj.

$$p' = \frac{1}{p}\left[-\frac{c}{m}p^2 - \frac{k}{m}x\right] = -\frac{c}{m}p - \frac{k}{m}x\,p^{-1} \tag{262}$$

To je Bernoulliova rovnice s parametrem $\alpha = -1$, a jejím řešením je funkce

$$p\left(x\right) = x'\left(g\left(x\right)\right) = \sqrt{-\frac{k}{c}x + \frac{mk}{2c^2} + C_1 e^{-\frac{2c}{m}x}}.$$

Protože $g'\left(x\right) = \frac{1}{p(x)}$, dostaneme pro funkci g vzorec

$$g\left(x\right) = \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{c}x + \frac{mk}{2c^2} + C_1 e^{-\frac{2c}{m}x}}} + C_2 \tag{263}$$

a hledanou funkci $x = x\left(t\right)$ dostaneme přechodem k inverzní funkci. Tím je náš problém "vyřešen", ovšem výpočet integrálu v (263) je možný jen přibližnými metodami.

5 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

Parciální diferenciální rovnice druhého řádu jsou parciální diferenciální rovnice, které obsahují parciální derivace nejvýše druhého řádu. V obecném tvaru je lze zapsat jako

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\right) = 0 \tag{264}$$

Parciálním diferenciálním rovnicím se také říká rovnice matematické fyziky, protože popisují fyzikální jevy. Ve fyzice parciální diferenciální rovnice popisují chování veličiny, která kromě času závisí také na prostorových proměnných. Rovnice modelují přenos tepla, proudění tekutin, deformace tuhého tělesa a další jevy mechaniky kontinua i dalších fyzikálních příladně jiných oborů.

5.1 Historická poznámka

Zatímco v dnešní době je studium parciálních diferenciálních rovnic v popředí zájmů četných fyziků a matematiků, je možno první počátky teorie těchto rovnic klást do první poloviny 18. století. Podnět k vzniku teorie parciálních diferenciálních rovnic daly četné fyzikální problémy, které bylo nutno řešit s rozvíjející se průmyslovou výrobou a z hledisek nových poznatků při studiu přírodních jevů. Prvním takovým problémem byla úloha o kmitech struny. Na tuto úlohu narazil již počátkem 17. století astronom Galileo Galilei (1564 - 1642), ale teprve anglický matematik a fyzik Brook Taylor (1685 - 1731) ji dovedl vyjádřit matematickou formulací. Příslušnou diferenciální rovnici sestavil pak Francouz Jean B. Le Rond d´Alembert (1717 - 1783), který také podal její první řešení ve tvaru součtu dvou libovolných funkcí. Po něm ji v roce 1753 vyřešil švýcarský matematik Daniel Bernoulli (1700 - 1782) a vyjádřil její řešení ve tvaru Fourierovy řady.

Transformacemi digerenciálních rovnic druhého řádu na kanonický tvar se jako první zabýval Leonard Euler (1707 - 1783) a po něm francouzští matematici Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) a Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), kteří transformovali parciální diferenciální rovnici prvního řádu na systém obyčejných diferenciálních rovnic.

Také geometrické aplikace silně ovlivnily rozvoj teorie parciálních diferenciálních rovnic. V tomto směru si získal velké zásluhy Francouz Gaspard Monge (1746 - 1818), jeden z hlavních budovatelů klasické diferenciální geometrie.

Otázkami existence řešení parciálních diferenciálních rovnic se zabývala známá ruská matematička Soňa V. Kovalevskaja (1850 - 1891), profesorka matematické analýzy na univerzitě ve Stockholmu. Z dalších budovatelů teorie parciálních diferenciálních rovnic vynikli zvláštěm Édouard Goursat (1858 - 1936), Lazarus Immanuel Fuchs (1833 - 1902), Henri Poincaré (1854 - 1912), David Hilbert (1862 - 1943), Herrmann Weyl (1885 - 1956), George David Birkhoff (1884 - 1944), sovětský matematik Ivan Georgijevič Petrovskij (1901 - 1973) a mnozí další. Z našich matematiků, kteří se hlavně zabývali aplikacemi parciálních difernciálních rovnic na diferenciální geometrii, dosáhli světové úrovně Eduard Čech (1893 - 1960), Otakar Borůvka (1899), Jiří Klapka (1900 - 1976) aj.

5.2 Speciální typy rovnic druhého řádu

Některé parciální diferenciální rovnice druhého řádu, které mají speciální tvar, lze řešit, popř. zjednodušit, pomocí vhodných analytických postupů.

5.2.1 Parciální derivace jedné proměnné

Do této skupiny patří např. parciální diferenciální rovnice, které obsahují parciální derivace pouze podle jedné proměnné. Jde tedy o rovnice typu

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right) = 0. \tag{265}$$

Rovnice, které mají tento tvar, můžeme řešit jako obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu.

5.2.2 Snižování řádu derivace

Další skupinou parciálních diferenciálních rovnic jsou rovnice, u nichž lze snížit řád derivace. Jde o rovnice typu

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}\right) = 0. \tag{266}$$

V rovnici tohoto typu použijeme substituci

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = y. \tag{267}$$

S pomocí této substituce převedeme rovnici do tvaru

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{268}$$

Tato rovnice je parciální diferenciální rovnice prvního řádu, jejímž obecným řešením je funkce y. Toto řešení dosadíme do $\frac{\partial z}{\partial x_1} = y$ a integrací získáne obecné řešení původní rovnice.

5.2.3 Separace proměnných

Často používanou metodou je *metoda separace proměnných (Fourierova metoda).* Tato metoda je založena na předpokladu, že řešení diferenciální rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$z\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) = g\left(x_1\right) + h\left(x_2, x_3, \ldots x_n\right), \tag{269}$$

popř. ve tvaru

$$z\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) = g\left(x_1\right) h\left(x_2, x_3, \ldots x_n\right). \tag{270}$$

Dosadíme-li některý z uvedených výrazů do parciální diferenciální rovnice druhého řádu, a pokud se podaří oddělit při řešení obě funkce g i h, pak tímto postupem převedeme parciální diferenciální rovnici na soustavu diferenciálních rovnic. Použití některé z uvedených substitucí má tedy za cíl převést parciální diferenciální rovnici druhého řádu do tvar

$$G\left(x_1, g, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right) = H\left(r\right) \tag{271}$$

$$r = x_2, x_3, \cdots, x_n, h, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \frac{\partial h}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$, \cdots, \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_3 \partial x_4}, \cdots, \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}$$

Vzheledem k tomu, že na levé straně je pouze proměnná x_1, zatímco na pravé straně jsou pouze proměnné $x_2, x_{3,} \ldots, x_n$, může být tato rovnost splněna pouze tehdy, pokud se obě strany rovnice rovnají téže konstantě. Uvedenou rovnici lze tedy vyjádřit soustavu rovnic

$$G\left(x_1, g, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right) = K \tag{272}$$

$$H\left(r\right) = K$$

$$r = x_2, x_3, \cdots, x_n, h, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \frac{\partial h}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$, \cdots, \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_3 \partial x_4}, \cdots, \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}$$

Přestože nelze separaci proměnných použít ve všech případech, je tato metoda účinná i při řešení některých nelineárních parciálních diferenciálních rovnic.

5.3 Lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu

Jako lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu pro fuknci dvou nezávisle proměnných *x,y* označujeme diferenciální rovnici, kterou lze zapsat v obecném tvaru

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}+$$

$$+D(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}+cz(x,y)+G(x,y)=0, \tag{273}$$

kde A,B,C,D,E,F,G jsou spojité funkce proměnných x, y v oblasti, ve které uvedené rovnice řešíme. Vytvoříme determinant

$$\delta=\begin{vmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) \end{vmatrix} \tag{274}$$

Pokud si pro všechny body ve zkoumané oblasti determinant δ zachovává své znaménko (v celé oblasti na tedy determinant stejné znaménko), pak uvedené diferenciální rovnice dělíme následujícím způsobem:

- pro $\delta>0$ jde o *eliptickou diferenciální rovnici*
- pro $\delta=0$ jde o *parabolickou diferenciální rovnici*
- pro $\delta<0$ jde o *hyperbolickou diferenciální rovnici*

Mění-li se však znaménko diskriminantu δ v daném oboru, říkáme, že rovnice (273) je v daném oboru *smíšeného typu*.

Kanonický tvar rovnice a fyzikální interpretace Každou rovnici daného typu lze vhodnou transformací souřadnic v okolí každého bodu (x_0,y_0) náležícího zkoumané oblasti převést na tzv. kanonický tvar.

5.3.1 Diferenciální rovnice parabolického typu

Kanonický tvar parabolické rovnice lze zapsat jako

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c_2(x,y)z+d_2(x,y)=0. \tag{275}$$

V obecném tvaru bývá také kanonická tvar zapisován takto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F_1\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{276}$$

popř. lze zapsat i takto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{277}$$

nebo pokud budeme chtít rovnici zapsat pomocí Laplaceova operátoru, musíme si uvědomit, že parabolické rovnice patří mezi tzv. *evoluční úlohy.* Modelují časově závislé jevy, jedna proměnná označená t má význam času, ostatní jsou proměnné x_i(nebo x,y,z) popisují prostorovou polohu bodu v čase.

Kanonický tvar parabolické rovnice lze tedy zapsat ve tvaru $z_t = \triangle z + F$, kde Laplaceův operátor $\triangle$ obsahuje součet druhých derivací pouze prostorových proměnných. Rovnice modekuje vedení tepla v tuhém prostředí. Obvykle uvažujeme počáteční okrajovou úlohu, kdy je rovnice doplněna jednou okrajovou podmínkou podél hranice oblasti a jednou počátečí podmínkou.

Rovnice parabolického typu mají jednu charakteristiku $\varphi_1(x, y) = C_1$, kterou získáme integrací rovnice

$$Ay - Bdx = 0$$

Pravděpodobně jako nejznámějším příkladem parciální diferenciální rovnice parabolického typu je rovnice, která je označovaná jako *rovnice vedení tepla.* Matematická formulace nestacionárního vedení tepla umožňuje obecné vyjadření diferenciální rovnice vedení tepla. V obecném vyjádření se rovnice vedení tepla zapisuje jako

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} + f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \tag{278}$$

Tato nehomogenní rovnice je pojmenována podle toho, že popisuje vedení tepla v n-rozměrném prostoru s časem t.

Pokud v rovnici vedení tepla platí $f = 0$, pak dostaneme homogenní rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \tag{279}$$

Z fyzikálního hlediska se jedná o případ, kdy se ve vyšetřované oblasti nenachází žádné zdroje tepla.

Omezme se pro jednoduchost na rovnici

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{280}$$

Tato rovnice určuje chování funkce $z(t, x)$, která závisí na dvou proměnných.

První proměnná t mívá význam času, druhá x bývá prostorová souřadnice. Rovnici (280) lze snad zobecnit pro více prostorových proměnných např.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \tag{281}$$

Jak již bylo řečeno, příkladem parabolické rovnice je rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \varrho c\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{282}$$

tato rovnice popisuje časový vývoj teploty $T\left(t,x\right)$ uvnitř nekonečné stěny. Konstanta k má význam tepelné vodivosti materiálu, c je tepelná kapacita a ϱ je hustota.

Jiným příkladem je rovnice difuze pro hustotu částic $n\left(t,x\right)$

$$\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial n}{\partial t} = 0, \tag{283}$$

kde k je transportní koeficient.

Parabolická rovnice nám vlastně říká, že tam kde je druhá derivace záporná, hledaná funkce v čase klesá a naopak. Dochází tak k vyhlazování průběhu funkce - teploty se vyrovnávají, hustoty částic v různých bodech se srovnávají.

Abychom mohli rovnici řešit je třeba znát hodnoty hledané funkce v počátečním čase $t = 0$. Počáteční podmínka má obecně tvar

$$z(0,x) = p\left(x\right), \tag{284}$$

kde $p\left(x\right)$ je známá funkce.

Zadání počáteční podmínky však pro výpočet nedostačuje. Je třeba také vědět, co se odehrává na okrajích studované oblasti. Budeme uvažovat interval $x\epsilon\left\langle y_1, y_2\right\rangle$. Např. při řešení rovnice vedení tepla, bude $x = y_1$ reprezentovat vnitřní povrch stěny a $x = y_2$ vnější povrch stěny.Okrajová podmínka může mít dva základní tvary.

První možností je přímo zadání hodnot na hranici oblasti (Dirichletova podmínka) tj.

$z(t,y_1) = g_0\left(t\right) \qquad \textit{nebo} \qquad z(t,y_2) = g_1\left(t\right).$

Druhou možností je zadání prostorové derivace funkce (Neumannova podmínka) tj.

$\frac{\partial z}{\partial x}\left(t,y_1\right) = g_2\left(t\right) \qquad \textit{nebo} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(t,y_2) = g_3\left(t\right).$

Například u rovnice vedení tepla této podmínce odpovídá zadání tepelného toku, např. nulová derivace odpovídá dokonale izolovanému povrchu stěny.

5.3.2 Diferenciální rovnice hyperbolického typu

Hyperbolická rovnice má kanonický tvar

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_3(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b_3(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c_3(x,y)\,z + d_3(x,y) = 0. \qquad (285)$$

Kanonický tvar bývá také zapisován

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad (286)$$

Používá se také jiný kanonický tvar, který zapisujeme jako

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad (287)$$

případně pokud budeme chtít rovnici zapsat pomocí Laplaceova operátoru, musíme mít na paměti, že hyperbolické, stejně jako parabolické, rovnice patří mezi tzv. *evoluční úlohy*. Modelují časově závislé jevy, jedna proměnná označená t má význam času, ostatní proměnné x_i (nebo x, y, z) popisují polohu bodu v prostoru v daném časovém okamžiku.

Kanonický tvar hyperbolické rovnice s použitím Laplaceova operátoru lze zapsat ve tvaru z_{tt}=△z+F. Rovnice modeluje různé kmity a šíření vln. Obvykle uvažujeme počáteční okrajovou úlohu, kdy je rovnice doplněna opět jednou okrajovou podmínkou podél celé hranice oblasti ale dvěma počátečními podmínkami.

Rovnice hyperbolického typu mají dvě reálné charakteristiky $\varphi_1(x,y) = C_1$ a $\varphi_2(x,y) = C_2$, které získáme integrací rovnice

$$Ady - \left(B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right) dx = 0. \qquad (288)$$

Významnou hyperbolickou diferenciální rovnicí druhého řádu je *vlnová rovnice*, která popisuje celou řadu vlnění, ať už v akustice, optice, elektromagnetismu, nebo v mechanice při popisu strun nebo kapalin.

Jako vlnovou rovnici označujeme rovnici, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}, \qquad (289)$$

z přitom představuje skalární funkci polohy a času.

Například pro harmonický oscilátor má tato rovnice tvar

$$y = a\,sin\,(\omega t + \varphi)\,, \qquad (290)$$

kde je ω úhlová rychlost a φ je počáteční fáze.

Pod pojmem vlnová rovnice je obvykle myšlena homogenní rovnice. V obecnějším tvaru má vlnová rovnice nehomogenní vyjádření

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}+f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right). \tag{291}$$

Při popisu vlnění se pojem vlnová rovnice užívá k označení diferenciální rovnice, která charakterizuje dynamiku daného vlnění. V takovém případě může být označení vlnová rovnice použito pro libovolnou (i nelineární) diferenciální rovnici.

Zabývejme se pro jednoduchost hyperbolickou rovnicí ve tvaru

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{292}$$

Opět hledáme funkci $z(t,x)$, která je funkcí času t a prostorové souřadnice x. Rovnice (292) se často nazývá vlnová rovnice. Ve fyzice se totiž touto rovnicí popisuje šíření vlnění, například na napnuté struně. Funkce $z(t,x)$ potom reprezentuje výchylku struny z rovnovážné polohy v čase t a v místě x. Konstanta a představuje rychlosti šíření vlny po struně.

Vlnová rovnice pro strunu je pohybová rovnice - říká nám, že zrychlení úseku struny $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ je úměrné síle, která na něj působí. Tam, kde má výchylka struny zápornou druhou derivaci, je struna urychlována směrem dolů a naopak.

Pro řešení rovnice je třeba zadat oblast řešení, okrajové a počáteční podmínky stejně jako u parabolické rovnice. Zadání počátečních podmínek se ale liší od parabolických rovnic. Na počátku nestačí zadat hodnoty funkce $z(t,x)$, např. počáteční výchylku struny. Je třeba též zadat hodnotu derivace $\frac{\partial z}{\partial t}$, tj. např. rychlost pohybu struny na počátku. Počáteční podmínky mají tedy tvar

$$z\left(0,x\right)=p\left(x\right) \tag{293}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}\left(0,x\right)=q\left(x\right) \tag{294}$$

5.3.3 Diferenciální rovnice eliptického typu

Kanonický tvar eliptické rovnice je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a_1\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial x}+b_1\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial y}+c_1\left(x,y\right)z+d_1\left(x,y\right)=0. \tag{295}$$

Můžeme také kanonický tvar zapsat takto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{296}$$

nebo pokud rovnici zapíšeme pomocí Laplaceova operátoru $\triangle z = \sum_i \left(\partial^2 z\right) / \left(\partial x_i^2\right)$ nabude tvar

$$\triangle z = F. \tag{297}$$

Eliptické rovnice lze interpretovat jako rovnici ustáleného stavu různých fyzikálních jevů: vedení tepla v izotropní desce nebo tělese, difúze, deformace tenké membrány atd. Rovnice je obvykle doplněna jednou okrajovou podmínkou podél celé hranice. V případě anizotropního materiálu v rovnici vystupuje diferenciální operátor s pozitivně definitivní maticí koeficientů a_{ij}. Tyto rovnice nazýváme také *stacionární.*

Rovnice eliptického typu mají dvě komplexně sdružené chrakteristiky $\varphi_1(x, y) = C_1$a $\varphi_2(x, y) = \overline{\varphi_1(x, y)} = C_2$, které získáme řešením rovnice

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0 \tag{298}$$

Zabývejme se eliptickými rovnicemi ve tvaru

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{299}$$

V případě eliptických rovnic hledáme funkci $z(x, y)$, která je funkcí dvou prostorových proměnných x a y. Nemáme zde žádnou proměnnou s významem času. Funkce $f(x, y)$ je známá zadaná funkce. Tato eliptická rovnice se také nazývá Poissonova rovnice. V případě, že pravá strana rovnice je nulová, mluvíme o Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \tag{300}$$

Jako fyzikální příklad lze uvést rovnici pro elektrostatický potenciál φ

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{301}$$

kde $\varrho(x,\ y)$má význam hustoty náboje. Eliptické rovnice jsou speciálním případem vyjádření parabolických rovnic ve stacionární stavu. Pokud se totiž řešení (281) již nemění, tj. časová derivace je nulová, dostaneme rovnici (300). Tak dostaneme např. rovnici pro stacionární rozložení teploty $T(x, y)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = q(x, y) \tag{302}$$

Díky tomu, že u eliptických rovnic není proměnná s významem času, nejsou potřeba žádné počáteční podmínky. Je třeba zadat oblast, na které budeme hledat řešení. V našem případě dvou prostorových proměnných to bude část roviny. My se omezíme na nejjednodušší případ, kdy oblastí řešení bude obdélník. Na hranicích oblasti řešení je třeba zadat okrajové podmínky. Okrajové podmínky mohou být několika druhů stejně jako u parabolických a hyperbolických rovnic.

5.4 Jednoduché metody řešení parciálních diferenciálních lineárních rovnic druhého řádu

5.4.1 Rovnice typu $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

Tyto rovnice řešíme tím, že použijeme substituci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad kde\ p = p\,(x)\,. \tag{303}$$

Pak obdržíme rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{304}$$

Příklad:
Zadání:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \tag{305}$$

Řešení:
Položme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \tag{306}$$

kde $p = p\,(x, y)$. Pak z dané rovnice plyne

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{307}$$

a odtud

$$p = f\,(y) = \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{308}$$

Integrací rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f\,(y)$ dostáváme

$$z = x\, f\,(y) + g\,(y)\,, \tag{309}$$

kde f a g jsou libovolné finkce argumentu y.

5.4.2 Rovnice typu $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F\,(x, y)$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\,(x, y)$

Rovnice tohoto typu se řeší analogicky jako rovnice předešlé, tedy typu 5.4.1.

Položíme-li $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, kde $p = p(x, y)$, přejde daná rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F(x, y)$ v rovnici $\frac{\partial p}{\partial x} = F(x, y)$, takže

$$p = \int F(x, y)\, dx + f(y) = \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{310}$$

Odtud po integraci dostáváme

$$z = \int \left(\int F(x, y)\, dx \right) dx + x\, f(y) + g(y), \tag{311}$$

kde f,g jsou libovolné funkce argumentu y.

Podobně postupujeme u rovnice typu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y)$.

Příklad

Zadání:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x^2 - 2y \tag{312}$$

Řešení:

Položíme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \tag{313}$$

takže

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6x^2 - 2y \tag{314}$$

a odtud

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x^3 y - 2xy + f(y). \tag{315}$$

Další integrací dostaneme

$$z = \frac{1}{2} x^4 y - x^2 y + x\, f(y) + g(y), \tag{316}$$

kde f,g jsou libovolné funkce argumentu y.

5.4.3 Rovnice typu $A(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial x_i} = F(x, y)$

a)

$$A(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y) \tag{317}$$

b)

$$A(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y) \tag{318}$$

Tyto rovnice se opět zpravidla řeší substitucí $\frac{\partial z}{\partial x} = p$. Tím obdržíme z dané diferenciální rovnice (parciální) obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, a to pro funkci $p(x, y)$.

c)

$$A(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y) \tag{319}$$

Tento typ rovnice se bude řešit analogicky jako předchozí dva typy, avšak se substitucí $\frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y)$.

Příklad:
Zadání:

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4e^{2x-y} \tag{320}$$

Řešení:
Položíme-li

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y), \tag{321}$$

obdržíme rovnici

$$x \frac{\partial q}{\partial x} + q = 4e^{2x-y}. \tag{322}$$

Dostali jsme obyčejnou lineární diferenciální rovnici s neznámou funkcí $q = q(x, y)$. Protože její levá strana je rovna parciální derivaci $\frac{\partial(xp)}{\partial x}$, kdežto její pravá strana se rovná parciální derivaci $\frac{\partial\left(2e^{2x-y}\right)}{\partial x}$, dostáváme

$$xq = 2e^{2x-y} + f(y). \tag{323}$$

Odtud je

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x} e^{2x-y} + \frac{1}{x} f(y), \tag{324}$$

a to pro $x \neq 0$, takže

$$z = \frac{2}{x} \int e^{2x-y} dy + \frac{1}{x} f(y) \, dy + g(x) \tag{325}$$

neboli

$$z = \frac{2}{x} e^{2x} \left(-e^{-y}\right) + \frac{1}{x} F(y) + g(x) = \frac{1}{x} \left[F(y) - 2e^{2x-y}\right] + g(x), \tag{326}$$

kde f, g jsou libovolné funkce.

5.4.4 Rovnice typu $A(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial x_i} = F(x, y)$

a)

$$A(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + C(x, y) \, z = F(x, y, u) \tag{327}$$

b)

$$A\left(x,y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+B\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial y}+C\left(x,y\right)\,z=F\left(x,y,u\right) \tag{328}$$

Dané typy rovnic představují obyčejné lineární rovnice řádu druhého vzhledem k argumentu x(popř. y), považujeme-li druhý argument za parametr.

Příklad:

Zadání:

Řešme rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3y\frac{\partial z}{\partial x}+2y^2 z=2(y-1)e^{2x-y}. \tag{329}$$

Řešení:

Vzhledem s argumentu x jde o obyčejnou lineární rovnici řádu druhého. Příslušná zkrácená rovnice má charakteristickou rovnici

$$r^2-3yr+2y^2=0 \tag{330}$$

má kořeny

$$r_{1,2}=\frac{3y\pm y}{2}=<\begin{array}{c}2y\\ y\end{array}. \tag{331}$$

Proto doplňkový integrál je tvaru

$$\hat{z}=f\left(y\right)e^{xy}+g\left(y\right)e^{2xy}, \tag{332}$$

kde f, g jsou libovolné funkce argumentu y. Hlavní integrál, určený metodou neurčitých koeficientů, je

$$Z=e^{2x-y}/\left(y-1\right), \tag{333}$$

a to pro $y\neq 1$. Proto obecný integrál dané rovnice je tvaru

$$z=\left[f\left(y\right)+e^{xy}g\left(y\right)\right]e^{xy}+\frac{e^{2x-y}}{y-1}. \tag{334}$$

5.4.5 Rovnice typů $A\left(x,y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}+B\left(x,y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_j}+C\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}=F\left(x,y\right)$

a)

$$A\left(x,y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\left(x,y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial x}=F\left(x,y\right) \tag{335}$$

b)

$$A\left(x,y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+B\left(x,y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+C\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial y}=F\left(x,y\right) \tag{336}$$

Rovnice převedeme pomocí substituce $\frac{\partial z}{\partial x} = p\,(x, y)$, popř. $\frac{\partial z}{\partial y} = q\,(x, y)$ na parciální lineární diferenciální rovnici prvního řádu argumentů x, y s neznámou funkcí p, popř. q, tj. na rovnice

a)

$$A\frac{\partial p}{\partial x} + B\frac{\partial p}{\partial y} = F - Cp \tag{337}$$

b)

$$A\frac{\partial q}{\partial x} + B\frac{\partial q}{\partial y} = F - Cq \tag{338}$$

Určíme-li její obecný integrál (s jednou libovolnou funkcí), pak další integrací podle x (popř. podle y) dostaneme hledanou funkci z s druhou libovolnou funkcí.

Příklad:

Zadání:

Řešme rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = y^2. \tag{339}$$

Řešení:

Použijeme substituci $\frac{\partial z}{\partial x} = p$. Tím daná rovnice přejde v rovnici

$$x\frac{\partial p}{\partial x} - y\frac{\partial p}{\partial y} = y^2 - p. \tag{340}$$

Což je lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu vzhledem k neznámé funkci $p = p\,(x, y)$.

Příslušná symetrická soustava je tvaru

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dp}{y^2 - p}. \tag{341}$$

Odtud z prvních dvou členů určíme

$$ln\,|x| = -ln\,|y| + ln\,|C_1| \tag{342}$$

neboli $xy = C_1$.

Z druhého a třetího členu plyne

$$y\,dp - p\,dy + y^2 dy = 0, \tag{343}$$

neboli $\frac{y\,dp - p\,dy}{y^2} + dy = 0$. Odtud dostáváme $\frac{p}{y} + y = C_2$. Proto obecný integrál uvedené symetrické soustavy je tvaru $\frac{p}{y} + y = f\,(xy)$, neboli

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = y\,f\,(xy) - y^2, \tag{344}$$

kde f je libovolná funkce. Odtud dostaneme

$$z = -xy^2 + g\,(y) + \int y\,f\,(xy)\ dx. \tag{345}$$

Substitucí $t = xy$, $dt = y\,dx$ zjistíme, že

$$\int y\,f\,(xy)\,dx = \int f\,(t)\,dt = F\,(t) = F\,(xy)\,. \tag{346}$$

Proto hledaný obecný integrál dané parciální diferenciální rovnice je tvaru

$$z = g\,(y) + F\,(xy) - xy^2, \tag{347}$$

kde F, g jsou libovolné funkce.

Part III

Využití metod numerické matematiky pro řešení diferenciálních rovnic

Numerická (výpočtová) matematika se zabývá řešením problémů pro konkrétní číselné hodnoty a tvoří jeden z mostů mezi teorií a praxí matematiky. Řeší triviální příklady jako je sčítání, ale i složitější příklady zahrnující iteraci, metodu konečných prvků nebo aproximaci derivace a integrálu. Ve skutečnosti lze jen málo problémů vzniklých matematizací reálných situací vyřešit přesně i tehdy, jsou-li přesně zadána vstupní data (což však také často není splněno). Pak je třeba sáhnout k numerické matematice (o to větší význam má pak přesné řešení nějakého problému v dostatečné obecnosti). Z tohoto důvodu jsou směry výzkumu numerické matematiky určovány potřebami fyziky, chemie a ostatních exaktních vědních oborů.

Současně s rozvojem využití výpočetní techniky pro modelování nejrůznějších jevů, vzrostl význam numerické matematiky. Byla proto vyvinuta celá řada nových metod, z nichž nejvýznamější jsou například:

- Numerické řešení soustav lineárních rovnic
  - Gaussova eliminační metoda
  - Choleského dekompozice
- Interpolace a aproximace - výpočet funkční hodnoty $f(x)$ na základě znalosti funkčních hodnot v okolí x
- Numerická derivace - výpočet derivace (resp. gradientu) $f'(x)$ na základě znalosti hodnot $f(x)$
- Numerická integrace - výpočet určitého integrálu $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$
- Numerická kvadratura a kubatura
- Numerické řešení soustav nelineárních rovnic - řešení soustavy rovnic $F(x) = 0$
  - Metoda tečen
- Numerická optimalizace - řešení soustavy rovnic $F(x) \rightarrow min$

- Metoda nejmenších čtverců

- Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic
  - Eulerova metoda
  - Rungoe - Kuttovy metody
  - Vícekrokové metody
  - Adamsovy formule
  - Numerické metody pro systémy "STIFF"
  - Implicitní jednokrokové metody
- Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic
  - Metoda sítí
  - Metoda přímek

Part IV

Závěr

V této práci jsem popsala různé typy diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu s popisem ručního řešení, ale také s popisem softwaru pro řešení rovnic pomocí počítače.

Mým cílem bylo hlavně sjednotit typy rovnic a uvést jejich řešení s ukázkovými řešenými příklady,

Práce může sloužit jako studijní materiál pro vysokoškolské studenty, nebo pro veřejnost se zvýšeným zájmem o matematiku, fyziku a řešení různých typů úloh.

Part V

Literatura

References

[1] Ráb, Miloš. *Diferenciální rovnice.* 1.vydání, Výroba skript UJEP, Brno, 1976, 99 s.

[2] Ráb, Miloš. *Diferenciální rovnice.* 1.vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980, 196 s.

[3] Rychnovský, Richard. *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení.* 2.vydání, SNTL: Nakladatelství technické literatury, Praha, 1972, 208 s.

[4] Mařík, Robert. *Diferenciální a diferenční rovnice*, 1. vydání, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, Brno, 2004, 280 s., ISBN: 80-7157-745-5

[5] Frank, Ludník, *Aplikovaná matematika IV - Obyčejné nelineární diferenciální rovnice - Mathieuova rovnice.* 1. vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1975, 72 s.

[6] Vlček, Jaroslav. Vrbický, Jiří. *Diferenciální rovnice, Matematika IV*, 1.vydání, VŠU - Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2003, 134 s. ISBN: 80-7078-438-5

[7] Škrášek, Josef. *Matematika II B - Furierovy řady, obyčejné a parciální diferenciální rovnice*, 1. vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1979, 184 s.

[8] Franců, Jan. *Moderní metody řešení diferenciálních rovnic*, 2. vydání, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2006, 148 s, ISBN: 80-214-3329-9

[9] Barták, Jaroslav. *Diferenciální rovnice*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1990, 201 s.

[10] Brzezina, Miroslav. *Jak na soustavy diferenciálních rovnic?*, 1. vydání, Technická univerzita v Liberci, Liberec, 2001, 40 s., ISBN: 80-7083-465-X

[11] Arsenin, Vasil Jakovlevič. *Matematická fyzika - Základné rovnice a špeciálne funkcie*, 1. vydání, ALFA - Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1977, 432 s.

[12] Kufner, Alois, *Obyčejné diferenciální rovnice*, 1. vydání, ZČU Plzeň, Plzeň, 1993, 159 s., ISBN: 80-7082-106-X

[13] Kurzweil, Jaroslav. *Obyčejné diferenciální rovnice - Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru*, 1. vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1978, 424 s.

[14] Šalát, Tibor a kol. *Malá encyklopédie matematiky*, 3. vydání, Vydavaťelsvtvo Obroz, Bratislava, 1981, 856 s.

[15] Čech, Eduard. *Kurs diferenciálních rovnic*, 1. vydání, JČMF - Přírodovědné nakladatelství, Praha, 1950, 474 s.

[16] Kurzweil, Jaroslav. *Obyčejné diferenciální rovnice*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1975, 193 s.

[17] Diblík, Josef. Přibyl, Oto. *Obyčejné diferenciální rovnice*, 1.vydání, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2004, 150 s., ISBN: 80-214-2795-7

[18] Hájek, Jiří. Dula, Jiří. *Cvičení z matematické analýzy, Obyčejné diferenciální rovnice*, 1. vydání, skripta MU Brno, Brno, 1990, 74 s., ISBN: 80-210-0217-4

[19] Havelka, Josef. Čermáková, Hana. *Matematika* II_4*, Obyčejné diferenciální rovnice*, 1. vydání, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 1997, 114 s., ISBN: 80-214-0639-9

[20] Zítek, Pavel. *Simulace dynamických systémů*, 1. vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1982, 307 s.

[21] Krajčovič, Dušan. *Simulátor vrtulníku - Programový systém pro realizaci fyzikálního modelu*, Diplomová práce, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Zlín, 2005, 63 s.

[22] Čihák, Pavel; Čerych, Jan; Kopáček, Jiří. *Příklady z matematiky pro fyziky*, 2.vydání, Matfyzpress, Praha, 2003, 306 s., ISBN 80-86732-15-0

[23] Míka, Stanislav; Přikryl, Petr. *Numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic - Evoluční teorie*, 1. vydání, Vydavatelství ZČU, Plzeň, 1996, 88 s., ISBN 80-7082-242-2

[24] homen.vsb.cz/~ham73/Komst_MIII/DR.pdf, staženo 23.8.2009

[25] Rychnovský, Richard. *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení*, 1. vydání, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1963, 256 s.

[26] Kvasnica, Jozef. *Matematický aparát fyziky*, 2. vydání, Academia, Praha, 1997, 384 s., ISBN 80-200-0603-6

[27] Fučík, Svatopluk; Kufner, Alois. *Nelineární diferenciální rovnice*, 1. vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1978, 348 s.

[28] Res, Ivo. *Diferenciální rovnice*, 1. vydání, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, Brno, 1998, 60 s., ISBN 80-7157-332-9

[29] Matematika III. *Diferenciální rovnice - Kvalitativní teorie a aplikace*. Numerické metody, 1. vydání, VŠCHT Praha, Praha, 1992, 242 s., ISBN 80-7080-162-X

[30] Krbálek, Milan. *Úlohy matematické fyziky*, 1. vydání, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2008, 221 s., ISBN 978-80-01-04051-5

[31] Res, Ivo. *Matematika - Diferenciální rovnice*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988, 86 s.

[32] Kofroň, Josef. *Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru*, 2. vydání, Nakladatelství Kolonium, Praha, 2004, 286 s., ISBN 80-246-0946-0

[33] Ráb, Miloš. *Metody řešení diferenciálních rovnic I.*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989, 68 s.

[34] Ráb, Miloš. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, 3. vydání, Grafex, Brno, 2004, 96 s., ISBN 80-210-3416-5

[35] Mošová, Vratislava. *Matematická analýza III*, 1. vydání, Nakladatelství Olomouc, Olomouc, 2002, 96 s., ISBN 80-244-0463-X

[36] Rektorys, Karel. *Matematika V*, 1. vydání, ČVUT v Praze, Praha, 1986, 94 s.

[37] Jahnke, Hans Niels. *Historie analýzy*, 1. vydání, Nakladatelství RNDr. Karel Vašíček - mathpublishing.eu, Pardubice, 2007, 279 s., ISBN 978-80-903838-1-4

[38] Kubíček Milan, Dubcová Miroslava, Janovská Drahoslava. *Numerické metody a algoritmy*, 2. vydání, Vydavatelství VŠCHT Praha, Praha, 2005,189s., ISBN 80-7080-558-7