Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Nerovnosti v úlohách MO (1951 - 1975)

Diplomová práce

Jan CHVÁL

České Budějovice, listopad 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 27.11.2009 ....

Anotace

Název: Nerovnosti v úlohách MO (1951 - 1975)

Vypracoval: Jan Chvál

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.

Klíčová slova: Matematická olympiáda, A-G nerovnost, substituce, odhady, nerovnost, indukce

Obsahem práce je zpracování úloh na téma nerovnosti, které byly zařazeny v matematických olympiádách v letech 1951 - 1975, roztřízení těchto nerovností podle způsobu řešení a ukázání dalších možných řešení. Práce by měla sloužit jako doplňující studijní materiál pro studenty se zvýšeným zájmem o matematiku.

Annotation

Title: Inequalities in problems MO (1951 - 1975)

Author: Jan Chvál

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Keywords: Mathematical olympiad, A-G inequality, substitution, valuations, inequality, induction.

The diploma thesis concerns the elaboration of excercises of inequality which were placed in mathematics olympics in 1951-1975, the clasification of inequality in agreement with the method of solution and showing other ways of solution. The thesis should serve as an addiltiolal study material for students interesed in mathematics.

Poděkování

Děkuji panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytoval.

Obsah

1 Úvod

Matematická olympiáda je významnou školní soutěží s dlouholetou tradicí. První ročník se konal v roce 1951 a zatím poslední v roce 2009. V průběhu let ji absolvovalo spoustu nadějných matematiků. Původně byla soutěž určena pro studenty středních škol a měla dvě kategorie, a to kategorii A, která byla určena pro 3. a 4. ročník středních škol, a kategorii B pro 1. a 2. ročník středních škol. V roce 1953 se rozšiřuje i na školy základní a je nově rozdělena do čtyř kategorií, kde kategorie A je pro studenty 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B je pro studenty 2. ročníků středních škol, kategorie C je pro studenty 1. ročníků středních škol a kategorie D je pro žáky základních škol. V roce 1969 dochází k reformě, při níž zaniká kategorie C a kategorie B je určena pro 1. a 2. ročník středních škol. Dále se kategorie D přejmenovává na kategorii Z. Všechny kategorie mají domácí, školní a krajské kolo. V roce 1970 navíc vzniká pro všechny kategorie kolo přípravné. Kategorie A má navíc kolo republikové a od roku 1959 i kolo mezinárodní, kam se kvalifikují jen nejúspěšnější řešitelé účastnících se zemí. Postupem času se zájem o matematickou olympiádu zvětšoval. Na základě rostoucího zájmu začaly vznikat programy na podporu řešitelů. Těmito programy jsou semináře, různá soustředění úspěšných řešitelů a další akce. Matematická olympiáda pomohla i ke vzniku specializovaných matematických gymnázií.

Cílem této práce je zpracovat úlohy na téma nerovnosti, které byly zařazeny v matematických olympiádách 1951 - 1975. Úkolem je roztřídit úlohy dle použitého řešení, každou metodu řešení charakterizovat a odvodit potřebné poznatky. Na základě použitých řešení dostaneme pět kategorií, a to standartní úprava výrazu, A-G nerovnost, substituce, odhad a indukce. Dále tyto postupy upravím a didakticky vysvětlím. Ke každému řešení přiložím vlastní řešení pomocí jiné metody. Na závěr každé z těchto pěti kategorií přiložím další úlohy na procvičení.

Tato práce bude zároveň sloužit jako metodický materiál pro práci s nadanými studenty.

2 Využití standartní úpravy výrazu

Pod pojmem standartní úpravy výrazu rozumíme ekvivalentní úpravy nerovností a algebraických výrazů. Jedná se o vytýkání, krácení zlomků, úpravy podle vzorců, násobení nerovností atd. Při úpravě nerovnosti je vždy důležité dodržet podmínky: například při násobení nerovnosti záporným číslem se nám musí změnit znaménko nerovnosti. Nerovnosti obvykle dokazujeme pomocí přímé metody nebo metodou sporu.

Přímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$ spočívá v tom, že sestavíme řetězec pravdivých implikací $A \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$, ..., $A_n \Rightarrow B$ čili $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ... \Rightarrow A_n \Rightarrow B$, z čehož plyne platnost dokazované implikace.
Problémem této metody je nalezení správného A.
Užívají se tyto postupy:

a) Analýza zadané nerovnosti. Tato metoda spočívá v tom, že nerovnost upravujeme ekvivalentními úpravami, až dospějeme ke vztahu, který platí.

b) Analyticko-syntetický postup. Nejprve provedeme analýzu úlohy a potom užijeme přímý důkaz v obráceném pořadí, než byla dělána analýza.

c) Převádění stran nerovnosti. Máme dokázat $L > P$ či $L < P$. Nejdříve utvoříme výraz $L - P$ nebo $P - L$ a pak ho upravujeme tak dlouho, až je zřejmé, že platí $L - P > 0$ či $P - L > 0$.

Obdobně můžeme dokazovat zadané nerovnosti sporem.

Metoda sporu. Máme-li dokázat

$$\forall x: \ L(x) \geq P(x),$$

vycházíme z předpokladu platnosti negace

$$\exists x : \; L(x) < P(x).$$

Dokážeme-li, že negované tvrzení je nepravdivé, (neboli že dospějeme ke **sporu**), pak musí nutně platit výraz původní.

2.1 Řešené úlohy

1. (MO21-Z-II-3). Dokažte, že pro každou trojici čísel a, b, c je výraz

$$V = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - abc(a + b + c)$$

nezáporný. Pro které hodnoty čísel a, b, c se tento výraz rovná nule?

Řešení: Nejprve zadaný vztah vynásobíme dvěma, čímž dostaneme

$$2V = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2.$$

Odtud po rozdělení členů máme

$$2V = a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 + b^2c^2 - 2ab^2c + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2abc^2.$$

Na pravé straně výrazu vytkneme postupně a^2, b^2, c^2, čímž dostaneme

$$2V = a^2 \cdot (b^2 - 2bc + c^2) + b^2 \cdot (a^2 - 2ac + c^2) + c^2 \cdot (a^2 - 2ab + b^2).$$

Po vydělení celého výrazu dvěma a úpravě pomocí známých vzorců, dostaneme

$$V = \frac{1}{2}\left(a^2 \cdot (b - c)^2 + b^2 \cdot (a - c)^2 + c^2 \cdot (a - b)^2\right).$$

Protože druhé mocniny výrazů nemohou být záporná čísla, je nerovnost dokázána.

Rovnost $V = 0$ nastane tehdy a jen tehdy, když současně platí:

$$a(b-c) = 0,\ b(c-a) = 0,\ c(a-b) = 0.$$

Na základě podmínek, které vyplývají z těchto tří rovností, dostaneme celkem osm případů, z kterých vyplývá, že $V = 0$ tehdy a jen tehdy, pokud je splněná některá z těchto podmínek:

a) $a = b = c$,

b) $a = b = 0,\ c$ libovolné,

c) $b = c = 0,\ a$ libovolné,

d) $c = a = 0,\ b$ libovolné.

(Jiné řešení: kapitola 4, strana 52)

2. (MO4-D-I-13). Ať m je přirozené číslo, platí

$$\frac{1}{5} < \frac{1+m}{5+m};\ \frac{1+m}{5+m} < 1.$$

Dokažte.

Řešení: V případě první nerovnosti stačí dokázat, že

$$r = \frac{1+m}{5+m} - \frac{1}{5}$$

je kladné číslo pro každé přirozené číslo m, které do tohoto výrazu dosadíme.

Postupně platí

$$r = \frac{5 \cdot (1+m) - (5+m)}{(5+m) \cdot 5} = \frac{4m}{5 \cdot (5+m)} > 0,$$

neboť čitatel i jmenovatel zlomku jsou kladná čísla.

Pokud jde o druhou nerovnost stačí dokázat, že

$$r' = 1 - \frac{1+m}{5+m}$$

je kladné číslo pro každé přirozené číslo m.

Platí

$$r' = \frac{5+m-(1+m)}{5+m} = \frac{4}{5+m} > 0.$$

Tím je důkaz proveden.

(Jiné řešení: kapitola 5, strana 68)

3. (MO17-D-II-1). Dokažte, že vztah

$$a^2 - ab + b^2 - a + b + 1 > 0$$

platí pro každá dvě reálná čísla a, b.

Řešení: Daný vztah znásobíme dvěma a pokusíme se ho upravit tak, aby byl součtem druhých mocnin. Po vynásobení máme

$$2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a + 2b + 2 > 0.$$

Z prvních tří členů vidíme vzorec a po úpravě tedy

$$(a-b)^2 + a^2 + b^2 - 2a + 2b + 2 > 0.$$

Dále utvoříme vzorec $(a-1)^2$ a tím po úpravě dostáváme

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + b^2 + 2b + 1 > 0.$$

Nakonec výraz $b^2 + 2b + 1$ převedeme na vzorec, čímž vznikne

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 > 0. \tag{1}$$

Nyní dokážeme, že nerovnost (1) nemůže být rovna 0. Z (1) nám plyne, že

$$a-b=0 \ \wedge \ a-1=0 \ \wedge \ b+1=0.$$

Odtud vyplývá

$$a=b \ \wedge \ a=1 \ \wedge \ b=-1,$$

což není možné. Z toho plyne, že levá strana nerovnosti (1) nemůže být rovna 0. Proto pro každé a, b platí vztah

$$a^2 - ab + b^2 - a + b + 1 > 0.$$

Tím je úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 37)

4. (MO6-C-I-1). Pro všechna reálná čísla a, b, c je výraz

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(a+b+c) \tag{1}$$

nezáporný. Dokažte. Kdy nastane rovnost?

Řešení: Nejprve v zadaném výrazu roznásobíme závorku, čímž dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2a - 2b - 2c \geq 0.$$

Dále výraz přepíšeme do tvaru

$$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0.$$

Nyní již ve výrazu vidíme vzorce ve tvaru $(A-B)^2$, po jejich aplikování dostáváme

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

Na levé straně nerovnosti máme tři činitele na druhou, které jsou vždy větší nebo rovny nule.

Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když bude platit

$$(a-1)^2 = (b-1)^2 = (c-1)^2 = 0,$$

a tento případ nastane jen tehdy, když

$$a = b = c = 1.$$

Tímto je zadaná úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 39)

5. (MO3-C-I-6). Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, přičemž je $c > 1$. Dokažte, že platí

$$a + b \leq abc. \tag{1}$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Z podmínek víme, že

$$c \geq 2,$$

proto stačí dokázat

$$a + b \leq 2ab.$$

Celou nerovnost vydělíme ab, z čehož dostáváme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2. \tag{2}$$

Tato nerovnost je zřejmá, neboť a, b jsou přirozená čísla.

Rovnost ve vztahu (1) nastane pouze v jediném případě, a to tehdy když bude

$$a = b = 1 \ \wedge \ c = 2.$$

Tímto je zadaná úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 4, strana 54)

6. (MO23-C-P-1). Dokažte, že pro všechna kladná čísla a, b, c platí:

$$\frac{b(2a-c)}{a} + \frac{c(2b-a)}{b} + \frac{a(2c-b)}{c} \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}.$$

Kdy platí rovnost?

Řešení: Nerovnost budeme ekvivalentně upravovat, přičemž se budeme snažit utvořit tvar součtu druhých mocnin. Nejprve převedeme levou stranu na stranu pravou, čímž dostaneme

$$0 \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} - \frac{b(2a-c)}{a} - \frac{c(2b-a)}{b} - \frac{a(2c-b)}{c}.$$

Protože víme, že čísla a, b, c jsou kladná, můžeme celou nerovnost vynásobit abc, aniž by se změnilo znaménko nerovnosti. Po vynásobení máme

$$0 \leq a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - b^2c \cdot (2a - c) - ac^2 \cdot (2b - a) - a^2b(2c - b)$$

a po roznásobení závorek

$$0 \leq a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - 2ab^2c + b^2c^2 - 2abc^2 + a^2c^2 - 2a^2bc + a^2b^2.$$

Nyní již v nerovnosti vidíme tři výrazy ve tvaru $(A - B)^2$. Po jejich aplikaci dostáváme

$$0 \leq (ac - ab)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - bc)^2.$$

Pravá strana nerovnosti je tedy součtem druhých mocnin tří výrazů, a proto nemůže být záporná.

Zbývá vyřešit, kdy nastane rovnost. Z posledního vztahu je vidět, že rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když současně platí

$$ac = ab, \; bc = ac, \; ab = bc,$$

z čehož vyplývá, že rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když platí

$$a = b = c.$$

Tímto je úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 4, strana 55)

7. (MO2-B-I-14). Nechť a, b, c jsou racionální čísla. Dokažte, že potom platí

$$(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2 \geq ab+bc+ca. \qquad (1)$$

Proveďte diskusi, pro které případy nastane rovnost.

Řešení: Levou stranu vztahu (1) označme L, pravou P. Levou stranu vztahu roznásobíme

$$L = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc+a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc+$$

$$+a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc,$$

členy posčítáme

$$L = 3a^2+3b^2+3c^2-2ab-2ac-2bc$$

a po vytknutí máme

$$L = 3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca).$$

Nyní od levé strany odečteme pravou

$$L-P = 3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)-ab-bc-ca.$$

Po sečtení a vytknutí dostáváme

$$L-P = 3[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)] = 3V.$$

Máme dokázat, že výraz V je nezáporný. Platí

$$2V = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) =$$

$$= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

takže $2V \geq 0$, neboli $V \geq 0$; rovnost nastane právě tehdy, je-li $a = b = c$. To platí i pro vztah (1). Tímto je zadaná nerovnost dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 41)

8. (MO1-B-II-3). Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí

$$(a^2 + b^2)ab \leq a^4 + b^4.$$

Rozhodněte, kdy platí rovnost.

Řešení: Abychom potvrdili toto tvrzení, stačí dokázat, že hodnota výrazu $V = (a^4+b^4)-(a^2+b^2)ab$ je pro všechna reálná a, b číslo nezáporné. Upravujme postupně výraz

$$V = (a^4 + b^4) - (a^2 + b^2)ab = a^3(a - b) - b^3(a - b) =$$
$$= (a - b)(a^3 - b^3) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= (a - b)^2 \left[\left(\frac{1}{2}a + b \right)^2 + \frac{3}{4}a^2 \right].$$

1. Hodnota výrazu V je zřejmě číslo nezáporné, neboť první činitel je čtverec reálného čísla, (což je vždy číslo nezáporné). Druhý činitel je roven součtu dvou nezáporných čísel, tedy také číslo nezáporné; protože ani jeden z činitelů není záporný, je součin číslo nezáporné.

2. Aby byl výraz $V = 0$, stačí, když jeden z obou činitelů bude roven nule.

a) Buď je $(a - b)^2 = 0$, to je $a = b$;

b) nebo je druhý činitel, který je součtem dvou nezáporných čísel, roven nule; tedy je nutné, aby současně platilo

$$\left(\frac{1}{2}a + b \right)^2 = 0 \ \wedge \ \frac{3}{4}a^2 = 0.$$

Z druhé podmínky plyne $a = 0$ a po dosazení do první podmínky zjistíme, že i $b = 0$. Ale tento vztah je už zahrnut v případě a).

Výraz V je tedy roven nule tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$.

(Jiné řešení: kapitola 3 a 4, strana 43 a 58)

9. (MO8-B-II-3). Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c platí vztah
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9. \tag{1}$$

Najděte všechny trojice, pro které nastává rovnost.

Řešení: Pravou stranu zadané nerovnosti převedeme na levou stranu, čímž dostaneme
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 9 \geq 0.$$

Protože víme, že čísla a, b, c jsou kladná, můžeme celou nerovnost vynásobit abc. Po vynásobení
$$(a+b+c)\cdot(bc+ac+ab) - 9abc \geq 0$$

a po roznásobení závorek
$$abc + a^2c + a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + ac^2 + abc - 9abc \geq 0.$$

Nyní posčítáme společné členy,
$$a^2c + a^2b + b^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2 - 6abc \geq 0,$$

a rozdělíme poslední člen v nerovnosti, čímž dostaneme

$$a^2c - 2abc + b^2c + ab^2 - 2abc + ac^2 + a^2b - 2abc + bc^2 \geq 0.$$

Vytknutím upravíme na tvar

$$c \cdot (a^2 - 2ab + b^2) + a \cdot (b^2 - 2bc + c^2) + b \cdot (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0.$$

Nyní již ve vztahu vidíme vzorce ve tvaru $(A-B)^2$, po jejich aplikování dostáváme

$$c \cdot (a-b)^2 + a \cdot (b-c)^2 + b \cdot (a-c)^2 \geq 0. \tag{2}$$

Poslední úpravou dostáváme součet tří nezáporných čísel, protože například $a(b-c)^2$ je součin $a > 0$ a čísla $(b-c)^2 \geq 0$. Proto je nerovnost nezáporná. Tímto je platnost vztahu (1) dokázána.

Rovnost v úloze nastane právě tehdy, když jsou všechny tři nezáporné sčítance v nerovnosti (2) rovny nule, tedy když platí

$$c(a-b)^2 = 0,\ a(b-c)^2 = 0,\ b(a-c)^2 = 0,$$

protože $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, musí platit

$$a - b = 0 \ \wedge \ b - c = 0 \ \wedge \ a - c = 0.$$

Z těchto vztahů vyplývá, že rovnost nastane jen tehdy, když

$$a = b = c.$$

Tímto je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 3 a 4, strana 44 a 59)

10. (MO9-A-I-1). Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{2}{a+b+c}. \tag{1}$$

Řešení: Nejdříve převedeme členy na pravé straně na stranu levou, čímž dostaneme

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{2}{a+b+c}\geq 0.$$

Celou nerovnost vynásobíme kladným číslem
$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\cdot(a+b+c)$, čímž dostaneme

$$(a+b+c)\cdot(b+c)\cdot(c+a)+(a+b)\cdot$$

$$\cdot(c+a)\cdot(a+b+c)+(a+b)\cdot(b+c)\cdot$$

$$\cdot(a+b+c)-(2a+2b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\geq 0,$$

po roznásobení

$$(b^2+c^2+2bc+ab+ac)\cdot(c+a)+(ac+a^2+bc+ab)\cdot$$

$$\cdot(a+b+c)+(ab+ac+b^2+bc)\cdot(a+b+c)-$$

$$-(2ab+2ac+2b^2+2bc)\cdot(c+a)\geq 0$$

a odtud po dalším roznásobení

$$b^2c+ab^2+c^3+ac^2+2bc^2+2abc+abc+a^2b+$$

$$+a^2c+ac^2+a^2c+abc+ac^2+a^3+a^2b+a^2c+$$

$$+abc+b^2c+bc^2+a^2b+ab^2+abc+a^2b+ab^2+$$

$$+abc+a^2c+abc+ac^2+ab^2+b^3+b^2c+abc+$$

$$+b^2c+bc^2-2abc-2a^2b-2ac^2-2a^2c-$$

$$-2b^2c-2b^2a-2bc^2-2abc\geq 0.$$

Po sečtení stejných členů máme

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2b^2c + 2ab^2 + 2ac^2 + 2bc^2 + 2a^2c + 2a^2b + 5abc \geq 0.$$

S ohledem na podmínky je tato nerovnost platná. Tímto je zadaná nerovnost dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 5, strana 72)

11. (MO1-A-I-6). Dokažte, že pro každé reálné x, y, z platí

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}. \tag{2}$$

Kdy nastává rovnost?

Řešení: Jsou-li x, y, z reálná čísla, vždy platí

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,$$

po roznásobení členů

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz - 2zx + 2z^2 \geq 0.$$

Nyní převedeme záporné členy na druhou stranu nerovnosti

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx.$$

K levé i pravé straně nerovnosti přičteme výraz $x^2 + y^2 + z^2$, čímž dostáváme

$$2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2 \leq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Levou stranu upravíme podle vzorce na mocninu trojčlenu a na pravé straně vytkneme trojku

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

pak celou nerovnost odmocníme a tím dostaneme

$$|x + y + z| \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Nerovnice platí pro absolutní hodnotu a tím spíše bude platit bez absolutní hodnoty

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Rovnost nastane, je-li $x = y = z \geq 0$.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 47)

12. (MO3-A-II-2). Máme dána čísla $a > b > 0$; potom platí

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Dokažte.

Řešení: Ze zadání úlohy je $a > b > 0$ a tím též

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0, \ \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0. \tag{1}$$

Ze vztahů (1) plyne, že $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$ a tím i $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$. Z tohoto důvodu platí

$$\frac{8a}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} > 0 \ \wedge \ \frac{8b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} > 0. \tag{2}$$

Nyní budeme zadané nerovnosti dokazovat sporem. Předpokládejme, že platí nerovnosti

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \geq \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab}, \tag{3}$$

$$\frac{(a-b)^2}{8b} \leq \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab}. \tag{4}$$

Nejdříve se budeme zabývat nerovností (3).

Po úpravě nerovnosti (3), dostaneme tento tvar

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{8a} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

Vynásobíme obě strany nerovnosti kladným výrazem $8a/(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, který byl odvozen ve vztahu (2). Po vynásobení dostáváme

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 4a,$$

což je

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq (2\sqrt{a})^2.$$

S ohledem na vztahy (1) jsou čísla uvnitř závorek kladná, a proto po odmocnění celé nerovnosti máme

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 2\sqrt{a},$$

což po úpravě je

$$\sqrt{b} \geq \sqrt{a}.$$

Toto je ovšem spor se vztahem (1). Proto vztah (3) neplatí.

Nyní prověříme nerovnost (4).

Po analogické úpravě, dostaneme tento tvar

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{8b} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

Vynásobíme obě strany nerovnosti kladným výrazem $8b/(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, který byl odvozen ve vztahu (2). Po vynásobení dostáváme

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leq 4b,$$

což je

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leq (2\sqrt{b})^2.$$

S ohledem na vztahy (1) jsou čísla uvnitř závorek kladná, a proto po odmocnění celé nerovnosti máme

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{b},$$

což po úpravě je

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

Toto je ovšem spor se vztahem (1). Proto vztah (4) neplatí.
Protože jsme dokázali, že vztahy (3), (4) neplatí, je zadaná úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 4 a 5, strana 62 a 74)

13. (MO9-A-II-4). Platí-li pro reálná čísla a, b, c nerovnosti

$$a > 0,\ b > 0,\ 2c > a + b,$$

potom $c^2 > ab$ a platí

$$c - \sqrt{c^2 - ab} < a < c + \sqrt{c^2 - ab}. \tag{1}$$

Dokažte.

Řešení: Nerovnost $2c > a + b$ umocníme na druhou. Umocňovat můžeme, protože levá i pravá strana je z podmínek kladná. Po umocnění dostaneme

$$4c^2 > a^2 + 2ab + b^2.$$

Výraz na pravé straně nerovnosti můžeme přepsat jako

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a - b)^2 + 4ab.$$

Protože druhá mocnina reálného výrazu je vždy větší nebo rovna nule, víme, že

$$(a-b)^2 + 4ab \geq 4ab,$$

proto určitě platí vztah

$$c^2 > ab. \tag{2}$$

Z tohoto důvodu je v (1) $c^2 - ab > 0$ a proto mají odmocniny smysl.

I. Budeme dokazovat, že platí $c - \sqrt{c^2 - ab} < a$. Po převedení členů máme

$$c - a < \sqrt{c^2 - ab}. \tag{3}$$

Mohou nastat pouze dvě možnosti:
Případ (1). Nechť je $c - a \leq 0$, potom (3) platí.
Případ (2). Nechť je $c - a > 0$; umocníme obě strany nerovnosti (3) na druhou

$$c^2 - 2ac + a^2 < c^2 - ab.$$

Po převedení členů na pravou stranu, dostáváme

$$0 < 2ac - ab - a^2.$$

Vytkneme a, z čehož máme

$$0 < a(2c - a - b). \tag{4}$$

Protože z podmínek platí, že $2c > a + b$, je vztah (4) správný. Obráceným postupem dospějeme od (4) ke (3), čímž je (3) dokázáno.

II. Budeme dokazovat, že $a < c + \sqrt{c^2 - ab}$. Po převedení členů dostáváme

$$a - c < \sqrt{c^2 - ab}. \tag{5}$$

Mohou nastat pouze dvě možnosti:

Případ (a). Nechť je $a - c \leq 0$, potom (5) platí.

Případ (b). Nechť je $a - c > 0$; umocníme obě strany nerovnosti (3) na druhou

$$a^2 - 2ac + c^2 < c^2 - ab.$$

Po převedení členů na pravou stranu dostáváme

$$0 < 2ac - ab - a^2.$$

Vytkneme a, z čehož máme

$$0 < a(2c - a - b). \tag{6}$$

Protože z podmínek platí $2c > a + b$, je vztah (6) správný. Obráceným postupem dospějeme od (6) k (5), čímž je (5) dokázáno.
Tímto je úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 5, strana 77)

2.2 Další úlohy

1. (MO21-Z-I-2). Dokažte, že pro každá dvě čísla a, b nabývá výraz

$$V = a^4 + b^4 - 2ab(b^2 - ab - a^2)$$

nezáporné hodnoty. V kterém případě je tento výraz roven nule?

2. (MO15-D-II-1). Jsou-li a, b libovolná dvě čísla, pak platí

$$(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \geq 0.$$

Dokažte a zjistěte, pro která a, b nastane rovnost.

3. (MO15-C-P-2). O daných kladných číslech a, b, c, d platí

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Dokažte, že pro každou dvojici kladných čísel x, y platí nerovnosti

$$\frac{a}{b} < \frac{ax + cy}{bx + dy} < \frac{c}{d}.$$

4. (MO4-B-I-13). Pro každé reálné číslo a platí vztah

$$3 \cdot (1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2.$$

Dokažte.

Určete všechna reálná čísla a, pro která nastane rovnost.

5. (MO22-B-I-1). Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a, b platí

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Zjistěte všechny případy, v kterých nastane rovnost.

6. (MO20-B-I-1). Jestliže a, b jsou kladná čísla menší než 1, platí nerovnost

$$|a - b| \leq \frac{\left|\sqrt{a(1 - b)} - \sqrt{b(1 - a)}\right|}{\sqrt{a(1 - b)} + \sqrt{b(1 - a)}}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastává rovnost.

7. (MO2-B-II-3). Dokažte: Pro reálné čísla a, b, c, d platí

$$ac + bd > ad + bc,$$

potom je buď $a > b$, $c > d$ nebo $a < b$, $c < d$. Je možné tuto větu obrátit?

8. (MO3-B-II-2). Jsou-li u_1, u_2, v_1, v_2 libovolná reálná čísla, potom vždy platí vztah

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2).$$

Dokažte a určete všechny hodnoty čísel u_1, u_2, v_1, v_2, pro něž v tomto vztahu platí rovnost.

9. (MO4-B-II-2). Dokažte:

a) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 - x + 1 \neq 0$.

b) Pro každé reálné číslo x platí vztah

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \leq 2.$$

10. (MO15-B-II-2). Nechť je a pevné reálné číslo, pro které platí $0 < a < 1$. Potom pro všechna x taková, že $-1 < x < 1$ platí nerovnost

$$\frac{(1 - ax)^2}{1 - x^2} \geq 1 - a^2.$$

Dokažte a ukažte, že rovnost nastane jen pro případ $x = a$.

11. (MO2-A-I-1). m, n jsou kladná čísla, ukažte, že číslo $\sqrt{2}$ leží mezi čísly

$$\frac{m}{n}, \frac{m+2n}{m+n}.$$

12. (MO10-A-I-1). Dokažte, že je-li $0 < x < 1$, potom platí

$$1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x} < \frac{1}{2}x^2.$$

3 Využití A-G nerovnosti

Při důkazu některých nerovností je výhodné využívat známe nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Tato nerovnost je uvedena ve větě 3.1. Nejprve si definujeme oba průměry.

Nechť $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, potom **aritmetickým průměrem** čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ nazveme číslo $A_n(x)$ takové, pro které platí

$$A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Nechť $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, kde $x_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, ..., n$, potom **geometrickým průměrem** čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ nazveme číslo $G_n(x)$ takové, pro které platí

$$G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

Věta 3.1 (A-G nerovnost). Pro libovolná nezáporná čísla $x_1, x_2, ..., x_n$ platí, že jejich aritmetický průměr je větší nebo roven průměru geometrickému z těchto čísel:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

Rovnost natává právě tehdy, když platí $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Než se pustíme do dokazování samotné A-G nerovnosti, uvedeme nejdříve dvě vedlejší věty, které budeme k samotnému důkazu potřebovat.

Lemma 1. Platí-li, že $a > 1$, $0 < b < 1$, potom je také $a + b - ab > 1$. Důkaz provedeme pomocí klasických úprav.

Důkaz lemmatu 1. Z předpokladů víme, že platí

$$1 - b > 0 \ \wedge \ a - 1 > 0.$$

Odtud

$$(a - 1) \cdot (1 - b) > 0.$$

Po roznásobení dostaneme

$$a + b - ab - 1 > 0,$$

neboli

$$a + b - ab > 1.$$

Lemma 2. Nechť $a_1, a_2, ..., a_n$ jsou kladná čísla a $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, potom platí $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$. Důkaz zde provedeme pomocí matematické indukce.

Důkaz lemmatu 2. Nejprve dokážeme, zda tvrzení platí pro $n = 1$. V tomto případě musí být $a_1 = 1$, čímž tvrzení platí. V dalším kroku budeme předpokládat, že tvrzení platí pro přirozené n. Dokazujeme tedy, že platí i pro $n+1$. Jsou tedy dána $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ a platí $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1$. Chceme dokázat, že platí

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} \geq n + 1. \tag{1}$$

Pokud se budou všechna a_i pro $i = 1, 2, ..., n$ rovnat jedné, tvrzení platí. V opačném případě mezi nimi bude určitě číslo větší než jedna a také číslo menší než jedna.

Uspořádáme čísla tak, že předposlední člen $a_n > 1$ a poslední člen $a_{n+1} < 1$. Z lemmatu 1 máme dokázáno, že pro taková dvě čísla určitě platí

$$a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1} > 1. \tag{2}$$

Nyní nadefinujeme nová čísla b_i pro $i = 1, 2, ..., n$ tak, aby platilo

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ ...,\ b_{n-1} = a_{n-1},\ b_n = a_n a_{n+1}.$$

Zjevně jsou čísla b_i kladná a také platí $b_1 b_2 ... b_n = 1$. Z indukčního předpokladu víme, že lemma platí pro n, máme tedy

$$b_1 + b_2 + ... + b_n \geq n.$$

Po dosazení za členy dostáváme

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n a_{n+1} \geq n. \tag{3}$$

Pokud teď sečteme vztahy (2) a (3), dostaneme nerovnost (1), což je přesně ten vztah, který jsme měli dokázat.

Nyní již můžeme přistoupit k samotnému důkazu A-G nerovnosti.

Důkaz věty 3.1. Je-li některý z členů $x_i = 0$, potom je geometrický průměr roven nule a součet nezáporných čísel u aritmetické posloupnosti je vždy větší nebo roven nule. Pokud žádný z členů x_i není roven nule, utvoříme si toto označení

$$X = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

Máme tedy nerovnost

$$X \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n).$$

Zároveň položíme $a_i = x_i/X$. Je tedy zřejmé, že $a_i > 0$ a pro splnění podmínky v lemmatu 2 musí platit tato rovnost

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1.$$

Po dosazení za členy a_i dostáváme

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}{X^n} = 1.$$

Pro splnění této rovnosti musí být

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = X^n.$$

Aplikujeme nyní lemma 2

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{X} \geq n.$$

Po vynásobení celé nerovnosti X dostáváme

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq X \cdot n.$$

Po vydělení celé nerovnosti n máme

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq X.$$

Nyní již jen dosadíme za X úvodní substituci, z čehož získáme

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n},$$

což je původní vztah a tím je A-G nerovnost dokázána.

Pro srovnání uvedeme ještě jeden důkaz A-G nerovnosti. Tento důkaz pochází od Rudolfa Sturma a je založen na následujícím lemmatu.

Lemma 3. Jestliže při konstantním součtu dvou různých čísel menší číslo zvětšíme o hodnotu menší, než je absolutní hodnota jejich rozdílu, a druhé číslo o stejnou hodnotu zmenšíme, pak se součin těchto dvou čísel zvětší.

Důkaz lemmatu 3. Mějme tyto dvě čísla a označme si je a, b, kde $a < b$. Zvolme substituci

$$a^{'} = a + \epsilon \, \wedge \, b^{'} = b - \epsilon,$$

přičemž platí $b - a > \epsilon > 0$. Dále tedy víme, že

$$a^{'} \cdot b^{'} = (a + \epsilon) \cdot (b - \epsilon) = ab - a\epsilon + b\epsilon - \epsilon^2 =$$

$$= ab + \epsilon(b - a - \epsilon).$$

Vzhledem k podmínce pro epsilon je jasné, že $\epsilon(b - a - \epsilon) > 0$, a tím máme dokázáno, že $a^{'} \cdot b^{'} > ab$.

Nyní již můžeme přistoupit k samotnému důkazu A-G nerovnosti.

Důkaz věty 3.1 (Sturmův). Nejprve ukážeme, kdy v dokazované A-G nerovnosti nastává rovnost. Pro $x_1 = x_2 = ... = x_n$ nastává rovnost, neboť platí, že

$$A_n(x) = \frac{n \cdot x_1}{n} = x_1$$

a

$$G_n(x) = \sqrt[n]{x_1^n} = x_1.$$

Dále předpokládejme, že si všechny členy nejsou rovny. Potom je alespoň jedno z čísel větší než S_n/n a alespoň jedno z čísel menší než S_n/n. Můžeme tedy položit

$$x_r < \frac{S_n}{n} \ \wedge \ x_s > \frac{S_n}{n}.$$

Nyní zvolme substituci

$$x_r^{'} = \frac{S_n}{n} \ \wedge \ x_s^{'} = x_s + x_r - \frac{S_n}{n}.$$

V substituci jsme x_r zvětšili o $(S_n/n) - x_r$ a x_s zmenšili o $(S_n/n) - x_s$. Je tedy dodržena podmínka u lemmatu 3. Pro ostatní členy máme $x_j^{'} = x_j$, kde $j \neq r, s$.

Díky lemmatu 3 určitě platí $x_r \cdot x_s < x_r^{'} \cdot x_s^{'}$ a tedy také platí

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} < \sqrt[n]{x_1^{'} ... x_n^{'}}.$$

Jsou-li všechna čísla $x_i^{'}$ pro $i = 1, 2, ..., n$ rovna průměru S_n/n, pak platí

$$G_n(x) < G_n(x^{'}) = \sqrt[n]{\left(\frac{S_n}{n}\right)^n} = \frac{S_n}{n} = A_n(x).$$

Pokud se stane, že se čísla po prvním provedení nerovnají, budeme opakovat celý postup tolikrát, dokud se čísla nebudou rovnat průměru. A to tak, že

$$G_n(x) < G_n(x^{'}) < G_n(x^{''}) < ... < \sqrt[n]{\left(\frac{S_n}{n}\right)^n} = \frac{S_n}{n} = A_n(x).$$

Závěr. Platí $G_n(x) \leq A_n(x)$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3.1 Řešené úlohy

1. (MO17-D-II-1). Dokažte, že výraz

$$a^2 - ab + b^2 - a + b + 1 > 0 \tag{1}$$

platí pro každá dvě reálná čísla a, b.

Řešení: Nejprve převedeme člen ab na pravou stranu

$$a^2 + b^2 - a + b + 1 > ab.$$

Protože platí $ab \leq |ab|$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \geq 0$ a $b \geq 0$. Dále využijeme A-G nerovnost ve tvaru

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Tento vztah dosadíme do nerovnosti za člen na pravé straně

$$a^2 + b^2 - a + b + 1 > \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Celou nerovnost vynásobíme dvěma a pravou stranu převedeme na levou

$$a^2 + b^2 - 2a + 2b + 2 > 0.$$

V tomto vztahu můžeme rozpoznat dva vzorce ve tvaru $(A \pm B)^2$, po jejich aplikování dostáváme

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0.$$

Aby nastala rovnost, muselo by platit

$$a = 1 \ \wedge \ b = -1,$$

což když dosadíme do vztahu (1), není možné. Tímto je nerovnost dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 13)

2. (MO18-D-II-3a). Ať jsou a, b, c nezáporná čísla taková, že $a+b+c=1$, potom platí:
$$ab + ac + bc < \frac{1}{2}.$$
Dokažte.

Řešení: Nejprve bez újmy na obecnosti předpokládáme, že

$$a \geq b \geq c.$$

Z A-G nerovnosti plyne

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \ b^2 + c^2 \geq 2bc, \ a^2 + c^2 \geq 2ac.$$

Sečtením těchto vztahů, dostáváme

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac. \tag{1}$$

Pokud umocníme trojčlen $a+b+c$ na druhou, máme

$$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

a odtud plyne

$$a^2+b^2+c^2=1-2(ab+ac+bc). \tag{2}$$

Dosadíme vztah (2) do vztahu (1)

$$1-2(ab+ac+bc)\geq ab+ac+bc.$$

Převedeme členy na pravou stranu, celou nerovnost vydělíme třemi a přepíšeme do tvaru

$$ab+ac+bc\leq\frac{1}{3}<\frac{1}{2}.$$

Tím je zadaný vztah dokázaný.

(Jiné řešení: kapitola 5, strana 70)

3. (MO6-C-I-1). Pro všechna reálná čísla a, b, c je výraz

$$a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c) \tag{1}$$

nezáporný. Dokažte. Kdy nastane rovnost?

Řešení: Nerovnost upravíme na tvar

$$a^2+b^2+c^2+3\geq 2a+2b+2c. \tag{2}$$

Protože platí $a\leq|a|$, $b\leq|b|$, $c\leq|c|$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$. Z A-G nerovnosti plyne

$$\sqrt{1\cdot a}\leq\frac{1+a}{2}.$$

Pokud tento vztah umocníme na druhou, dostaneme

$$a \leq \frac{1+2a+a^2}{4}.$$

Tuto nerovnost vynásobíme čtyřmi a sečteme členy

$$2a \leq 1 + a^2.$$

Tento vztah dosadíme za tři činitele na pravé straně nerovnosti (2), čímž pravou stranu zvětšíme. Pokud bude platit nová nerovnost, bude platit i nerovnost předchozí. Po dosazení dostáváme

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 1 + a^2 + 1 + b^2 + 1 + c^2,$$

což po sečtení dává

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3.$$

Tímto je nerovnost dokázána.

Rovnost nastane, když $a = b = c = 1$.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 14)

4. (MO2-B-I-12). Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Dokažte. Proveďte diskusi, kdy nastane rovnost.

Řešení: Z A-G nerovnosti pro tři čísla plyne

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1.$$

Odtud po vynásobení třemi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3,$$

což je vztah, který jsme měli dokázat.

Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když bude

$$a = b = c,$$

tím je zadaná nerovnost vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 4, strana 57)

5. (MO2-B-I-14). Nechť a, b, c jsou racionální čísla. Dokažte, že potom platí

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geq ab + bc + ca. \qquad (1)$$

Proveďte diskusi, pro které případy nastane rovnost.

Řešení: Protože platí $ab \leq |ab|$, $bc \leq |bc|$, $ac \leq |ac|$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Nejprve levou stranu vztahu (1) roznásobíme podle vzorců, čímž dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc +$$

$$+ a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc \geq ab + bc + ca.$$

Po sečtení společných členů

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq ab + bc + ca.$$

Z A-G nerovnosti víme, že platí vztah

$$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

a tento vztah dosadíme za členy na pravé straně, čímž pravou stranu zvětšíme. Pokud bude platit nová nerovnost, bude platit i nerovnost předchozí. Po dosazení dostáváme

$$3a^2+3b^2+3c^2-2ab-2ac-2bc \ge \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}.$$

Převedeme členy na pravé straně na stranu levou a společné členy posčítáme, čímž dostaneme

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \ge 0.$$

Odtud po úpravě

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc+a^2+b^2+c^2 \ge 0.$$

Zde už můžeme rozpoznat tři vzorce $(A-B)^2$ a po jejich aplikování dostáváme

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \ge 0,$$

což jednoznačně platí. Protože jsme prováděli ekvivalentní úpravy, je zadaná nerovnost dokázána.

Rovnost nastane právě tehdy, když $a=b=c$.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 18)

6. (MO1-B-II-3). Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí

$$(a^2 + b^2)ab \leq a^4 + b^4.$$

Rozhodněte kdy platí rovnost.

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$a \geq 0, \; b \geq 0,$$

protože platí

$$ab \leq |ab|\,.$$

V A-G nerovnosti platí vztah

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Tohoto vztahu využijeme a dosadíme ho do nerovnosti. Tímto dostáváme

$$(a^2 + b^2) \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \leq a^4 + b^4.$$

Roznásobíme levou stranu a máme

$$\frac{a^4}{2} + \frac{a^2b^2}{2} + \frac{b^4}{2} + \frac{a^2b^2}{2} \leq a^4 + b^4.$$

Celou nerovnost vynásobíme dvěma

$$a^4 + a^2b^2 + a^2b^2 + b^4 \leq 2a^4 + 2b^4,$$

posčítáme členy

$$2a^2b^2 \leq a^4 + b^4.$$

Dále víme, že

$$a^2b^2 = \sqrt{a^4b^4}.$$

Použijeme A-G nerovnost, pro kterou platí vztah

$$\sqrt{a^4b^4} \leq \frac{a^4 + b^4}{2}.$$

Tento vztah dosadíme do nerovnosti, čímž získáme

$$2 \cdot \frac{a^4 + b^4}{2} \leq a^4 + b^4,$$

což je vztah, který jsme chtěli dokázat.
Rovnost nastává právě tehdy, když $a = b$.

(Jiné řešení: kapitola 2 a 4, strana 19 a 58)

7. (MO8-B-II-3). Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c platí vztah

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9. \tag{1}$$

Najdi všechny trojice, pro které nastává rovnost.

Řešení: Nejprve provedeme roznásobení závorek v nerovnosti (1), čímž dostaneme

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9.$$

Společné členy posčítáme

$$3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 9. \tag{2}$$

Využijeme A-G nerovnosti, v které platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Celou nerovnost dáme na druhou, čímž získáme

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$

Po vynásobení čtyřmi a posčítání členů, máme

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Celou nerovnost vydělíme ab a dostaneme

$$2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Dosadíme vztah (3) do nerovnosti (2), čímž levou stranu zmenšíme. Po dosazení máme

$$3 + 2 + 2 + 2 = 9 \geq 9,$$

což platí.

Rovnost nastane jen tehdy, když

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \ \wedge \ \frac{b}{c} = \frac{c}{b} \ \wedge \ \frac{c}{a} = \frac{a}{c},$$

to znamená, když

$$a = b = c.$$

Tímto je úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 2 a 4, strana 20 a 59)

8. (MO9-B-II-3). Nechť jsou a, b dvě libovolná kladná čísla. Potom platí

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \leq \frac{\sqrt{a}}{b^5 \cdot \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{a^5 \cdot \sqrt{a}}. \tag{1}$$

Dokažte.

Řešení: Celou nerovnost vynásobíme kladným číslem $a^5 b^5 \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, čímž dostaneme

$$b^5 \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} + a^5 \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \leq a^5 a + b^5 b,$$

odtud

$$b^5\sqrt{ab} + a^5\sqrt{ab} \leq a^6 + b^6.$$

Víme, že v A-G nerovnosti platí vztah

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Tento vztah využijeme a dosadíme ho za členy na levé straně nerovnosti, čímž ji zvětšíme. Pokud bude platit nová nerovnost, bude platit i nerovnost předchozí. Po dosazení dostáváme

$$b^5 \cdot \frac{a+b}{2} + a^5 \cdot \frac{a+b}{2} \leq a^6 + b^6.$$

Celou nerovnost vynásobíme dvěma a posčítáme členy

$$ab^5 + a^5b \leq a^6 + b^6.$$

Dále převedeme všechny členy nerovnosti na pravou stranu

$$0 \leq a^6 + b^6 - ab^5 - a^5b,$$

provedeme vytýkání, z čehož dostaneme

$$0 \leq (a^5 - b^5) \cdot (a - b).$$

Víme, že mocninná funkce $y = x^n$, kde $n \in N$ a $x > 0$, je rostoucí, a proto ze vztahu $a \geq b$ plyne $a^5 \geq b^5$. Z toho vyplývá, že násobíme-li dva nezáporné čitatele navzájem, dostáváme nezáporné číslo a nerovnost platí.

Víme, že mocninná funkce $y = x^n$, kde $n \in N$ a $x > 0$, je rostoucí, a proto ze vztahu $a < b$ plyne $a^5 < b^5$. Z toho vyplývá, že násobíme-li dva záporné čitatele navzájem, dostáváme kladné číslo a nerovnost platí.

Tímto je zadaná nerovnost (1) dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 4, strana 61)

9. (MO1-A-I-6). Dokažte, že pro každé reálné x, y, z platí

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}. \qquad (1)$$

Kdy nastává rovnost?

Řešení: Protože platí $x + y + z \leq |x| + |y| + |z|$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Celou nerovnost (1) umocníme na druhou, čímž dostaneme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \leq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Převedeme si druhé mocniny na levou stranu

$$2xy + 2xz + 2yz \leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2,$$

celou nerovnost vydělíme dvěma

$$xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Z A-G nerovnosti víme, že platí vztah

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab.$$

Tohoto vztahu využijeme a dosadíme ho za členy na levé straně, čímž ji zvětšíme. Pokud bude platit nová nerovnost, bude platit i nerovnost předchozí. Po dosazení dostáváme

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Teď již jen upravíme výraz na pravé a levé straně

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Tento vztah platí a tím je zadaná nerovnost dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 43)

10. (MO17-A-II-2). Dokažte, že pro každá tři nezáporná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geq 0. \tag{1}$$

Dále zjistěte, v kterých případech nastane rovnost.

Řešení: V tomto případě pracujeme s nezápornými čísly, proto zde můžeme využívat A-G nerovnost. Použijeme známý vztah

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},$$

tento vztah dosadíme za tři členy na levé straně. Vzhledem k tomu, že je před znaménky odmocnin mínus, výsledný výraz nezvětšíme. Proto tedy platí

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geq$$
$$\geq x\left(x - \frac{y+z}{2}\right) + y\left(y - \frac{x+z}{2}\right) + z\left(z - \frac{x+y}{2}\right).$$

Po roznásobení závorek máme

$$x^2 - \frac{xy + xz}{2} + y^2 - \frac{xy + yz}{2} + z^2 - \frac{xz + yz}{2} \geq 0.$$

Celou nerovnost vynásobíme dvěma a posčítáme členy, čímž dostaneme

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0.$$

Jak vidíme, můžeme zde použít výraz $(A - B)^2$. Po zanesení tohoto výrazu do této nerovnosti získáváme

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0.$$

Tato nerovnost určitě platí. Tím je dokázána i nerovnost (1), protože jsme prováděli ekvivalentní úpravy.

Rovnost v poslední nerovnosti může nastat jen pro $x = y = z$, což můžeme převést i na nerovnost (1). Tím jsme úlohu vyřešili.

11. (MO2-A-III-3). Jsou-li čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ kladná, platí

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2. \tag{1}$$

Dokažte.

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Provedeme-li násobení na levé straně vztahu (1), dostaneme jednak členy tvaru $a_i/a_i = 1$, kterých je n. Jednak členy tvaru a_i/a_j, (kde $i \neq j$), kterých je $n^2 - n$. Vzhledem k tomu, že sčítání se řídí zákonem komutativním a asociativním, můžeme psát

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) =$$
$$= n + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}\right) + ... + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

Každý výraz v závorkách, kterých je $(1/2) \cdot (n^2 - n)$, není menší než 2, přičemž rovnost na všech místech nastane tehdy a jen tehdy, je-li $a_i = a_j$ pro každé i a každé $j \neq i$. Odtud plyne

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq$$

$$\geq n + \frac{1}{2}(n^2 - n) \cdot 2 = n^2.$$

Přičemž rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Tímto je úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 6, strana 92)

3.2 Další úlohy

1. (MO19-B-P-2). Ať jsou x_1, x_2, …, x_n kladná čísla, potom platí

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Dokažte.

2. (MO21-A-P-1). Pro všechna kladná čísla a, b a všechna přirozená čísla n platí

$$n \cdot a \cdot b^{n-1} \leq a^n + (n-1)b^n.$$

Dokažte.

3. (MO16-A-P-1). Jsou-li d_1, d_2, d_3 kladná čísla taková, že $d_1 \leq d_2 \leq d_3$, pak pro libovolná nezáporná čísla c_1, c_2, c_3, platí

$$(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3)\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leq$$

$$\leq (c_1 + c_2 + c_3)^2 \frac{(d_1 + d_3)^2}{4 d_1 d_3}.$$

Dokažte.

Návod. Dokažte nejprve, že

$$\frac{d_2}{d_1+d_3}+\frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}}\leq 1.$$

4. (MO18-MMOXI-6). Ať jsou x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 reálná čísla, pro které platí $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1y_1-z_1^2>0$, $x_2y_2-z_2^2>0$, potom platí

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leq\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Dokažte. Najděte nutné a postačující podmínky pro to, aby v (1) platila rovnost.

4 Využití substituce

Substituce je efektivní metoda pro řešení nerovností a byla hojně využívaná již ve starověké Mezopotánii. Již tehdy matematici objevovali výhody této metody, která funguje na principu záměny, kdy můžeme složitý matematický výraz nahradit výrazem jednodušším.

4.1 Řešené úlohy

1. (MO21-Z-II-3). Dokažte, že pro každou trojici čísel a, b, c je výraz

$$V = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - abc(a + b + c) \tag{1}$$

nezáporný. Pro které hodnoty čísel a, b, c se tento výraz rovná nule?

Řešení: V tomto příkladě můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$a \leq b \leq c.$$

Dále zvolíme substituci

$$a = b - x,\ c = b + y,$$

kde $x, y \geq 0$. Nyní dosadíme substituci do vztahu (1) a dostaneme

$$V = (b - x)^2 \cdot b^2 + (b - x)^2 \cdot (b + y)^2 + b^2 \cdot$$

$$\cdot (b + y)^2 - (b - x) \cdot (b) \cdot (b + y) \cdot (b - x + b + b + y).$$

Roznásobíme všechny druhé mocniny

$$V = (b^2 - 2bx + x^2) \cdot b^2 + (b^2 - 2bx + x^2) \cdot (b^2 + 2by + y^2) + b^2 \cdot$$

$$\cdot (b^2 + 2by + y^2) - (b^2 - bx) \cdot (b + y) \cdot (3b - x + y).$$

Po roznásobení závorek dostaneme

$$V = b^4 - 2b^3x + b^2x^2 + b^4 + 2b^3y + b^2y^2 - 2b^3x - 4b^2xy - 2bxy^2 +$$

$$+b^2x^2+2bx^2y+x^2y^2+b^4+2b^3y+b^2y^2-3b^4+b^3x-b^3y-3b^3y+$$
$$+b^2xy-b^2y^2+3b^3x-b^2x^2+b^2xy+3b^2xy-bx^2y+bxy^2.$$

Pak stejné členy sečteme

$$V=b^2x^2+b^2y^2+b^2xy-bxy^2+bx^2y+x^2y^2,$$

dále je rozdělíme

$$V=b^2y^2-bxy^2+0,25x^2y^2+b^2x^2+bx^2y+0,25x^2y^2+0,5x^2y^2+b^2xy.$$

Teď již v nerovnosti rozpoznáváme dva vzorce ve tvaru $(A\pm B)^2$ a po jejich aplikování dostáváme

$$V=(by-0,5xy)^2+(bx+0,5xy)^2+b^2xy+0,5x^2y^2.$$

Výraz se nám podařilo vyjádřit ve tvaru součtu nezáporných členů, a proto $V\geq 0$.

Rovnost nastane právě tehdy, když bude splněna některá z následujících podmínek:

a) $a=b=c$,
b) $a=b=0,\ c$ libovolné,
c) $b=c=0,\ a$ libovolné,
d) $c=a=0,\ b$ libovolné.

Tím je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 11)

2. (MO3-C-I-6). Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, přičemž $c > 1$. Dokažte, že platí

$$a + b \leq abc. \tag{1}$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Z předpokladu víme, že $c > 1$. Z toho můžeme určit nejmenší hodnotu pro c, a to je číslo dvě. Místo (1) tedy stačí dokázat

$$a + b \leq 2ab.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leq b$ a zvolit substituci

$$b = a + x,$$

kde $x \in \{0, 1, 2...\}$. Po dosazení do nerovnosti dostáváme

$$2a + x \leq 2(a + x)a,$$

což po roznásobení je

$$2a + x \leq 2a^2 + 2ax.$$

Vzhledem k tomu, že a je přirozené číslo, platí

$$2a \leq 2a^2$$

a dále je také zřejmé, že

$$x \leq 2ax.$$

Platí tedy

$$2a + x \leq 2a^2 + 2ax,$$

čímž je zadaná nerovnost dokázána.

Rovnost nastane právě když $a = b = 1$ a $c = 2$.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 15)

3. (MO23-C-P-1). Dokažte, že pro všechna kladná čísla a, b, c platí

$$\frac{b(2a-c)}{a} + \frac{c(2b-a)}{b} + \frac{a(2c-b)}{c} \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}.$$

Kdy platí rovnost?

Řešení: Nejprve převedeme levou stranu nerovnosti na stranu pravou, čímž dostaneme

$$0 \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} - \frac{b(2a-c)}{a} - \frac{c(2b-a)}{b} - \frac{a(2c-b)}{c},$$

protože víme, že čísla a, b, c jsou ze zadání kladná, můžeme celou nerovnost vynásobit abc, aniž by se změnilo znaménko nerovnosti. Po vynásobení tedy

$$0 \leq a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - b^2c \cdot (2a-c) - ac^2 \cdot (2b-a) - a^2b(2c-b),$$

po roznásobení závorek

$$0 \leq a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - 2ab^2c + b^2c^2 - 2abc^2 + a^2c^2 - 2a^2bc + a^2b^2.$$

Nyní sečteme odpovídající členy a vydělíme celou nerovnost dvěma, čímž dostaneme

$$0 \leq a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - ab^2c - abc^2 - a^2bc.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$a \leq b \leq c.$$

Zvolme substituci

$$a = b - x,\ c = b + y,$$

v které platí, že $x, y \geq 0$. Substituci aplikujeme do nerovnosti, čímž dostaneme

$$0 \leq (b-x)^2 \cdot (b+y)^2 + (b-x)^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot (b+y)^2 - (b-x) \cdot b^2 \cdot$$

$$\cdot (b+y) - (b-x) \cdot b \cdot (b+y)^2 - (b-x)^2 \cdot b \cdot (b+y).$$

Odtud po roznásobení druhých mocnin máme

$$0 \leq (b^2 - 2bx + x^2) \cdot (b^2 + 2by + y^2) + (b^2 - 2bx + x^2) \cdot b^2 + b^2 \cdot$$

$$\cdot (b^2 + 2by + y^2) + (-b^3 + b^2 x) \cdot (b+y) - (b^2 - bx) \cdot$$

$$\cdot (b^2 + 2by + y^2) - (b^2 - 2bx + x^2) \cdot (b^2 + by)$$

a po roznásobení všech členů

$$0 \leq b^4 + 2b^3 y + b^2 y^2 - 2b^3 x - 4b^2 xy - 2bxy^2 + b^2 x^2 + 2bx^2 y +$$

$$+ x^2 y^2 + b^4 - 2b^3 x + b^2 x^2 + b^4 + 2b^3 y + b^2 y^2 - b^4 -$$

$$- b^3 y + b^3 x + b^2 xy - b^4 - 2b^3 y - b^2 y^2 + b^3 x + 2b^2 xy +$$

$$+ bxy^2 - b^4 - b^3 y + 2b^3 x + 2b^2 xy - b^2 x^2 - bx^2 y$$

a po sečtení všech členů

$$0 \leq b^2 y^2 + b^2 xy - bxy^2 + b^2 x^2 + bx^2 y + x^2 y^2.$$

Vytkneme v prvních třech sčítancích člen by^2, čímž dostaneme

$$0 \leq by^2 \cdot (b-x) + b^2 xy + b^2 x^2 + bx^2 y + x^2 y^2.$$

Protože víme, že a, b, c jsou kladná čísla a $x, y \geq 0$, jsou kladné i členy

$$b^2 xy + b^2 x^2 + bx^2 y + x^2 y^2.$$

Zbývá tedy dokázat, že

$$0 \leq by^2 \cdot (b-x).$$

Z daných podmínek víme, že první násobek je za každých okolností kladný a výraz

$$b - x = a$$

je také kladný. Tím je nerovnost dokázána.

Rovnost v nerovnosti nastane tehdy a jen tehdy, když

$$a = b = c,$$

tím je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 16)

4. (MO2-B-I-12). Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Dokažte. Proveďte diskusi, kdy nastane rovnost.

Řešení: Nejprve celou nerovnost vynásobíme členem abc, čímž dostáváme

$$a^2c + b^2a + c^2b \geq 3abc.$$

Nyní můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \leq b \leq c$. Zvolíme substituci

$$a = b - x,\ c = b + y,$$

v které platí, že $x, y \geq 0$. Tuto substituci aplikujeme do nerovnosti a zároveň převedeme pravou stranu na stranu levou. Dostaneme tedy

$$(b-x)^2 \cdot (b+y) + b^2 \cdot (b-x) + (b+y)^2 \cdot b - 3(b-x) \cdot b \cdot (b+y) \geq 0.$$

Po roznásobení druhých mocnin máme

$$(b^2 - 2bx + x^2) \cdot (b+y) + b^3 - b^2x+$$

$$+(b^2 + 2by + y^2) \cdot b + (-3b^2 + 3bx) \cdot (b+y) \geq 0,$$

roznásobíme závorky

$$b^3 + b^2y - 2b^2x - 2bxy + x^2b + x^2y+$$

$$+b^3 - b^2x + b^3 + 2b^2y + by^2 - 3b^3 - 3b^2y + 3b^2x + 3bxy \geq 0$$

a posčítáme odpovídající členy

$$bxy + x^2b + x^2y + by^2 \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že čísla a, b, c jsou kladná a čísla $x, y \geq 0$, tak i tento vztah platí.
Rovnost v této nerovnosti nastane právě tehdy, když bude

$$a = b = c,$$

tím je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 40)

5. (MO1-B-II-3). Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí

$$(a^2 + b^2)ab \leq a^4 + b^4.$$

Rozhodněte kdy platí rovnost.

Řešení: Protože platí $ab \leq |ab|$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \geq 0,\ b \geq 0$. Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$0 \leq a \leq b,$$

a zvolme substituci

$$b = a + x,$$

kde $x \geq 0$. Po zavedení této substituce a převodu levé strany na stranu pravou, dostáváme

$$0 \leq a^4 + (a+x)^4 - \left(a^2 + (a+x)^2\right) \cdot a(a+x).$$

Odtud

$$0 \leq a^4 + a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 - (2a^2 + 2ax + x^2)(a^2 + ax).$$

Po dalším roznásobení

$$0 \leq a^4+a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4-2a^4-2a^3x-2a^3x-2a^2x^2-a^2x^2-ax^3$$

a po sečtení členů

$$0 \leq 3a^2x^2 + 3ax^3 + x^4.$$

Protože víme, že $x \geq 0$ a $a \geq 0$, tak je tato nerovnost platná a tím platí i původní nerovnost.
Rovnost v tomto případě nastane tehdy a jen tehdy, když bude $a = b$.
Tím je zadaná nerovnost vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 2 a 3, strana 19 a 43)

6. (MO8-B-II-3). Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c platí vztah

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9. \tag{1}$$

Najděte všechny trojice, pro které nastává rovnost.

Řešení: Pravou stranu zadané nerovnosti převedeme nalevou, čímž dostaneme

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 \geq 0.$$

Protože víme, že čísla a, b, c jsou kladná, můžeme celou nerovnost vynásobit abc. Po vynásobení dostáváme

$$(a + b + c) \cdot (bc + ac + ab) - 9abc \geq 0.$$

Nyní předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $a \leq b \leq c$. Dále zvolme substituci

$$a = b - x, \ c = b + y,$$

kde $x, y \geq 0$. Zvolenou substituci dosadíme do nerovnosti (1), čímž dostáváme

$$(b - x + b + b + y) \cdot [b \cdot (b + y) + (b - x) \cdot (b + y) +$$

$$+ (b - x) \cdot b] - 9 \cdot (b - x) \cdot b \cdot (b + y) \geq 0$$

a po roznásobení

$$(3b - x + y) \cdot (b^2 + by + b^2 + by - bx - xy + b^2 - bx) - (9b^2 - 9bx) \cdot (b + y) \geq 0.$$

Odtud

$$(3b - x + y) \cdot (3b^2 + 2by - 2bx - xy) - 9b^3 - 9b^2y + 9b^2x + 9bxy \geq 0,$$

po roznásobení výrazů v závorkách, dostáváme

$$9b^3 + 6b^2y - 6b^2x - 3bxy - 3b^2x - 2bxy + 2bx^2 + x^2y + 3b^2y +$$

$$+ 2by^2 - 2bxy - xy - 9b^3 - 9b^2y + 9b^2x + 9bxy \geq 0$$

a po sečtení členů

$$2bxy + 2bx^2 + x^2y + 2by^2 - xy^2 \geq 0.$$

U posledních dvou sčítanců vytkneme $2y^2$, čímž dostaneme

$$2bxy + 2bx^2 + x^2y + 2y^2 \cdot (b - 0,5x) \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že $b > 0$ a zároveň $x, y \geq 0$, jsou první tři členy nerovnosti kladné. Poslední člen se skládá ze dvou částí. První část je kladná, a proto stačí dokázat, že $b - 0,5x \geq 0$. Víme, že

$$b - 0,5x \geq b - x = a > 0,$$

proto je tento člen také kladný, a tím je nerovnost dokázána.

Rovnost nastane, pokud se

$$a = b = c.$$

Tímto je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 2 a 3, strana 20 a 44)

7. (MO9-B-II-3). Nechť jsou a, b dvě libovolná kladná čísla, potom platí

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \leq \frac{\sqrt{a}}{b^5 \cdot \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{a^5 \cdot \sqrt{a}}. \qquad (1)$$

Dokažte.

Řešení: K vyřešení zadané nerovnosti budeme využívat větu, která je důsledkem vlastností mocninné funkce:
Ať je $a > b > 0$, potom platí $a^n > b^n > 0$, kde n je libovolné přirozené číslo.

Utvoříme substituci, kde

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = p, \ \frac{1}{\sqrt{b}} = q.$$

Ze zadání je zřejmé, že $p > 0$, $q > 0$. Po dosazení substituce do nerovnosti (1) dostáváme vztah

$$p^{10} + q^{10} \leq \frac{p^{11}}{q} + \frac{q^{11}}{p}. \qquad (2)$$

Celou nerovnost vynásobíme kladným číslem pq a dostaneme

$$p^{11}q + pq^{11} \leq p^{12} + q^{12},$$

převedeme všechny členy na pravou stranu nerovnosti

$$0 \leq p^{12} + q^{12} - p^{11}q - pq^{11},$$

provedeme vytýkání

$$0 \leq p^{11}(p-q) - q^{11}(p-q),$$

po dalším vytknutí získáváme vztah

$$0 \leq (p-q)(p^{11} - q^{11}). \tag{3}$$

Pro $p = q$ vztah (3) zřejmě platí.

Z uvedené věty víme, že pokud je $p > q > 0$, je též $p^{11} > q^{11} > 0$. Z tohoto důvodu jsou obě dvě čísla $p - q$, $p^{11} - q^{11}$ kladná a jejich součin je kladný. V tomto případě vztah (3) platí.
Pokud je $0 < p < q$, je též $0 < p^{11} < q^{11}$. Z tohoto důvodu jsou obě dvě čísla $p - q$, $p^{11} - q^{11}$ záporná a jejich součin je číslo kladné. Vztah (3) platí i v tomto případě.
Obráceným postupem se dostaneme z (3) k (2) a odtud k (1). Tímto je tvrzení úlohy dokázané.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 45)

8. (MO3-A-II-2). Jsou dána čísla $a > b > 0$; potom platí

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Dokažte

Řešení: Zvolme substituci

$$m = \frac{a+b}{2},\ a = m+d,\ b = m-d,$$

kde $d \geq 0$ a $m > d > 0$. Vezměme nerovnost

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}. \tag{1}$$

Po provedení substituce, odtud dostaneme

$$\frac{(m+d-m+d)^2}{8m+8d} < \frac{2m}{2} - \sqrt{(m+d)\cdot(m-d)},$$

po úpravě

$$\frac{4d^2}{8m+8d} < m - \sqrt{m^2-d^2},$$

pak

$$\sqrt{m^2-d^2} < m - \frac{d^2}{2m+2d}$$

a celou nerovnost umocníme na druhou

$$m^2 - d^2 < m^2 - \frac{2md^2}{2m+2d} + \frac{d^4}{(2m+2d)^2}.$$

Převedeme členy z levé strany na stranu pravou a upravíme na tvar

$$0 < d^2 - \frac{md^2}{m+d} + \frac{d^4}{4m^2+8md+4d^2}.$$

Celou nerovnost vynásobíme kladným číslem $(m+d)\cdot(4m^2+8md+4d^2)$ a dostaneme

$$0 < (md^2+d^3)\cdot(4m^2+8md+4d^2) - 4m^3d^2 - 8m^2d^3 - 4md^4 + md^4 + d^5.$$

Odtud po dalším roznásobení a sečtení, získáme

$$0 < 4m^2d^3 + 9md^4 + 5d^5.$$

Tato nerovnost platí. Protože jsme prováděli ekvivalentní úpravy, je nerovnost (1) dokázána.

Nyní vezměme nerovnost

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b} \tag{2}$$

a dosaďme substituční vztahy do nerovnosti (2), dostaneme

$$\frac{m+d+m-d}{2} - \sqrt{(m+d)\cdot(m-d)} < \frac{(m+d-m+d)^2}{8m-8d}$$

a po úpravě

$$m - \sqrt{m^2-d^2} < \frac{d^2}{2m-2d}.$$

Tento vztah je ekvivalentní se vztahem

$$m < \frac{d^2}{2\cdot(m-d)} + \sqrt{m^2-d^2},$$

jehož pravá i levá strana je kladná. Proto celou nerovnost můžeme umocnit na druhou

$$m^2 < \frac{d^4}{4\cdot(m-d)^2} + \frac{d^2}{m-d}\cdot\sqrt{m^2-d^2} + m^2 - d^2.$$

Po úpravě a vytknutí dostaneme

$$0 < \frac{d^4}{4\cdot(m-d)^2} + d^2\cdot\left(\frac{\sqrt{m^2-d^2}}{m-d} - 1\right).$$

Tento vtah platí vždy, neboť každý ze sčítanců na pravé straně je kladný. Protože jsme prováděli ekvivalentní úpravy, je nerovnost (2) dokázána.

Protože jsme dokázali nerovnosti (1) a (2), je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 2 a 5, strana 24 a 74)

9. (MO13-MMOVI-2). Ať jsou a, b, c délky stran libovolného trojúhelníka, potom platí

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Dokažte.

Řešení: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$a \leq b \leq c$$

a zvolme substituci

$$a = b-x \ \wedge \ c = b+y,$$

kde $x, y \geq 0$. Dosadíme zvolenou substituci do nerovnosti (1), čímž dostaneme

$$(b-x)^2 \cdot (b+b+y-b+x) + b^2 \cdot (b+y+b-x-b)+$$

$$+(b+y)^2 \cdot (b-x+b-b-y) \leq 3 \cdot (b-x) \cdot b \cdot (b+y),$$

po roznásobení druhých mocnin

$$(b^2-2bx+x^2) \cdot (b+y+x) + b^2 \cdot (b+y-x)+$$

$$+(b^2+2by+y^2) \cdot (b-x-y) \leq (3b^2-3bx) \cdot (b+y),$$

po roznásobení závorek a převedení pravé strany na stranu levou

$$b^3+b^2x+b^2y-2b^2x-2bx^2-2bxy+bx^2+$$

$$+x^3+x^2y+b^3+b^2y-b^2x+b^3-b^2x-$$

$$-b^2y+2b^2y-2bxy-2by^2+by^2-xy^2-$$

$$-y^3-3b^3-3b^2y+3b^2x+3bxy \geq 0.$$

Následně sečteme všechny společné členy, z čehož dostaneme

$$bx^2 - x^3 + bxy - x^2y + y^3 + xy^2 + by^2 \geq 0,$$

po vytýkání

$$x^2 \cdot (b - x) + xy \cdot (b - x) + xy^2 + by^2 + y^3 \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že $x, y \geq 0$ a $b - x = a > 0$, je tato nerovnost správná. Tímto je zadaná nerovnost dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 5, strana 79)

4.2 Další úlohy

1. (MO1-B-I-12). Dokažte: Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2. (MO5-B-I-5). Nechť o daných kladných číslech a, b, s, platí vztah

$$a + b \leq s.$$

Potom platí vztah

$$ab \leq \frac{1}{4}s^2.$$

Dokažte.

Tento výsledek objasněte na obdélníku o rozměrech a, b.

3. (MO24-B-I-2). Dokažte platnost nerovnosti

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{x_i}{x}\right)^2 \left(2-\left(\frac{x_i}{x}\right)^2\right) \leq n(n+1)(2n+1),$$

kde n je přirozené číslo a x, x_i, $i = 1, 2, ..., n$, reálná čísla. Kdy nastane rovnost?

4. (MO23-A-II-1b). Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, x, y, platí

$$|a \sin x + b \sin y| \leq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(x+y)}.$$

Kdy nastane rovnost?

5 Odhady

Metoda spočívá v tom, že odhadujeme větší stranu dané nerovnosti zdola nebo její menší stranu shora. Pomocí vhodných odhadů pak dospějeme ke zřejmé nerovnosti, z jejíž platnosti nakonec usoudíme platnost nerovnosti dokazované.

5.1 Řešené úlohy

1. (MO4-D-I-13). Ať m je přirozené číslo, platí

$$\frac{1}{5} < \frac{1+m}{5+m}; \ \frac{1+m}{5+m} < 1.$$

Dokažte.

Řešení: Vezměme prostřední výraz

$$\frac{1+m}{5+m},$$

tento výraz rozšíříme, abychom dostali tvar $1 - x$, máme tedy

$$\frac{5+m}{5+m} - \frac{4}{5+m} = 1 - \frac{4}{5+m}.$$

Nyní budeme pracovat s výrazem

$$\frac{4}{5+m}.$$

Pak pro přirozená čísla m platí tento vztah

$$\frac{4}{5+m} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

což znamená, že

$$\frac{1+m}{5+m} \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > \frac{1}{5}.$$

Tím je nerovnost zleva dokázána. Je zřejmé, že výraz

$$\frac{4}{5+m} > 0.$$

Proto platí
$$\frac{1+m}{5+m} = 1 - \frac{4}{5+m} < 1,$$
čímž je nerovnost dokázána.

Jiný postup. Celou nerovnost upravíme a víme, že pro ni platí tento vztah
$$\left(\frac{1}{5} < \frac{1+m}{5+m} < 1\right) \Leftrightarrow \left(5 \geq \frac{5+m}{1+m} \geq 1\right).$$
Nyní budeme pracovat s výrazem
$$\frac{5+m}{1+m}.$$
Přepíšeme ho do tvaru $1+x$ a dostáváme
$$\frac{5+m}{1+m} = \frac{1+m}{1+m} + \frac{4}{5+m} = 1 + \frac{4}{1+m}.$$
Dále budeme pracovat s výrazem
$$\frac{4}{1+m}.$$
Pro přirozená čísla m platí, že
$$\frac{4}{1+m} \leq 2,$$
proto platí vztah
$$\frac{5+m}{1+m} = 1 + \frac{4}{1+m} \leq 3 < 5.$$
Tímto je první vztah dokázán. Dále víme, že pro přirozená čísla m platí
$$\frac{4}{1+m} > 0,$$
proto tedy platí, že
$$\frac{5+m}{1+m} = 1 + \frac{4}{1+m} > 1,$$

čímž je i druhá nerovnost dokázána a tím je příklad vyřešen.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 12)

2. (MO18-D-II-3a). Ať jsou a, b, c nezáporná čísla taková, že $a+b+c=1$, potom platí:
$$ab + ac + bc < \frac{1}{2}.$$
Dokažte.

Řešení: Umocněním trojčlenu $a + b + c$ na druhou, dostaneme

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Tento vztah se rovná jedné, protože jedna na druhou je pořád jedna. Tohoto využijeme a převedeme členy bez druhé mocniny na pravou stranu

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + ac + bc). \tag{1}$$

Je zřejmé, že tento vztah je větší než nula. Ze vztahu $a + b + c = 1$ vyplývá, že čísla a, b, c nemůžou být všechna zároveň rovna nule. Proto ze vztahu (1) dostáváme odhad

$$ab + ac + bc < \frac{1}{2},$$

což je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 38)

3. (MO17-D-P-1). Dokažte, že platí

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2$$

pro všechna přirozená $n > 1$.

Řešení: Proměnný činitel vyšetřovaného součinu s, kde k je přirozené číslo, je

$$1+\frac{1}{k^2-1}.$$

Tento činitel můžeme upravit do tvaru

$$1+\frac{1}{k^2-1}=\frac{k^2}{k^2-1}=\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

Z předchozího odvození vychází, že součin s můžeme napsat ve tvaru

$$s=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}.$$

Tento tvar převedeme na společného jmenovatele, z čehož dostáváme

$$s=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot n^2}{2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(n-1)^2\cdot n(n+1)}.$$

Z tohoto zlomku po zkrácení dostaneme

$$s=2n\cdot\frac{1}{n+1}=2\cdot\frac{n}{n+1}<2,$$

což je požadované řešení úlohy.

(Jiné řešení: kapitola 6, strana 86)

4. (MO9-A-I-1). Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{2}{a+b+c}. \tag{1}$$

Řešení: Z podmínek v zadání vyplývají nerovnosti

$$a+b+c>b+c>0,$$

$$a+b+c>c+a>0,$$

$$a+b+c>a+b>0.$$

Podle známé věty platí tyto nerovnosti pro převrácené hodnoty uvažovaných stran

$$\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{b+c}$$
$$\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{c+a}$$
$$\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostáváme

$$\frac{3}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Dále platí nerovnost

$$\frac{2}{3}<1.$$

Odtud a z předchozí nerovnosti plyne

$$1\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)>\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{a+b+c}=\frac{2}{a+b+c}.$$

Tím je důkaz proveden.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 22)

5. (MO1-A-I-11). Dokažte, že pro všechna celá $n > 1$ platí

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Řešení: Nejprve řadu označíme jako součet

$$S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

pro celé $n > 1$. Pro celé $m > 1$ platí

$$\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m(m-1)}.$$

Tedy je $S < S^{'}$, kde si za novou řadu dosadíme z předchozího odhadu

$$S^{'} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}.$$

Předchozí vztah můžeme přepsat do tvaru

$$S^{'} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

z čehož plyne, že

$$S^{'} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Je tedy

$$S < \frac{n-1}{n},$$

a tím je důkaz proveden.

6. (MO3-A-II-2). Jsou dána čísla $a > b > 0$, potom platí

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Dokažte

Řešení: Vezměme ze zadání nerovnost

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}. \tag{1}$$

Z předpokladu víme, že $a > b > 0$, a tudíž

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0.$$

Díky tomuto vztahu a podmínkám platí

$$0 < \sqrt{a} + \sqrt{b} < 2 \cdot \sqrt{a}.$$

Po umocnění na druhou, dostaneme

$$0 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 < 4a.$$

Podle známé věty o převrácených hodnotách platí vztah

$$\frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} > \frac{1}{4a}. \tag{2}$$

Pravou stranu nerovnosti (1) můžeme přepsat do tvaru

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a - 2\sqrt{ab} + b)$$

a zde vidíme vzorec ve tvaru $(A - B)^2$ a po jeho aplikaci dostaneme

$$P = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Dále provedeme rozšíření zlomku

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2},$$

a po jeho úpravě

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

S ohledem na vztah (2) platí

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{4a},$$

z čehož vyplývá

$$P > \frac{(a-b)^2}{8a} = L.$$

Tímto je nerovnost (1) dokázána.

Vezměme ze zadání nerovnost

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}. \tag{3}$$

Z předpokladu víme, že $a > b > 0$, a tudíž

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0,$$

a tedy také

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 4b > 0.$$

Podle známé věty o převrácených hodnotách platí vztah

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} < \frac{1}{4b}. \tag{4}$$

Jak víme z předchozího, lze levou stranu nerovnosti (3) upravit na tvar

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

S ohledem na vztah (4) platí

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{4b},$$

z čehož vyplývá

$$L < \frac{(a-b)^2}{8b} = P.$$

Tímto je nerovnost (3) dokázána.

Protože jsme dokázali nerovnost (1) a (3), je zadaná úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 2 a 4, strana 24 a 62)

7. (MO23-A-II-2a). Dokažte, že pro všechna přirozená n platí

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Řešení: Pro každé přirozené číslo k platí:

$$\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4k^2+4k+1}<\frac{1}{4k(k+1)}.$$

Poslední zlomek rozložíme na součet parciálních zlomků. Platí

$$\frac{1}{4k\cdot(k+1)}=\frac{A}{4k}+\frac{B}{k+1}. \tag{1}$$

Odtud

$$A\cdot(k+1)+4k\cdot B=1+0k$$

a po výpočtu

$$A=1\ \wedge\ B=-\frac{1}{4}.$$

Po dosazení do vztahu (1) za hodnoty A,B dostáváme

$$\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+4},$$

proto tedy platí

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}<$$

$$<\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+...+\frac{1}{4n-4}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n+4}.$$

Po úpravě pravé strany nerovnosti získáváme

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} < \frac{1}{4},$$

což jsme měli dokázat. Tímto je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 6, strana 90)

8. (MO9-A-II-4). Platí-li pro reálná čísla a, b, c nerovnosti

$$a > 0, \ b > 0, \ 2c > a + b,$$

potom je $c^2 > ab$ a platí

$$c - \sqrt{c^2 - ab} < a < c + \sqrt{c^2 - ab}. \tag{1}$$

Dokažte.

Řešení: Víme, že platí

$$(2c)^2 > (a+b)^2, \tag{2}$$

dále předpokládejme, že neplatí vztah

$$4c^2 > 4ab,$$

to znamená, že platí vztah

$$4c^2 \leq 4ab. \tag{3}$$

Z nerovností (2) a (3) dostáváme vztah

$$4ab > (a+b)^2.$$

Podle vzorce $(A+B)^2$ upravíme pravou stranu a posčítáme společné členy

$$0 > a^2 - 2ab + b^2.$$

V nerovnosti vidíme vzorec, a po jeho aplikaci dostaneme

$$0 > (a-b)^2,$$

což je spor, proto platí $4c^2 > 4ab$ a tedy i vztah $c^2 > ab$.

I. Předpokládejme, že platí vztah

$$c - \sqrt{c^2 - ab} \geq a.$$

Po převedení členů máme

$$c - a \geq \sqrt{c^2 - ab},$$

celou nerovnost umocníme na druhou

$$(c-a)^2 \geq c^2 - ab,$$

po roznásobíme a posčítáme společné členy

$$-2ac + a^2 \geq -ab,$$

celou nerovnost vydělíme kladným číslem a

$$-2c + a \geq -b$$

a po úpravě získáme vztah

$$b + a \geq 2c,$$

což je spor s předpokladem, proto musí platit $c - \sqrt{c^2 - ab} < a$.

II. Předpokládejme, že platí vztah

$$a \geq c + \sqrt{c^2 - ab}.$$

Po převedení členů máme

$$a - c \geq \sqrt{c^2 - ab},$$

celou nerovnost umocníme na druhou

$$a^2 - 2ac + c^2 \geq c^2 - ab,$$

sečteme společné členy

$$a^2 + ab \geq 2ac,$$

celou nerovnost vydělíme kladným číslem a, z čehož dostaneme vztah

$$a + b \geq 2c,$$

což je spor s předpokladem, proto musí platit $a < c + \sqrt{c^2 - ab}$.
Tímto je zadaná úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 2, strana 26)

9. (MO13-MMOVI-2). Ať jsou a, b, c délky stran libovolného trojúhelníka, potom platí

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Dokažte.

Řešení: Jsou-li a, b, c délky stran libovolného trojúhelníka, je vždy splněna nerovnost

$$0 \leq (a - b)^2(a + b - c) + (b - c)^2(b + c - a) + (c - a)^2(a + c - b), \quad (1)$$

protože v trojúhelníku musí být součet libovolných dvou stran větší než třetí strana, (tzn. $a + b - c > 0$, atd.). Na pravé straně nerovnosti (1) je součet tří nezáporných čísel, z kterých každé je součinem kladného a nezáporného čísla.

Rovnost nastane jen v případě, když

$$a = b = c.$$

Z (1) plyne

$$0 \leq (a^2 - 2ab + b^2)(a + b - c) + (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$(b + c - a) + (c^2 - 2ac + a^2)(a + c - b).$$

Roznásobením dostaneme

$$a^3 - 2a^2b + ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3 - a^2c +$$

$$+2abc - b^2c + b^3 - 2b^2c + bc^2 + b^2c - 2bc^2 +$$

$$+c^3 - ab^2 + 2abc - ac^2 + ac^2 - 2a^2c + a^3 +$$

$$+c^3 - 2ac^2 + a^2c - bc^2 + 2abc - a^2b.$$

Sečteme společné členy a provedeme vytýkání

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc - 2(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2).$$

Nerovnost vydělíme dvěma a tím pro čísla a, b, c, která jsou délkami stran trojúhelníka, platí nerovnost

$$0 \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2, \qquad (2)$$

protože je ekvivalentní s (1). Po úpravě dostaneme

$$-a^3 + a^2b + a^2c - b^3 + ab^2 + b^2c - c^3 + ac^2 + bc^2 \leq 3abc$$

a po vytknutí

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc. \qquad (3)$$

Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení: Převeďme člen na pravé straně na stranu levou a tento člen rozdělme. Tímto dostaneme

$$a^2(b+c-a)-abc+b^2(c+a-b)-abc+c^2(a-b-c)-abc \leq 0.$$

Proveďme vytýkání

$$a(ab+ac-a^2-bc)+b(bc+ba-b^2-ac)+c(ac+bc-c^2-ab) \leq 0.$$

Pak celou nerovnost vynásobíme mínus jedničkou

$$a(-ab-ac+a^2+bc)+b(-bc-ba+b^2+ac)+c(-ac-bc+c^2+ab) \geq 0.$$

Uvnitř závorek provedeme vytýkání

$$a(a\cdot(a-b)-c\cdot(a-b))+b(b\cdot(b-a)-c\cdot(b-a))+$$

$$+c(c\cdot(c-a)-b\cdot(c-a)) \geq 0$$

a po dalším vytýkání dostaneme

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geq 0. \qquad (1)$$

Rozlišíme tři možnosti:

Případ (1). Nechť je $a=b=c$, pak po dosazení do nerovnosti (1) dostáváme

$$0 \geq 0,$$

což je správná nerovnost.

Případ (2). Nechť je například $a=b$, $c \neq a$, pak po dosazení do nerovnosti (1) dostáváme

$$a\cdot(a-a)\cdot(a-c)+b\cdot(a-a)\cdot(a-c)+c\cdot(c-a)\cdot(c-a) \geq 0,$$

což je

$$c(c-a)^2 \geq 0.$$

Jedná se o správnou nerovnost, neboť na pravé straně je součin dvou nezáporných čísel. Změnou označení dospějeme k podobným závěrům i v případě, kdy dvě z daných čísel jsou si rovna a třetí je od nich různé.

Případ (3). Vhodným označením při vesměs různých číslech lze dosáhnout toho, že platí

$$a > b > c. \tag{2}$$

Pak na levé straně nerovnosti (1) je číslo $c(c-a)(c-b) > 0$, neboť je součinem čísla kladného a dvou čísel záporných. Jestliže dokážeme, že $x = a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) \geq 0$, bude platit i vztah (1). Je zřejmé, že vzhledem ke (2) platí

$$x = (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] >$$

$$> (a-b)\, b\, [a-c-(b-c)] = b(a-b)^2 > 0,$$

neboť v posledním součinu jsou oba činitelé kladná čísla.

Ve všech třech případech lze postup snadno obrátit a dospět od výsledné nerovnosti k původní, tím je úloha vyřešena.

(Jiné řešení: kapitola 4, strana 65)

5.2 Další úlohy

1. (MO23-Z-I-2a). Jsou dána kladná čísla a, b, c, d, pro která platí

$$a + b + c + d = 1.$$

Dokažte, že pak platí

$$abc + abd + acd + bcd < \frac{1}{6}.$$

2. (MO23-Z-I-2b). Jsou dána kladná čísla a, b, c, d, pro která platí

$$a + b + c + d = 1.$$

Dokažte, že pak platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1.$$

3. (MO18-D-II-3b). Ať jsou a, b, c nezáporná čísla taková, že $a+b+c = 1$, potom platí:

$$ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3}.$$

Dokažte.

4. (MO1-B-I-4). Dokažte, že

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < 1,$$

kde n je přirozené číslo.

5. (MO2-B-I-13). Je-li n přirozené číslo, potom platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... + \frac{n}{1 \cdots 2 \cdot ... \cdot n(n+1)} < 1.$$

Dokažte.

6. (MO5-B-I-5). Nechť o daných kladných číslech a, b, s, platí vztah

$$a + b \leq s.$$

Potom platí vztah

$$ab \leq \frac{1}{4}s^2.$$

Dokažte.

Tento výsledek objasněte na obdélníku o rozměrech a, b.

7. (MO16-B-II-1). Platí-li o reálných číslech a, b, c, že $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$, potom je

$$ab + ac + bc \geq -1.$$

Dokažte a najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby nastala rovnost.

8. (MO2-B-II-1). Je dáno $n + 1$ kladných čísel ne větších než jedna. Dokažte, že mezi nimi existují aspoň dvě taková, že jejich rozdíl má absolutní hodnotu menší než $1/n$, kde n je dané přirozené číslo.

9. (MO3-A-I-5). Dokažte, že pro $a > b > 0$ a přirozené číslo n platí vztah

$$\frac{n+1}{n} \cdot a > \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} > \frac{n+1}{n} \cdot b.$$

10. (MO3-A-III-3). Bez upotřebení logaritmických tabulek, dokažte správnost vztahu

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

11. (MO21-A-III-1). Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$, platí

$$\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)>\frac{1}{2}.$$

6 Využití matematické indukce

Důkaz matematickou indukcí se užívá pro obecné věty typu

$$\forall n \in N,\ n \geq n_0 :\ V(n),$$

kde $V(n)$ je výroková forma proměnné $n \in N$, n_0 je dané přirozené číslo. Metoda důkazu matematickou indukcí spočívá ve dvou krocích:

I. Dokážeme, že věta platí pro $n = n_0$, to znamená, že platí $V(n_0)$.

II. Dokážeme pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$: Jestliže platí $V(n)$, pak platí také $V(n+1)$, to znamená, že platí implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

6.1 Řešené úlohy

1. (MO17-D-P-1). Dokažte, že platí

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot ... \cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) < 2, \qquad (1)$$

pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

Řešení: Nejprve nerovnost trochu upravme. Pro přirozená čísla $n > 1$ platí, že

$$2\cdot\frac{n}{n+1} < 2.$$

Jestliže dokážeme

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot ... \cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) \leq 2\cdot\frac{n}{n+1}, \quad (2)$$

bude dokázána i nerovnost (1). Nejdříve dokážeme, že vztah (2) platí pro $n = 2$. Po dosazení do (2), máme

$$1+\frac{1}{3} \leq \frac{4}{3},$$

což platí. Nyní předpokládejme, že vztah (2) pro přirozené číslo n platí, a budeme se snažit dokázat vztah pro přirozené číslo $n+1$. Máme tedy dokázat

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)\leq 2\cdot\frac{n+1}{n+2}. \tag{3}$$

Vztah (2) vynásobíme kladným číslem $1+1/(n^2+2n)$. Po vynásobení máme

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)\leq 2\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right).$$

Levá strana této nerovnosti je shodná jako levá strana vztahu (3), proto stačí dokázat, že

$$2\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)\leq 2\cdot\frac{n+1}{n+2}.$$

Levou stranu převedeme na společný jmenovatel

$$\frac{2n^3+4n^2+2n}{(n+1)\cdot n\cdot(n+2)}\leq\frac{2n+2}{n+2},$$

celou nerovnost vynásobíme $(n+1)\cdot n$,

$$2n^3+4n^2+2n\leq 2n^3+2n^2+2n^2+2n,$$

po převedení na pravou stranu a posčítání

$$0\leq 0,$$

což zřejmě platí. Tímto je nerovnost (2) dokázána a tím je dokázána i nerovnost (1).

(Jiné řešení: kapitola 5, strana 71)

2. (MO2-A-I-15). Jestliže $a > 0$ a n je přirozené číslo, potom platí

$$n(a^{2n+1} + 1) \geq a + a^2 + ... + a^{2n}. \tag{1}$$

Dokažte. Proveďte diskusi, pro která a nastane rovnost.

Řešení: Důkaz provedeme pomocí matematické indukce.

V prvním kroku dokážeme, že nerovnost platí pro $n = 1$. Po dosazení je

$$a^3 + 1 \geq a + a^2. \tag{2}$$

Levou stranu upravíme podle vzorce $A^3+B^3 = (A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$ a na pravé straně nerovnosti vytkneme a

$$(a + 1)(a^2 - a + 1) \geq a(a + 1),$$

celou nerovnost vydělíme číslem $(a + 1) > 0$, čímž dostaneme

$$a^2 - a + 1 \geq a,$$

převedeme všechny členy na levou stranu

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

a aplikujeme vzorec $(A - B)^2$

$$(a - 1)^2 \geq 0. \tag{3}$$

Nerovnost v posledním vztahu platí pro každé reálné kladné a různé od jedné. Pro $a = 1$ nastává rovnost. Zpětným postupem odvodíme ze vztahu (3) vztah (2).

V druhém kroku předpokládejme, že platí vztah (1) pro určité přirozené číslo n a dokážeme, že potom platí i pro přirozené číslo $n + 1$, to znamená, že máme dokázat vztah

$$(n+1)(a^{2n+3}+1) \geq a + a^2 + a^3 + ... + a^{2n} + a^{2n+1} + a^{2n+2}. \qquad (4)$$

Uvažujme nejdříve výraz

$$R = (n+1)(a^{2n+3}+1) - n(a^{2n+1}+1) - a^{2n+1} - a^{2n+2} \qquad (5)$$

a dokažme o něm, že pro $a > 0$ je $R \geq 0$. Tento výraz roznásobíme

$$R = na^{2n+3} + n + a^{2n+3} + 1 - na^{2n+1} - n - a^{2n+1} - a^{2n+2}$$

a provedeme vytknutí

$$R = na^{2n+1}(a^2-1) + a^{2n+1}(a^2-1) + 1 - a^{2n+2}.$$

Pro poslední dva členy výrazu R platí identita

$$1 - a^{2n+2} = -(a^2-1)(a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + ... + a^2 + 1).$$

Tuto identitu využijeme, čímž dostaneme

$$R = na^{2n+1}(a^2-1) + a^{2n+1}(a^2-1) - (a^2-1)(a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + ... + a^2 + 1),$$

vytkneme člen (a^2-1)

$$(a^2-1) \cdot (na^{2n+1} + a^{2n+1} - a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + ... + a^2 + 1),$$

vytkneme člen a^{2n+1}

$$R = (a^2-1)[(n+1)a^{2n+1} - (a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + ... + a^2 + 1)]. \qquad (6)$$

Nyní proveďme diskusi pro $a > 0$

a) Jestliže $a > 1$, potom platí nerovnost $a^2 > 1$, neboli $a^2 - 1 > 0$. Dále víme, že platí

$$a^{2n+1} > a^{2n} > a^{2n-2} > a^{2n-4} > ... > a^2 > 1.$$

Z tohoto vztahu vychází nerovnost

$$(n+1)a^{2n+1} > a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + ... + a^2 + 1.$$

Protože jsou oba činitelé na pravé straně vztahu (6) kladní, je $R > 0$.

b) Jestliže $0 < a < 1$, potom platí nerovnost $a^2 < 1$, neboli $a^2 - 1 < 0$. Dále víme, že platí

$$a^{2n+1} < a^{2n} < a^{2n-2} < a^{2n-4} < ... < a^2 < 1.$$

Z tohoto vztahu vychází nerovnost

$$(n+1)a^{2n+1} < a^{2n} + a^{2n-2} + a^{2n-4} + ... + a^2 + 1.$$

Protože jsou oba činitelé na pravé straně vztahu (6) záporní, je $R > 0$.

c) Jestliže $a = 1$, potom $R = 0$. Vzhledem k platnosti vztahu (1), v kterém rovnost nastává právě pro $a = 1$, platí též vztah

$$n(a^{2n+1}+1)+a^{2n+1}+a^{2n+2} \geq a+a^2+a^3+...+a^{2n}+a^{2n+1}+a^{2n+2}. \quad (7)$$

Přičteme-li výraz R ve tvaru (6) ke vztahu (7), získáme vztah (4), přičemž nerovnost platí pro každé $a > 0$, které je různé od čísla 1; rovnost nastává právě pro $a = 1$.

Závěr: Nejprve jsme dokázali, že vztah platí pro $n = 1$. Dále jsme dokázali, že vztah platí i pro $n + 1$, tudíž je úloha dokázána.

3. (MO23-A-II-2a). Dokažte, že pro všechna přirozená n platí

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Řešení: Nejprve nerovnost trochu upravme. Pro přirozená n platí, že

$$\frac{n}{4(n+1)} < \frac{1}{4}.$$

Odtud plyne, že místo (1) stačí dokázat nerovnost

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{n}{4(n+1)}. \tag{2}$$

Nejdříve dokážeme, že vztah (2) platí pro $n = 1$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{8},$$

což platí. Nyní předpokládejme, že vztah (2) pro přirozené n platí, a budeme se snažit dokázat vztah pro přirozené číslo $n + 1$. Máme tedy dokázat vztah

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} < \frac{n+1}{4(n+2)}. \tag{3}$$

Vycházíme z předpokladu, že platí (2). K oběma stranám této nerovnosti přičteme výraz $1/(2n+3)^2$, čímž dostaneme

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} < \frac{n}{4(n+1)} + \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Protože levá strana tohoto vztahu je shodná s levou stranou vztahu (3), stačí dokázat, že

$$\frac{n}{4(n+1)} + \frac{1}{(2n+3)^2} \leq \frac{n+1}{4(n+2)}.$$

Důkaz provedeme sporem, a proto budeme předpokládat, že platí

$$\frac{n}{4(n+1)} + \frac{1}{(2n+3)^2} > \frac{n+1}{4(n+2)}.$$

Odtud plyne

$$\frac{1}{(2n+3)^2} > \frac{n+1}{4(n+2)} - \frac{n}{4(n+1)},$$

neboli

$$\frac{1}{(2n+3)^2} > \frac{(n+1)^2 - n^2 - 2n}{4(n+2)(n+1)}.$$

Po další úpravě máme

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+3)} > \frac{1}{(2n+4)(2n+2)},$$

což je vhledem k lemmatu 3 spor (lemma 3 je uvedena na straně 35), a proto vztah (3) platí. Tímto je zadaná úloha dokázána.

(Jiné řešení: kapitola 5, strana 76)

4. (MO2-A-III-3). Jsou-li čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ kladná, platí

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2. \qquad (1)$$

Dokažte.

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Víme, že pro kladná čísla a_i, a_j platí z A-G nerovnosti

$$\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2.$$

Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_i = a_j$.

1. Pro $n = 2$ je

$$(a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + 1 \geq 4,$$

což platí. Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2$.

2. Platí-li nerovnost (1) pro nějaké přirozené n, přičemž rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2 = ... = a_n$, označme

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = s \ \wedge \ (1/a_1) + (1/a_2) + ... + (1/a_n) = t$$

pak po dosazení do nerovnosti (1) dostáváme

$$st \geq n^2.$$

Nyní budeme dokazovat, že nerovnost platí i pro přirozená čísla $n+1$. Po dosazení dostáváme vztah

$$(s + a_{n+1}) \left(t + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \geq n^2 + 2n + 1,$$

roznásobíme závorky

$$st + \frac{s}{a_{n+1}} + a_{n+1} \cdot t + 1 \geq n^2 + 2n + 1,$$

po úpravě levé strany a aplikaci vzorce $(A+B)^2$ na pravé straně dostáváme

$$st + \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \right) + \left(\frac{a_2}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_2} \right) + ... +$$

$$+ \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) + 1 \geq (n+1)^2,$$

což je správný vztah, neboť každý z výrazů v závorkách je buď větší nebo roven dvěma, přičemž na všech místech nastanou rovnosti, je-li $a_i = a_{n+1}$ pro $i = 1, 2, ..., n$.
Vztah (1) platí pro každé přirozené číslo n a rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

(Jiné řešení: kapitola 3, strana 49)

7 Závěr

Cílem této práce bylo sestavit sbírku řešených úloh, které byly v letech 1951 - 1975 zařazeny do matemetických olympiád. Sbírka měla zahrnovat všechny úlohy na téma nerovnosti a tyto úlohy měly být roztřízeny podle způsobu řešení. Postupy byly metodicky vysvětleny, roztříděny a rozšířeny o další možné řešení. Dále jsou u každé metody řešení zahrnuty příklady k procvičení. Tyto příklady k procvičení jsou přiloženy i s vzorovým řešením k diplomové práci na CD.

Tato práce může sloužit jako doplňující studijní materiál pro řešitele matematických olympiád, nebo jako rozšiřující materiál pro studenty se zvýšeným zájmem o matematiku.

8 Použitá literatura

[1] Zelinka, R. a kol, *První ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1952

[2] Zelinka, R. a kol.: *Druhý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1954

[3] Zelinka, R. a kol.: *Třetí ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1955

[4] Zelinka, R. a kol.: *Čtvrtý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1956

[5] Zelinka, R. a kol.: *Pátý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1957

[6] Zelinka, R. a kol.: *Šestý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1958

[7] Zelinka, R. a kol.: *Sedmý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1959

[8] Zelinka, R. a kol.: *Osmý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1960

[9] Zelinka, R. a kol.: *Devátý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1961

[10] Zelinka, R. a kol.: *Desátý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1962

[11] Zelinka, R. a kol.: *Jedenáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1963

[12] Zelinka, R. a kol.: *Dvanáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1964

[13] Vyšín, J. a kol.: *Třináctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1965

[14] Vyšín, J. a kol.: *Čtrnáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1966

[15] Vyšín, J. a kol.: *Patnáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1967

[16] Vyšín, J. a kol.: *Šestnáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1968

[17] Vyšín, J. a kol.: *Sedmnáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1969

[18] Vyšín, J. a kol.: *Osmnáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1970

[19] Vyšín, J. a kol.: *Devatenáctý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1971

[20] Vyšín, J. a kol.: *Dvacátý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1972

[21] Vyšín, J. a kol.: *Dvacátýprvní ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1973

[22] Vyšín, J. a kol.: *Dvacátýdruhý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1974

[23] Vyšín, J. a kol.: *Dvacátýtřetí ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1975

[24] Vyšín, J. a kol.: *Dvacátýčtvrtý ročník matematické olympiády*, Praha: SPN, 1977

[25] Kufner, A.:*Nerovnosti a odhady*, Praha: Mladá fronta, 1975.

[26] Polák, J.: *Přehled středoškolké matematiky*, Praha: Prometheus, 2002.

[27] Polák, J.: *Středoškolská matematika v úlohách I.*, Praha: Prometheus, 1996.

[28] Vošický, Z.: *Matematika v kostce pro střední školy*, Praha: Fragment, 2003.