Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

INVARIANTY V ELEMENTÁRNÍ MATEMATICE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav CHVÁL

České Budějovice, duben 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 20.4.2010 ……………………………

Anotace

Název: Invarianty v elementární matematice

Vypracoval: Václav Chvál

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Invarianty, prověrka parity, teorie čísel, pokrývání šachovnice, poloinvarianty, metoda nekonečného sestupu.

Obsahem této práce je seznámení čtenáře s využitím invariantů při řešení úloh z různých oblastí elementární matematiky. Jednotlivé úlohy jsou rozděleny do tématických celků podle způsobu řešení a seřazeny podle obtížnosti. Práce by měla sloužit jako studijní materiál pro matematicky nadané žáky, resp. jako metodická příručka pro učitele.

Annotation

Title: Invariants in Elementary Mathematics

Author: Václav Chvál

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Keywords: Invariants, check of parity, theory of numbers, covering of a chessboard, half-invariants, method of infinite descent

The contents of this dissertation is informing readers about invariant use in solving tasks from various fields of elementary mathematics. Individual tasks are devided into thematic wholes according to the ways of solution and they are arranged in order of difficulty. The dissertation should be used as a study material for mathematics talented pupils respectively a methodical handbook for teachers.

Poděkování

Děkuji panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytoval.

OBSAH

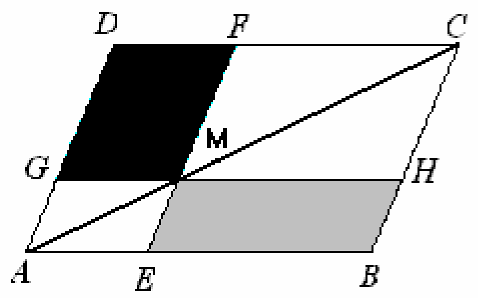
1 ÚVOD

Invariantem rozumíme vlastnost nebo měřitelnou veličinu, která se při daných procesech, resp. při opakování nějakého postupu nemění. Poloinvariantem pak rozumíme veličinu, která se při daných procesech nezvětšuje, resp. nezmenšuje.

Invarianty byly hojně užívány již ve starověku. Například řečtí matematici využívali invariantů k řešení lineárních rovnic. Zápis lineární rovnice $ax=b$ pro veličiny a, b, x téhož řádu neměl ve starověkém Řecku smysl. Protože například pro úsečky se levá strana rovnice rovnala obsahu a ten se nemohl rovnat délce úsečky, vzhledem k uplatňovanému principu homogenity, který říká, že sčítat a odčítat lze pouze veličiny téhož řádu. (Veličinou prvního řádu rozumíme délku čar, druhého řádu obsah a třetího objem.) Pokud jde o součin dvou délek čar, pak výsledkem je obsah, součinem obsahu s délkou je objem, součin dvou obsahů neměl smysl. Proto se lineární rovnice zapisovaly ve tvaru $ax=b^2$. K řešení této úlohy se užíval poznatek, že pro libovolný bod M ležící na úhlopříčce rovnoběžníka odřezávají přímky vedené rovnoběžně se stranami rovnoběžníka $ABCD$ rovnoběžníky téhož obsahu (viz Obr. 1.1). Pro obsahy trojúhelníků na obrázku totiž platí

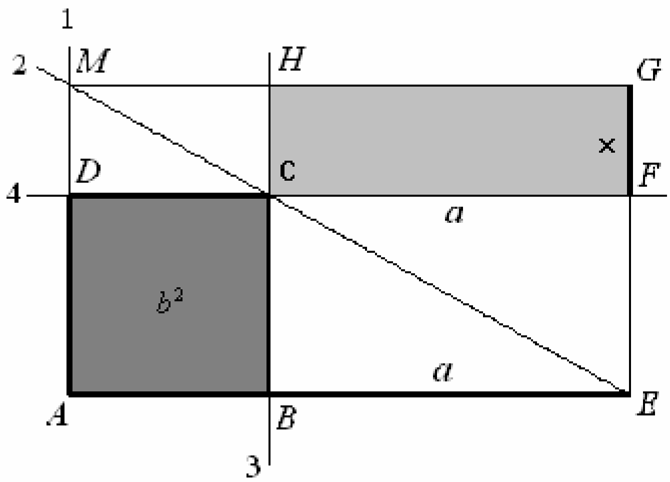
$S_{ACD}=S_{ACB}=S_1$, $S_{AMG}=S_{AME}=S_2$, $S_{MCF}=S_{MCH}=S_3$,

a tak má šedý i černý rovnoběžník stejný obsah $\mathrm{S}=S_1-(S_2+S_3)$.



Obr. 1.1

Řešení rovnice $ax = b^2$ ukazuje Obr. 1.2 Stranu AB čtverce $ABCD$ s obsahem b^2 prodloužíme o délku a, čímž dostáváme úsečku BE. Poté sestrojíme bod M jako průsečík přímek EC a AD. Trojúhelník AEM doplníme na pravoúhelník $AEGM$. Přímky 3 a 4 vedené bodem C rovnoběžně se stranami pravoúhelníka $AEGM$ určují pravoúhelník $CFGH$ s obsahem $b^2 = ax$, stranou CF délky a a stranou FG délky x.

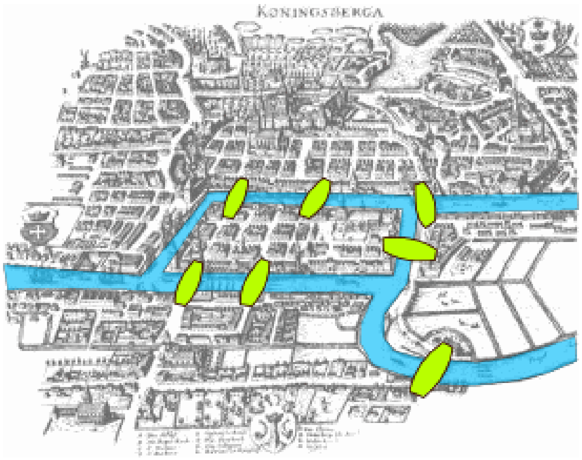


Obr. 1.2

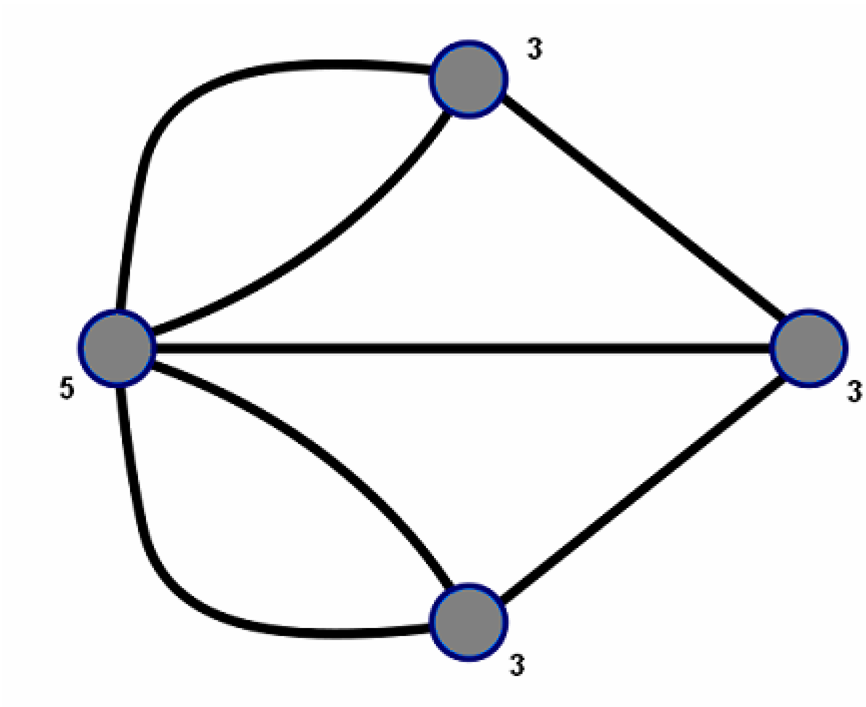
Invariantem v této úloze je rovnost obsahů pravoúhelníků $ABCD$ a $CFGH$ (nezávislá na poloze bodu C a úsečky EM).

V osmnáctém století Leonhard Euler vyřešil slavný matematický problém nazývaný Sedm mostů města Královce, založený na skutečné situaci. Pruské město Královec (též Königsberg, nyní Kaliningrad na území Ruska) leží na řece Pregole, která vytváří dva ostrovy. Ostrovy byly se zbytkem města spojeny sedmi mosty. Problém spočíval v tom, zdali je možné přejít všechny mosty, tak abychom přes každý z mostů prošli právě jednou. Pan Euler jako první dokázal, že toto není možné. Danou situaci (viz Obr. 1.3) překreslil do grafu (viz Obr. 1.4), kde každý uzel představuje jeden z břehů a každá z hran cestu přes jednotlivé mosty.

Uzel nazveme lichý, pokud z něj vychází lichý počet hran a naopak sudý, pokud z něj vychází sudý počet hran. Z podmínek úlohy plyne, pokud do některého uzlu po nějaké hraně vstoupíme, musíme z něj po jiné hraně vystoupit. Odtud plyne, že po spojení prvních dvou uzlů (původně sudých, protože z nich nevede žádná hrana), vzniknou dva uzly liché (z každého vychází jedna hrana). Pokud spojíme druhý uzel s prvním, pak se z těchto uzlů stanou uzly sudé (z každého nyní vychází dvě hrany), počet lichých uzlů se snížil o dva. Pokud však v druhém kroku spojíme druhý uzel s uzlem třetím, tedy lichý uzel s uzlem sudým (zatím z něj nevede žádná hran) stane se z uzlu sudého uzel lichý a z lichého uzlu uzel sudý, počet lichých uzlů se tak nezmění. Jiná situace již nemůže nastat. Tedy jak vidno, počet lichých uzlů musí být roven buďto nule nebo dvěma, aby bylo možno projít grafem právě jedním tahem. Není tedy možné projít přes všechny mosty v městě Královci, tak abychom přes každý most prošli právě jednou, protože počet lichých uzlů je roven čtyřem.



Obr. 1.3



Obr. 1.4

Třebaže historie dokládá, že s invarianty pracovali učenci odedávna, jak dokazují předcházející příklady a mnoho dalších, byla teorie invariantů jako matematická disciplína zavedena až v druhé polovině devatenáctého století anglickými matematiky A. Cayleyem a J. J. Sylvesterem. Za krátký čas jejich myšlenky pronikly do všech odvětví matematiky. Slovo invariant se tak stalo jedním ze základních matematických pojmů. V současné době se invariantů užívá v hojné míře ve všech vědních oborech kolem nás, například široké uplatnění lze nalézt v programování.

Teorie invariantů nevyžaduje znalost složitých matematických postupů nebo vzorců. Je založena především na experimentování a hledání vhodného invariantu. Přitom využíváme potřebné znalosti a především zkušenosti. V průběhu řešení nalezneme často několik různých invariantů, které nás dovedou k řešení. Ne všechny objevené invarianty však musí vést k řešení, ba dokonce ke správnému řešení.

Cílem mé diplomové práce je seznámit čtenáře s využitím invariantů při řešení úloh z různých oblastí elementární matematiky. Práce bude sloužit jako studijní materiál pro matematicky nadané žáky, resp. jako metodická příručka pro učitele. Jednotlivé úlohy jsou seřazeny podle tématických celků. Úlohy v jednotlivých kategorií jsou seřazeny dle obtížnosti.

2 ÚLOHY, JEJICHŽ ŘEŠENÍ JE ZALOŽENO NA PROVĚRCE PARITY

Řešení úloh v této kapitole je založeno na zachování stejné parity sledované veličiny při užití všech možných operací, které mohou při řešení příkladu nastat. Invariantem je tedy parita.

Paritou rozumíme vlastnost čísla být sudým anebo lichým. Pokud je číslo násobkem dvou, je to číslo sudé, jinak se jedná o číslo liché. Číslo nula je sudé, neboť nula krát dvě je rovno nule. Potom tedy dvě celá čísla mají stejnou paritu, pokud mají stejný zbytek po dělení dvěma. V opačném případě mají rozdílnou paritu.

Nejprve nalezneme vhodnou veličinu, například celkový součet, počet prázdných láhví v přepravce, počet dětí na hřišti, atd. V druhé fázi probereme všechny možnosti, jež mohou ze zadání nastat a zkoumáme jejich vliv na paritu sledované veličiny. Poté provedeme vyhodnocení získaných poznatků vzhledem k zadaní.

2.1 Řešené úlohy

Příklad 2.1. Kouzelná jabloň měla na počátku 70 zlatých jablek. Každou noc přiletí drak a odnese 5 jablek. Ihned po jeho odletu vždy tři nová jablka narostou. Přes den se počet jablek na stromě nemění. Může mít jabloň za těchto okolností v některém dni přesně 7 jablek?

Řešení. Počet jablek na stromě se každou noc sníží o 2, neboť jich drak pět odnese a tři ihned narostou. Je tedy vidět, že po první noci zůstane na jabloni 68 jablek, po druhé 66, po třetí 64,… Parita počtu jablek tedy zůstává nezměněna. Vždy se jedná o sudý počet jablek. Není proto možné, aby v některý den zůstalo na stromě 7 jablek.

Příklad 2.2. Statečný rytíř se utkal s trojhlavým drakem a chtěl předvést svoji statečnost tak, že drakovi usekne všechny hlavy. To mu ovšem nevyšlo. Ukázalo se, že po useknutí jedné hlavy drakovi narostou tři nové. Rytíř ale urputně pokračoval v sekání hlav. Ve chvíli, kdy se rozhodl boj vzdát, drakovi napočítal 2 006 hlav. Počítal správně?

Řešení. Po prvním úderu usekne rytíř drakovi jednu hlavu, ale ihned mu tři nové narostou. Počet hlav se tedy zvýší o dvě. Po prvním úderu bude mít drak celkem pět hlav. Po druhém úderu bude mít drak sedm hlav, po třetím devět a tak dále. Při každém úderu se počet hlav zvýší o dvě. Počet hlav zůstává po každém úderu lichý: $3, 5, 7, 9, \ldots$. Počet hlav tedy nemůže být v žádné fázi boje 2006. Nejen, že rytíř nebyl schopen draka přemoci, ale navíc nebyl schopen správně spočítat počet jeho hlav.

Příklad 2.3. Jana napsala 20 celých čísel, z nichž 7 je lichých. Dvě čísla smaže a místo nich napíše součet jejich druhých mocnin. Operaci provede znovu s takto upraveným seznamem čísel a skončí až tehdy, když ji zbyde jediné číslo. Bude toto číslo sudé nebo liché?

Řešení. Nechť S je počet lichých čísel. Na počátku $S = 7$. Pokud Jana

a) Vybere dvě lichá čísla, jejich součet druhých mocnin je číslo sudé (počet lichých čísel se tedy sníží o 2).
b) Vybere dvě sudá čísla, jejich součet druhých mocnin je číslo sudé (počet lichých čísel se nezmění).
c) Vybere jedno liché a jedno sudé číslo, jejich součet druhých mocnin je číslo liché (počet lichých čísel se nezmění).

Protože číslo S se nezmění nebo se sníží o 2, parita tohoto čísla zůstává stále stejná. Vzhledem k tomu, že na konci musí být $S \leq 1$, zbyde Janě číslo liché.

Příklad 2.4. V klobouku je 15 bílých a 18 černých kuliček. Náhodně vybereme dvě kuličky. Jsou – li různé barvy, vhodíme nazpět bílou kuličku.

Jsou – li stejné barvy, vhodíme místo nich do klobouku černou kuličku z předem připravené krabičky, v níž máme dostatečný počet černých kuliček. Postup opakujeme tak dlouho, dokud v klobouku nezůstane jediná kulička. Jakou bude mít barvu?

Řešení. V každém tahu může nastat jedna z těchto tří možností:

a) Vytáhneme – li jednu bílou a jednu černou kuličku, do kloboučku vrátíme jednu bílou kuličku. Počet bílých kuliček se nezmění.

b) Vytáhneme – li dvě černé kuličky, do kloboučku vrátíme jednu černou kuličku. Počet bílých kuliček se nezmění.

c) Vytáhneme – li dvě bílé kuličky, do kloboučku místo nich přidáme jednu černou kuličku. Počet bílých kuliček se zmenší o 2.

Vidíme, že počet bílých kuliček po každém tahu zůstane lichý. Poslední kulička v kloboučku tedy bude mít barvu bílou.

Příklad 2.5. Na stole je umístěna řada stejných mincí, některé mají nahoře líc jiné rub. Hráč A na chvíli odejde, hráč B mezitím odebere jednu minci a potom opakovaně tak, jak ho napadne, obrací zbývající mince v řadě. Vždy však musí obrátit dvě mince naráz. Po nějaké době zavolá hráče A, který má uhodnout, která mince byla odebrána. Dokázali byste to vy, kdybyste byli na místě hráče A? Vysvětlete jak.

Řešení. Ano dokázali. Je třeba si uvědomit jaké možnosti nám mohou nastat.

a) Hráč B může otočit dva líce na dva ruby, čímž sníží (resp. zvýší) jejich počet o 2.

b) Hráč B muže otočit dva ruby na dva líce, čímž sníží (resp. zvýší) jejich počet o 2.

c) Hráč B může otočit jeden rub a jeden líc, čímž se nezmění počet líců a rubů.

Vidíme, že otáčením se nemění parita rubů ani líců. Na tomto faktu může hráč A založit vítěznou strategii. Stačí, aby před svým odchodem na začátku hry spočítal například počet rubů. Pokud se parita rubů změní, byl odebrán jeden rub. Pokud zůstane zachována, odebral hráč B líc.

Příklad 2.6. Klenotník měl na počátku roku v prvním trezoru 127 drahokamů, ve druhém jich měl 250, ve třetím 303 a ve čtvrtém 712. Každý následující den změnil počet drahokamů tak, že zvolil libovolné dva trezory a v každém z nich přidal nebo ubral jeden nebo pět drahokamů. Je možné, aby počty drahokamů v trezorech dosáhly některého dne hodnot 155, 300, 124, 216?

Řešení. Nejprve se podíváme na to, co možné akce klenotníka provedou s počtem drahokamů. Pokud přidá (resp. odebere) do obou trezorů po jednom kameni, zvýší (resp. sníží) součet počtů drahokamů ve všech trezorech o 2. Pokud bude měnit počet kamenů o pět, v důsledku sníží (resp. zvýší) jejich celkový počet o 10. Obě možné operace nemění paritu počtu drahokamů v trezorech. Ze zadání víme, že původní celkový počet drahokamů byl 1392. My se ptáme, je-li možné, aby jich v některý okamžik bylo v trezorech celkem 795. Jak vidno, toto není možné! Čísla mají rozdílnou paritu.

Příklad 2.7. V mnohoúhelníku jsou narýsovány některé úhlopříčky. Vrchol, ze kterého vychází lichý počet úhlopříček, budeme nazývat lichý vrchol. Sudý vrchol je ten, ze kterého vychází sudý počet úhlopříček (může to být i nula). Dokažte, že počet lichých vrcholů je sudý.

Řešení. Nejprve si představíme jakým procesem obrázek vznikl a budeme hledat invarianty. Mějme tedy n – úhelník bez úhlopříček (v tomto případě je počet lichých vrcholů sudý, neboť jejich počet je nula). Vytvoříme první úhlopříčku. Tím vzniknou dva liché vrcholy. Pro vytvoření dalších úhlopříček máme následující možnosti:

a) Úhlopříčka spojí dva sudé vrcholy, tím přibudou dva nové liché vrcholy. Tedy parita lichých vrcholů se nemění.
b) Úhlopříčka spojí dva liché vrcholy, tím ubudou dva liché vrcholy. Parita lichých vrcholů zůstane nezměněna.
c) Úhlopříčka spojí jeden lichý a jeden sudý vrchol. Počet lichých vrcholů zůstane nezměněn. Parita se tedy nemění.

Z daných možností, jež mohou nastat, vyplývá, že v každém kroku zůstává počet lichých vrcholů sudý.

Příklad 2.8. Krokem budeme rozumět nahrazení uspořádané trojice celých čísel $(a,\ b,\ c)$ trojicí $(c+5b,\ 3c-5a,\ 2b-3a)$. Tedy $a_{n+1}=c_n+5b_n$, $b_{n+1}=3c_n-5a_n$, $c_{n+1}=2b_n-3a_n$. Rozhodněte, zda existuje celé číslo k takové, že z trojice (1, 3, 7) vznikne po konečném počtu kroků trojice $(k,\ k+1,\ k+2)$.

Řešení. Řešení příkladu spočívá ve sledování sudosti a lichosti výsledných čísel. Trojice $(k,\ k+1,\ k+2)$ tvoří posloupnost sudá – lichá – sudá nebo lichá – sudá – lichá (jedná se o tři po sobě jdoucí čísla). V přiložené tabulce je vidět jak se v jednotlivých krocích mění parita jednotlivých čísel (L značí liché číslo a S sudé). Šedou barvou je vyznačen začátek nového cyklu. Po třech krocích se dostaneme do výchozího stavu. Snadno se z tabulky (viz **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.**) přesvědčíme, že do požadovaného stavu se nikdy nedostaneme. Proto příklad nemá řešení.

n	a_n	b_n	c_n
1	L	L	L
2	S	S	L
3	L	L	S
4	L	L	L
5	S	S	L
6	L	L	S
7	L	L	L

tabulka 2.1

Příklad 2.9. Máme řadu čísel 1, 2, 3, 4, 5,…, $2n$. Škrtneme v ní libovolná dvě čísla a nahradíme je absolutní hodnotou jejich rozdílu. Po $2n-1$ takových krocích zbyde číslo jediné. Bude sudé nebo liché? (Rozlište situace, kdy n je sudé a kdy liché)

Řešení. Před vlastním řešením můžeme vyzkoušet několik konkrétních situací. Mějme $n=2$, pak můžeme postupovat například takto:

1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4
1, 3, 4	1, 1 ,4
1, 1	0, 4
0	4

Mějme $n=3$, pak můžeme postupovat například takto:

1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6
1, 3, 4, 5, 6	1, 1 , 4, 5, 6
1, 1, 4, 5	0, 4, 5, 6
1, 3, 5	4, 5, 6
1, 2	1, 6
1	5

Na základě těchto pozorování vytvoříme hypotézu: „Je – li n sudé, zbyde sudé číslo, je – li n liché zbyde liché číslo.“

Důkaz:

V každém kroku máme tyto možnosti:

a) Vybereme dvě sudá čísla a nahradíme jejich rozdílem. Ten je sudý, což znamená, že parita sudých čísel se změnila (počet sudých čísel se zmenšil o 1).

b) Vybereme dvě lichá čísla a nahradíme jejich rozdílem. Ten je sudý, což znamená, že parita sudých čísel se změnila (počet sudých čísel se zvýšil o 1).

c) Vybereme jedno sudé a jedno liché číslo a nahradíme je jejich rozdílem, jenž je lichý. Dojde ke změně parity sudých čísel (počet sudých čísel se o 1 snížil).

Vidíme tedy, že parita počtu sudých čísel se při každém kroku mění. Kroků je celkem $2n-1$, to je liché číslo, a tak musí být parita počtu sudých čísel na konci opačná než na začátku, kdy bylo sudých čísel n.

Příklad 2.10. Ve slově, které se skládá z písmen a a b, jsou možné následující výměny:

a) nahradit aba písmenem b a naopak;

b) nahradit bba písmenem a a naopak;

c) nahradit abb písmeny bba a naopak;

d) nahradit aab písmeny baa a naopak.

Začneme u slova, které se skládá z 2 005 písmen a a jednoho písmene b na konci slova. Můžeme podle pravidel vytvořit slovo, které bude začínat jedním písmenem b a pokračovat 2 005 písmeny a?

Řešení. Počet písmen a na sudých pozicích podle daných pravidel nemění paritu. V původním slově bylo 1002 písmen a na sudých pozicích. Zatímco v požadovaném slově jich je na sudých pozicích 1003. Z toho plyne, že takovéto slovo není možné podle daných pravidel vytvořit.

Příklad 2.11. Představte si půdorys přízemí nějakého domu, kde do každé místnosti vede sudý počet vchodů. Dokažte, že pak musí mít i dům sudý počet vchodů.

Řešení. Označíme si:

n_k počet vchodů do *k-té* místnosti

e_k počet vnějších vchodů do *k-té* místnosti

i_k počet vnitřních vchodů do *k-té* místnosti

pak tedy platí:

$n_1 = e_1 + i_1$

$n_2 = e_2 + i_2$

$n_3 = e_3 + i_3$

$\vdots$

$n_k = e_k + i_k$

Když tyto vztahy sečteme dostaneme:

$\sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = S$ je sudé číslo

$S = (e_1 + e_2 + \ldots + e_k) + (i_1 + i_2 + \ldots + i_k)$

$\Uparrow$ $\Uparrow$

Počet všech vnějších vchodů je e	Součet vnitřních vchodů je $2i$, kde i je počet vnitřních vchodů (každý vnitřní vchod totiž náleží dvěma sousedním místnostem)

Potom tedy platí:

$S = e + 2i$

$e = S - 2i$

Jak již víme S je sudé číslo, $2i$ je bezesporu také sudé číslo a rozdílem dvou sudých čísel je vždy číslo sudé. Čímž jsme dokázali, že počet vnějších vchodů musí být sudý.

Příklad 2.12. V pohádkové zemi mají tři druhy peněz: modré, červené a zelené. Kdo něco nakupuje, zaplatí vždy dvě bankovky různých barev a prodavač mu vrátí jednu bankovku barvy třetí. Alenka měla 20 červených, 5 modrých a 4 zelené bankovky. Jaký největší počet nákupů může uskutečnit, kolik bankovek jí nakonec zbyde a jakou budou mít barvu? b) Řešte předchozí úlohu, měla-li Alenka 17 červených, 7 modrých a 5 zelených bankovek.

Řešení. a) Z hlediska didaktiky je vhodné nechat žáky najít některé konkrétní situace možných Alenčiných nákupů. Jedno z možných řešení uvádí tabulka 2.2. Poté zkonzultovat s žáky, jakých výsledků dosáhli. Bezesporu se ukáže výsledek všech postupů stejný.

akce	červené	modré	zelené
	20	5	4
Č + M	19	4	5
Č + M	18	3	6
3x(Č + M)	15	0	9
9x(Č + Z)	6	9	0
6x(Č + M)	0	3	6
3x(Z + M)	3	0	3
2x(Č + Z)	1	2	1
M + Z	2	1	0
Č + M	1	0	1
Č + Z	0	1	0

tabulka 2.2

Alenka měla celkem 29 bankovek. Každým nákupem se sníží jejich počet o 1. Celkem tedy může uskutečnit 28 nákupů. A zbylá bankovka by podle tabulky (tabulka 2.2) měla být modré barvy. Ukažme, že je tomu tak vždy.

Jako vhodná strategie se ukázalo sledování parity jednotlivých počtů bankovek. V každém kroku počet bankovek všech barev změní paritu. Protože maximální počet nákupů je celkem 28, tedy sudý počet, musí mít počty bankovek, které Alence zbyly, stejnou paritu, jako na začátku obchodování. Počty bankovek jsou tedy 0, 1, 0 neboť Alence zbývá jediná bankovka. Odtud plyne, jsou–li dva počty bankovek sudé a jeden lichý, zůstane nám v ruce bankovka s lichou paritou. Naopak máme–li na počátku dva druhy bankovek lichého počtu a jeden druh sudého, zůstane nám v ruce druh bankovky se sudou paritou. (Maximální počet možných nákupů je o 1 nižší než celkový počet bankovek před započetím nakupování.

b) Z hlediska didaktiky je vhodné nechat žáky najít některé konkrétní situace možných Alenčiných nákupů. Jedno z možných řešení uvádí tabulka (tabulka 2.4) je rozepsán jeden z možných postupů při platbách. A v druhé (tabulka 2.3) je cyklus v němž v případě stejného počtu bankovek vždy skončíme.

akce	červené	modré	zelené
	a	a	a
Z + M	a + 1	a - 1	a - 1
Č + Z	a	a	a - 2
Č + M	a - 1	a - 1	a - 1

tabulka 2.3

akce	červené	modré	zelené
	17	7	5
Č + M	16	6	6
Č + M	15	5	7
5x (Č + M)	10	0	12
6x (Č + Z)	4	6	6
1x (Z + M)	5	5	5
4x cyklus	1	1	1
Č + M	0	0	2

tabulka 2.4

Kdyby Alenka udělala 28 nákupů, musel by od každé barvy zbýt lichý počet bankovek, tedy po jedné barvě. To je však spor, neboť jí zbývá jediná bankovka. Kdyby udělala 27 nákupů, zbydou jí dvě bankovky téže barvy. Počty bankovek budou sudé, například 0, 0, 2.

Alenka měla k dispozici 29 různých bankovek a v ruce jí zůstaly dvě stejné, může uskutečnit 27 nákupů s tím, že po posledním nákupu jí zůstanou dvě bankovky některé z barev. Záleží jen na způsobu placení, jakou budou mít barvu.

Pokud má počet jednotlivých bankovek stejnou paritu, pak v některém z kroků nastane situace, kdy počet bankovek všech barev bude stejný. Potom, jak ukazuje tabulka cyklů (tabulka 2.3), posledním nákupem dostaneme situaci, kdy nám v ruce zůstanou dvě bankovky libovolné z barev. Počet nákupů v tomto případě bude o dva nižší než je celkový počet bankovek.

Příklad 2.13. Čísla od 1 do n jsou napsaná v určitém pořadí. V jednom tahu prohodíme libovolná dvě sousední čísla. Je možné, abychom po lichém počtu tahů dostali stejné pořadí čísel, jaké bylo na počátku?

Řešení. Dvojici čísel v dané řadě budeme nazývat převrácenou, pokud větší číslo bude nalevo od menšího čísla. Jestliže prohodíme dvě sousední čísla, změníme počet převrácených dvojic o jednu. Proto nemůže být po lichém počtu tahů počet převrácených dvojic stejný jako počet původně převrácených dvojic. V lichém tahu tedy není možné se dostat k původnímu pořadí čísel v dané řadě.

Příklad 2.14. Čísla od 1 do n jsou napsaná v určitém pořadí. V jednom tahu prohodíme libovolná dvě čísla. Je možné, abychom po lichém počtu tahů dostali stejné pořadí čísel, jaké bylo na počátku?

Řešení. Dvojici čísel v dané řadě budeme nazývat převrácenou, pokud větší číslo bude nalevo od menšího čísla. Jestliže prohodíme dvě sousední čísla, změníme počet převrácených dvojic o jednu, tuto operaci nazvěme krokem. Prohodíme-li dvě vzdálenější čísla, mezi nimiž je n jiných čísel, můžeme uvažovat toto prohození jako sérii prohození dvou sousedních čísel. Přesunutí levého číslo do pozice pravého bude vyžadovat $n+1$ takovýchto kroků a přesunutí pravého čísla na pozici levého bude vyžadovat n kroků (původně levé číslo je již napravo od původně pravého čísla). Celkem je tedy potřeba k provedení této operace $2n+1$ kroků. V každém tahu se tedy počet převrácených dvojic změní o liché číslo. Proto po lichém počtu tahů nemůže být počet převrácených párů stejný jako počet převrácených párů v původní řadě. V lichém počtu tahů tedy není možné se dostat k původnímu pořadí čísel v dané řadě.

2.2 Úlohy k procvičení

Úloha 2.1. V autobuse je 11 cestujících. Na každé zastávce vystoupí 3 osoby a 5 osob nastoupí. Existuje zastávka, po které bude v autobuse přesně 100 osob?

Úloha 2.2. V řadě jsou napsaná celá čísla od 1 do 99. Lenka dvě z těchto čísel smaže a jejich rozdíl zapíše na konec číselné řady. Tuto operaci opakuje do té doby, než v řadě zbyde jediné číslo. Bude poslední číslo sudé nebo liché?

Úloha 2.3. V přepravce je 36 lahví, z nichž 19 je plných a ostatní jsou prázdné. Náhodně vyndáme dvě láhve. Pokud je právě jedna z nich plná, vrátíme jí do přepravky. Pokud jsou obě prázdné, vrátíme jednu z nich do přepravky. Pokud jsou obě plné, jednu z nich vyprázdníme a vrátíme jí do přepravky. Tak pokračujeme, až v přepravce zbyde jedna láhev. Bude plná nebo prázdná.

Úloha 2.4. Mějme řadu celých čísel $1, 2, \ldots, 4n-1$. V rámci jednoho kroku dvě čísla smažeme a nahradíme je absolutní hodnotou jejich rozdílu. Dokažte, že nám zůstane po $4n-2$ krocích sudé číslo.

Úloha 2.5. Na velkém mezinárodním kongresu si mnoho lidí potřese rukou. Nazveme člověka, který si potřásl rukou s lichým počtem lidí, jako lichého člověka. Člověk, který si potřásl rukou se sudým počtem lidí, bude sudý člověk. Dokažte, že v jakémkoliv momentu existuje sudý počet lichých osob (osob, které si potřásli rukou s lichým počtem lidí).

Úloha 2.6. Na stole je a bílých, b černých a c červených kostek. V rámci jednoho kroku odhodíme stranou dvě kostky různé barvy a místo nich na stůl dáme kostku barvy třetí. Pokud nám na konci hry zůstane jedna kostka, jaká bude její barva?

Úloha 2.7. Ve čtyřech skleněných vitrínách na hradě Griffindor bylo 507, 1 006, 1 505 a 2 004 drahých kamenů. Každý den byly vybrány přesně dvě z těchto vitrín a do obou bylo přidáno nebo z obou z nich odebráno jeden nebo pět drahokamů. Je možné, aby v určitém momentě bylo ve vitrínách 2 005, 2 004, 2 002 a 1 998 drahých kamenů?

Úloha 2.8. Rozhodněte, zda lze čísla 1, 2, 3, …, 33 rozdělit do 11 skupin po třech číslech tak, že největší číslo v každé skupině je rovno součtu zbývajích dvou.

Úloha 2.9. Na tabuli jsou napsána všechna celá nezáporná čísla od 0 do 1054. Uvažujeme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich napíšeme na tabuli jejich rozdíl (od většího čísla odečteme menší). Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstane poslední číslo. Můžeme tímto způsobem nakonec na tabuli získat číslo 2?

3 INVARIANTY ZALOŽENÉ NA DALŠÍCH POZNATCÍCH Z TEORIE ČÍSEL

Řešení úloh v této kapitole je založeno na zachovávání stejného zbytku po dělení číslem $n \geq 3$ ve všech krocích. Tedy v jednotlivých krocích se sledovaná veličina (např. součet) mění vždy o stejnou hodnotu nebo o hodnotu tímto číslem dělitelnou. Invariantem je tedy zbytek po dělení číslem n.

3.1 Řešené úlohy

Příklad 3.1. V autobusu je 12 cestujících. Na každé zastávce 2 cestující vystoupí a 5 nových přistoupí. Existuje zastávka, po které bude v autobuse přesně 100 cestujících?

Řešení. Na každé zastávce se počet cestujících zvýší právě o tři (5 cestujících přistoupí a dva vystoupí). Tedy po první zastávce bude v autobuse 15 osob, po druhé 18, po třetí 21, atd. Počet cestujících je zřejmě násobkem čísla tři. Není tedy možné, aby v některý moment bylo v autobuse 100 cestujících.

Příklad 3.2. Tom a Jerry mají sáček se 100 bonbóny a hrají následující hru. Nejprve Tom, pak Jerry, pak Tom, pak Jerry atd. snědí jeden nebo dva bonbóny. Vítězem je ten, kdo sní poslední bonbón. Kdo vyhraje, budou – li oba hrát chytře?

Řešení. Vítězná strategie je založena na nalezení kritické pozice, jež nastává ve chvíli, kdy zbývají v sáčku poslední tři bonbóny. V ten moment, kdo je na tahu, nemůže vyhrát. Stejná situace nastává v momentu, kdy v sáčku zůstává 6 bonbónů. Ať první hráč udělá cokoliv, druhý hráč v sáčku ponechá 3 bonbóny. Stejné situace nastávají při počtu 9, 12, 15, atd. bonbónů v sáčku. Vítězná strategie je tedy založena na ponechání v sáčku počtu bonbónů dělitelných třemi. Z toho je zřejmé, že Tom může vyhrát, pokud na začátku hry sní jeden bonbón a pak se bude řídit pravidlem vítězné strategie.

Příklad 3.3. Statečný rytíř se opět utkal s trojhlavým drakem a jako obvykle chtěl předvést svoji statečnost tím, že mu usekne všechny hlavy. To ovšem nebylo možné. Ukázalo se, že po useknutí jedné hlavy drakovi naroste osm nových. Rytíř ale trval na tom, že bude v sekání hlav pokračovat. Ve chvíli, kdy se rozhodl boj vzdát, drakovi napočítal 2 006 hlav. Počítal správně?

Řešení. Při každém úderu meče se počet hlav zvýšil o 7 (každým úderem byla jedna hlava useknuta a na místo ní jich osm narostlo). Tedy drak měl po prvním úderu meče 10 hlav, po druhém 17 hlav, po třetím 24, atd. Po k-tém kole boje byl počet hlav $7k+3$. Číslo 2006 má však zbytek po dělení sedmi roven čtyřem. Statečný rytíř tedy nejenže nedokázal draka v boji udolat, ale navíc ani nespočítal správně počet jeho hlav.

Příklad 3.4. Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Libovolná dvě z čísel smažeme a nahradíme je jejich součtem. Tuto operaci opakujeme vícekrát za sebou, až nakonec na tabuli zbydou tři čísla. Mohou to být tři po sobě jdoucí čísla?

Řešení. Jestliže na tabuli smažeme dvě libovolná čísla a nahradíme je jejich součtem, zůstane součet všech čísel na tabuli nezměněn. Tento součet je konstantní a je roven

$$1+2+3+\ldots+100=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot(1+100)=5050.$$

Uvědomíme – li si, že tři po sobě jdoucí čísla lze zapsat jako $k-1$, k a $k+1$ jejichž součet je zřejmě $3k$. Pak nám stačí ověřit, zdali součet všech čísel je dělitelný třemi. Číslo 5050 však dělitelné třemi není. Tedy není možné, aby výsledkem byla tři po sobě jdoucí čísla.

Příklad 3.5. Eva a Matěj hrají následující hru. Začnou tím, že napíšou číslo 0. Pak se na tahu střídají: nejprve Eva, potom Matěj, potom Eva, potom Matěj a tak dále. V každém tahu musí hráč vedle posledního zapsaného čísla napsat jednociferné kladné číslo a pak napsat jejich součet. Vítězem se stává ten, kdo první dosáhne trojciferného čísla. Existuje způsob, jak by měl jeden z hráčů postupovat, aby dosáhl vítězství? Jinými slovy existuje pro jednoho z nich „vítězná strategie“?

Řešení. Důležité je nalézt takovou situaci, kdy je již výhra jistá. Vzhledem k tomu, že lze přičíst čísla od 1 do 9, tak tato situace nastává v momentu dosažení hodnot od 91 do 99. Naopak jistá porážka je v momentu, kdy protihráč dosáhne čísla 90. V tento moment již může hráč jen připravit půdu pro vítězství soupeře. Je tedy zřejmé, že pokud máme před svým tahem součet mezi 81 a 89, pak snadno soupeře pošleme do kritické pozice 90. Evidentně další kritickou pozicí je číslo 80. Z tohoto faktu lze snadno odvodit všechny kritické pozice v průběhu hry. Jsou to čísla, která jsou dělitelná 10 beze zbytku. Vítězem této hry, pokud se bude držet správné strategie, se stane Matěj. Například pokud Eva začne číslem 3, Matěj přičte 7, součet je tedy 10. Eva pokračuje číslem 5, Matěj přičte 5, součet je tedy 20, a tak dále. Ať Eva bude dělat cokoliv, Matěj jí je schopen vždy postavit do kritické pozice. Vítězství je tedy jeho!

Příklad 3.6. Drak má sto hlav a rytíř mu dokáže jediným mávnutím kouzelného meče setnout naráz buď 7 hlav nebo 5 nebo 11 nebo 14. Jiný počet hlav však kouzelným mečem naráz nikdy nesetne. Po setnutí sedmi hlav narostou drakovi čtyři nové, po setnutí pěti hlav mu jich naroste dvacet, po setnutí 11 hlav narostou drakovi jen dvě a po setnutí 14 hlav mu jich naroste 17. V případě, že se rytíři podaří snížit počet hlav na nulu, je drak mrtev. To znamená, že žádné nové mu již nedorostou. Může rytíř draka svým kouzelným mečem zabít (tj. setnout mu všechny hlavy)?

Řešení. Podívejme se podrobněji co se stane v případě každé z možností.

a) Po setnutí 7 hlav ihned 4 nové narostou. Tedy počet hlav se sníží o 3.

b) Po setnutí 5 hlav ihned 20 nových naroste. Tedy počet hlav se zvýší o 15.

c) Po setnutí 11 hlav ihned 2 nové narostou. Tedy počet hlav se sníží o 9.

d) Po setnutí 14 hlav ihned 17 nových naroste. Tedy počet hlav se zvýší o 3.

Počet hlav se po každém úderu meče změní o číslo dělitelné třemi. Nyní stačí zjistit, zda po nějakém počtu kroků může mít drak 5, 7, 11 nebo 14 hlav. Což lze ukázat například takto:

$100 = 93 + 7 = 3 \cdot 31 + 7.$ Tedy neustálým opakováním první možnosti lze draka zabít.

Příklad 3.7. Nechť $d(n)$ je ciferný součet čísla n. Najděte všechna řešení rovnice $n + d(n) + d(d(n)) = 1997$.

Řešení. Ciferný součet čísla n a číslo n mají stejný zbytek při dělení třemi. Levá strana rovnice je tedy dělitelná třemi, zatímco číslo 1997 má zbytek po dělení třemi roven dvěma. Proto tato rovnice nemá řešení.

Příklad 3.8. Mějme posloupnost $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$ pro $n \in N$. Zjistěte zda existují $i, j, k \in N$, taková, že $a_i \cdot a_j = a_k$.

Řešení. Všimněme si, že zbytek každého z členů posloupnosti po dělení třemi je roven dvěma. Potom je zřejmé, že součin dvou libovolných členů této posloupnosti musí dávat zbytek 1 po dělení třemi. Indexy i, j, k, pro která platí $a_i \cdot a_j = a_k$, nemohou existovat (jinak bychom měli přirozené číslo, které po dělení třemi dává zbytek jedna i dva).

Příklad 3.9. V každém vrcholu pravidelného dvanáctiúhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout do jediného vrcholu dvanáctiúhelníku.

Řešení. Vrcholy dvanáctiúhelníku označíme po řadě čísly od 1 do 12. Přemístíme-li dvě mince na sousední pole, potom se součet čísel „pod oběma mincemi" nezmění (nenastane-li přesun jedné mince mezi vrcholy s čísly 1 a 12) nebo se daný součet zvětší nebo zmenší právě o 12. Pokud by bylo možno přemístit všechny mince na jednu hromádku, byl by celkový součet čísel pod všemi mincemi násobkem dvanácti. Jejich počáteční součet

$1+2+3+\ldots+12=78$

však násobkem dvanácti není, při dělení dává zbytek 6. Zbytek při dělení dvanácti je tedy invariantem. Za daných podmínek není možné mince přemístit do jediného vrcholu.

Příklad 3.10. Na kartičce je napsaná číselná dvojice $(75;96)$. Jana, Hanka a Majka ji postupně upravují. Jana smí naposledy upravenou dvojici $(a;b)$ pozměnit pouze na dvojici $(b-a;b)$, Hanka smí dvojici $(a;b)$ upravit pouze na dvojici $(b+a;b)$ a Majka může $(a;b)$ změnit pouze na $(b;a)$. Každá z dívek může provést svoji operaci i několikrát za sebou a pořadí dívek se nemusí střídat pravidelně. Je možné, aby na kartičce vyšla dvojice

a) $(117;213)$?

b) $(117;214)$?

Řešení. Každá ze tří možných operací zachovává největší společný dělitel (NSD) obou čísel $(a;b)$. Tedy $NSD(75;96)=3$.

a) $NSD(117;213)=3$, snad tedy lze nalézt sérii kroků, jimiž se k této dvojici lze dostat. Což jak vidno lze, jak ukazuje následující příklad.

Startovní pozice: (75; 96)
Jana: (21; 96)
Majka: (96; 21)
Hanka: (117; 21)
Majka: (21; 117)
Jana: (96; 117)
Hanka: (213; 117)
Majka: (117; 213)

b) Vzhledem k tomu, že NSD(117; 214) = 1, nelze nalézt takovou sérii kroků, abychom se dostali k této dvojici z dvojice původní.

Příklad 3.11. Tři automaty I, R, S vytiskly páry kladných celých čísel na lístky. Pro vstup $(a;b)$ vydává automat $I:(a+1;b+1)$, automat R přijímá pouze sudé páry celých čísel, pro níž vytiskne dvojici čísel $R:\left(\frac{1}{2}a;\frac{1}{2}b\right)$ a automat S potřebuje vstupy $(a;b)$ a $(b;c)$, aby vytiskl $(a;c)$. Zjistěte, zda je možné při vstupní informaci $(5;19)$, získat dvojici čísel

a) $(1;50)$,

b) $(1;100)$?

Řešení. a) Všimněme si, jak se mění rozdíl daných dvojic čísel při jednotlivých operacích. Počáteční rozdíl $b-a$ je 14. Pokud přičteme ke každé dvojici čísel 1, rozdíl zůstává zachován. Ukažme, že rozdíl zůstává násobkem čísla 7. Pokud je $b-a$ rozdílem dvou sudých čísel a současně násobkem čísla 7, pak i rozdíl polovičních hodnot těchto čísel je dělitelný sedmi, vzhledem k nesoudělnosti čísel 2 a 7. Dále z dělitelnosti číslem 7 pro rozdíly $b-a$ a $c-b$ plyne i dělitelnost pro rozdíl $c-a$. Všechny získané dvojice čísel mají rozdíl svých hodnot dělitelný sedmi. Tedy dělitelnost daného rozdílu číslem 7 zůstává při všech možných operací zachována. Vzhledem k tomu, že $50-1=49$ je dělitelné sedmi, zřejmě lze nalézt sekvenci kroků pro úspěšné vytištění dané dvojice čísel automaty. Možné řešení ukazuje následující příklad:

startovní pozice (5; 19)

I : (6; 20)

R : (3;10)

I : (4; 11)

I : (5; 12)

I : (6; 13)

I : (7; 14)

I : (8; 15)

I : (9; 16)

I : (10; 17)

S : (3; 10) + (10; 17) = (3; 17)

I : (4; 18)

R : (2; 9)

S : (2; 9) + (9; 16) = (2; 16)

R : (1; 8)

S : (1; 8) + (8; 15) = (1; 15)

$7\cdot I$: (8; 22)

S : (1; 8) + (8; 22) = (1; 22)

$7\cdot I$: (8; 29)

S : (1; 8) + (8; 29) = (1; 29)

$7\cdot I$: (8; 36)

S : (1; 8) + (8; 36) = (1; 36)

$7 \cdot I : (8; 43)$

$S : (1; 8) + (8; 43) = (1; 43)$

$7 \cdot I : (8; 50)$

$S : (1; 8) + (8; 50) = (1; 50)$

Příklad za b) nemá řešení, protože rozdíl daných čísel není dělitelný sedmi.

Příklad 3.12. Drak má sto hlav a rytíř mu dokáže jediným mávnutím kouzelného meče setnout naráz buď 15 hlav nebo 17 nebo 20 nebo 5. Jiný počet hlav však kouzelným mečem naráz nikdy nesetne. Po setnutí 15 hlav naroste drakovi 24 nových, po setnutí 17 hlav mu narostou 2 nové, po setnutí 20 hlav naroste drakovi 14 nových hlav a po setnutí 5 hlav mu jich naroste 8. V případě, že se rytíři podaří snížit počet hlav na nulu, je drak mrtev. To znamená, že žádné nové mu již nedorostou. Může rytíř draka svým kouzelným mečem zabít (tj. setnout mu všechny hlavy)?

Řešení. Podívejme se podrobněji, co se stane v případě každé z možností.

a) Po setnutí 15 hlav ihned 24 nových naroste. Tedy počet hlav se zvýší o 9.

b) Po setnutí 17 hlav ihned 2 nové narostou. Tedy počet hlav se sníží o 15.

c) Po setnutí 20 hlav ihned 14 nových naroste. Tedy počet hlav se sníží o 6.

d) Po setnutí 5 hlav ihned 8 nových naroste. Tedy počet hlav se zvýší o 3.

Počet hlav se po každém úderu meče změní o číslo dělitelné třemi. Tedy v každý moment boje je zbytek po dělení 3 počtu hlav stejný (roven jedné). Nyní stačí ověřit, zda je rytíř schopen setnout jediným úderem takový počet hlav, který po dělení 3 dává zbytek 1. Vzhledem k tomu, že čísla 15, 17, 20 a 5 dávají zbytek po dělení třemi 0, 2, 2 a 2, není udatný rytíř schopen draka udolat. Vždy mu nejméně jedna hlava zůstane.

Příklad 3.13. V každém vrcholu pravidelného 2008-úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem postupně všechny mince přesunout:

a) na 8 hromádek po 251 mincích,
b) na 251 hromádek po 8 mincích.

Řešení. Očíslujeme vrcholy mnohoúhelníka po řadě čísly od 1 do 2008 a číslem S označíme součet hodnot vrcholů pod jednotlivými mincemi. Přemístíme-li libovolné dvě mince na sousední pole podle daných pravidel, potom se součet čísel „pod oběma mincemi“ nezmění, pokud však nastal přesun mezi vrcholy s čísly 1 a 2008, hodnota součtu čísel „pod oběma mincemi“ se zvětší nebo zmenší právě o 2008. Po libovolném počtu přesunů dvojic mincí se hodnota S z počáteční $S_o = 1 + 2 + \ldots + 2008$ změní na hodnotu $S = S_0 + 2008k$, kde k je vhodné celé číslo. Snadno určíme hodnotu $S_0 = 1004 \cdot 2009$.

a) Jestliže máme získat 8 hromádek po 251 mincích, pak musí být výsledek násobkem 251. Což je vždy splněno, neboť $S = 251 \cdot (8k + 4 \cdot 2009)$. Nyní stačí nalézt alespoň jeden postup, jak mince podle zadaných podmínek přemístit. Budeme-li mince z dvojic vrcholů 1 a 2008, 2 a 2007, atd. přesouvat vždy v opačném směru, snadno vytvoříme 8 hromádek po 251 mincích např. ve vrcholech 1001, 1002, $\ldots$, 1008.

b) Předpokládejme, že po určitém počtu přesunů dvojic mincí vznikne 251 hromádek po osmi mincích. V takovém případě musí být součet S násobkem čísla 8. Číslo $2008k$ násobkem osmi je, ale číslo $1004 \cdot 2009$ není násobkem osmi. Není tedy možné daným způsobem vytvořit 251 hromádek po osmi mincích.

3.2 Úlohy k procvičení

Úloha 3.1. Na dětském hřišti si hraje 30 dětí. Každou čtvrthodinu si rodiče odvedou domů tři děti. Je možné, aby si v některou chvíli na dětském hřišti hrálo pět dětí? Předpokládejme, že na dětské hřiště již žádné dítě nepřijde.

Úloha 3.2. Jana má krabice pěti velikostí: a, b, c, d, e, přičemž $a > b > c > d > e$. Krabic velikosti a je osm a v nich jsou všechny ostatní umístěny tak, že každá z nich je buď prázdná nebo obsahuje právě osm krabic velikosti b. Každá krabice velikosti b je opět buď prázdná nebo obsahuje po osmi krabicích velikosti c, a tak dále. Dokažte, že počet všech prázdných krabic nemůže být 1 000.

Úloha 3.3. Nechť $d_{(n)}$ je ciferný součet čísla n. Najděte všechna řešení rovnice $n + d(n) + d(d(n)) = 2008$.

Úloha 3.4. U vrcholů desetiúhelníku je položeno deset mincí. V každém tahu si můžeme zvolit dvě mince a přesunout každou z nich k sousednímu vrcholu. Je možné dostat všechny mince k jedinému vrcholu?

Úloha 3.5. Na tabuli je napsané číslo $2006!$, které je podle definice rovno součinu čísel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2006$. Při hře se střídají dva hráči podle následujícího pravidla: pokud je na tabuli napsáno číslo X, hráč zvolí kladné celé číslo $Y \leq X$, které má méně než 20 různých prvočíselných dělitelů, a na tabuli místo X napíše rozdíl $X - Y$. Vítězí ten hráč, který na tabuli napíše 0. Existuje pro jednoho z hráčů vítězná strategie?

Úloha 3.6. Dvě čísla (19; 94) jsou napsána na kartičce. Anna, Helena a Katka mohou čísla na kartičce měnit podle následujících pravidel:

Anna nahrazuje čísla $(a;b)$ čísly $(a-b;b)$,

Helena nahrazuje čísla $(a;b)$ čísly $(a+b;b)$,

Katka nahrazuje čísla $(a;b)$ čísly $(b;a)$.

Pokaždé, když se dívce dostane kartička do ruky, provede alespoň jednu svou změnu (nebo také několikrát opakovaně), a pak předá kartičku další dívce, aby také provedla svoji operaci (možná několikrát). Je možné, aby na kartičce vyšla čísla:

a) (19; 95)?
b) (19; 96)?

Úloha 3.7. Tři automaty I, R, S vytiskly páry kladných čísel na lístky. Pro vstup $(x;y)$, automaty I, R, S vydávají lístky I:$(x-y;y)$, R:$(x+y;y)$ a S:$(y;x)$ jako výstupy. Původní hodnota lístku byla $(1;2)$. Je možné těmito automaty získat lístky

a) $(19;79)$,
b) $(819;357)$?

Úloha 3.8. V kartézské soustavě souřadnic jsou obarvovány jistou barvou mřížové body podle následujících pravidel: je – li obarven bod o souřadnicích $[a;b]$, můžeme obarvit i bod o souřadnicích $[a+1;b+1]$. Jsou – li obě souřadnice bodu $[a;b]$ sudá čísla, můžeme obarvit i bod $\left[\frac{1}{2}a;\frac{1}{2}b\right]$. Jsou – li obarveny body $[a;b]$ a $[b;c]$, lze obarvit i bod o souřadnicích $[a;c]$. Na počátku je obarven bod $[36;64]$. Rozhodněte, zda může být při zachování daných pravidel obarven bod o souřadnicích $[49;81]$.

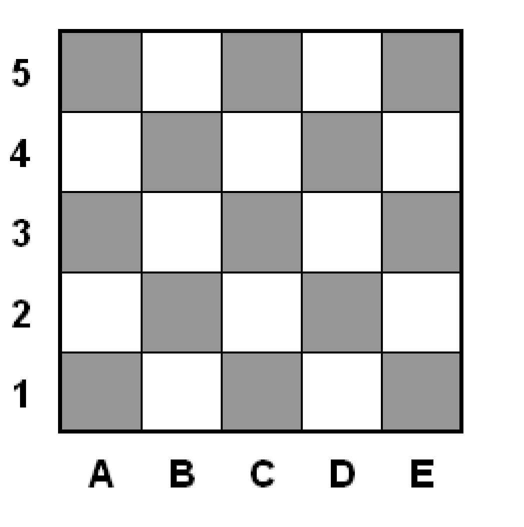
4 ÚLOHY O POKRÝVÁNÍ ŠACHOVNICE NEBO PRAVOÚHELNÍKU

Řešení úloh v této kapitole je založeno na vhodném obarvení nebo očíslování dané šachovnice. Tedy nejprve navrhneme vhodný způsob obarvení šachovnice a poté zkoumáme, zda odpovídá rozvržení políček zadání z hlediska jejich počtu nebo parity jejich počtů. Invariantem je počet pokrytí polí daného typu v jednom kroku nebo parita počtu pokrytí polí daného typu v jednom kroku.

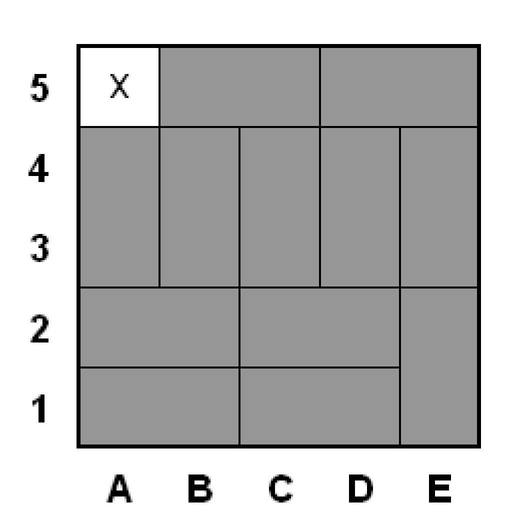
4.1 Řešené úlohy

Příklad 4.1. Stalo se, že starosta města Kocourkova se rozhodl nově vydláždit jedno z městských náměstí. Bylo to takové menší náměstí 3×3 metry. Starosta byl pevně rozhodnut, že po jeho éře musí zůstat ve městě památka na jeho osobu a tak nechal zhotovit a umístit doprostřed náměstí vlastní sochu. Ta zabírala plochu přesně jednoho políčka (1×1 metr). Zbytek náměstí byl vydlážděn panely 2×1 metr. Bohužel, jak už to tak bývá v Kocourkově, někdo špatně vyplnil objednávku panelů. Mírně řečeno hodně předimenzoval objednaný počet panelů. Této situace se rozhodl využít radní Kocourek, když má sochu starosta, musí ji mít i on! Navíc náměstí v Kocourkově je neopravených stále dost, a i kdyby nebylo, nějaké se dá přeci vždy postavit. Ostatně co taky udělat s již nakoupenými panely. Po dlouhém rokování se rada rozhodla pro vydláždění Malého náměstí. I řemeslníci se dali do práce. Zkoušeli, pokládali panely všemi možnými způsoby, ale stále se jim náměstí vydláždit nedařilo. Buď nebyli schopni umístit sochu nebo jim neseděly jednotlivé panely. Dali tedy hlavy dohromady nejmoudřejší občané města a dlouhé dny besedovali nad tím, kde by mohl být problém. Až pak si uvědomili, že vydláždit náměstí 4×4 metry panely 2×1 metr s umístěním sochy radního nelze. Důvod je zřejmý, 4×4 je 16 mínus plocha pro sochu dává 15 políček k vydláždění. Avšak počet polí, jež lze vydláždit pomocí dodaných panelů, musí být sudý. Nikoho z radních samozřejmě nenapadlo dané panely rozpůlit a tak následovalo další rušné zasedání rady. „Máme sochu, máme panely – stavět se musí!“ pronesl radní Kocourek. Ostatní mu dali za pravdu. I moudrý Karásek pravil: „ Je zřejmé, že náměstí o sudé výměře nevydláždíme, jak požadujeme. Vydlážděme tedy náměstí 5×5 metrů. Umístíme na něj sochu, čímž snížíme výměru náměstí na 24 políček a ty již snadno zaplníme našimi dlaždicemi.“ Následoval potlesk v Kocourkově nezvyklých rozměrů. Všichni plácali Karáska po zádech, jak skvěle to vymyslel“. Samozřejmě by šlo pokračovat v příběhu dále a také by toho bylo spousta k vyprávění, ale nyní nadešel čas pro Vás čtenáře. Je „Karáskovo“ řešení správné? Případně navrhněte správné řešení a dokažte jej.

Řešení. Obarvíme náměstí jako šachovnici (viz Obr. 4.1). Nyní máme náměstí rozděleno na 13 černých a 12 bílých polí. Každý panel pokryje, ať jej položíme jakýmkoliv způsobem právě jedno černé a jedno bílé pole. Je zřejmé, že socha musí být umístěna na některé z černých políček. Jeden z možných způsobů rozmístění ukazuje Obr. 4.2.



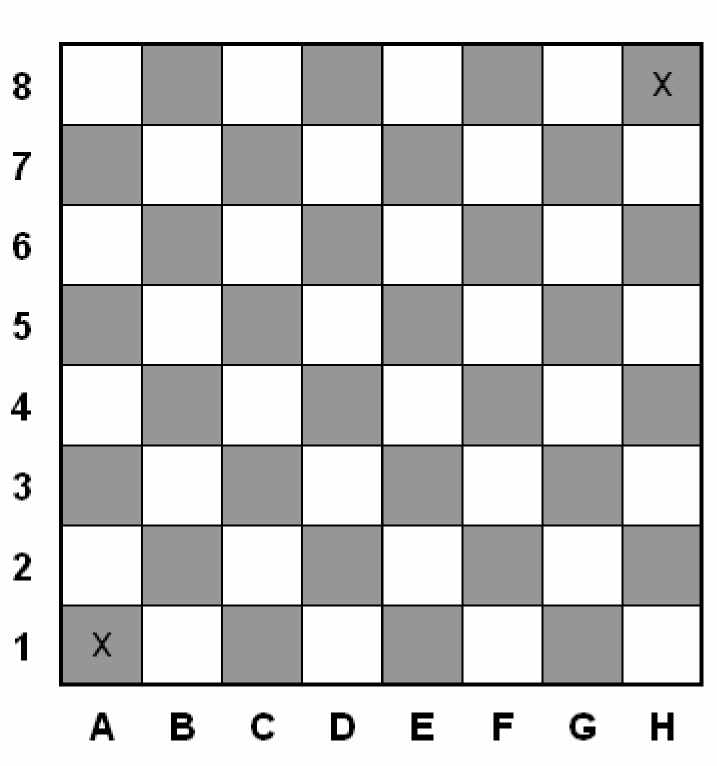
Obr. 4.1



Obr. 4.2

Příklad 4.2. Dokažte, že šachovnici 8×8, z níž je odstřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt jednatřiceti kostkami domina (tj. obdélníky 2×1).

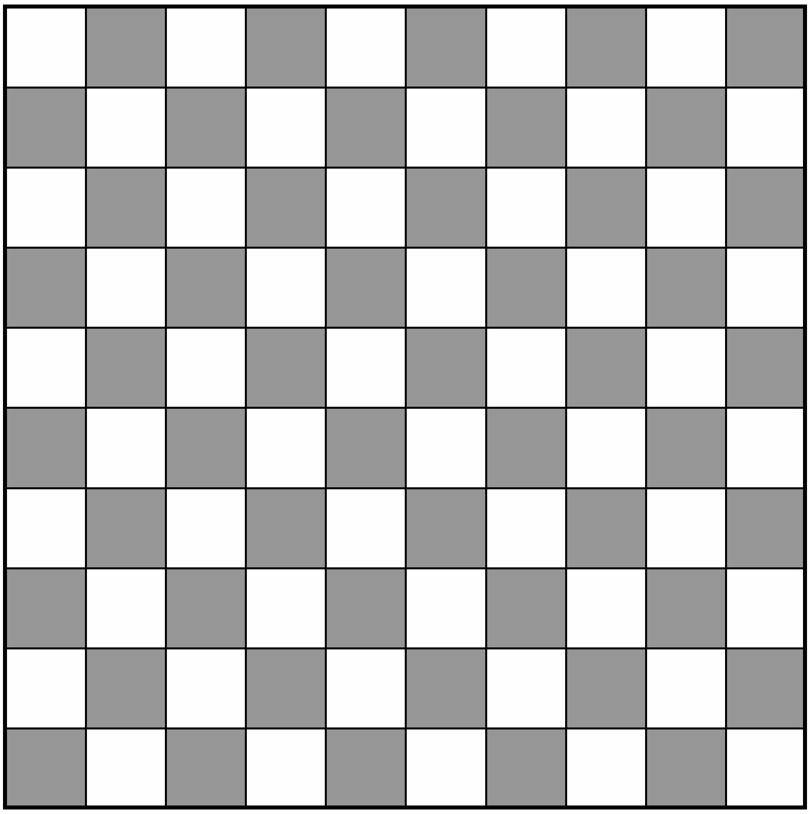
Řešení. Na obrázku (Obr. 4.3) je znázorněna šachovnice. Políčka označena písmenem X označují odstřižená pole. Jak jste si zcela jistě všimli, odstřihli jsme dvě černá políčka. Počet polí se tak změnil na 32 bílých a 30 černých. Je zřejmé, že při pokládání jednotlivých kostek domina zakryjeme vždy právě jedno bílé a jedno černé pole. Vzhledem k jejich rozdílnému počtu nelze kostkami domina pokrýt danou šachovnici.



Obr. 4.3

Příklad 4.3. Dokažte, že šachovnici 10×10 nelze pokrýt 25 kostkami **T**-tetramina (tj. obrazci, z nichž každý se skládá ze čtyř políček šachovnice a má tvar písmene **T**).

Řešení. Obarvíme šachovnici (viz Obr. 4.4). Nyní máme pole rozděleno na 50 černých a 50 bílých polí. Při položení jedné kostky tetramina pokryjeme vždy tři bílé a jedno černé pole nebo jedno bílé a tři černá pole. Musíme umístit 25 kostek **T**-tetramina, je proto zřejmé, že jimi lze pokrýt pouze lichý počet černých a bílých polí. To je však spor, protože počet polí jednotlivých barev je na šachovnici sudý.



Obr. 4.4

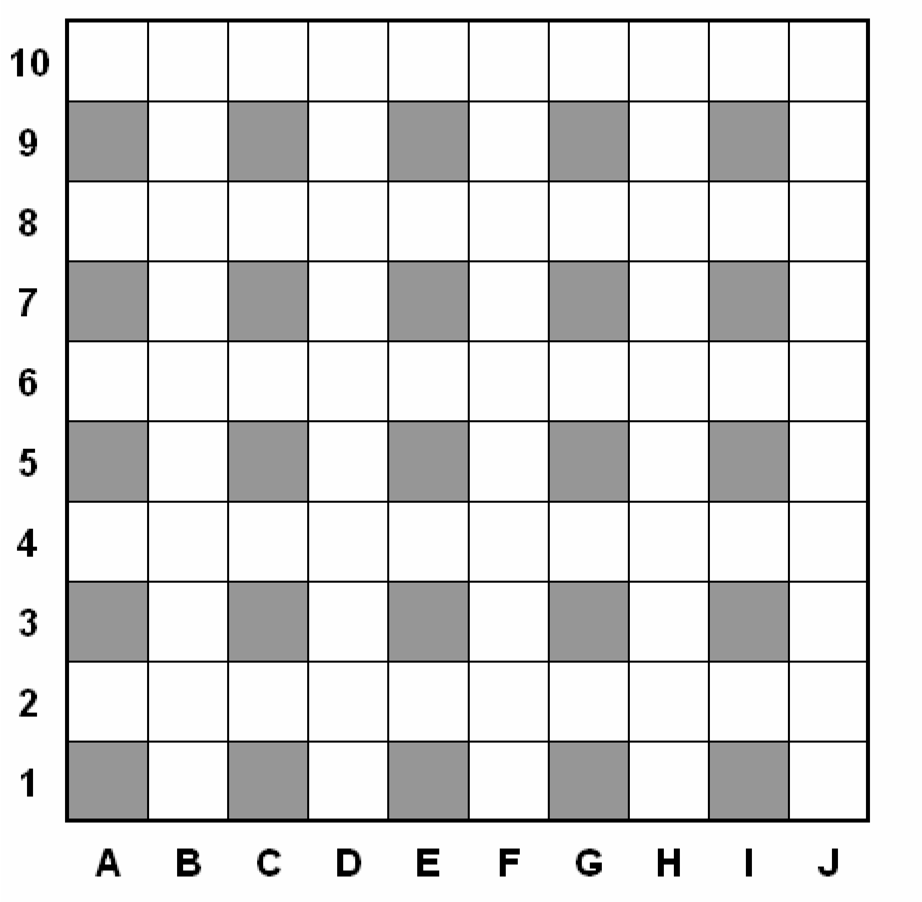
Příklad 4.4. Dokažte, že šachovnici 10×10 nelze pokrýt pětadvaceti kostkami tetramina (tj. obdélníky 4×1).

Řešení. Šachovnici rozdělíme na čtyři různá pole, jež označíme čísly 1, 2, 3, 4. Rozmístění čísel je navrženo tak, aby libovolně umístěná kostka pokrývala právě čtyři políčka s navzájem různými čísly (viz Obr. 4.5). Kdyby tedy existovalo pokrytí šachovnice kostkami tetramina, bylo by právě 25 „jedniček“, 25 „dvojek“, 25 „trojek“ a 25 „čtyřek“. To však není možné, protože na šachovnici je pouze 24 políček s číslem „4“ (a 26 políček s číslem „2“).

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Obr. 4.5

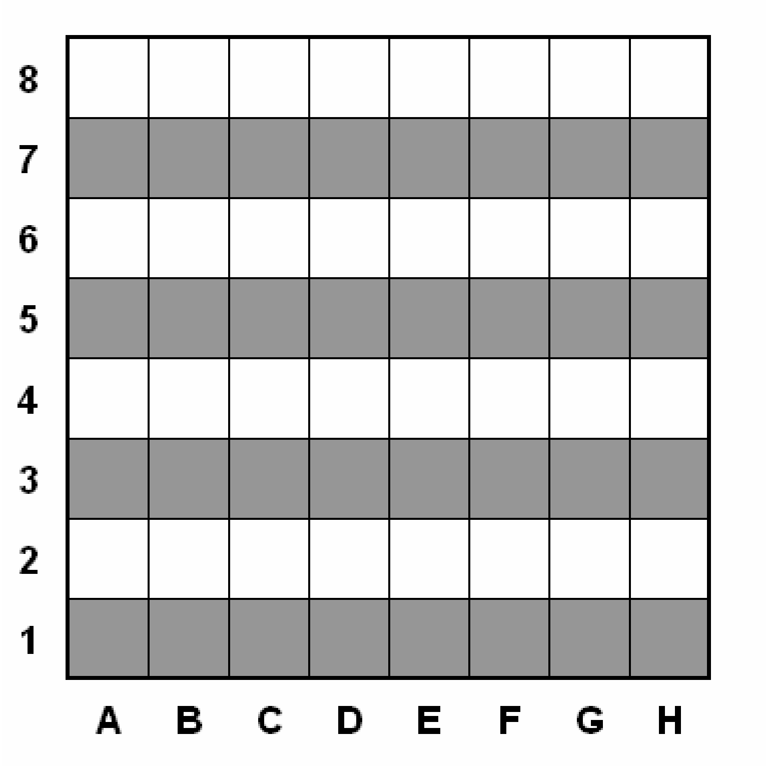
Jiné řešení. Obarvíme čtvercovou síť (viz Obr. 4.6) Každý kámen pokryje buď dvě nebo žádné šedivé pole. Počet šedivých políček, které kameny pokryjí, je sudý, avšak na šachovnici je 25 šedivých políček. Není tedy možné čtvercovou síť 10×10 pokrýt dvaceti pěti obdélníky 4×1.



Obr. 4.6

Příklad 4.5. Je možné pokrýt čtvercovou síť o rozměrech 8×8 šestnácti kameny, z nichž se každý skládá ze 4 políček, jeden z kamenů je čtverec a ostatní kameny mají tvar písmene L?

Řešení. Obarvíme čtvercovou síť stejným způsobem jako na Obr. 4.7. Každý z kamenů typu L pokrývá buď jedno nebo tři šedivá políčka, takže 15 kamenů typu L pokryje lichý počet šedivých políček. Čtvercový kámen pokrývá dvě šedivá políčka. Celkový počet pokrytých šedivých políček je tedy lichý. Avšak v čtvercové síti je 32 šedivých políček. Proto není možné tímto způsobem pokrýt čtvercovou síť.



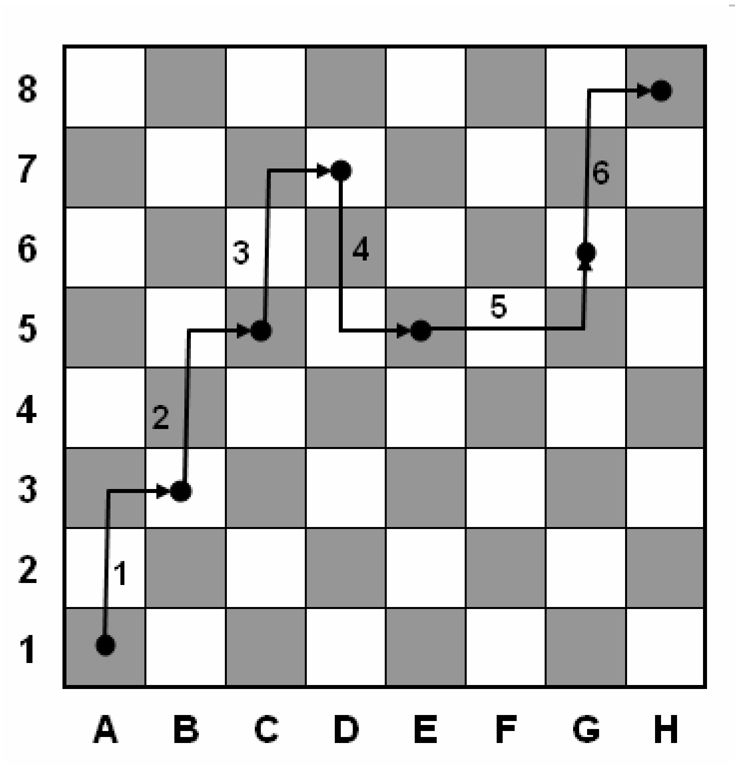
Obr. 4.7

Příklad 4.6. Do levého dolního rohu šachovnice 8×8 postavíme jezdce. Povolený tah jezdcem se skládá z posunu o dvě políčka ve směru řad nebo sloupců šachovnice, po němž následuje posun o jedno políčko po kolmici k tahu.

a) Je možné, aby se jezdec dostal do pravého horního rohu přesně po jedenácti tazích?

b) Může se do pravého horního rohu dostat po jiném počtu tahů? Pokud ano, uveďte příklad.

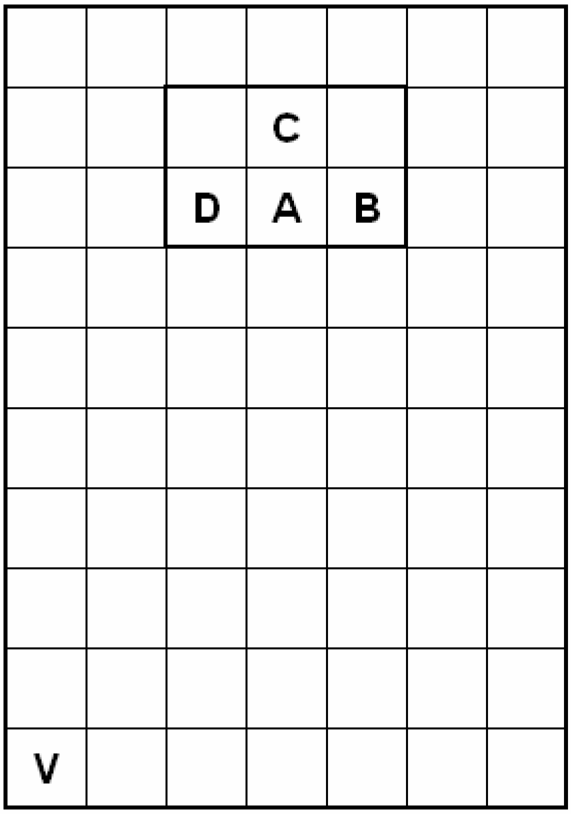
Řešení. Obarvíme šachovnici stejným způsobem jako v šachách. Jezdec je umístěn v dolním levém rohu. Tedy na černém políčku. Při každém svém tahu skončí vzhledem k pravidlům svého pohybu na políčku opačné barvy. Tedy po prvním tahu bude stát na bílém poli, po druhém tahu na poli černé barvy, v třetím tahu na políčku bílé barvy, atd. Je tedy zřejmé, že v lichém tahu bude vždy zabírat pole bílé barvy a naopak v sudém tahu pole barvy černé. Není tedy možné, aby v jedenáctém tahu došel do pravého horního rohu, poněvadž toto pole má černou barvu.



Obr. 4.8

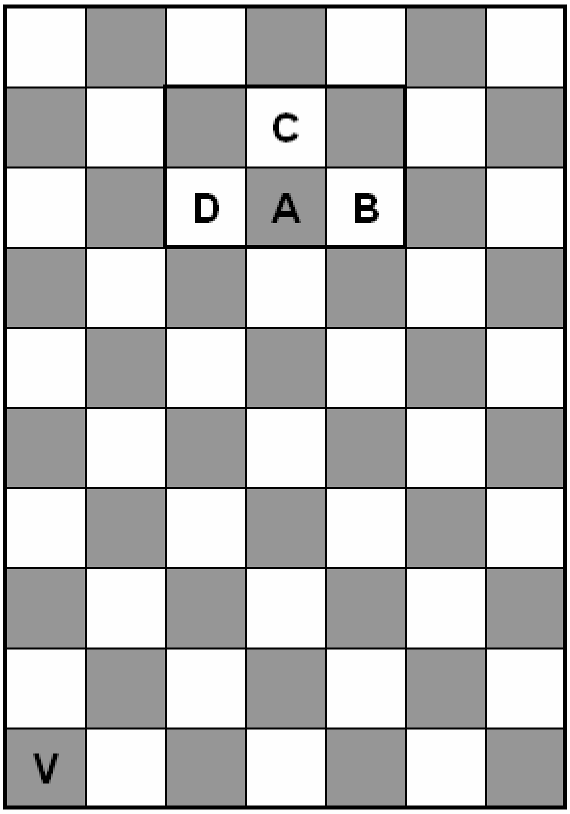
Řešení druhé části úlohy jsme již prakticky naznačili výše. Je zřejmé, že počet tahů musí být sudý. Obě políčka totiž mají stejnou barvu. Teď již stačí nalézt nejnižší možný počet tahů, jimiž lze dojít do cílového pole. Snadno pak lze ověřit, že toto je možné již v šestém tahu o čemž svědčí Obr. 4.8.

Příklad 4.7. V ohradě 7×10 stojí chaloupka 2×3 v které žijí kůzlátka: A = Anička, B = Bětka, C = Cecilka, D = Dana. Když máma koza Róza odešla na nákup, rozhodl se vlk V = Vašek využít situace a dostat se do chaloupky. Neposlušná kůzlátka vlkovi otevřela a on je všechny, kromě jednoho sežral. Které kůzlátko se zachránilo? V každém tahu se vlk pohybuje o tři políčka a kůzlátka o 1 (vlk nemusí skákat přímo, musí však zachovávat počet políček o které se přesune). Hru začíná vlk. Počáteční situaci znázorňuje Obr. 4.9.



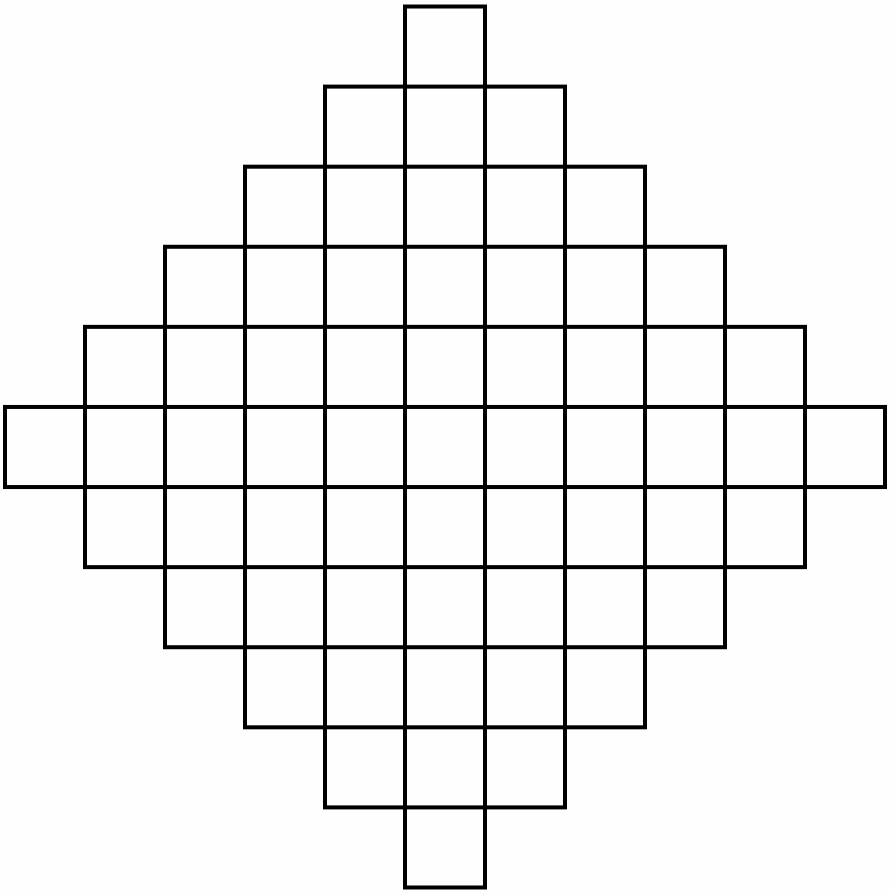
Obr. 4.9

Řešení. Ohradu obarvíme stejným způsobem jako šachovnici (viz Obr. 4.10). Pokud stojí vlk na černém políčku, pak kůzlátka Dana, Cecilka a Bětka stojí na bílých políčkách a Anička na černém. Jestliže vlk skáče o tři políčka, pak se po skoku ocitne na políčku opačné barvy. To samé platí pro kůzlátka. Což znamená, že vlk skáče vždy na políčko odlišné barvy, než stojí kůzlátko Anička. Proto vlk Aničku nikdy nechytí, chytí však ostatní tři kůzlátka.



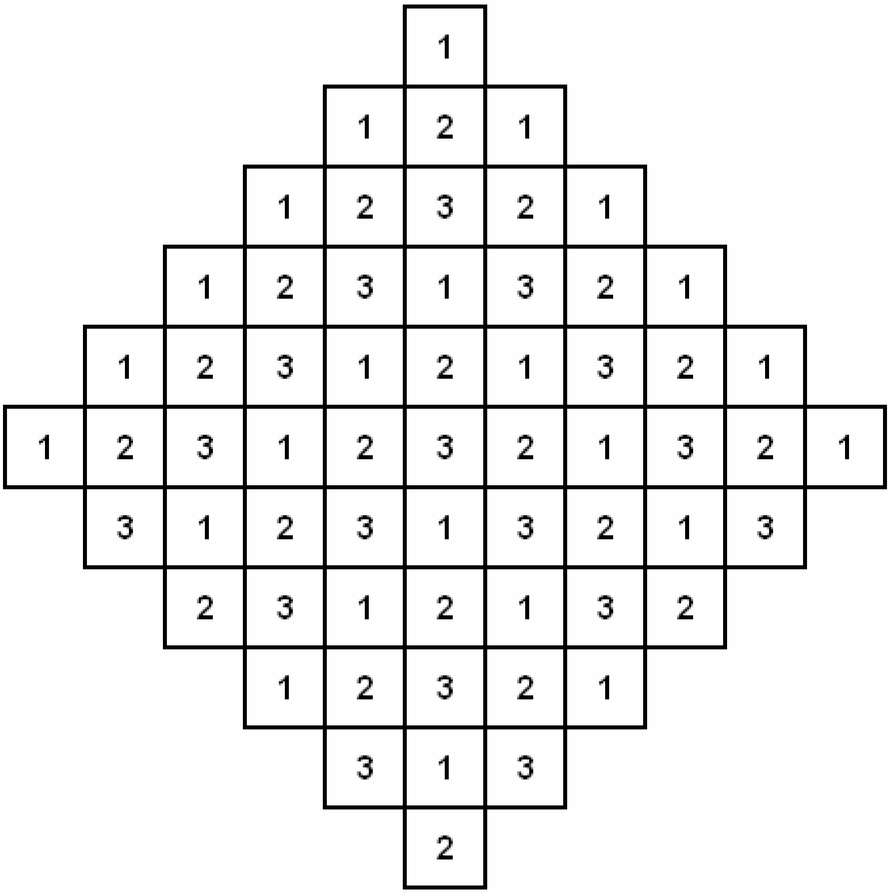
Obr. 4.10

Příklad 4.8. Na které políčko na tomto náměstí je třeba umístit sochu, aby se zbytek náměstí (Obr. 4.11) dal pokrýt dlaždicemi 3×1?



Obr. 4.11

Řešení. Očíslujeme políčka náměstí stejným způsobem jako na Obr. 4.12, snadno zjistíme, že políček označených číslem „1“ je 22, políček označených číslem „2“ je 20 a políček s číslem „3“ je jen 17. Náměstí tedy není možné pokrýt, protože každá dlaždice musí pokrývat různě označená políčka, těch je však různý počet a to i po vynechání prostoru pro sochu. Úloha nemá řešení.



Obr. 4.12

Příklad 4.9. Dokažte, že na šachovnici 9×9 nelze rozmístit 13 kostek 6×1 tak, aby tři políčka zůstala nepokryta.

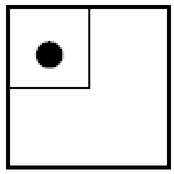
Řešení. Šachovnici označíme způsobem (viz Obr. 4.13). Každá kostka pokryje po jednom z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Když spočteme počet políček označených číslem 6, zjistíme, že jich je jen 12. My jich však potřebujeme 13. Není tedy možné pokrýt šachovnici kostkami 6×1.

1	2	3	4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1	2	3	4
3	4	5	6	1	2	3	4	5
4	5	6	1	2	3	4	5	6
5	6	1	2	3	4	5	6	1
6	1	2	3	4	5	6	1	2
1	2	3	4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1	2	3	4
3	4	5	6	1	2	3	4	5

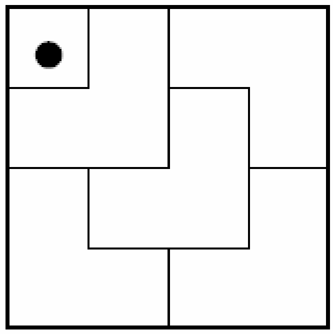
Obr. 4.13

Příklad 4.10. Na které políčko náměstí 8×8 je třeba umístit sochu, aby se zbytek dal vydláždit dlaždicemi ve tvaru L, zaplňujícími 3 políčka?

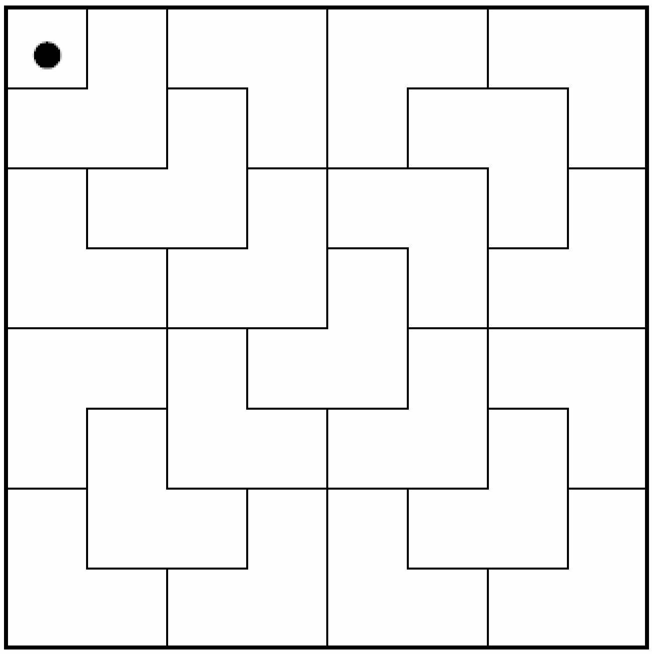
Řešení. Tuto úlohu budeme řešit postupně pro $n=2,4,8$. Nejprve začneme s nejjednodušší možnou variantou. Tedy s náměstím 2×2. Pokud sochu postavíme na libovolné políčko, zbytek je právě jedna dlaždice viz Obr. 4.14. Jakým způsobem se dá pokrýt náměstí 4×4, vidíme na Obr. 4.15. Postupným otáčením čtverce 4×4 lze umístit sochu do libovolného rohu a odtud na libovolné políčko, bez toho, aby se porušilo vydláždění. Jakým způsobem lze vydláždit náměstí 8×8 vidíme na Obr. 4.16. Postupným otáčením čtverce 8×8 lze umístit sochu do libovolného rohu. Rozdělením na čtyři náměstí 4×4 dostaneme předcházející situaci. Odtud postupným otáčením menších částí lze umístit sochu na libovolné políčko bez porušení vydláždění.



Obr. 4.14

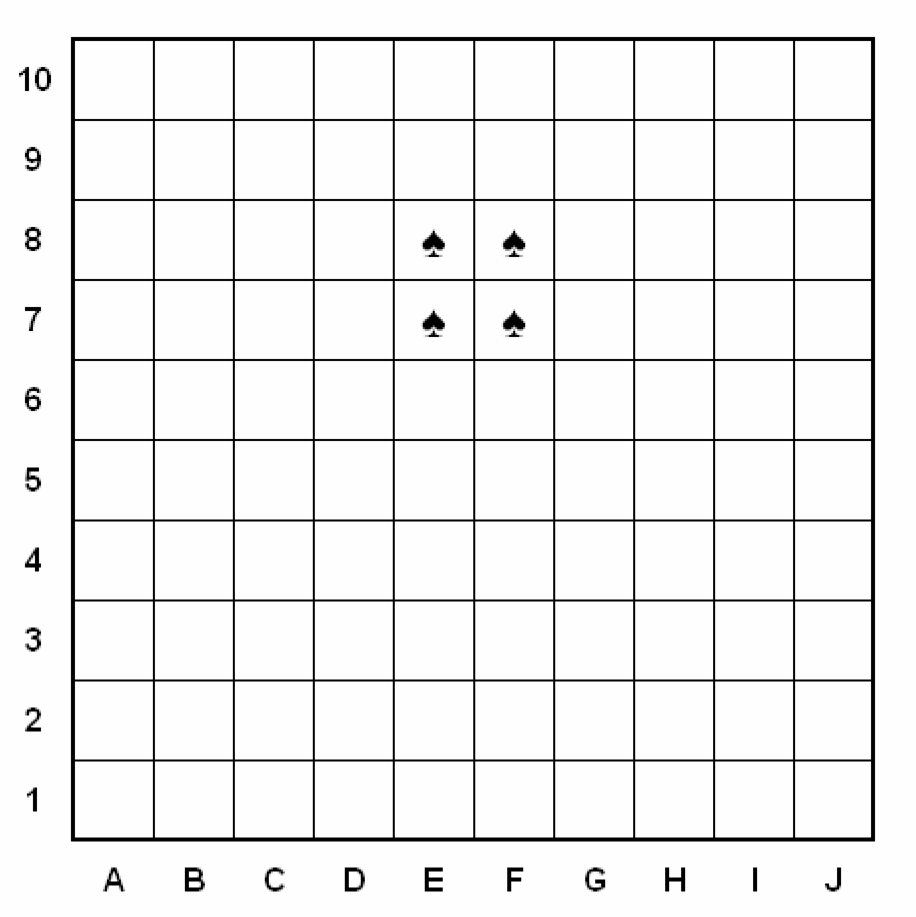


Obr. 4.15



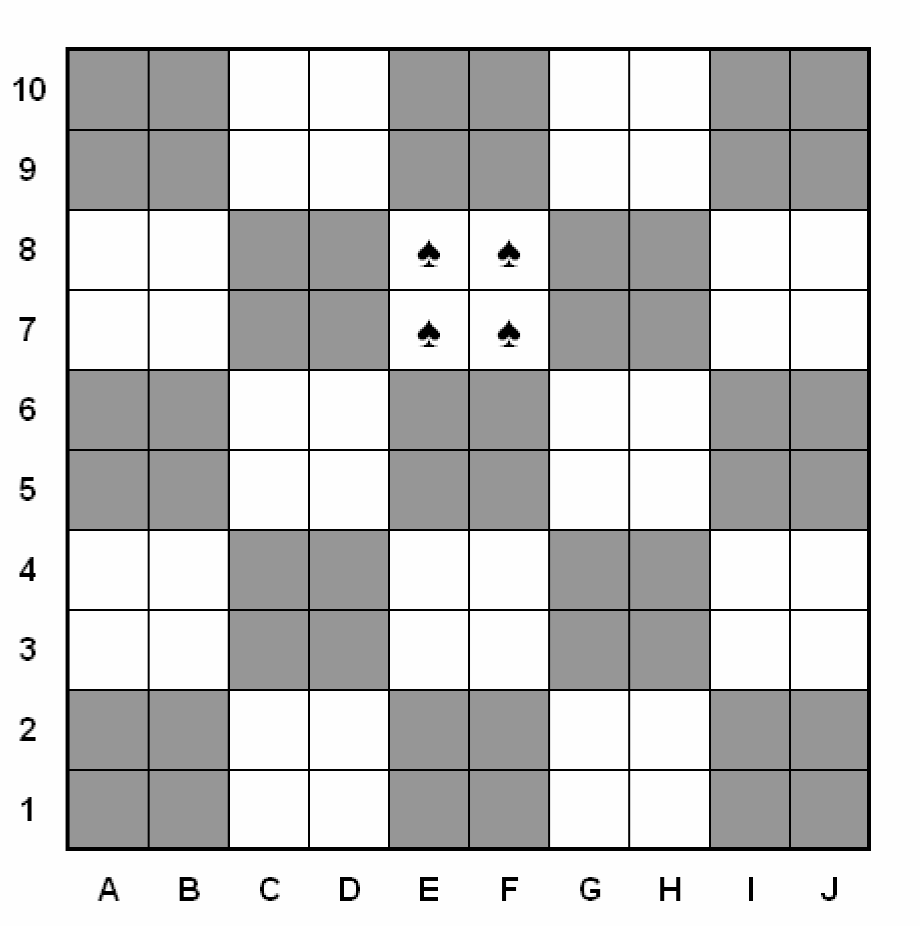
Obr. 4.16

Příklad 4.11. Víte, proč nelze vydláždit náměstí 10×10 s květinovým záhonkem (viz Obr. 4.17) dlaždicemi 4×2?



Obr. 4.17

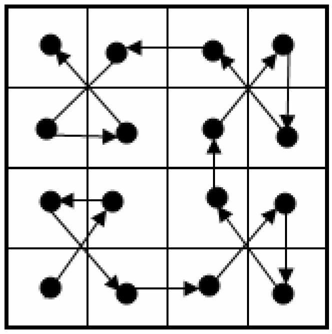
Řešení. Náměstí 10×10 vybarvíme stejným způsobem jako na Obr. 4.18. Každá dlaždice 4×2 je položená přesně tak, aby z jedné poloviny zabírala černě vybarvenou část šachovnice a druhou polovinou bíle vybarvenou část šachovnice. Bíle označených polí je na šachovnici méně, je zřejmé, že květinový záhon nemůže být umístěn na bíle označeném poli. Daným způsobem tedy není možné náměstí zrekonstruovat.



Obr. 4.18

Příklad 4.12. Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$, $(n \geq 2)$ postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo" a „přímo". „Šikmo" znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo" znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo" tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se ocitne právě jednou.

Řešení. Pro sudá n lze nalézt cestu vycházející z rohového pole tak, že postupně projdeme celou šachovnici po blocích typu $2 \times n$, jak ukazuje obrázek (Obr. 4.19). Pro sudá n je tedy úloha řešitelná.

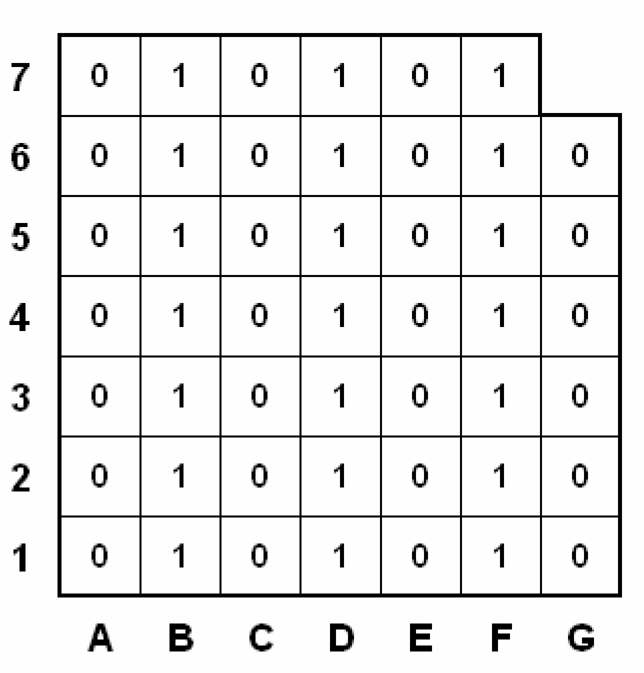


Obr. 4.19

Ukažme, že pro lichá $n \geq 3$ taková cesta neexistuje. Uvažujme šachovnici s černým polem v rohu. Každý tah „šikmo“ spojí dvě pole stejné barvy ze sousedních řad šachovnice. Pro lichá n je však počet černých polí v sousedních dvou řadách odlišný. Proto minimálně jedno pole v první řadě a jedno pole v poslední řadě nelze spojit pomocí tahu „šikmo“ s jiným polem šachovnice. Vzhledem k tomu, že obě pole nemohou být koncovým polem cesty (cesta může končit tahem typu „přímo“, ale takové pole může být jen jedno), není možné tímto způsobem projít šachovnici.

Příklad 4.13. Dokažte, že šachovnici 7×7, z níž je odstřiženo levé horní políčko, nelze pokrýt čtyřiadvaceti kostkami domina (tj. obdélníky 2×1), tak, že dvanáct jich je ve vodorovné a dvanáct ve svislé poloze.

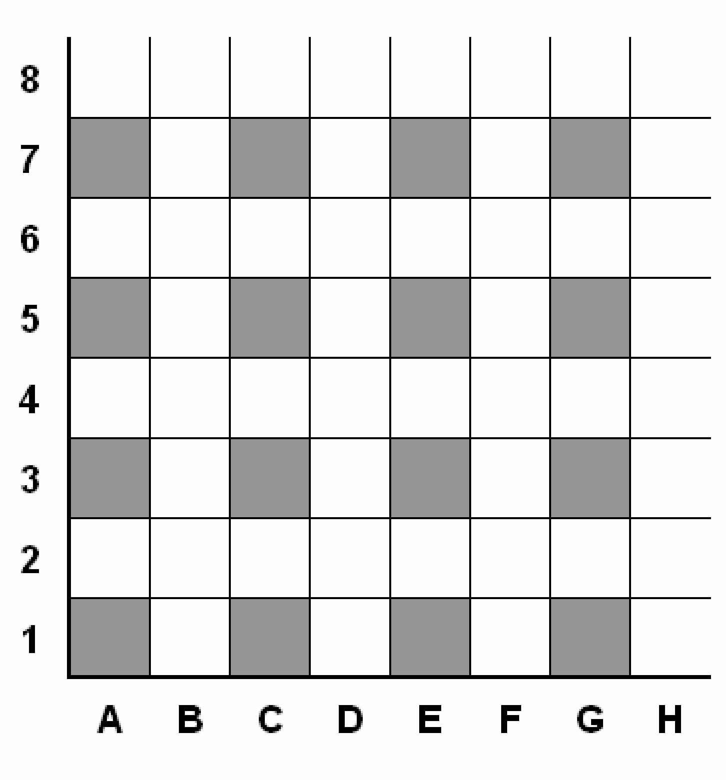
Řešení. Políčka šachovnice očíslujeme podle Obr. 4.20. Nyní předpokládejme, že šachovnice je pokryta požadovaným způsobem. Součet čísel pod dvanácti obdélníky ve vodorovné poloze je roven 12, neboť pod každým jednotlivým je tento součet roven 1. Součet čísel pod dvanácti obdélníky ve svislé pozici je sudé číslo, neboť pod jedním obdélníkem je součet roven 0 nebo 2. Tedy součet pod čtyřiadvaceti obdélníky je číslo sudé, což je však ve sporu s celkovým součtem šachovnice, jež je 21.



Obr. 4.20

Příklad 4.14. Šachovnice $2n \times 2n$ je zcela pokryta kostkami 2×2 a několika kostkami 4×1. Zaměníme – li jednu kostku 2×2 novou kostkou 4×1, nebude již možné šachovnici pokrýt. Dokažte.

Řešení. Obarvíme šachovnici viz Obr. 4.21. Každá kostka 2×2 pokrývá tři bílá políčka (liché číslo) a jedno černé políčko (liché číslo). Kostka 4×1 pokrývá buď čtyři bílá políčka a žádné černé políčko nebo dvě bílá políčka a dvě černá políčka (sudá čísla). Je tedy zřejmé, že není možné nahradit jednu kostku 2×2 za 4×1.



Obr. 4.21

Příklad 4.15. Na které políčko náměstí 8×8 je třeba umístit sochu, aby se zbytek dal vydláždit dlaždicemi 3×1.

Řešení. Políčka náměstí označíme stejným způsobem jako na Obr. 4.22. Každá jednotlivá dlaždice leží vždy tak, že pokrývá tři pole různě označená. Na náměstí je nyní 21 políček označených číslicí 1, 22 políček označených číslicí 2 a 21 políček s číslicí 3. Z toho je zřejmé, že náměstí není možné vydláždit, pokud socha nestojí na políčku 2. Tato podmínka ještě není dostačující. Pokud bychom začali číslovat z jiného rohu, označení políček se změní (viz Obr. 4.23). Jediná políčka, která nezměnila označení, jsou na obrázcích znázorněna šedě. Na tato políčka je možné sochu postavit a přitom zbytek náměstí vydláždit dlaždicemi 3×1. Lze tedy říct, že sochu je možné umístit na políčka, jež zachovávají označení vzhledem k symetrii otočení o 90^0.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Obr. 4.22

2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2

Obr. 4.23

Příklad 4.16. Na šachovnici $n \times n$ jsou dána dvě sousední políčka A, B v některé řadě (A je nalevo od B). Na políčku A stojí šachový král. Rozhodněte, zda je možné, aby král vyšel z A, prošel každým políčkem právě jednou a po $n^2 - 1$ krocích skončil na políčku B. Předpokládáme přitom, že král se může při každém kroku přemístit jen o jedno políčko a to buď doprava, nebo nahoru, nebo šikmo vlevo dolů.

Řešení. Můžeme se přesvědčit, že pro některé n a některé zvolené polohy políček A, B je možné dospět k hypotéze, že se král z A do B při dodržení daných pravidel nemůže přemístit pro libovolné n a jakoukoliv polohu políček A, B. Což lze dokázat následujícím způsobem.

Předpokládejme, že král se přemístí z A do B a vykoná při tom x kroků doprava, y vzhůru a z šikmo vlevo dolů (Obr. 4.24). Protože každým políčkem projde právě jednou, platí

$x + y + z = n^2 - 1$

protože se políčka A, B nacházejí v téže řadě, je počat kroků dolů i nahoru stejný, tedy platí

$y = z$

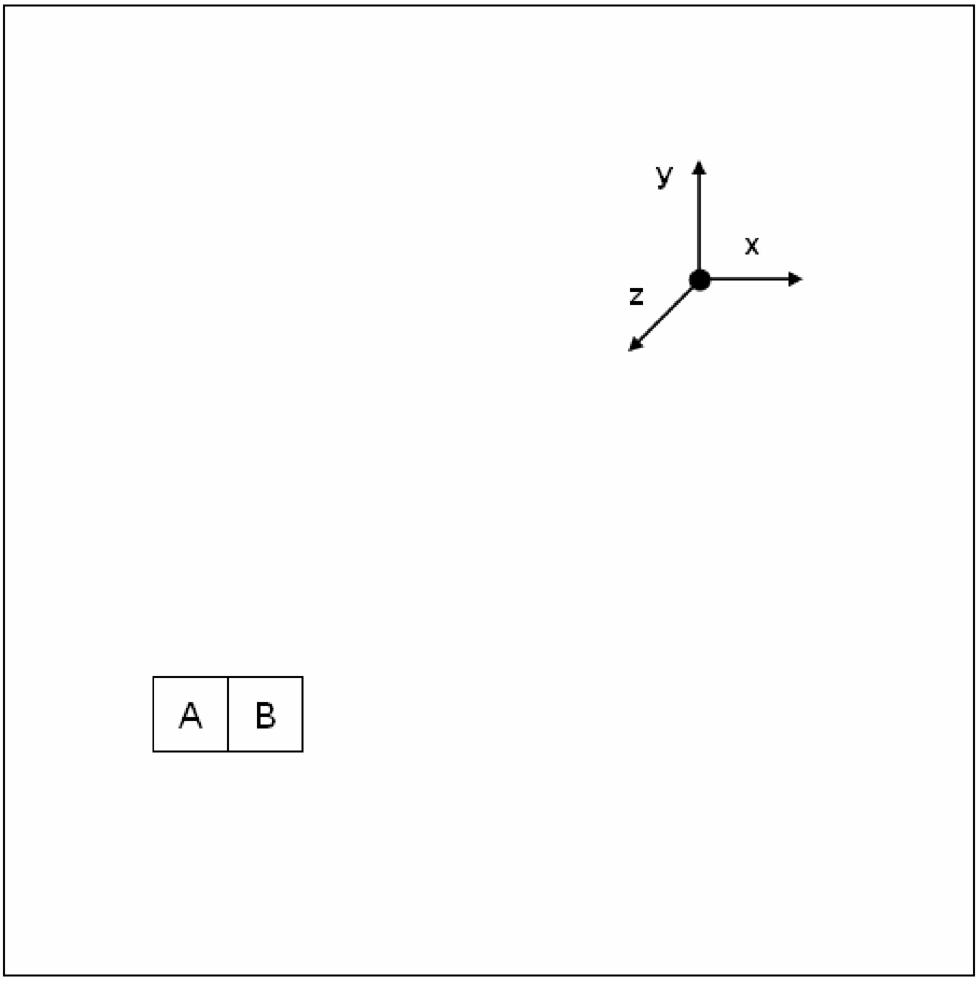
protože políčko B leží o jedno pole napravo od A, je počet kroků krále doprava o jeden větší než doleva, takže platí

$y = z + 1$

Dosadíme – li do první z těchto rovnic za x a y z rovnice druhé a třetí, dostaneme rovnici

$3z + 2 = n^2$.

Tato rovnice s neznámou z a parametrem $n \in N$ nemá v oboru přirozených čísel řešení, neboť druhá mocnina žádného přirozeného čísla nedává při dělení třemi zbytek dvě. (O čemž se lze snadno přesvědčit tak, že probereme všechny možnosti, tedy $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$). Tím je dokázáno, že král se daným způsobem z A do B přemístit nemůže.



Obr. 4.24

4.2 Úlohy k procvičení

Úloha 4.1. Na každém poli šachovnice 7×7 se nachází jezdec. Je možné, aby po jednom současném a přípustném tahu všech jezdců byl na každém políčku šachovnice opět právě jeden jezdec? Povolený tah jezdcem se skládá z posunu o dvě políčka ve směru řad nebo sloupců šachovnice, po němž následuje posun o jedno políčko po kolmici k tahu.

Úloha 4.2. Na některém políčku šachovnice 7×7 se nachází jezdec. Zjistěte, zda může provést 49 tahů tak, aby každé políčko prošel právě jednou a nakonec se dostal do výchozí polohy. Povolený tah jezdcem se skládá z posunu o dvě políčka ve směru řad nebo sloupců šachovnice, po němž následuje posun o jedno políčko po kolmici k tahu.

Úloha 4.3. Hra zajíc a vlk. Vlk se snaží ulovit zajíce. V každém kole se může přesunout právě o tři pole v libovolném směru. Vzdálenost od původní pozice musí být tři pole vzdálena. Zajíc je pomalejší a v jednom kole se přesune pouze o jedno pole. Hru začíná vlk. Za jakých podmínek zajíc vlkovi unikne?

Úloha 4.4. Je možné umístit 31 nepřekrývajících se kostek domina na šachovnici 8×8 a nechat dvě úhlopříčně protilehlá pole prázdná?

Úloha 4.5. Je možné pokrýt šachovnici 13×13 čtyřiceti dvěma kostkami tetramina tak, aby zůstalo nepokryto prostřední pole?

Úloha 4.6. Je možné na šachovnici 8×8 umístit patnáct kostek **T** - tetramina tak, aby zůstala nepokryta čtyři rohová pole?

Úloha 4.7. Dá se pokrýt šachovnice 8×8 bez jednoho rohového políčka jednadvaceti kostkami trimina? (Kostka trimina je obdélník 3×1.)

Úloha 4.8. Tabulka o rozměrech 7×7 je pokryta 16 kameny o rozměrech 3×1 a jedna buňka je nepokrytá. Najděte všechny možné pozice prázdné buňky.

5 Poloinvarianty a metoda nekonečného sestupu

Tato metoda je založena na principu konečného počtu kroků, jež mohou nastat. Například mějme určitou částku peněz v drobných mincích, pokud ji budeme chtít rozměnit za větší bankovky, existuje jistě jen omezený počet výměn, jež lze uskutečnit. V tomto případě jsme byli omezeni celkovou částkou.

5.1 Řešené úlohy

Příklad 5.1. V každém políčku v obdélníkové tabulce $m \times n$ je napsáno celé číslo. Termínem řada budeme označovat řádek nebo sloupec. Je povoleno změnit znaménka u všech čísel vybrané řady. Dokažte, že při určitém počtu takových změn lze dosáhnout nezáporného součtu všech čísel v tabulce.

Řešení. Nechť je S součet čísel v tabulce. Pokud je součet nezáporné číslo, máme úkol hotový. V opačném případě pokud je v nějaké řadě součet záporný, provedeme změnu znamének. Výsledkem je, že se součet S zvětší (S je součet všech součtů v řadách rovnoběžných se zvolenou řadou). Protože existuje konečný počet možností znamének v tabulce, existuje pouze konečný počet hodnot S. Proto není možné donekonečna vybírat řady se záporným součtem. V určité fázi tedy musíme dojít do situace, kdy budou mít všechny řady nezáporné součty.

Příklad 5.2. Na každém poli tabulky 2009×2009 je zapsáno celé číslo, přičemž součet všech čísel v tabulce je 2009. V každém kroku můžeme změnit znaménka u každého z čísel v libovolném řádku či sloupci. Rozhodněte, zda můžeme v konečném počtu takových operací získat situaci, kdy v žádném řádku ani sloupci není záporný součet.

Řešení. Pokud je součet v každém řádku i sloupci nezáporný, je úloha vyřešena. V opačném případě vybereme sloupec či řádek, kde je součet záporný, a změníme znaménka. Po změně znamének bude tento součet kladný a celkový součet čísel v tabulce se zvýší. Vzhledem k tomu, že hodnota součtu se nemůže zvyšovat donekonečna (maximální hodnota součtu je součtem absolutních čísel z původní tabulky), musíme proto v konečném počtu kroků dostat tabulku s nezápornými součty sloupců i řádků.

Příklad 5.3. Ve třídě, kde jsou jen studentky s blond nebo černými vlasy, má každá dívka lichý počet kamarádek. První den se rozhodne první dívka, že přizpůsobí barvu svých vlasů většině svých kamarádek, tj. mají – li převahu černovlasé kamarádky, rozhodne se pro černou barvu svých vlasů, v opačném případě zvolí blond vlasy. Druhý den se ke stejnému kroku rozhodne druhá dívka, atd. (Poté, co danou volbu provede i poslední dívka, pokračuje opět dívka první.) Dokažte, že po jisté době si už žádná z dívek nebude své vlasy přebarvovat na opačnou barvu.

Řešení. Označme S jako součet všech dvojic kamarádek, které mají opačnou barvu vlasů. Pokud se dívka rozhodne pro změnu barvy vlasů, znamená to, že původně měla více kamarádek s jinou barvou vlasů než kamarádek se stejnou barvou vlasů. Po obarvení vlasů se tedy celkový počet dvojic kamarádek s jinou barvou vlasů sníží. Vzhledem k tomu, že počet dvojic kamarádek je vyjádřen nezáporným číslem, nemůže se tento počet nekonečna snižovat. Tedy nastane situace, kdy dosáhne své minimální hodnoty a žádná z dívek si už nebude přebarvovat vlasy.

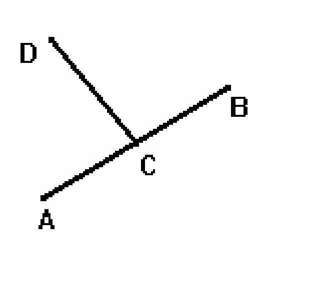
Příklad 5.4. V rovině je dáno $2n$ různých bodů. Dokažte, že je možno sestrojit n úseček s krajními body v daných bodech tak, aby žádné dvě z těchto úseček neměly společný bod.

Řešení. Nejprve spojme libovolné dvojice bodů, tak aby nedošlo k situaci viz Obr. 5.1. Označme S jako součet délek všech získaných úseček. Pokud úsečky nemají společný bod (jsou disjunktní), máme úkol splněný. Naopak, pokud některé z úseček mají společný bod, např. úsečky AB a CD mají společný bod S viz Obr. 5.2. (není to krajní bod, protože tyto body jsou různé). Nahradíme úsečky AB a CD úsečkami AC a BD. Podle trojúhelníkové nerovnosti se S zmenší.

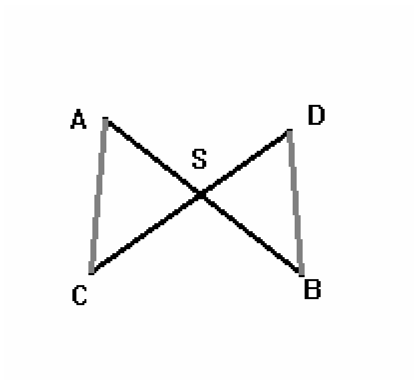
$|AB|+|AS|\rangle|AC| \quad (\triangle CSA)$

$|SD|+|SB|\rangle|BD| \quad (\triangle SBD)$

Pokud nastane situace, kdy se protíná některá z nových úseček s některou další úsečkou, postup opakujeme pro tuto dvojici úseček. Protože existuje jen konečně mnoho možností, jak propojit $2n$ bodů, je také jen konečně mnoho hodnot S. Proto není možné S zmenšovat donekonečna. Tedy v konečném počtu kroků nastane situace, kdy budou všechny úsečky disjunktní.



Obr. 5.1



Obr. 5.2

Příklad 5.5. Každý poslanec má nejvýše 3 nepřátele. Dokažte, že jde rozdělit poslance do dvou stran tak, aby každý člen strany neměl mezi svými spolustraníky více než jednoho nepřítele. Vztah „nepřítel" je vzájemný, to znamená pokud je A nepřítelem B, potom i B je nepřítelem A.

Řešení. Náhodně rozdělme poslance do dvou politických stran. Označme S počet dvojic nepřátel uvnitř jedné strany. Pokud žádný poslanec nemá ve své straně více jak jednoho nepřítele, jsme hotovi. Jinak má alespoň jeden poslanec nejméně dva nepřátele ve své vlastní politické straně, pokud jej přesuneme do druhé politické strany, nebude mít víc než jednoho nepřítele, protože celkový počet nepřátel tohoto poslance je menší nebo roven 3 a dva z nich jsou v první politické straně. Sníží se S. Protože existuje konečný počet možností rozdělení poslanců do dvou politických stran, nelze pokračovat donekonečna v přemísťování poslanců. Nalezneme tedy v konečném počtu kroků vyhovující rozdělení poslanců do politických stran.

5.2 Úlohy k procvičení

Úloha 5.1. V rovině je dáno 2008 bodů. Dokažte, že je možno sestrojit 1004 úseček s krajními body v daných bodech tak, aby žádné dvě z těchto úseček neměly společný bod.

6 DALŠÍ ÚLOHY

6.1 Řešené úlohy

Příklad 6.1. Je dána množina pěti čísel: 2; 2; 3; 4; 4. V každém kroku si můžeme vybrat dvě z nich, a a b, a nahradit je $2a-b$ a $2b-a$.

a) Můžeme v nějaké fázi dostat množinu čísel 0; 2; 3; 4; 6?

b) A co množinu čísel 2; 2; 3; 4; 6?

Řešení. V prvním případě ano. Pokud vybereme za a číslo na první pozici (tedy číslo 2) a za b číslo na poslední pozici (tedy číslo 4). Pak dostaneme požadovanou množinu čísel 0; 2; 3; 4; 6.

V příkladě za b, pro kteroukoliv dvojici čísel, operace zachovává součet všech pěti čísel, který má hodnotu 15. Avšak součet čísel požadované kombinace je 17. Není tedy možné této kombinace dosáhnout.

Příklad 6.2. Tom a Jerry hrají na šachovnici následující hru. Jedinou figurkou na šachovnici je věž a postaví ji do levého dolního rohu. Potom jsou střídavě na tahu Tom, Jerry, Tom, Jerry, atd. V každém tahu musí hráč posunout věží o libovolný počet políček nahoru nebo doprava. Prohrává ten, kdo už nemůže táhnout. Existuje pro jednoho z hráčů vítězná strategie?

Řešení. Jediným místem, odkud už není možné s věží pohnout, je pravý horní roh. Jerry může vyhrát, pokud se bude držet strategie ponechávající věž na úhlopříčce spojující levý dolní roh s pravým horním rohem. Po takovém tahu nemůže Tom přemístit věž do pravého horního rohu, takže Jerry nemůže prohrát. Ať udělá Tom jakýkoliv tah, Jerry se může touto strategií řídit. Hra musí jednou skončit a Jerry tedy musí být vítězem.

Příklad 6.3. Zjistěte, zda existuje konvexní n-úhelník, který lze rozřezat na $k = n - 3$ trojúhelníků tak, aby všechny vrcholy vzniklých trojúhelníků ležely na hranici n-úhelníku.

a) Řešte úkol

b) pro $k = 2n - 30$.

Řešení. a) Ukažme, že tento konvexní n-úhelník neexistuje. Mějme nejprve $n = 3$ (trojúhelník), pak dle rovnice $k = n - 3$ nejsme schopni v tomto n-úhelníku sestrojit žádný trojúhelník. Zbývá nám tedy celý n-úhelník. Při zvýšení počtu vrcholů se nám o stejný počet zvýší počet trojúhelníků. Vždy tedy zůstanou tři volné vrcholy.

Řešení. b) Z předchozí úlohy jsme si odnesli znalost, že n-úhelník lze rozřezat na $n - 2$ trojúhelníků. Této skutečnosti využijeme v tomto příkladě a sestavíme rovnici:

$2n - 30 = n - 2$

$n = 28$

Jak vidno, lze tedy zkonstruovat konvexní 28-úhelník, jež lze rozřezat na 26 trojúhelníků.

Příklad 6.4. Rozhodněte, zda lze daný konvexní patnáctiúhelník rozřezat na 12 trojúhelníků tak, že všechny vrcholy takto získaných trojúhelníků leží na hranici daného patnáctiúhelníku.

Řešení. Pokud budeme sledovat součet vnitřních úhlů ve všech rozřezaných částech, zjistíme, že po odřezání trojúhelníku, který je tvořen třemi sousedními vrcholy mnohoúhelníku, se součet vnitřních úhlů nezmění. Součet vnitřních úhlů každého konvexního patnáctiúhelníku je

$(15 - 2) \cdot 180^0 = 2340^0$,

ale součet vnitřních úhlů dvanácti trojúhelníků je

$12 \cdot 180^0 = 2160^0$.

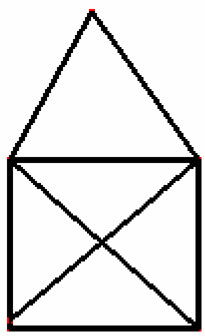
Není tedy možné rozřezat patnáctiúhelník na dvanáct trojúhelníků.

Příklad 6.5. Řešte následující příklady:

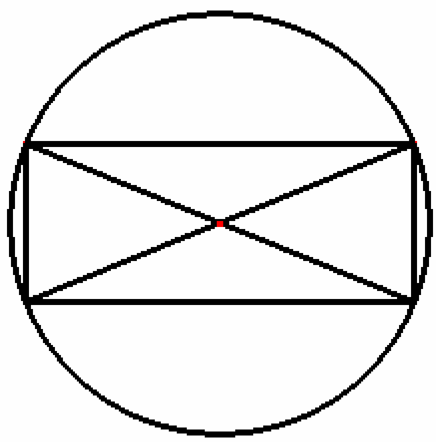
a) Je možné nakreslit graf („domeček“ na Obr. 6.1 jedním tahem tak, abychom každou hranu prošli právě jednou?

b) Je možné nakreslit graf na Obr. 6.2 jedním tahem tak, abychom každou hranu prošli právě jednou?

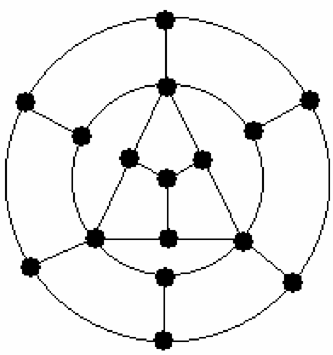
c) Je možné utvořit souvislý podgraf grafu na Obr. 6.3 tak, aby obsahoval všechny uzly a aby každému uzlu příslušely nejvýše dvě hrany?



Obr. 6.1



Obr. 6.2



Obr. 6.3

Řešení. Sudým uzlem nazvěme takový uzel, z něhož vychází sudý počet hran a naopak lichým takový z něhož vychází lichý počet hran.

Pokud máme vytvořit graf takovým způsobem, aby jej šlo projít jedním tahem, potom v jednom kroku do uzlu vstoupíme a v následujícím kroku z něj musíme vystoupit. V průběhu procházení grafem mohou nastat pouze tyto situace:

a) Po spojením dvou sudých uzlů (včetně počáteční situace, kdy uzly nemají žádnou hranu), vzniknou dva liché uzly (spojovat dva uzly bez hrany lze pouze v počátečním kroku).
b) Po spojením lichého a sudého uzlu dojde ke změně parity těchto dvou uzlů (počet lichých uzlů se nemění).
c) Po spojení dvou lichých uzlů dojde ke změně parity těchto dvou uzlů (počet lichých uzlů se sníží o dva).

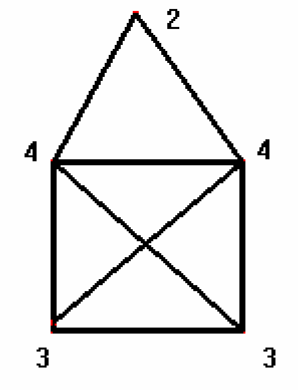
Vzhledem k zadání není možné spojovat za sebou dvě dvojice sudých uzlů, protože pokud spojíme dva sudé uzly, stanou se z nich uzly liché a my musíme pokračovat v cestě grafem z posledního uzlu, do nějž jsme vstoupili, ten je již však lichý. Tedy počet lichých uzlů bude vždy nula nebo dva.

Graf lze nakreslit jedním tahem, pokud má libovolný počet sudých uzlů a maximálně dva uzly liché.

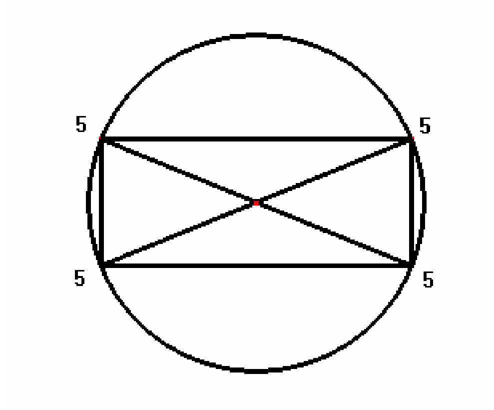
Řešení a) Očíslujeme uzly grafu (viz Obr. 6.4). Počet uzlů lichého typu je roven dvěma. Tento graf tedy lze sestrojit jedním tahem.

Řešení b) Očíslujeme uzly grafu (viz Obr. 6.5). Počet uzlů lichého typu je roven čtyřem. Tento graf tedy nelze sestrojit jedním tahem.

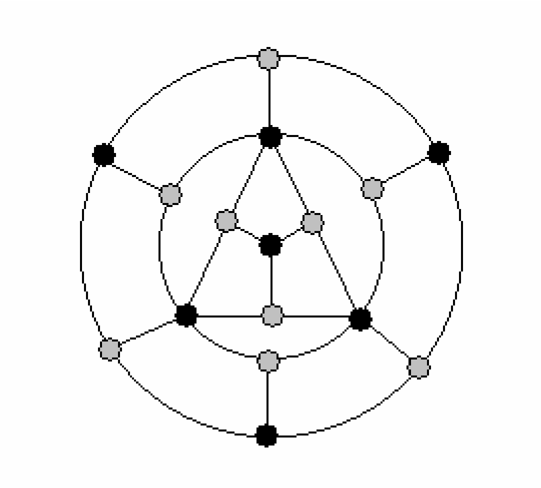
Řešení c) Pokud z jednotlivých uzlů má vycházet jedna nebo dvě hrany, musíme snížit počet hran v obrázku. Toho docílíme obarvením uzlů tak, aby dva sousední uzly měly různou barvu (viz Obr. 6.6), a podmínkou, že lze spojit pouze dva uzly rozdílné barvy. Šedivých uzlů je 9, zatímco černých jen 7. Cesta grafem musí být vždy šedivý, černý, šedivý, černý, šedivý, … Aby bylo možné grafem projít v jednom tahu, musel by se počet různě barevných uzlů lišit maximálně o jeden. To však neplatí, proto není možné daným způsobem grafem projít.



Obr. 6.4



Obr. 6.5



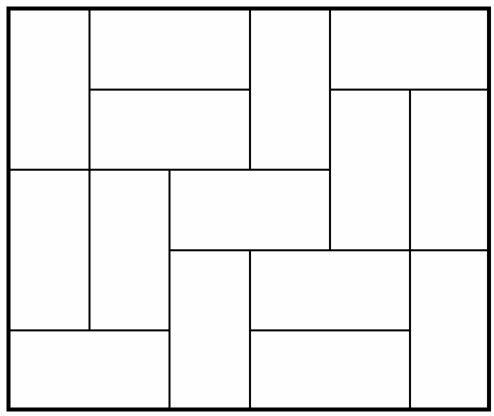
Obr. 6.6

Příklad 6.6. Lze vydláždit náměstí 4×4 dlaždicemi 2×1 tak, aby ani jedna rovná čára (spára mezi dlaždicemi), která vznikne uvnitř náměstí neměla délku větší než 3?

Řešení. Pokud pokryjeme náměstí 4×4 osmi dlaždicemi 2×1, tak libovolná přímka, která je rovnoběžná s některým okrajem náměstí, přetne sudý počet dlaždic (číslo 0 je taktéž sudé). Pokud vezmeme v úvahu jen čáry čtvercové sítě náměstí, pak každou z dlaždic přetíná právě jedna z čar. Pokud by se náměstí pokrylo tak, aby na něm nebyla spára délky čtyř políček, každá z čar sítě by přetínala alespoň dvě dlaždice. To by však bylo potřeba 12 dlaždic (přímek uvnitř náměstí je 6), na náměstí jich máme jen 8.

Příklad 6.7. Dokázali byste pokrýt obdélníkové náměstí 5×6 dlaždicemi 2×1 tak, aby ani jedna rovná čára uvnitř náměstí neměla délku větší než 4?

Řešení. Jeden z možných způsobů pokrytí je vidět na Obr. 6.7.



Obr. 6.7

Příklad 6.8. U vrcholů n-úhelníku je umístěno n mincí. V každém tahu si můžeme zvolit dvě mince a přesunout každou z nich k sousednímu vrcholu. Je možné dostat všechny mince k jedinému vrcholu?

Řešení. Vrcholy n-úhelníku označíme po řadě čísly od 1 do n. Mohou nám nastat tyto možnosti:

Pokud je n liché, pak stačí vybrat libovolný vrchol a přemístit do něj všechny mince a to tak, že si vybereme mince stejně vzdálené od vrcholu a postupně je přesuneme do požadované pozice.

Pokud je n dělitelné 4, pak nejprve přesuneme mince z lichých vrcholů do sousedních vyšších sudých vrcholů. Takový krok vyžaduje přesunutí sudého počtu mincí, což je možné. Pak již jen stačí zvolit vrchol a jednotlivé dvojice mincí do něj přesunout.

Nechť $n=4k+2$. Hodnotou mince budeme v dalších úvahách nazývat číslo příslušné vrcholu na kterém se mince nachází. Součet hodnot všech mincí se na začátku rovná $1+2+\ldots+(4k+2)=(2k+1)\cdot(4k+3)$, což je liché číslo. Přesunutí mince do sousedního vrcholu změní hodnotu součtu o 1 nebo o $4k+1$, tedy o liché číslo. V jednom tahu přesouváme dvě mince najednou, hodnota součtu se tedy změní o sudé číslo. Parita součtu zůstane nezměněna, tedy liché číslo. Pokud by však všechny mince ležely u jednoho vrcholu, jejich celková hodnota by byla násobkem čísla $4k+2$ a hodnoty vrcholu, tedy sudé číslo. Toho však za daných pravidel nelze dosáhnout.

Příklad 6.9. Tři nezáporná celá čísla a, b, c jsou napsána na tabuli. Poté je jedno z čísel vymazáno a nahrazeno součtem zbývajících čísel snížených o 1. Tato operace je opakována mnohokrát s konečným výsledkem $(17;1967;1983)$. Mohla být původní trojice čísel

a) $(2;2;2)$;

b) $(3;3;3)$?

Řešení. Všechna původní čísla jsou větší než 1, tato vlastnost zůstává zachována i v průběhu jednotlivých operací. Největší číslo je vždy součtem dvou zbývajících snížených o 1. Pokud po nějakém kroku dostaneme $(a;b;c)$, takže $a\le b\le c$, potom platí $c=a+b-1$, tedy předchozím krokem je trojice $(a;b;b-a+1)$. Tímto způsobem můžeme postupovat zpětně $(17;1967;1983)$ $\leftarrow$ $(17;1967;1951)$ $\leftarrow$ $(17;1935;1951)$ $\leftarrow$ … $\leftarrow$ $(17;15;31)$ $\leftarrow(17;15;3)$ $\leftarrow(13;15;3)$ $\leftarrow\ldots$ $\leftarrow$ $(5;7;3)$ $\leftarrow(5;5;3)$. Předcházející trojice by měla být $(1;3;3)$ obsahující 1, což je ale nemožné. Proto je trojice $(5;5;3)$

vygenerována již v prvním kroku. Z trojice $(3;3;3)$ lze vygenerovat trojici čísel $(5;5;3)$, ale ne již z trojice čísel $(2;2;2)$.

6.2 Úlohy k procvičení

Úloha 6.1. Lze vydláždit náměstí 6×6 dlaždicemi 2×1 tak, aby ani jedna rovná čára uvnitř náměstí nebyla delší než 5?

Úloha 6.2. Tom a Jerry hrají na šachovnici následující hru. Do levého dolního rohu šachovnice postaví krále. Nejprve hraje Tom, pak Jerry, pak Tom atd. V každém tahu musejí krále posunout o jedno políčko nahoru, doprava nebo úhlopříčně doprava nahoru. Prohrává ten, kdo už nemá kam táhnout. Existuje pro jednoho z hráčů vítězná strategie?

Úloha 6.3. Tom a Jerry mají dva sáčky bonbónů. V jednom z nich je 20, ve druhém 21. Hrají střídavě Tom, Jerry, Tom, atd. V každém tahu musí hráč sníst obsah jednoho sáčku a část (nikoliv všechny) z druhého přesunout do prázdného sáčku. Prohrává ten hráč, který už nemůže táhnout. Existuje pro jednoho z hráčů vítězná strategie?

7 ŘEŠENÍ ÚLOH

7.1 Úlohy, jejichž řešení je založeno na prověrce parity

Úloha 2.1. Na každé zastávce se počet cestujících zvýší o 2 (5 osob nastoupí a 3 vystoupí). Po první zastávce bude v autobuse 13 cestujících, po druhé 15, po třetí 17, atd. Parita počtu osob v autobuse zůstává vždy stejná, lichá. Není tedy možné, aby v některý moment bylo v autobuse 100 osob.

Úloha 2.2. Nechť je S počet lichých čísel v řadě. Na počátku je $S=50$. V každém kroku Lenka smaže dvě libovolná čísla , přičemž platí jedna z následujících tří možností:

a) Obě vybraná čísla jsou sudá. Počet lichých čísel se nemění, protože rozdíl dvou sudých čísel je číslo sudé.

b) Obě vybraná čísla jsou lichá. Rozdílem dvou lichých čísel je číslo sudé, tedy počet lichých čísel se zmenší o 2.

c) Vybraná čísla mají různou paritu, tedy jedno je sudé a druhé liché. Počet lichých čísel se nemění, protože rozdíl lichého a sudého čísla je číslo liché.

Vidíme tedy, že parita počtu lichých čísel se nemění, ať nastane kterákoliv ze tří možností. Vždy bude S sudé číslo. Protože na konci úlohy musí být $S \leq 1$, zůstává jediná možnost $S=0$. Tedy poslední zbylé číslo musí být sudé.

Úloha 2.3. Rozeberme si co se stane v jednotlivých možných situacích.

a) Vezmeme – li jednu plnou a jednu prázdnou láhev dostaneme jednu plnou. Počet plných láhví se nezmění. Parita plných láhví zůstává zachována.

b) Vezmeme – li dvě prázdné láhve, vrátíme jednu prázdnou. Počet plných láhví zůstává stejný, parita jejich počtu se tedy nemění.

c) Vezmeme – li dvě plné láhve, dostaneme jednu prázdnou láhev. Počet plných láhví se sníží o 2 (parita plných láhví se tedy nezmění).

Jak vidno, parita počtu plných láhví zůstává za všech okolností nezměněna. Vzhledem k tomu, že ze zadání víme, že počet plných láhví je lichý, pak je zřejmé, že poslední zbyde láhev plná.

Úloha 2.4. V každém kroku se počet celých čísel sníží o 1. Po $4n-2$ krocích zůstane jen jedno celé číslo. Původní počet lichých čísel je $2n$, což je sudé číslo. Pokud jsou nahrazena dvě lichá čísla jejich rozdílem (rozdíl je sudé číslo), počet lichých čísel se sníží o 2. Pokud jsou nahrazena dvě sudá čísla jejich rozdílem (rozdíl je sudé číslo), počet lichých čísel se nezmění. Pokud je nahrazeno jedno sudé číslo a jedno číslo liché jejich rozdílem (rozdíl je liché číslo), počet lichých čísel se nezmění. Počet lichých čísel zůstává po každé z možných operací sudý. Proto poslední číslo, které zůstane, je sudé.

Úloha 2.5. Sudou osobou nazýváme takovou osobu, která si potřásla rukou se sudým počtem osob (včetně žádné). Pokud budeme postupovat od počátku, musí si nejprve potřást rukou dvě sudé osoby (zatím si nikdo s nikým nepotřásl rukou), počet lichých osob se zvýší o 2. V dalších krocích mohou nastat tyto situace, kdy si lichá osoba potřese rukou s osobou sudou, počet lichých osob se nezmění (ze sudé osoby se stala lichá a z liché osoby sudá). Pokud si potřesou rukou dvě liché osoby, stanou se z nich osoby sudé (počet lichých osob se sníží o 2). Jak vidno, všechny operace, jež mohou nastat, zachovávají stejnou paritu počtu lichých osob. Tedy v každý okamžik je počet lichých osob sudý.

Úloha 2.6. Označme n celkový počet kostek na stole.

Pokud je parita počtu kostek dvou barev různá od parity počtu třetí barvy, pak, pokud budeme sledovat, jak se mění parita počtu stejnobarevných kostek v jednotlivých krocích, si všimněme, že v každém kroku zůstává parita počtu kostek dvou barev odlišná od parity počtu kostek barvy třetí.

Pokud n bylo liché číslo (tedy dvě sudé barvy a jedna lichá), pak po provedení $n-1$ výměn (sudý počet), budou mít počty barev jednotlivých kostek stejnou paritu jako na začátku. Na stole tedy zůstane jedna kostka a to barvy, jež měla lichou paritu.

Pokud n bylo sudé číslo (tedy dvě liché barvy a jedna sudá), pak po provedení $n-1$ výměn (lichý počet), budou mít počty barev jednotlivých kostek opačnou paritu než na začátku. Na stole tedy zůstane jedna kostka a to barvy, jež měla sudou paritu.

Pokud byla parita počtu kostek všech tří barev stejná, například lichá, pak n je liché číslo. V každém kroku počet kostek všech barev změní svoji paritu, pokud bychom provedli $n-1$ výměn, tedy sudý počet, byla by parita počtu jednotlivých kostek zůstala stejná jako na začátku, tedy lichá. Na stole by zbylo po jedné kostce od každé barvy. To je však spor, protože po provedení $n-1$ výměn, nám musí zbýt pouze jediná kostka. Po provedení $n-2$ výměn nám zbydou na stole dvě kostky téže barvy a od každé barvy sudý počet, tedy 0, 0, 2. Záleží jen na nás, jakou barvu budou kostky mít.

Pokud byla parita počtu kostek všech tří barev sudá, pak n je sudé číslo. V každém kroku počet kostek všech barev změní svoji paritu, pokud bychom provedli $n-1$ výměn, tedy lichý počet, byla by se parita počtu jednotlivých kostek změnila oproti počátečnímu stavu, byla by tedy lichá. Na stole by zbylo po jedné kostce od každé barvy. To je však spor, protože po provedení $n-1$ výměn nám musí zbýt pouze jediná kostka. Po provedení $n-2$ výměn nám zbydou na stole dvě kostky téže barvy a od každé barvy sudý počet, tedy 0, 0, 2. Záleží jen na nás, jakou barvu budou kostky mít.

Pokud má počet kostek od každé z barev na stole stejnou paritu, pak v některém z kroků nastane situace, kdy počet kostek všech barev bude stejný. Potom, jak ukazuje tabulka cyklů (tabulka 7.1), poslední výměnou dostaneme situaci, kdy nám na stole zůstanou dvě kostky libovolné barvy. Počet možných výměn je v tomto případě o dvě nižší než celkový počet kostek na stole. Není tedy možné, aby nám v těchto případech na stole zůstala jedna kostka.

akce	bílé a	černé b	červené c
	x	x	x
b + c	x + 1	x - 1	x - 1
a + c	x	x	x - 2
a + b	x - 1	x - 1	x - 1

tabulka 7.1

Úloha 2.7. Nejprve se podíváme na jednotlivé možnosti, jež mohou nastat. Pokud přidáme (resp. odebereme) do dvou vitrín po jednom drahém kameni, jejich celkový počet se zvýší (resp. sníží) o 2. Pokud do dvou vitrín přidáme (resp. odebereme) po pěti drahých kamenech, jejich počet se zvýší (resp. sníží) o 10. Obě možné operace nemění paritu počtu drahých kamenů ve vitrínách. Ze zadání víme, že celkový původní počet drahých kamenů ve vitrínách je 5022. Není tedy možné, aby v některý den bylo ve vitrínách 2005, 2004, 2002 a 1998 (celkem 8009) drahých kamenů.

Úloha 2.8. Aby toto bylo možné, musí v každé skupině být buďto 3 sudá čísla nebo jedno číslo sudé a dvě lichá. To znamená, že celkový počet lichých čísel musí být sudý. Mezi čísly od 1 do 33 je 17 lichých čísel. Není tedy možné tato čísla rozdělit do 11 skupin po třech dle zadání.

Jiné řešení. Aby bylo splněno zadání, musí být součtem v každé skupině sudé číslo. Součet všech čísel tedy musí být sudé číslo. Celkový součet je však 561. Není tedy možné tato čísla rozdělit do 11 skupin po třech dle zadání.

Úloha 2.9. Jestliže smažeme dvě libovolná čísla a nahradíme je jejich rozdílem, mohou nastat tyto možnosti:

a) Smažeme – li dvě sudá čísla, jejich rozdílem je číslo sudé

b) Smažeme – li dvě lichá čísla, jejich rozdílem je číslo sudé

c) Smažeme – li jedno sudé a jedno liché číslo, jejich rozdílem je číslo liché.

Ve všech těchto případech, ale nedojde ke změně parity součtu. Součet všech čísel napsaných na počátku na tabuli je roven

$$0+1+2+\ldots+1054=\frac{1}{2}\cdot 1055\cdot(0+1054)=555985.$$

Součtem je liché číslo, proto poslední na tabuli napsané číslo musí být liché. Není tedy možné, aby jím bylo číslo 2.

Jiné řešení. Označme S počet lichých čísel napsaných na tabuli. Na začátku se $S=527$ .Jestliže smažeme dvě libovolná čísla a nahradíme je jejich rozdílem, mohou nastat tyto možnosti:

a) Smažeme – li dvě sudá čísla, jejich rozdílem je číslo sudé (počet lichých čísel se nemění)

b) Smažeme – li dvě lichá čísla, jejich rozdílem je číslo sudé (počet lichých čísel se sníží o 2).

c) Smažeme – li jedno sudé a jedno liché číslo, jejich rozdílem je číslo liché (počet lichých čísel se nemění).

Na konci musí být $S\leq 1$. Poslední číslo napsané na tabuli musí být tedy liché. Proto není možné, aby posledním na tabuli napsaným číslem byla 2.

7.2 Invarianty založené na dalších poznatcích z teorie čísel

Úloha 3.1. Každou čtvrthodinu se počet dětí na hřišti sníží o tři. Tedy po první čtvrthodině bude na hřišti 27 dětí, po druhé 24, po třetí 21, $\ldots$. Všimněme si, že počet dětí na hřišti je vždy dělitelný třemi. Není tedy možné, aby v některý okamžik si na hřišti hrálo pět dětí.

Úloha 3.2. Vycházíme z představy, že jistě máme 8 krabic velikosti a. Do každé z této krabice můžeme, ale nemusíme vložit 8 krabic velikosti b, do krabice velikosti b můžeme, ale nemusíme vložit 8 krabic velikosti c, atd. Vložení 8 krabic do jedné prázdné zvýší počet prázdných krabic o 8, ale zároveň dojde ke snížení počtu prázdných krabic o 1. To je způsobeno tím, že původně prázdná krabice již prázdnou není. Vložili jsme do ní totiž těch osm nových krabic. Tedy každým vložením se počet prázdných krabic zvýší právě o 7. Pak tedy každý z možných počtů prázdných krabic je členem posloupnosti 8, 15, 22, 29, $\ldots$, n, neboli $a_n = 7k + 1$. Vidíme tedy, že zbytek po dělení modulo sedmi nám dává vždy číslo 1. Nyní stačí ověřit, zda – li je zbytek čísla 1000 po dělení sedmi roven 1. To však není pravda, zbytek je 6. Tedy za daných podmínek není možné dosáhnout počtu tisíce prázdných krabic.

Úloha 3.3. Ciferný součet čísla n a číslo n mají stejný zbytek po dělení třemi. Levá strana rovnice je tedy dělitelná třemi a nemůže být rovná 2008 (není dělitelné třemi). Proto tato rovnice nemá řešení.

Úloha 3.4. Vrcholy desetiúhelníku označíme po řadě čísly od 1 do 10. Po každém tahu přiřadíme každé minci hodnotu, jež je rovna číslu vrcholu, u kterého je umístěna. Součet hodnot mincí na počátku je
$1+2+3+\ldots+10=55$.

Posun mince změní hodnotu součtu o 1 nebo o 9, takže posun dvou mincí změní hodnotu součtu o sudé číslo. Vzhledem k tomu, že původní součet je lichý a hodnota součtu se mění o sudé číslo, zůstane součet lichý. Pokud by však všechny mince ležely u jednoho vrcholu, byla by hodnota součtu desetinásobkem tohoto vrcholu, tedy sudé číslo, to však za daných podmínek není možné.

Jiné řešení. Vrcholy desetiúhelníku označíme po řadě čísly od 1 do 10. Na počátku je počet mincí v lichých pozicích lichý (pět). V každém tahu se tento počet zvětší (resp. zmenší) o 2 nebo se nezmění, zůstává tedy lichý. Pokud by ale bylo možné přesunout všechny mince do jednoho vrcholu, byl by tento počet sudý, což není možné.

Úloha 3.5. Nechť p_i označuje i-té prvočíslo a $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{20}$ součin těchto prvočísel. Pokud je $X < P$, hráč, který je na tahu, může vyhrát, jestliže odečte X. Kritickou pozicí je hodnota P. Hráč, který je právě na tahu, nemůže vyhrát, ať udělá cokoliv, vítězem bude druhý hráč. Uvažujeme-li pozice kP, $k = 1, 2, \ldots$. Pak:

a) Je-li na tabuli číslo typu kP, hráč na tahu nemůže protihráče zanechat v žádné pozici mP pro $m = 1, 2, \ldots, k-1$, protože by musel odečíst číslo, které má minimálně 20 prvočíselných dělitelů, to ale pravidla nepovolují. Hráč tedy nemůže přímo vyhrát.

b) Pokud je číslo napsané na tabuli mezi kP a $(k+1)P$, hráč odečte takové číslo, aby dostal protihráče do situace kP.

Vzhledem k tomu, že původní pozice $2006! = nP$, může druhý hráč vždy uplatnit variantu b) a po svém tahu zanechat protihráče v kritické pozici typu kP. Protože existuje konečný počet tahů, zajišťuje tato strategie druhému hráči vítězství.

Úloha 3.6. Každá ze tří možných operací zachovává největší společný dělitel (NSD) obou dvou čísel $(a;b)$. Protože $NSD(19;94)=1$ a $NSD(19;95)=19$, není možné, aby druhá dvojice na kartičce dívkám vyšla. Naopak $NSD(19;96)=1$. Dvojici (19; 96) lze dostat následující sérií změn, kde K znamená Katka, A Anna a H Helena. Například následujícím postupem:

K: (94; 19);

AAAA: (18; 19);

K: (19; 18);

A: (1; 18);

K: (18; 1);

H: (19; 1);

K: (1; 19);

HHHHH: (96; 19);

K: (19; 96).

Úloha 3.7. Každá ze tří možných operací zachovává největší společný dělitel (NSD) obou čísel $(x;y)$. NSD (1; 2) = 1.

a) NSD (19; 79) = 1, snad tedy lze nalézt sérii kroků, jimiž se k této dvojici lze dostat. Jak to lze, ukazuje následující příklad.

$(1;2) \rightarrow S:(2;1) \rightarrow R:(3;1) \rightarrow S:(1;3) \rightarrow R:(4;3) \rightarrow R:(7;3) \rightarrow R:(10;3) \rightarrow R:(13;3) \rightarrow R:(16;3) \rightarrow R:(19;3) \rightarrow S:(3;19) \rightarrow R:(22;19) \rightarrow R:(41;19) \rightarrow R:(60;19) \rightarrow R:(79;19) \rightarrow S:(19;79)$

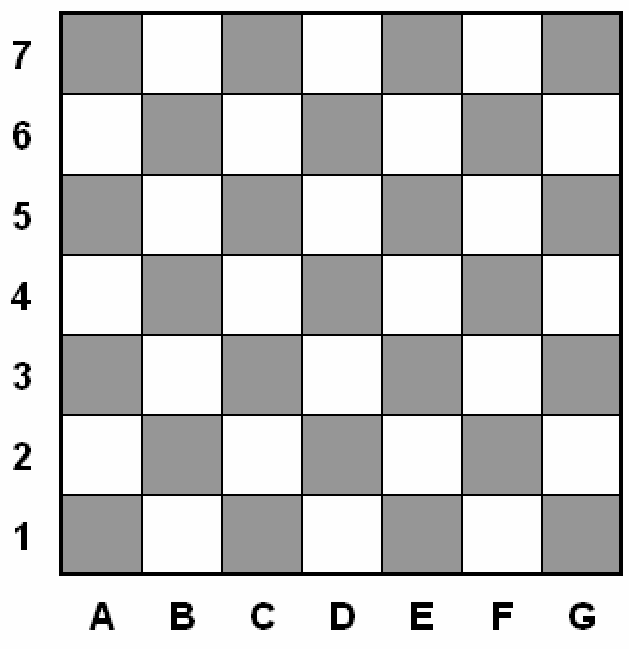
b) Vzhledem k tomu, že NSD (819; 357) = 21, nelze nalézt takovou sérii kroků, abychom se dostali k této dvojici z dvojice původní.

Úloha 3.8. Všimněme si, jak se mění rozdíl daných souřadnic při jednotlivých operacích. Počáteční rozdíl $b-a$ je 28. Pokud přičteme ke každé souřadnici 1, rozdíl zůstává zachován. Ukažme, že rozdíl zůstává násobkem čísla 7. Pokud je

$b-a$ rozdílem dvou sudých čísel a současně násobkem čísla 7, pak i rozdíl polovičních hodnot těchto čísel je dělitelný sedmi, vzhledem k nesoudělnosti čísel 2 a 7. Dále z dělitelnosti číslem 7 pro rozdíly $b-a$ a $c-b$ plyne i dělitelnost pro rozdíl $c-a$. Všechny obarvené body mají rozdíl svých souřadnic dělitelný sedmi. Tedy dělitelnost daného rozdílu číslem 7 zůstává při všech možných operací zachována. Vzhledem k tomu, že $81-49=32$ není dělitelné sedmi beze zbytku, nelze bod o souřadnicích $[49;81]$ obarvit dle daných pravidel.

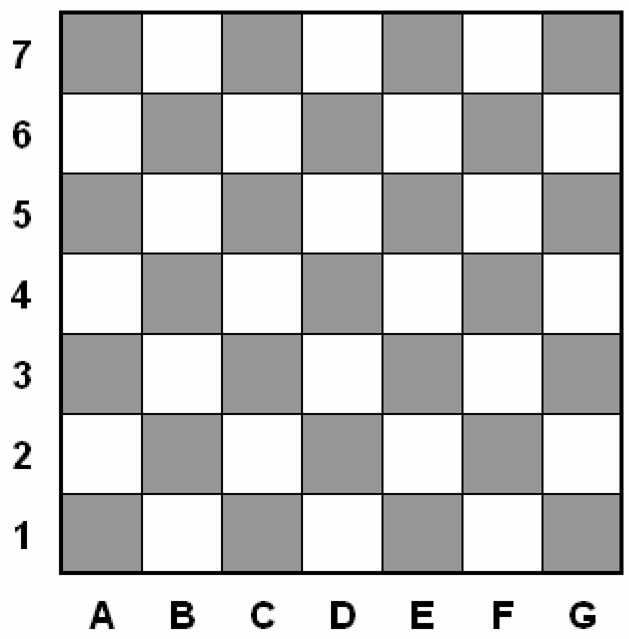
7.3 Úlohy o pokrývání šachovnice nebo pravoúhelníku

Úloha 4.1. Obarvíme šachovnici viz Obr. 7.1. Černých polí je 25 a bílých 24. Kůň při svém tahu vždy mění barvu. Vzhledem k nižšímu počtu bílých polí by při současném pohybu jezdců zůstaly na jednom bílém poli dvě figurky a zároveň by zůstalo jedno černé pole neobsazeno.



Obr. 7.1

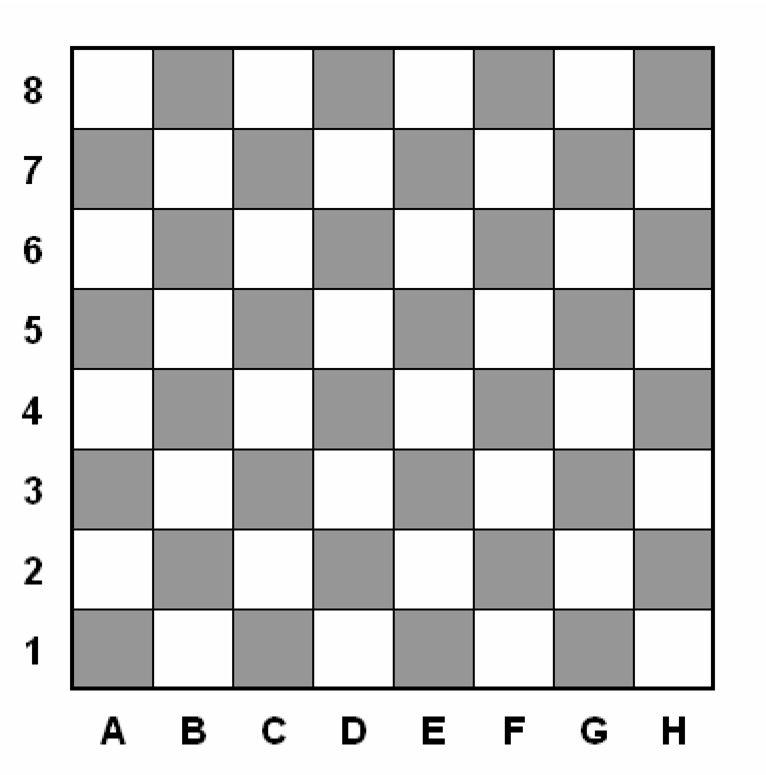
Úloha 4.2. Obarvíme šachovnici viz Obr. 7.2. Černých polí je 25 a bílých 24. Vzhledem k tomu, že jezdec při každém svém kroku změní barvu políčka, na nějž skočí, není možné, aby se v lichém počtu kroků vrátil na původní políčko.



Obr. 7.2

Úloha 4.3. Obarvíme šachovnici standardním způsobem. Vlk v každém svém tahu skočí o tři pole vpřed. Ať udělá pohyb jakýmkoliv směrem, vždy dle pravidel změní barvu pole, na nějž skočí, oproti barvě výchozího políčka. Stejně tak zajíc v každém svém tahu změní barvu pole, na němž skončí svůj pohyb oproti barvě výchozího políčka. Je tedy zřejmé, že zajíc vlkovi uteče, pokud na začátku hry stál na políčku stejné barvy jako vlk. V opačném případě jej dříve či později vlk dožene a sežere.

Úloha 4.4. Šachovnici obarvíme viz Obr. 7.3. Políčka, která jsou úhlopříčně protilehlá, mají stejnou barvu. Počet polí jedné barvy se vystřižením těchto políček sníží o 2, budeme tedy mít rozdílný počet obarvených polí. Každá kostka domina pokrývá právě jedno pole šedé barvy a jedno pole bílé barvy. Není tedy možné tímto způsobem pokrýt šachovnici kostkami domina.



Obr. 7.3

Úloha 4.5. Obarvíme tabulku stejným způsobem jako šachovnici (viz Obr. 7.3). Tímto způsobem jsme rozdělili tabulku na 1250 políček bílé barvy a 1250 políček barvy šedivé. Každá kostka T-tetramina pokryje právě tři políčka jedné barvy a jedno políčko barvy druhé. Vzhledem k tomu, že počet kostek je 625, musely by kostky pokrývat lichý počet polí barvy šedé a lichý počet polí barvy bílé. To však není možné, protože na šachovnici je sudý počet políček od každé barvy.

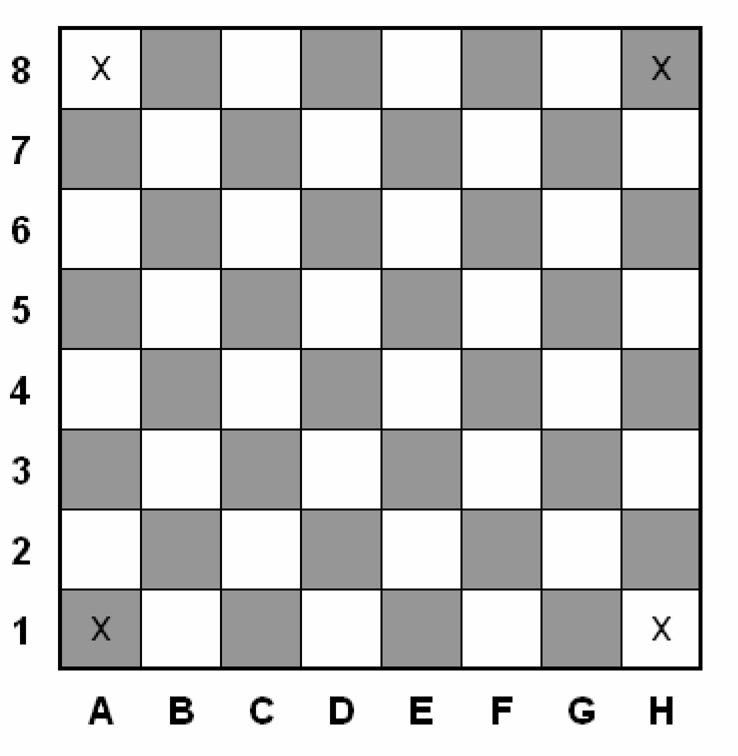
Úloha 4.6. Jednotlivá políčka označíme (viz Obr. 7.4), spočítáme počet jednotlivých polí. Zjistíme, že políček označených číslem 1 je 85 a políček označených číslem 2 je 84. Políčko, jež má zůstat nepokryto, je označeno číslem 2. Tedy počet těchto políček klesne na 83. Tetramino však vždy pokryje

2 políčka označená číslem jedna a dvě políčka označena číslem dva. Jejich počet tedy musí být stejný. Je zřejmé, že není možné pokrýt šachovnici tak, aby zůstalo neobsazené prostřední políčko.

1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1

Obr. 7.4

Úloha 4.7. Obarvíme šachovnici (viz Obr. 7.5), písmenem X jsou označena pole, která nemají být **T** -tetraminem zakryta. Snadno zjistíme, že počet políček barvy černé je 30 a počet políček bílé barvy je také 30. Počet kostek tetramina je 15. Každá kostka obsadí buď tři černá a jedno bílé pole nebo jedno černé a tři bílá pole. Je tedy vidět, že ať budeme kombinovat kostky jak chceme, vždy obsadíme lichý počet černých a lichý počet bílých políček. Těch je však po třiceti. Není možné tedy obsadit všechna pole šachovnice.



Obr. 7.5

Úloha 4.8. Šachovnici očíslujeme, jak je znázorněno na Obr. 7.6. Kostka trimina leží vždy na třech různě označených políčkách. Nyní spočítáme jednotlivé počty polí. Polí typu 1 je 21, polí typu 2 je 22 a políček typu 3 je 21. Aby bylo možné šachovnici pokrýt, musí být počet polí jednotlivých typů stejný. Je tedy vidět, že pokud odebereme jedno z políček typu 2, je možné šachovnici kostkami tetramina pokrýt. Vzhledem k zadání to tedy bude buď levý dolní roh nebo pravý horní roh.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Obr. 7.6

Úloha 4.9. značíme buňky tabulky stejným způsobem jako na Obr. 7.7 a Obr. 7.8 (druhá tabulka vznikla otočením první o 90^0) . V obou případech je buněk s číslem „1“ 17, zatímco buněk s číslem „2“ a „3“ 16. Vzhledem k tomu, že každý kámen zakrývá tři různě označená pole, musí být prázdné pole označeno číslem „1“. Zároveň musí platit, že pole jsou symetrická vzhledem k otočení o 90^0. Tedy v obou tabulkách jsou hledané buňky označeny číslem „1“. Takovýchto buněk je dohromady devět, na obrázku označeny šedě, jedna ve středu, čtyři na středu stran a čtyři v rozích. Pro každou z těchto buněk je možné nalézt takové rozložení kamenů v tabulce, aby daná buňka zůstala prázdná.

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

Obr. 7.7

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1

Obr. 7.8

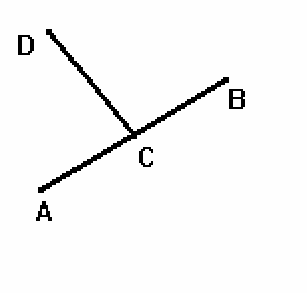
7.4 Poloinvarianty a metoda nekonečného sestupu

Úloha 5.1. Nejprve spojme libovolné dvojice bodů tak, aby nedošlo k situaci viz Obr. 7.9. Označme S jako součet délek všech získaných úseček. Pokud úsečky nemají společný bod, máme úkol splněný. Naopak pokud některé z úseček mají společný bod, např. úsečky AB a CD mají společný bod S viz Obr. 7.10. (není to krajní bod, protože tyto body jsou různé), nahradíme úsečky AB a CD úsečkami AC a BD. Protože dané body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, bude dle trojúhelníkové nerovnosti součet délek úseček AC a BD menší než součet AB a CD. Součet délek všech 1004 úseček se tedy zmenší.

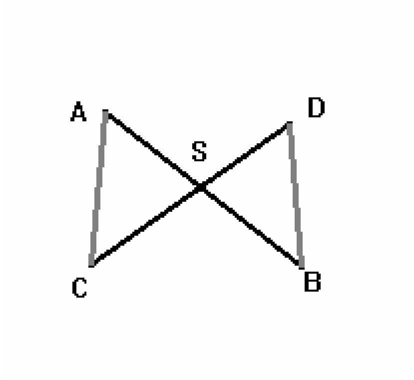
$|AB|+|AS|\rangle|AC|$ $(\triangle CSA)$

$|SD|+|SB|\rangle|BD|$ $(\triangle SBD)$

Pokud nastane situace, kdy se protíná některá z nových úseček s některou další úsečkou, postup opakujeme pro tuto dvojici úseček. Protože existuje jen konečně mnoho možností jak propojit 2008 bodů, je také jen konečně mnoho hodnot S. Proto není možné S zmenšovat donekonečna. Tedy v konečném počtu kroků nastane situace, kdy budou všechny úsečky disjunktní. Proto lze sestrojit 1004 disjunktních úseček z 2008 bodů.



Obr. 7.9



Obr. 7.10

7.5 Další úlohy

Úloha 6.1. Vnitřkem čtverce prochází 10 přímek, které by měly přetnout 20 dlaždic. Celkový počet dlaždic na náměstí je však jen 18. Proto tato úloha nemá řešení.

Úloha 6.2. Označme řádky čísly od jedné do osmi zdola nahoru a sloupce od jedné do osmi zleva doprava. Vítězem je ten, kdo přesune krále na pozici $\{8;8\}$, protivníkovi již pravidla neumožňují žádný další tah. Další kritické pozice jsou $\{6;8\}$, $\{8;6\}$ a $\{6;6\}$, z této pozice je možný pouze takový krok, který umožní protivníkovi provést vítězný tah. Všimněme si, že obě souřadnice pozice krále na šachovnici jsou sudé. Pokud se tedy Tom bude držet strategie, podle které bude posunovat krále na pole se sudými hodnotami souřadnic, bude vítězem.

Úloha 6.3. Kritická pozice, kdy již není možné vyhrát, je pokud bude v obou sáčcích po jednom bonbónu. Tom může vyhrát, pokud se bude držet strategie ponechávající v obou sáčcích lichý počet bonbónů. Po takovém tahu musí Jerry zanechat v jednom sáčku sudý počet bonbónů. Ten zaručuje Tomovi možnost tahu. Protože hra musí jednou skončit, bude vítězem Tom.

8 ZÁVĚR

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s využitím invariantů při řešení úloh z různých oblastí elementární matematiky. Setřídit jednotlivé úlohy do tématických celků dle způsobu řešení a v jednotlivých kategorií dle obtížnosti.

Tato práce bude sloužit jako studijní materiál pro matematicky nadané žáky středních škol, resp. jako metodická příručka pro učitele.

9 POUŽITÁ LITERATURA

[1] Milan Hejný a Ľudovít Niepel: *Šestnásť matematických príbehov,* Bratislava; Mladé letá, 1983

[2] Emil Calda: *Matematika – fyzika – informatiky, ročník 6, číslo 3*, Praha; Prometheus, 1996/1997

[3] Radek Horenský: *Matematika – fyzika – informatiky, ročník 17 číslo 2*, Praha; Prometheus, 2007/2008

[4] Radek Horenský: *Matematika – fyzika – informatiky, ročník 18 číslo 10*, Praha; Prometheus, 2008/2009

[5] Makrides, G. a kol.: *Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách,* MATH.EU Projekt, Praha 2006

[6] Engel, A.: *Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag*, New York, Inc. 1998