JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

ÚLOHY O POHYBU VE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATICE

Vypracoval:	Renata DOSKOČILOVÁ
Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Datum odevzdání:	28. dubna 2010

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích 23. 4. 2010 ………………

Ráda bych poděkovala vedoucímu diplomové práce RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za metodické vedení, pomoc při vyhledávání literárních pramenů, věcné a cenné připomínky, rady a náměty, kterých se mi od něho dostalo v průběhu psaní této diplomové práce.

Anotace:

Název: Úlohy o pohybu ve středoškolské matematice

Vypracoval: Renata Doskočilová

Vedoucí: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Didaktika matematiky, metody řešení úloh, rovnoměrný pohyb, slovní úlohy.

Obsahem této práce je průzkum postupů a strategií při řešení slovních úloh o pohybu u studentů středních škol (resp. gymnázií) a analýza studentských řešení. Na tuto část navazuje sbírka úloh k procvičení dané problematiky. Sbírka je rozdělená do několika částí, z nichž každá se zaměřuje na určitý typ úloh.

Annotation:

Heading: Problems about motion in high school Mathematics

Author: Renata Doskočilová

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Key words: Mathematics education, problem solving strategies, motion with a uniform velocity, problems.

This work contains reasearch of the procedures and strategies used for mathematical problems of motion by high school students, as well as analysis of student ´s problem solving. This part if followed by a compilation of problems in order to practice solving of the motion problems. This compilation is divided into several parts, while each of the parts focuses on different types of problems.

Obsah:

1. Úvod

Cílem této práce je analýza postupů a strategií při řešení slovních úloh o pohybu u studentů střeních škol (resp. gymnázií). Slovní úlohy o pohybu bývají často na středních školách (hlavně gymnáziích) opomíjeny. Při získávání podkladů k mé diplomové práci se mi zdálo, že z novějších učebnic a sbírek matematiky pro střední školy se postupně slovní úlohy o pohybu vytrácejí. Což je podle mého názoru škoda, jelikož slovní úlohy o pohybu u studentů rozvíjí schopnost výběru důležitých informací z textu i jeho správnou interpretaci. Další nespornou výhodou je i na první pohled zjevné praktické využití této oblasti matematiky.

Celá práce je rozdělena do dvou hlavních částí. První část diplomové práce obsahuje test zaměřený na průzkum, jak studenti umí řešit slovní úlohy o pohybu, včetně rozboru postupů a strategií studentů při jeho řešení. Zároveň jsem ke každému příkladu vypracovala vlastní autorské řešení. Test jsem dala vypracovat studentům celkem čtyř tříd gymnázií.

Druhou část diplomové práce stvoří sbírka příkladů rozdělená na několik částí. Jednotlivé podkapitoly jsou zaměřeny na procvičení různých typů slovních úloh o pohybu. Uvádím zde příklady s postupem řešení i úlohy k procvičení pouze s výsledky. Některé příklady jsem vymyslela, některé jsou převzaté z publikací [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15].

2. Průzkum schopností středoškoláků řešit úlohy o pohybu

Průzkum postupů a strategií středoškoláků při řešení slovních úloh o pohybu jsem prováděla u studentů prvních ročníků čtyřletých gymnázií a kvinty osmiletého gymnázia. Průzkum byl prováděn na Gymnáziu Pelhřimov, Jirsíkova 244, Pelhřimov (1.A, 1.B, V.) a Gymnáziu Jana Valeriána Jirsíka, Fráni Šrámka 24, České Budějovice (1.B). Průzkumu se zúčastnilo celkem 108 studentů. Test, jenž studenti řešili, obsahoval 4 příklady. Studenti řešili test anonymně.

2.1 Zadání testu

Př. 1. Ze dvou míst vzdálených od sebe 315 km vyjeli proti sobě současně osobní auto a cyklista. Osobní auto ujede za hodinu 90 km, cyklista 15 km. Kdy a kde se potkají?

Př. 2. Osobní vlak projede kolem sloupu za 6 sekund. Jakou dobu se míjí osobní vlak s rychlíkem, jehož rychlost je 1,5krát větší, je-li délka osobního vlaku rovna 90 m a délka rychlíku 120 m?

Př. 3. Z dědiny se vydali do města dva mladí lidé, jeden na bicyklu a druhý na motorce. Jeden z nich se jmenoval Jožka, druhý Petr. Během jízdy se ukázalo, že kdyby Petr byl v daném čase ujel třikrát větší vzdálenost, měl by nyní před sebou už jen polovinu té cesty, kterou má ještě před sebou, a kdyby Jožka ujel za ten čas polovinu vzdálenosti, kterou ujel, měl by nyní před sebou ještě třikrát delší cestu, než má nyní. Řekněte, který z nich jel na bicyklu a který na motorce.

Př. 4. Tři běžci závodili v běhu na sto metrů. Běžec *A* zvítězil před běžcem *B* o jeden metr, běžec *B* zvítězil před běžcem *C* také o jeden metr. O kolik metrů před *C* doběhl do cíle běžec *A*?

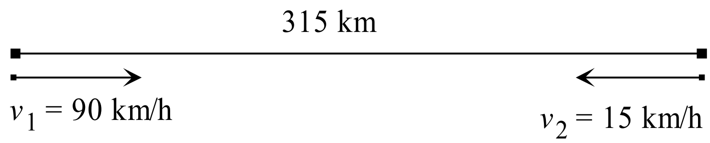
2.2 Instrukce k zadání

Studenti, test, který vám předkládám, je zaměřen na slovní úlohy o pohybu. Pozorně si pročtěte text a pokuste se ho správně interpretovat. Snažte se vypočítat co nejvíce příkladů. Příklady můžete počítat v libovolném pořadí. Pište celý postup, nevynechávejte jednotlivé kroky. Přeji vám hodně úspěchu při řešení testu.

2.3 Autorské řešení testu – př. 1

Text úlohy. Ze dvou míst vzdálených od sebe 315 km vyjeli proti sobě současně osobní auto a cyklista. Osobní auto ujede za hodinu 90 km, cyklista 15 km. Kdy a kde se potkají?

Řešení.



Obr. 2.3.1. Autorské řešení testu - př. 1

Při výuce by se studentům měly ukázat minimálně dva následující způsoby řešení.

1. způsob řešení (sčítání vzdáleností). Nejprve si vyjádříme, jakou vzdálenost ujede auto a jakou cyklista. Tuto vzdálenost s vyjádříme pomocí vztahu $s = v \cdot t$ (proměnné budeme označovat shodně s obrázkem 2.3.1)

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 \quad a \quad s_2 = v_2 \cdot t_2 \tag{1}$$

Nyní by si studenti měli uvědomit, že čas t je v obou případech stejný, tedy platí $t = t_1 = t_2$. Dalším důležitým poznatkem, který by studenti měli vědět je, že pokud sečteme vzdálenosti s_1, kterou ujede osobní auto, a s_2, kterou ujede cyklista, tak dostaneme celou trasu *s* (tedy $s = s_1 + s_2$). Nyní použijeme tyto informace. Nejprve dosadíme do (1) $t = t_1 = t_2$, poté dosadíme získané rovnice do vzorce $s = s_1 + s_2$.

$s_1 = v_1 \cdot t$

$s_2 = v_2 \cdot t$

$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$, neboli $s = (v_1 + v_2) \cdot t$.

V tuto chvíli již pouze dosadíme hodnoty ze zadání a dopočítáme místo a čas setkání.

$315 = (90 + 15) \cdot t$

$\underline{t = 3 \text{ hod}}$

$s_1 = v_1 \cdot t$

$s_1 = 90 \cdot 3$

$\underline{s_1 = 270 \text{ km}}$

$s_2 = v_2 \cdot t$

$s_2 = 15 \cdot 3$

$\underline{s_2 = 45 \text{ km}}$

Pro kontrolu bychom mohli ověřit, zda opravdu $s_1 + s_2 = s$.

$s_1 + s_2 = s$

$270 + 45 = 305$

$305 = 305$

Můžeme tedy usuzovat, že výsledek je správný.

Závěr. Osobní auto se s cyklistou potkají za 3 hodiny v místě 270 kilometrů vzdáleného od místa *A* (respektive místa 45 kilometrů vzdáleného od *B*).

2. způsob řešení (relativní rychlost). Druhý způsob řešení, je řešení pomocí tzv. relativní rychlosti. Relativní rychlost, je rychlost, kterou se přibližuje (resp. vzdaluje) jeden objekt vzhledem k druhému. V našem případě platí $v = v_1 + v_2$. Tento vztah dosadíme do známého vzorce $s = v \cdot t$ a získáme $s = (v_1 + v_2) \cdot t$. Dále budeme pokračovat jako v předchozím řešení.

Závěr. Osobní auto se s cyklistou potkají za 3 hodiny v místě 270 kilometrů vzdáleného od místa *A* (respektive místa 45 kilometrů vzdáleného od *B*).

2. 4 Vybraná řešení studentů – př. 1

Ukázka 1.

1) os. auto   cyklista

$t_1 = x\,h \quad = t_2 = x\,h$

$v_1 = 90\,km/h \quad v_2 = 15\,km/h$

$s_1 = 90x \quad s_2 = 15x$

$s = 315\,km$

$s = s_1 + s_2$

$315 = 90x + 15x$

$315 = 105x \mid :105$

$\underline{3 = x}$

$t_1 = t_2 = 3h$

$s_1 = 90 \cdot 3 = 270\,km$

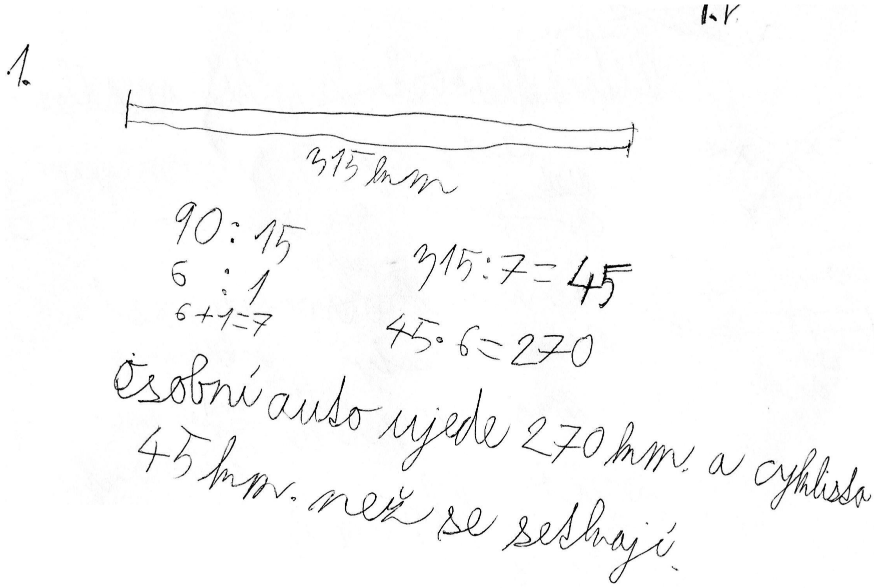
$s_2 = 15 \cdot 3 = 45\,km$

Osobní auto se s cyklistou potká za 3 hodiny.
Setkají se spolu až auto ujede 270 km a cyklista 45 km.

Při řešení příkladu 1 si tento student nejprve vypočítal dobu, za kterou se osobní auto a cyklista setkají. Tuto dobu vypočítal pomocí vztahu $s = v \cdot t$. Student použil pouze jiné označení. Čas, většinou označovaný jako *t*, označil písmenem *x*. Dále student využil faktu, že pokud chceme, aby se osobní auto a cyklista setkali, musejí dohromady ujet celou trasu. V ukázce je tato skutečnost napsána jako $s = s_1 + s_2$, kde s_1 je vzdálenost, kterou ujede osobní auto, a s_2 je vzdálenost, kterou urazí cyklista, než se setkají. Tyto vzdálenosti vypočítal student opět pomocí vzorce $s = v \cdot x$. Jak vidíme, dosazením do předchozího vztahu získal student dobu *x*, která nám říká, za jak dlouho se osobní auto a cyklista setkají. Nakonec student vypočítal, dosazením zpět do předchozího vzorce, vzdálenost, kterou osobní auto a cyklista ujeli, nežli se setkali.

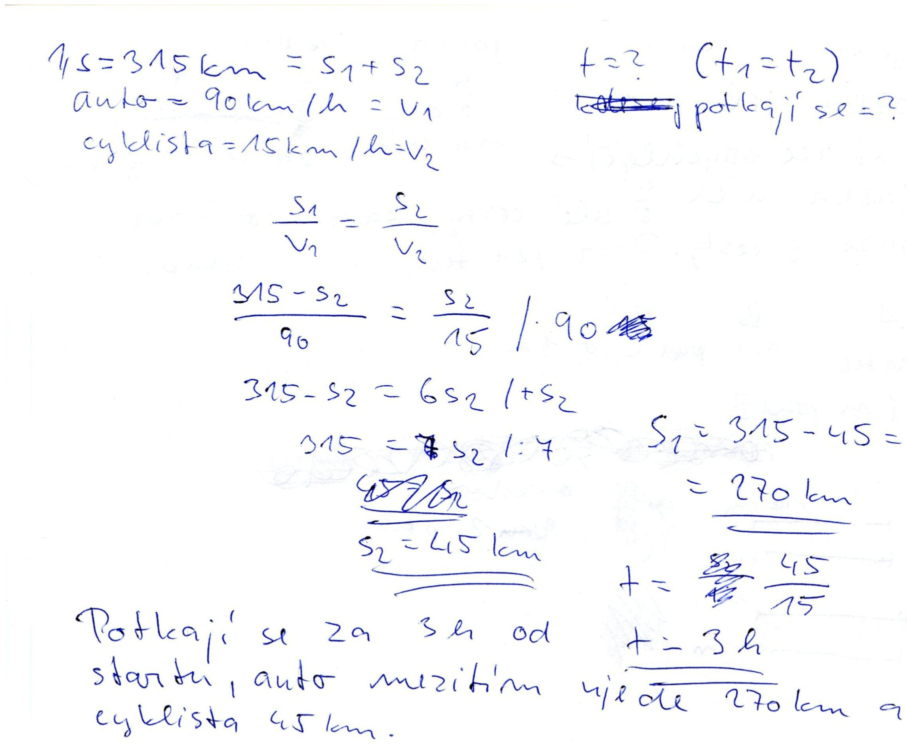
Dále bych chtěla pochválit kulturu zápisu. Zápis je přehledný, jednotlivé části zápisu jsou promyšleně rozmístěné. Celkově má toto řešení pěknou grafickou úpravu. Podle řešení můžeme usoudit, že tento student měl již nejspíše vytvořenou metodu, jak tento typ příkladů řešit.

Ukázka 2.



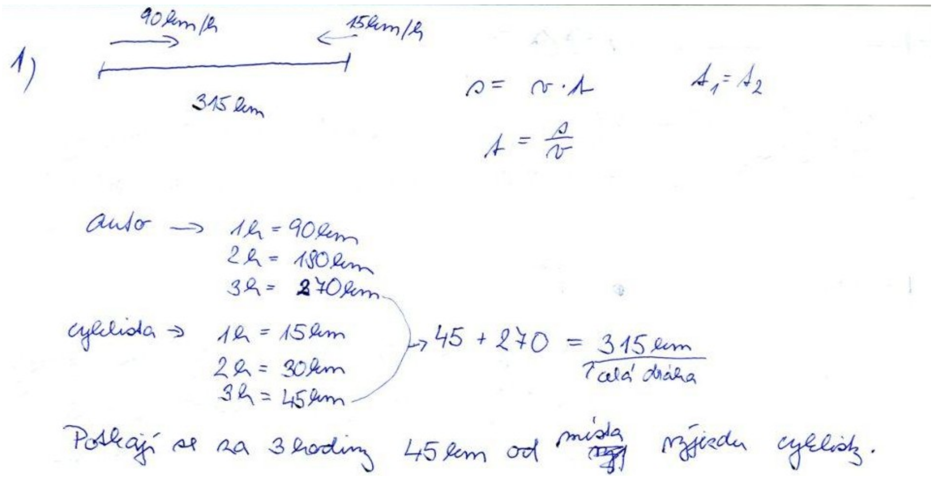
Student znal dobře učivo o rozdělení celku v daném poměru a věděl, nebo usoudil, že dráhy vozidel musí být rozděleny v poměru rychlostí, a to také správně provedl. Je možné, že neznal vztah $s = v \cdot t$ a proto neprovedl výpočet času, nebo další možností vzniku této chyby může být nepozornost studenta.

Ukázka 3.



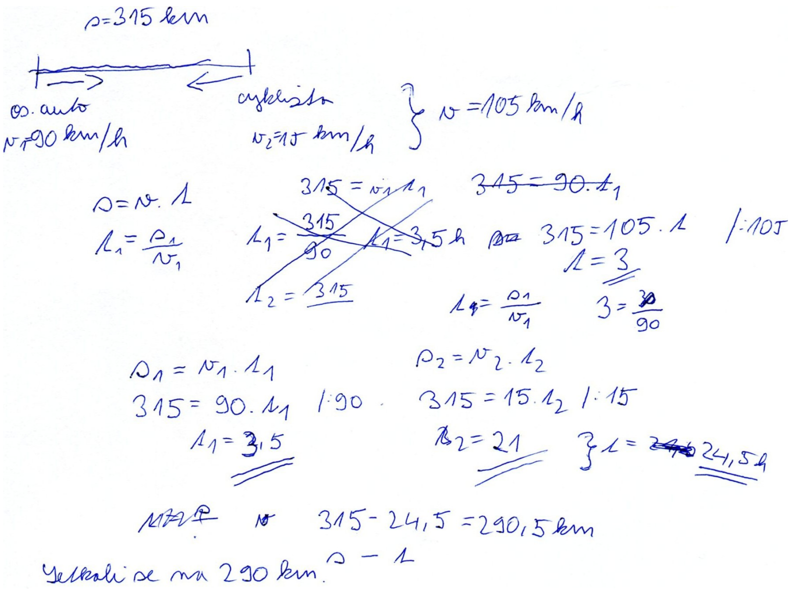
Autor ukázky řešení tohoto příkladu využil toho, že doby pohybu obou vozidel t_1 a t_2 se musí rovnat. Oba časy si vyjádřil pomocí vztahu $t = \frac{s}{v}$, získal rovnost $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$, kterou doplnil poznatkem $s_1 = 315 - s_2$. Vycházel fakticky ze stejného vztahu, jako v ukázce 1, jen postup byl trochu jiný.

Ukázka 4.



Na tomto řešení je zajímavé, že student řešil tento příklad experimentálně. Přestože vycházel ze správných vztahů ($s = v \cdot t$, $t_1 = t_2$ a $s_1 + s_2 = s$), rozhodl se zkoušet, který součet dá správný výsledek.

Ukázka 5.



Studentovy poznatky jsou formální. Naučil se nazpaměť vzoreček $s = v \cdot t$ a aniž by logicky uvažoval, uplatnil tento vztah na čísla v zadání úlohy. Pamatuje si, že by se mělo něco sečíst, tak sečte časy, pak tento součet časů odčítá od celkové dráhy.

Tabulka 1. Hodnocení př. 1.

	1. A (Pe)	**1. B (Pe)**	**V. (Pe)**	**1. B (Č.B.)**	**Celkově**
Správně	66,7%	51,9%	63,0%	63,0%	61,2%
Bez odpovědi (s částečnou či chybnou odpovědí)	11,1%	3,7%	3,7%	3,7%	5,6%
Bez udání místa setkání (se špatným udáním místa či času setkání)	7,4%	0,0%	0,0%	0,0%	1,9%
Řešení pomocí experimentování	0,0%	14,8%	14,8%	14,8%	11,1%
Zcela špatně	14,8%	29,6%	18,5%	18,5%	20,4%

Tento příklad je typická slovní úloha na určení místa a času setkání, kdy studenti měli zadány všechny potřebné informace. Proto jsem předpokládala, že příklad vyřeší největší procento respondentů, což se opravdu stalo. I když je pravda, že jsem očekávala úspěšnost ještě o něco vyšší.

Je to zcela klasický příklad typu „kdy a kde se setkají“. Tento typ příkladů je zřejmě nejčastěji procvičován a tak většině studentů nedělal větší problémy. Jak je vidět i z ukázek, příklad bylo možné řešit různými způsoby. Snažila jsem se zde ukázat, jak ten nejčastější správný způsob řešení (viz ukázka 1), tak také méně časté správné řešení (viz ukázka 2 a 3). V ukázkách je také experimentální řešení (ukázka 4) i špatné řešení (ukázka 5).

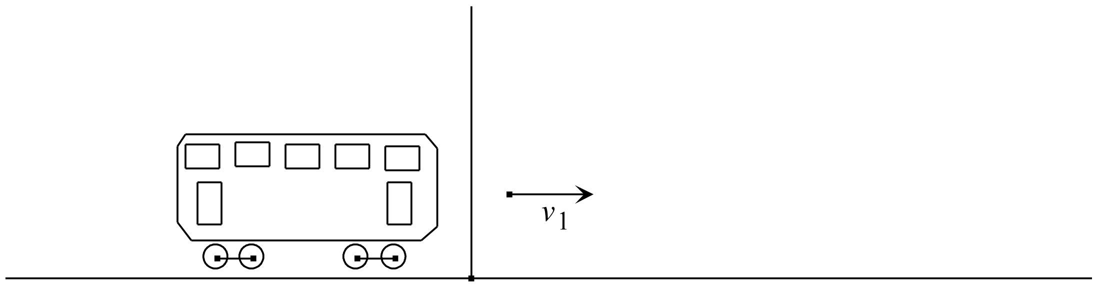
Chyba, která se objevovala poměrně často, byla pouze neúplná odpověď, kdy student měl vše spočítáno správně, ale zapomněl například uvést místo setkání, popřípadě dobu, za kterou se auto a cyklista setkali. Eventuálně odpověď zcela chyběla.

2.5 Autorské řešení testu - př. 2

Text úlohy. Osobní vlak projede kolem sloupu za 6 sekund. Jakou dobu se míjí osobní vlak s rychlíkem, jehož rychlost je 1,5krát větší, je-li délka osobního vlaku rovna 90 m a délka rychlíku 120 m?

Řešení. Při řešení tohoto příkladu si nejprve student musí představit dvě situace, které mohou nastat (a v reálném životě také nastávají). Stejně jako v př. 1. můžeme každou z oněch dvou situací řešit dvěma základními způsoby (pomocí sčítání vzdáleností nebo s využitím relativní rychlosti).

Nejprve si uvědomíme, že z údajů v první části textu úlohy lze určit rychlosti vlaků. Víme, že osobní vlak projede kolem sloupu (pevného bodu) za 6 sekund.

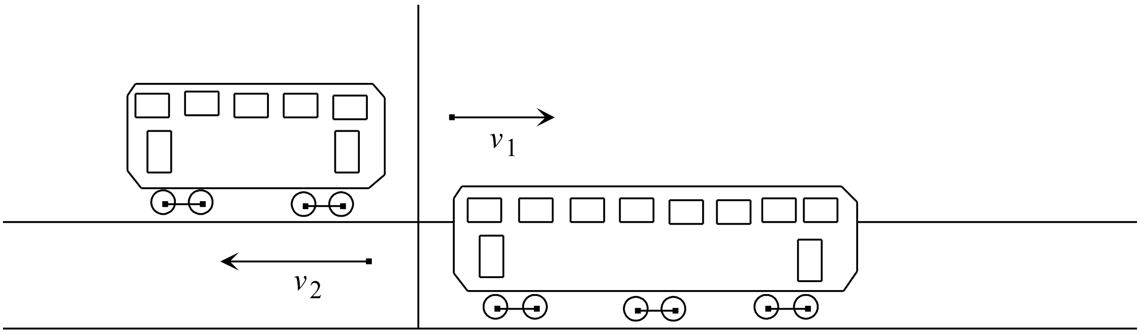


Obr. 2.5.1. Autorské řešení testu - př. 2

Pomocí vzorce $v_1 = \frac{s_1}{t}$, kde v_1 je rychlost osobního vlaku, s_1 je délka osobního vlaku a t je čas, který potřebuje osobní vlak na to, aby projel kolem sloupu. Tedy $v_1 = \frac{90}{6}$ km/h, což po zkrácení zlomku dává $v_1 = 15$ km/h. Rychlost v_2 vypočítáme jako $v_2 = v_1 \cdot 1{,}5$. Po dosazení za v_1 dostáváme $v_2 = 15 \cdot 1{,}5$ km/h, neboli $v_2 = 22{,}5$ km/h. Nyní se podíváme na ony dvě situace, které mohou nastat.

1. situace

První situaci vidíme na obrázku 2.5.2. Je to situace, kdy vlaky jedou proti sobě. Pro tuto situaci ukáži pouze řešení pomocí výpočtu relativní rychlosti, řešení pomocí sčítání vzdáleností je analogické s př. 1.



Obr. 2.5.2. Autorské řešení testu - př. 2

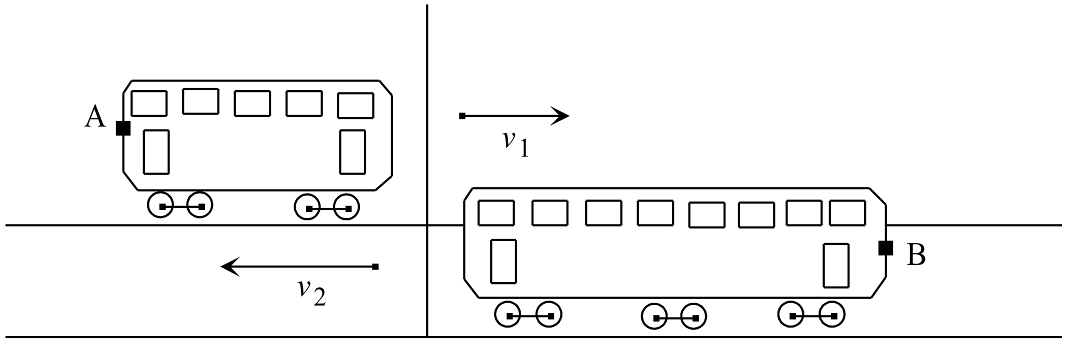
Nyní si vypočítáme relativní rychlost (tedy rychlost, kterou se míjí osobní vlak s rychlíkem).

$v = v_1 + v_2$

$v = 15 + 22{,}5$

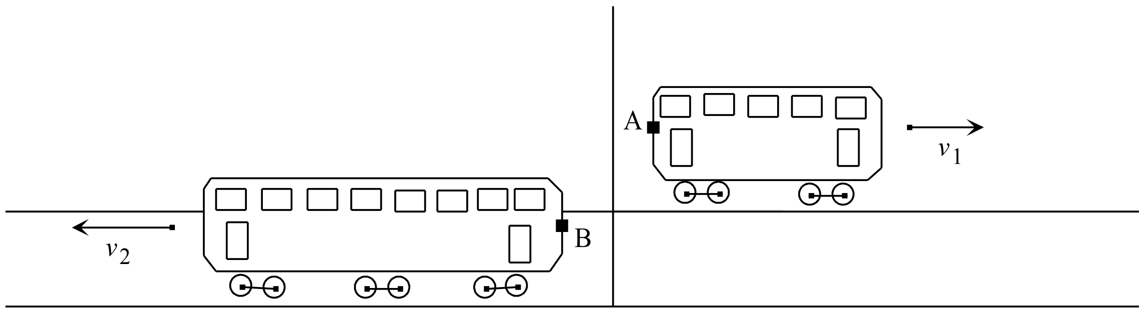
$\underline{v = 37{,}5 \text{ km/h}}$

Dále si musíme vypočítat vzdálenost s, kterou během míjení ujedou vlaky. Tato vzdálenost je dána součtem délek vlaků. Pro ty, kteří to hned nevidí, může vytvořit správnou představu tak, že místo vlaků použijeme pouze dva body, které představují konce vlaků. Tyto body se budou přibližovat k sobě, dokud se nesetkají.



Obr. 2.5.3. Autorské řešení testu - př. 2

V okamžiku, kdy se tyto dva body setkají, přestávají se vlaky míjet (jak vidíme na následujícím obrázku). Tedy $s = 90 + 120$, neboli $s = 210$ m.



Obr. 2.5.4. Autorské řešení testu - př. 2

Nyní zbývá dopočítat, jak dlouho se budou vlaky míjet. Použijeme vztah $s = v \cdot t$.

$$t = \frac{s}{v}$$

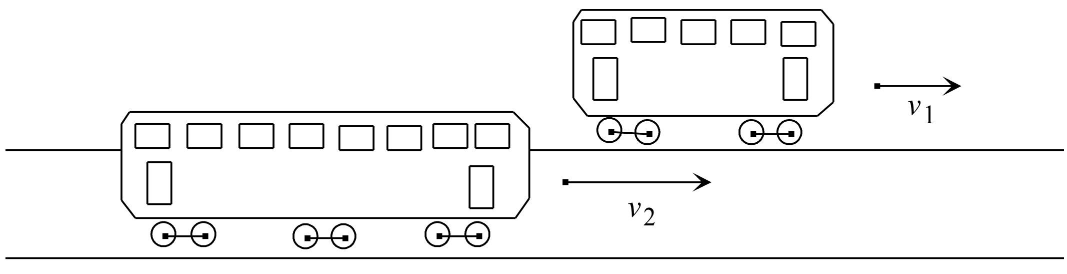
$$t = \frac{210}{37{,}5}$$

$$\underline{t = 5{,}6 \text{ s}}$$

Vlaky se budou míjet 5,6 sekund.

2. situace

Druhý případ nastane tehdy, když vlaky pojedou stejným směrem (rychlík bude předjíždět osobní vlak). Tuto situaci zde vyřeším pomocí sčítání drah.



Obr. 2.5.5. Autorské řešení testu - př. 2

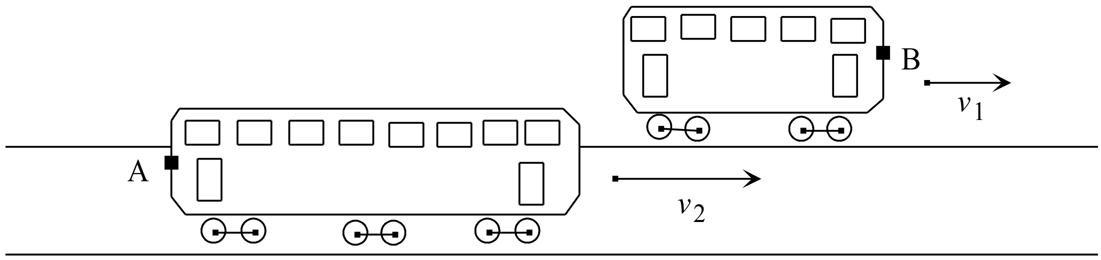
Vyjádříme si, jakou dráhu s_1 při míjení ujede osobní vlak a jakou dráhu s_2 ujede rychlík.

$s_1 = v_1 \cdot t$

$s_2 = v_2 \cdot t$

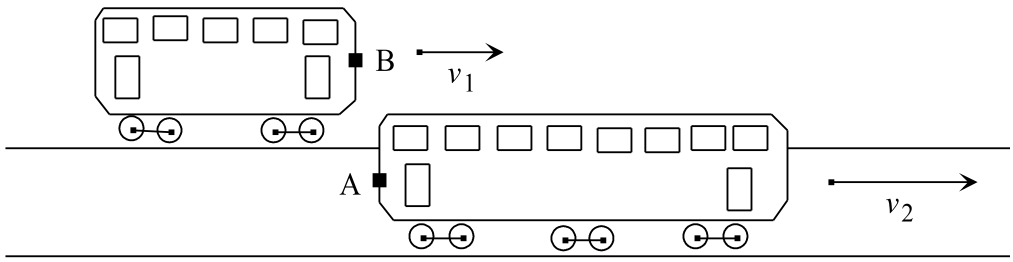
Měli bychom si uvědomit, že vždy když rychlík ujede určitou vzdálenost, tak i osobní vlak ujede určitou vzdálenost. Vzdálenost, kterou ujede osobní vlak, bude však menší, jelikož osobní vlak jede pomaleji. Díky tomu, nastává situace, kdy rychlík míjí (předjíždí) osobní vlak. Tedy celková dráha s, kterou ujedou vlaky, nežli se minou se vypočítá jako $s = s_1 - s_2$. Po dosazení za s_1 a s_2 dostaneme $s = v_1 \cdot t - v_2 \cdot t,$ neboli $s = (v_1 - v_2) \cdot t.$ Dráha s je rovna součtu délek vlaků tedy $s = 90 + 120,$ což je rovno 210 metrů.

Pro větší názornost můžeme, stejně jako u předešlé situace, sledovat pouze dva body (vzdálenější konce vlaků). Jedná se v podstatě o situaci, kdy bod A pohybující se rychlostí v_2 dohání bod B, který se pohybuje rychlostí v_1.



Obr. 2.5.6. Autorské řešení testu - př. 2

Rychlík dokončí předjíždění v okamžiku, kdy se bod *A* ocitne vedle bodu *B* (viz následující obrázek).



Obr. 2.5.7. Autorké řešení testu - př. 2

Nyní, když známe rychlost osobního vlaku v_1, rychlost rychlíku v_2 i dráhu s, můžeme dopočítat dobu t, která nám říká, jak dlouho bude rychlík míjet osobní vlak.

$s = (v_1 - v_2) \cdot t$

$210 = 7{,}5 \cdot t$

$\underline{t = 28\text{ s}}$

Osobní vlak se bude míjet s rychlíkem 28 sekund.

Závěr. Celá odpověď k př. 2 by měla znít: Osobní vlak a rychlík se budou míjet buď 5,6 sekund, pokud pojedou vlaky proti sobě, nebo 28 sekund v případě, že vlaky pojedou stejným směrem.

2.6 Vybraná řešení studentů př. 2

Ukázka 1.

2)

$t_1 = 6\,s$
$t_2 =$
$v_1 = x$
$v_2 = \frac{3}{2}x$
$s_1 = 90\,m$
$s_2 = 120\,m$

$t_1 = \frac{s_1}{v_1}$
$v_1 = \frac{s_1}{t_1}$
$v_1 = \frac{90}{6}$
$v_1 = 15\,m/s$

$t_2 = \frac{s_2}{v_2}$
$t_2 = \frac{120}{22{,}5}$ $\quad \frac{\frac{120}{1}}{\frac{45}{2}} = \frac{240}{45} = \frac{16}{3}$
$t_2 = \cancel{5{,}3}\ \frac{16}{3}\,s = 5{,}3\,s$

$v_1 + v_2 = 15 + 22{,}5 = 37{,}5\,m/s$

$15 \cdot 1{,}5 = 22{,}5$

$s = \cancel{120\,m}\ 210\,m$
$v = 37{,}5\,m/s$
$t = ?$

$t = \frac{s}{v}$
$t = \frac{210}{37{,}5}$
$t = 5{,}6\,s$

Vlaky se míjí ~~a~~ 5,6 s.

Student řešil příklad tak, že si nejprve určil rychlost osobního vlaku. Rychlost si vypočítal z informace, že osobní vlak dlouhý 90 metrů projede okolo sloupu (jednoho bodu) za 6 sekund, pomocí vzorce $v_1 = \frac{s}{t}$. Poté si student z rychlosti v_1 vyjádřil rychlost rychlíku v_2 $\left(v_2 = \frac{3}{2}v_1\right)$. Když znal obě rychlosti, vypočítal si relativní rychlost, kterou se budou vlaky míjet ($v = v_1 + v_2$). Nakonec spočítal celkovou délku trasy, jakou musejí při míjení vlaky ujet. Získal ji jako součet délek osobního vlaku a rychlíku. Na závěr student vypočítal dobu, po kterou se budou vlaky míjet pomocí vzorce $t = \frac{s}{v}$.

Toto řešení není kompletní, chybí vyřešení druhé z možných situací. Student bral v úvahu jen ten případ, kdy osobní vlak a rychlík jedou proti sobě, nikoliv ale situaci, kdy rychlík bude předjíždět osobní vlak.

Ukázka 2.

2, os. vlak .... kolem sloupu 6 s
rychlík .... 1,5 krát vyšší rychlost než os. vlak
rychlík ... 120 m
os. vlak ... 90 m

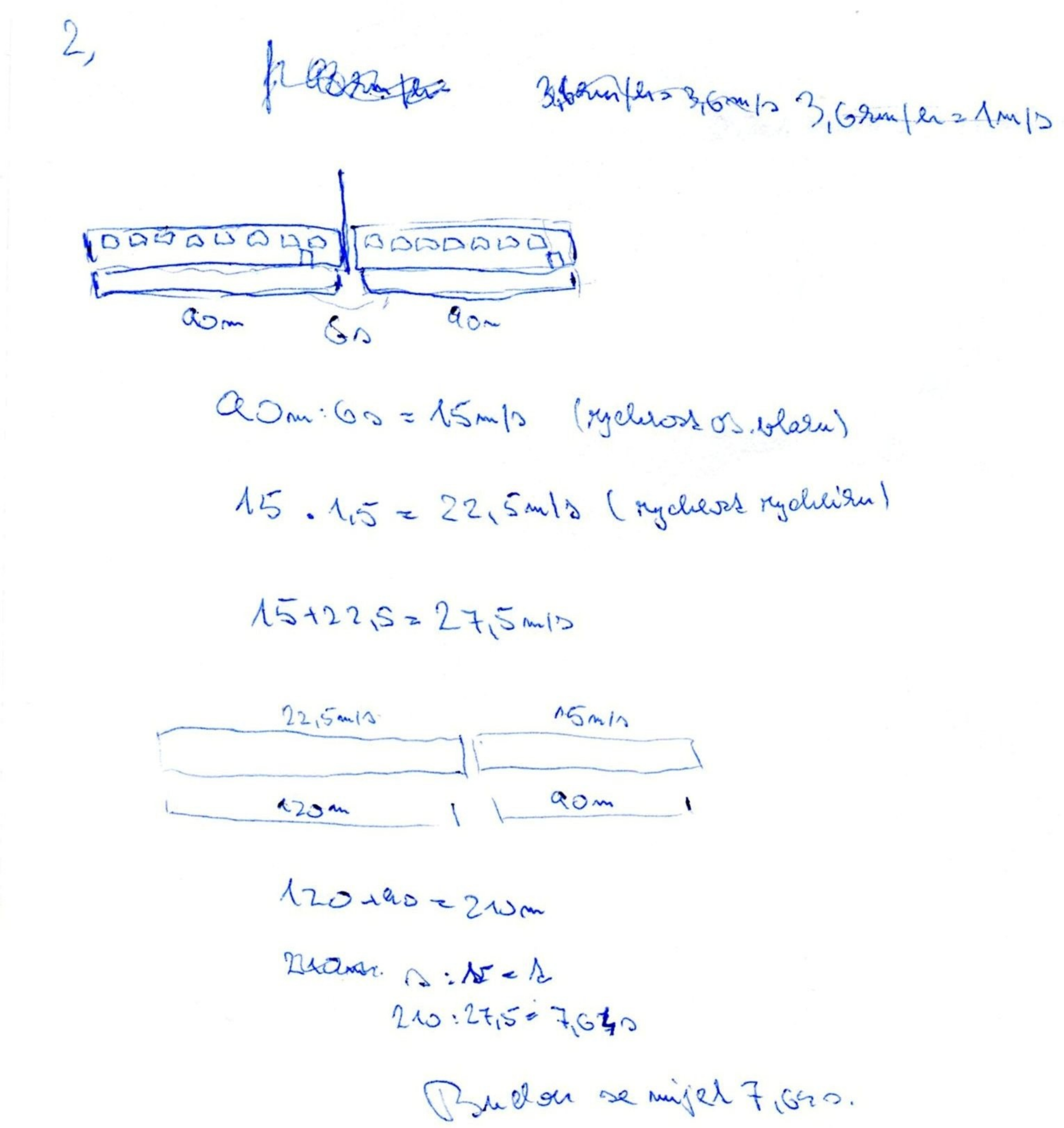
~~90/6~~ 90 m / 6 s - 90 : 6 = 15 m/s   22,5 - 15 = 7,5
15 . 1,5 = 22,5 m/s   (120+90) : 7,5 = 28

~~Os. vlak~~ ~~Os. vlak se~~ Rychlík se míjí s os. vlakem 28 s.

Na rozdíl od předchozího řešení se tento student zabýval jen opačným případem, kdy se vlaky předjíždějí. Kromě tohoto rozdílu je postup v podstatě shodný s předchozím řešením. Nejprve si určil rychlost, jakou se pohybuje osobní vlak a z té si pak vypočítal rychlost, jakou se pohybuje rychlík. Z těchto rychlostí si student určil relativní rychlost, kterou ovšem v tomto případě získal rozdílem rychlostí osobního vlaku a rychlíku (tedy $v = v_1 - v_2$). Když měl student vypočítanou relativní rychlost a znal délku trasy, kterou mají vlaky ujet během míjení (tu si student určil shodně s předchozím studentem, tedy jako součet délek vlaků ($s = s_1 + s_2$)), určil pomocí vzorce $t = \frac{s}{v}$ dobu, po kterou se budou osobní vlak a rychlík míjet.

Stejně jako předchozí student i tento vyřešil jen část úlohy. Ani v této ukázce řešení nechybí odpověď.

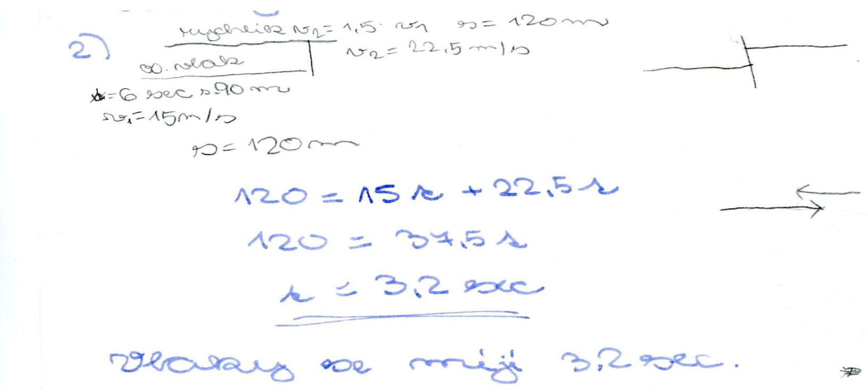
Ukázka 3.



Tento student řešil situaci, kdy osobní vlak a rychlík jedou proti sobě. Toto řešení je velmi podobné ukázce 1, pouze s tím rozdílem, že udělal numerickou chybu ve výpočtu relativní rychlosti kdy místo $15 + 22{,}5 = 37{,}5$ vypočítal $15 + 22{,}5 = 27{,}5$. Pokud by tuto chybu neudělal, měl by tuto část příkladu vyřešenou správně, ale opět chybí řešení druhé situace, která by mohla nastat.

Student se při řešení příkladu snažil si situaci popsanou v zadání představit a tyto představy si schématicky zakreslit. Zde bych chtěla pochválit grafické znázornění příkladu, které studentům může pomoci si lépe představit situaci a následně i pomoci při řešení příkladu. Což je dle mého názoru vhodné u studentů podporovat.

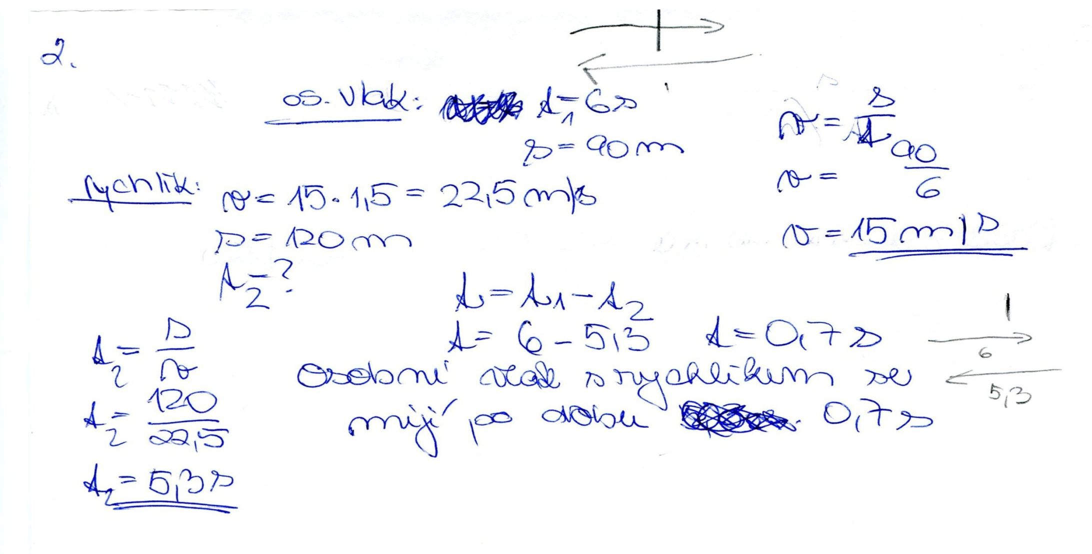
Ukázka 4.



Student, jehož řešení vidíme v této ukázce, dokázal správně ze zadaných informací vypočítat rychlosti vlaků. Správě si také určil relativní rychlost, kterou se budou osobní vlak a rychlík míjet. Student si ale špatně vypočítal délku trasy, kterou vlaky musí urazit nežli se minou, přestože si schématicky naznačil situaci.

Stejná chyba se objevovala poměrně často.

Ukázka 5.



Stejně jako v předchozí ukázce si i tento student správně určil rychlosti, jimiž se pohybovaly osobní vlak a rychlík. Další postup již správný nebyl. Student vypočítal, za jak dlouho ujede každý vlak vzdálenost danou délkou vlaku. Tyto vzdálenosti poté odečetl. Tento postup je špatný a nevede ke správnému výsledku. Nelze příklad počítat jako bychom měly zadány dvě samostatné situace.

Tabulka 2. Hodnocení př. 2.

	1. A (Pe)	1. B (Pe)	V. (Pe)	1. B (Č.B.)	Celkově
Správné řešení	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Jedno řešení - vlaky jedou proti sobě	7,4%	0,0%	7,4%	7,4%	5,6%
Jedno řešení - vlaky jedou stejným směrem	3,7%	7,4%	3,7%	0,0%	3,7 %
S numerickou chybou	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%
Špatné řešení (žádné)	85,2%	92,6%	88,9%	92,9%	89,9%

Příklad 2 byl podobný příkladu 1. Rozdíl byl v tom, že v předchozím příkladu již v zadání byly dány všechny potřebné informace (vzdálenost, kterou mají dohromady cyklista a osobní auto ujet, i rychlosti, kterými osobní auto i cyklista jedou). V tomto příkladu si studenti museli dopočítat ze zadaných údajů i rychlost, kterou vlaky jedou, i vzdálenost, kterou musejí ujet. Předpokládala jsem, že alespoň jedno řešení vyřeší více studentů (alespoň 40%) a že se vyskytnou i takoví, kteří vyřeší obě situace.

Můj předpoklad byl mylný, příklad dělal studentům velké potíže, pouze malá skupina studentů nalezla alespoň jedno řešení. Celý příklad s oběma řešeními nevyřešil žádný student, a to ani takoví studenti, kteří kromě onoho druhého řešení příkladu 2 vyřešili celý test správě.

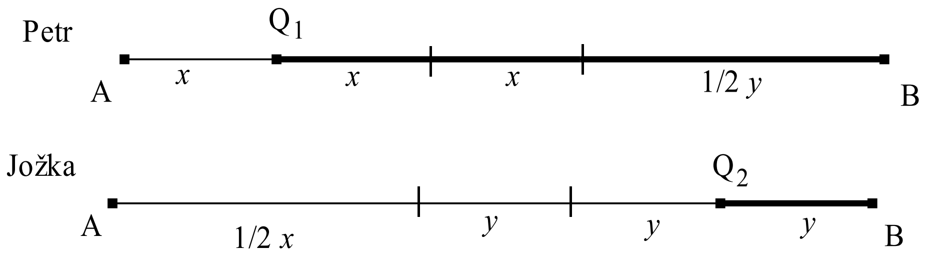
Ukázalo se, že příklady tohoto typu nejsou studenti zvyklí řešit. Příklad naznačil, že si studenti zřejmě nedovedli vytvořit jasnou představu, jak se vlaky v dané úloze pohybují. Pokud bychom tuto úlohu převedli na typ, kdy jedno vozidlo dojíždí druhé (resp. kdy vozidla jedou proti sobě), zřejmě by úspěšnost byla podobná úspěšnosti předchozí úlohy.

Celkově mohu říci, že nízká úspěšnost v tomto příkladě mě dosti překvapila.

2.7 Autorské řešení testu - př. 3

Text úlohy. Z dědiny se vydali do města dva mladí lidé, jeden na bicyklu a druhý na motorce. Jeden z nich se jmenoval Jožka, druhý Petr. Během jízdy se ukázalo, že kdyby Petr byl v daném čase ujel třikrát větší vzdálenost, měl by nyní před sebou už jen polovinu té cesty, kterou má ještě před sebou, a kdyby Jožka ujel za ten čas polovinu vzdálenosti, kterou ujel, měl by nyní před sebou ještě třikrát delší cestu, než má nyní. Řekněte, který z nich jel na bicyklu a který na motorce.

Řešení. Tento příklad můžeme řešit graficky viz obrázek.



Obr. 2.7.1. Autorské řešení - př. 3

V obrázku jsou zaznamenány zadané údaje. Q_1 označuje místo, ve kterém se právě vyskytuje Petr, zatímco Q_2 označuje místo, kde se nachází Jožka. Z obrázku jasně vyplývá, že Jožka již ujel $\frac{4}{5}$ trasy, zatímco Petr ujel pouze $\frac{1}{5}$ trasy a jel tedy pomaleji. Jožka jede rychleji. Za předpokladu, že motorka jede rychleji, pojede na motorce Jožka.

Závěr. Jožka jede na motorce, Petr jede na bicyklu.

Jiné řešení. Další možné řešení je takové, kdy si vyjádříme trasu, kterou ujeli Petr a Jožka, pomocí rovnic.

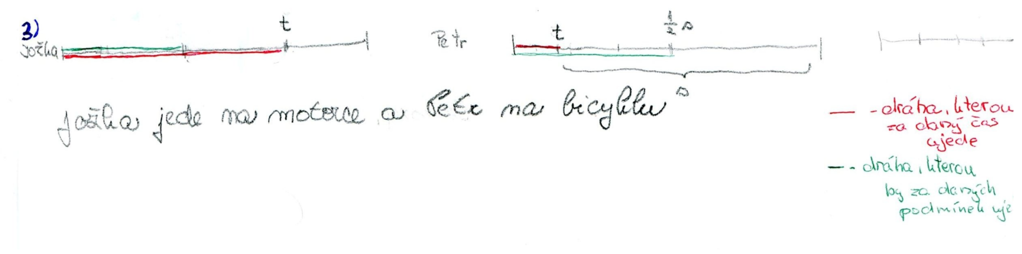
Jožka ujel dráhu x a tudíž mu zbývá $d - x$. Kdyby Jožka ujel pouze $\frac{x}{2}$ zbývalo by mu $d - \frac{x}{2}$, což je stejná část cesty jako $3(d - x)$. Platí tedy $d - \frac{x}{2} = 3 \cdot (d - x)$, po úpravě dostaneme $x = \frac{4}{5}d$. Z rovnice vidíme, že Jožka ujel $\frac{4}{5}$ cesty.

Petr ujel y, do cíle mu tedy zbývá $d - y$. Kdyby Petr ujel $3y$, zbývalo by mu do cíle $d - 3y$, což je stejná délka trasy jako $\frac{d - y}{2}$. Tedy $d - 3y = \frac{d - y}{2}$. Po úpravě dostaneme rovnici $y = \frac{d}{5}$. Z rovnice vidíme, že Petr ujel $\frac{1}{5}$ cesty. Petr jel pomaleji.

Závěr. Petr jel na bicyklu a Jožka jel na motorce.

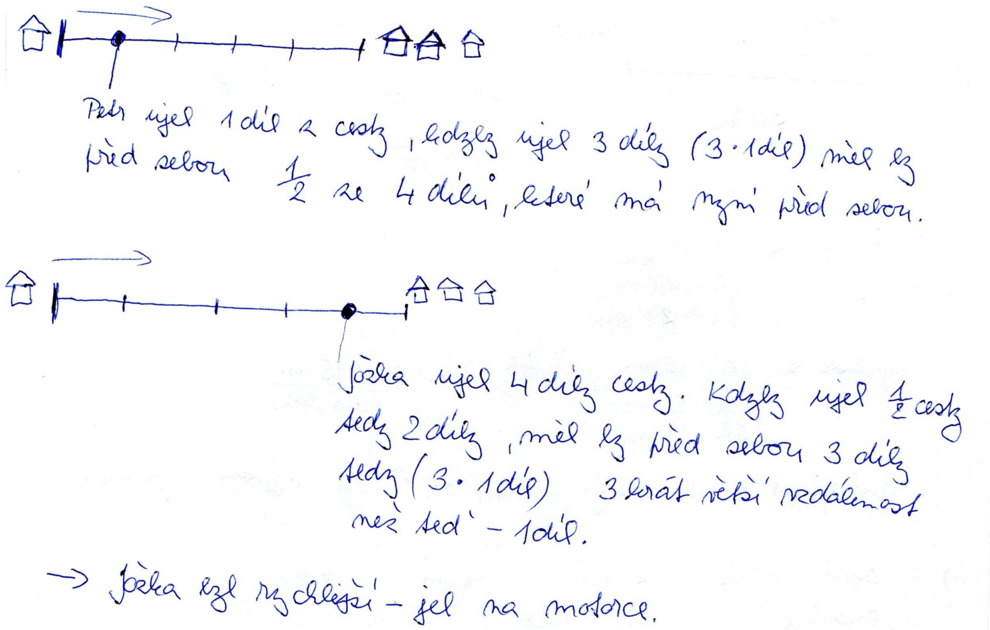
2.8 Vybraná řešení studentů – př. 3

Ukázka 1.



Student řešil tento příklad za pomoci grafického nákresu, do kterého si zaznamenal informace, které znal ze zadání. Pro dobrou přehlednost student využil 2 barvy – jednu pro informaci, kolik již ujel (červená barva) a druhou, kterou použil pro zaznamenání dráhy, která zbývá ještě ujet (zelená barva). Je to správné a názorné řešení příkladu.

Ukázka 2.



Petr ujel 1 díl z cesty, když ujel 3 díly (3 · 1 díl) měl by před sebou $\frac{1}{2}$ ze 4 dílů, které má nyní před sebou.

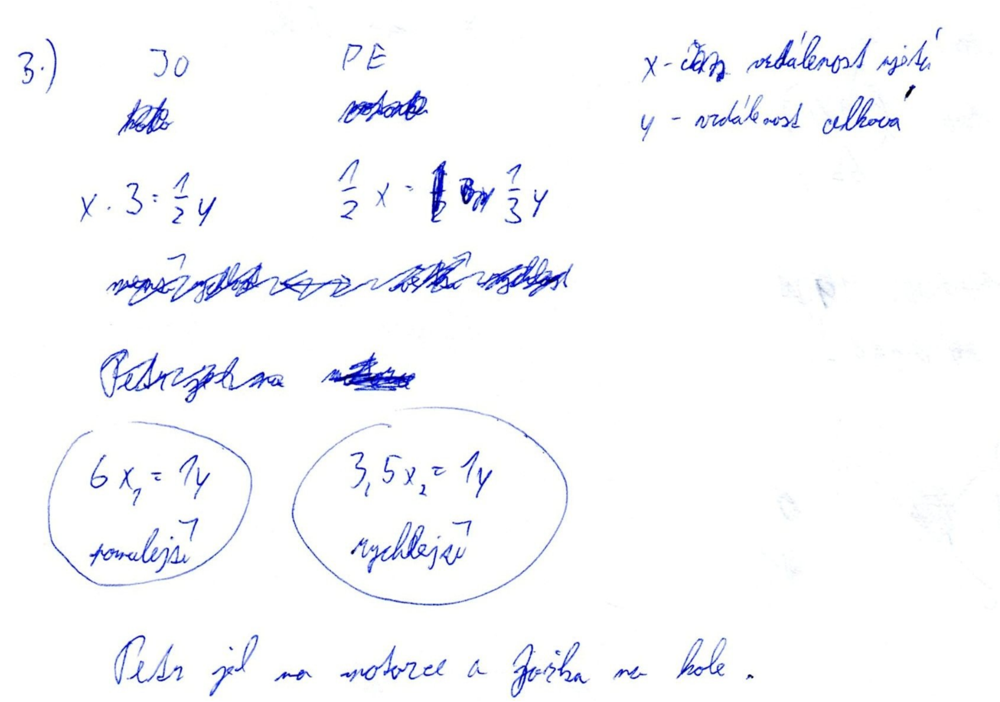
Józka ujel 4 díly cesty. Když ujel $\frac{1}{2}$ cesty tedy 2 díly, měl by před sebou 3 díly tedy (3 · 1 díl) 3krát větší vzdálenost než teď – 1 díl.

→ Józka byl rychlejší – jel na motorce.

Toto řešení studenta je další ukázkou grafického řešení. Navíc zde doplnil grafické řešení slovním komentářem.

Řešení je přehledné a správné.

Ukázka 3.



3.) JO PE

x - vzdálenost ujetá

y - vzdálenost celková

$x \cdot 3 = \frac{1}{2} y$ $\qquad$ $\frac{1}{2} x = \frac{1}{3} y$

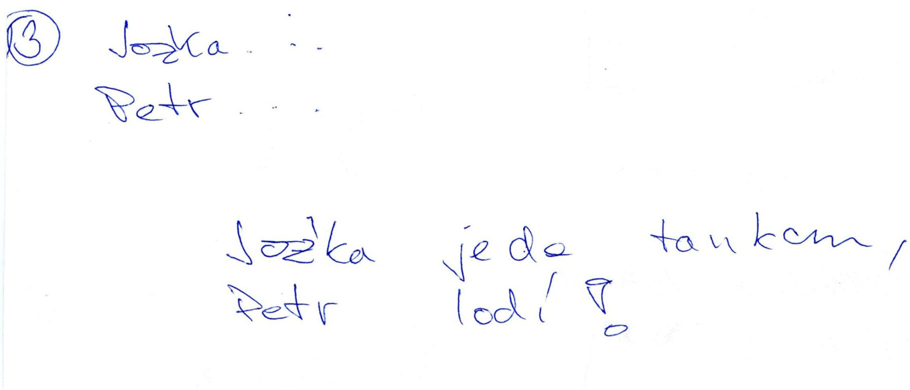
$6x_1 = 1y$ pomalejší

$3{,}5x_2 = 1y$ rychlejší

Petr jel na motorce a Józka na kole.

Student tento příklad neřešil graficky, na rozdíl od předchozích dvou ukázek. Na začátku si špatně označil *y* jako celkovou vzdálenost. Měl zřejmě na mysli vzdálenost, která zbývá ujet, než dojede Jožka resp. Petr do města. Student zaměnil rovnici pro Petra a Jožku. Další chyba, které se dopustil, je, že si špatně vyjádřil rovnici pro Petra (dle označení studenta). Výsledky, které mu vyšly po udělání těchto chyb, interpretoval student správně.

Ukázka 4.


3 Jožka . . .
Petr . . .
Jožka jede tankem,
Petr lodí!

Tato ukázka je příkladem špatného řešení. (Spíše však nepovedeného pokusu o vtip.)

Tabulka 3. Hodnocení př. 3.

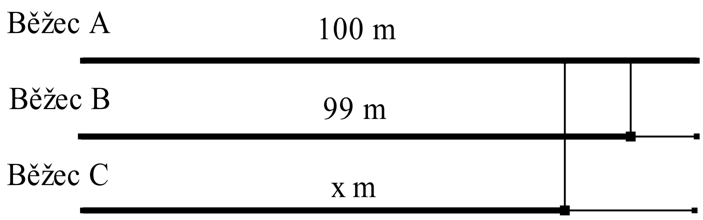
	1. A (Pe)	1. B (Pe)	V. (Pe)	1. B (Č.B.)	Celkově
Správné řešení	44,4%	59,3%	44,4%	29,6%	44,4%
Špatné řešení	55,6%	40,7%	55,6%	70,4%	55,6%

Příklad 3 byl vybrán z kategorie nestandardních příkladů. Nejdůležitější na řešení takových příkladů je dokázat se zorientovat v informacích, které jsou dány. Zadání příkladu je v porovnání s ostatními příklady v testu velmi dlouhé, i s rozvitými větami. Předpokládala jsem, že tento příklad vyřeší přibližně polovina studentů. Můj odhad byl v podstatě správný, v průměru tento příklad vyřešilo 44,4% studentů, což je výrazně lepší nežli u příkladu 2, ve kterém kompletní řešení neuvedl žádný student.

Na tomto příkladu jsem chtěla ověřit, jak se studenti dokáží zorientovat ve složitém textu. Ukázalo se, že studenti gymnázií se dobře orientují v dlouhém a nepřehledném textu, dokáží si z něj vyjádřit potřebné informace.

2.9 Autorské řešení - př. 4

Text úlohy. Tři běžci závodili v běhu na sto metrů. Běžec *A* zvítězil před běžcem *B* o jeden metr, běžec *B* zvítězil před běžcem *C* také o jeden metr. O kolik metrů před *C* doběhl do cíle běžec *A*?



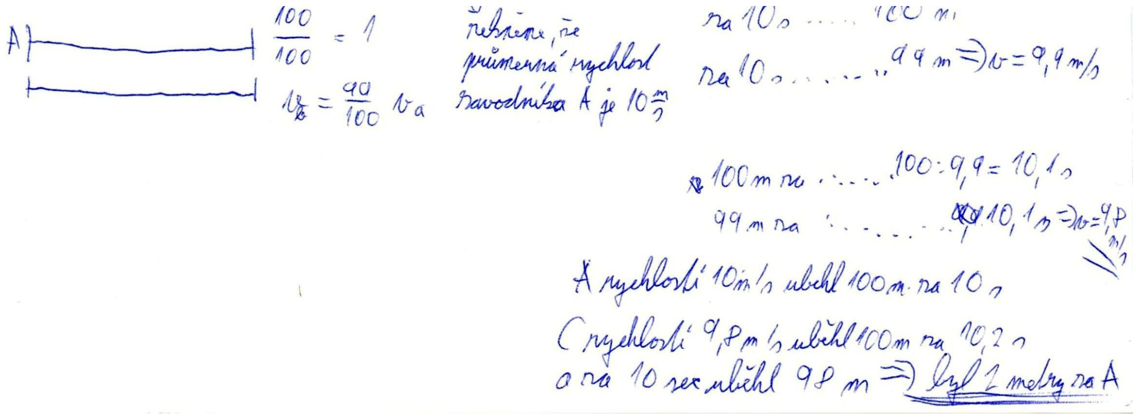
Obr. 2.9.1. Autorské řešení testu - př. 4

Student by si měl uvědomit, že v zadání máme popsány dvě různé situace. První, když doběhl do cíle běžec *A* a druhou, kdy doběhl do cíle běžec *B*.
Běžec *A* má v cíli náskok 1 metr před *B*, znamená to tedy, že běžec *B* ztrácí oproti běžci *A* na každém metru jeden centimetr. Běžec *C* ztrácí oproti běžci *B* také na každém metru jeden centimetr. Vycházíme-li z těchto poznatků, můžeme říci, o kolik metrů před *C* doběhl běžec *A*. Pokud běžec *B* uběhl 99 metrů, potom běžec *C* uběhl o 99 centimetrů méně. Běžec *C* uběhl $99 - 0{,}99 = 98{,}01$ metrů. Deficit, který má na běžce *C* je roven $100 - 98{,}01$, což je 1,99 metrů.

Závěr. Běžec *A* zvítězil před běžcem *C* o 1,99 metrů.

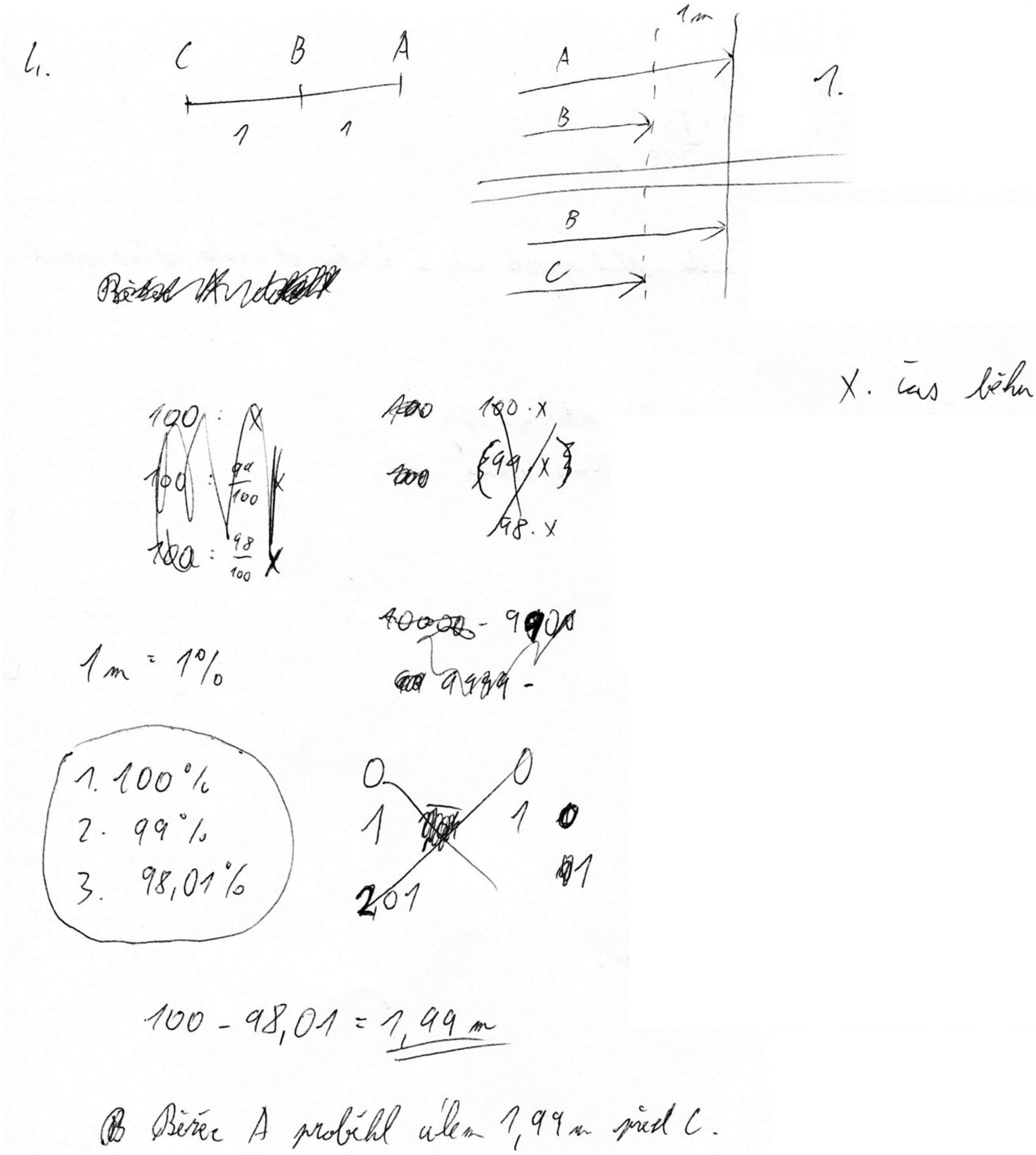
2.10 Vybraná řešení studentů – př. 4

Ukázka 1.



V této ukázce vidíme správné řešení příkladu 4, přestože výsledek není zcela správně. K této chybě došlo zaokrouhlením dílčích výsledků. Nicméně postup lze považovat za správný. Student si při výpočtu tohoto příkladu vypomohl tím, že si pro svou potřebu zvolil náhodný čas, za který uběhne závodní trať běžec *A*. Z tohoto času poté vypočítal nejprve rychlost běžce *A* a poté i rychlosti zbývajících běžců společně s časy, které potřebovali k uběhnutí celé závodní trati. Z rychlosti běžce *C* a z času, který potřebuje běžec *A* na uběhnutí celé závodní dráhy, student vypočítal, o kolik metrů před *C* doběhl běžec *A*.

Ukázka 2.



V této ukázce si student nejprve vytvořil špatné schéma, ze kterého vyvodil nesprávný výsledek 2 metry ztráty běžce *C* oproti běžci *A*. Při zapisování odpovědi si nejspíše uvědomil, že v zadání jsou uvedeny dvě různé situace. Tyto dvě situace si zakreslil do schématu vpravo. Zdůraznil si zde i to, která situace nastane jako první.

Poté následovalo několik bezvýsledných pokusů vypočítat ztrátu pomocí vztahu pro rovnoměrný pohyb. Tento výpočet se pravděpodobně student snažil vypočítat pomocí času běhu *x*. Podle přeškrtaných výrazů uprostřed vlevo soudím, že se snažil vypočítat rychlosti běžců pomocí vztahu $v = \frac{s}{t}$. U výpočtu vpravo uprostřed si nejsem jista, co se student snažil vypočítat, když dráhu násobil časem.

Po těchto neúspěšných pokusech si student pravděpodobně uvědomil, že jeden metr je roven jednomu procentu dráhy, a pokusil se úlohu vyřešit užitím procent. Vpravo od tohoto zápisu vidíme další studentovi úvahy, u kterých si nejsem zcela jistá, co tím student zamýšlel vypočítat. U zápisu vpravo dole se můžeme domnívat, že první sloupec znamenal situaci, kdy běžec *A* doběh do cíle (zbývalo mu 0 metrů) běžci *B* zbýval 1 metr. Pravý sloupec měl nejspíše znázorňovat podobnou úvahu, ale pro běžce *B* a *C*. Pravděpodobně zkusil vydělit $100 : 99$ a vyšlo mu $1,\overline{01}$. Vydedukoval z toho, že rozdíl mezi běžcem *B* a *C* v okamžiku, kdy běžec *A* doběhl do cíle, bude 1 centimetr. Vlevo dole tohoto zápisu napsal 2,01 (což je součet 1 m a 1,01 m) což považoval za rozdíl mezi běžci *A* a *C*. Uvědomil si však, že běžec *A* nemůže doběhnout do cíle o více než 2 metry před běžcem *C* a tedy že celý tento zápis bude špatně (celý zápis škrtl).

Vzhledem k tomu, že zápis vlevo je velmi zkrácený a není z něj zcela patrné, jak postupoval, můžeme uvažovat o dvou možnostech řešení.

I. Uvědomil si, že by procenta počítal naopak a proto začal znovu počítat

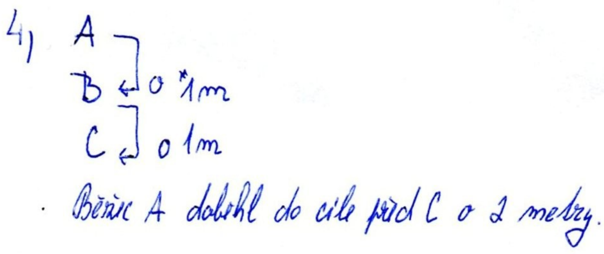
1. 100% znamená délka, kterou uběhl běžec *A*
2. 99% znamená dráhu, kterou urazil *B* v procentech z celku 100 m (tedy z dráhy běžce *A*)
3. 98,01% je 99% z celku 99 m (tedy dráhy běžce *B* v momentu, kdy *A* dorazil do cíle)

Pak již správně určil, že běžec *A* zvítězil o 100 – 98,01 = 1,99 m.

II. Dalším možným řešením studenta mohlo být využití onoho 1 centimetru (0,01 m) z předchozí úvahy, který odečetl od 2 metrů.

Podle mého názoru student postupoval způsobem I., jelikož v posledním řádku řešení vidíme, že student odečítá od 100 m 98,01 m, což by při druhé úvaze zřejmě nedávalo přílišný smysl.

Ukázka 3.


4) A
B ← o 1m
C ← o 1m
· Běžec A doběhl do cíle před C o 2 metry.

Ukázku 3 zde zařazuji především proto, že stejné řešení, jako uvedl student v této ukázce, se objevilo u většiny studentů. Student si neuvědomil, že v zadání jsou uvedeny dvě samostatné situace a to situace, kdy doběhl běžec *A* do cíle a druhá, která zachycuje situaci, kdy doběhl do cíle běžec *C*.

Tabulka 4. Hodnocení př. 4.

	1. A (Pe)	1. B (Pe)	V. (Pe)	1. B (Č.B.)	Celkově
Správné řešení	11,1%	0,0%	3,7%	0,0%	3,7%
špatné řešení	88,9%	100,0%	96,3%	100,0%	96,3%

Příklad 4 byl vybrán jako nejzáludnější příklad v testu. Předpokládala jsem, že tento příklad vypočítá pouze minimum studentů (maximálně jeden v každé třídě). Tento předpoklad se nakonec ukázal jako správný. Kdybych měla shrnout řešení tohoto příkladu, u většiny studentů se objevilo řešení shodné s ukázkou 3 (tedy že v okamžiku, kdy doběhl běžec *A* do cíle, zbývaly ještě běžci *C* do cíle 2 metry). Studentům chybí představy o vzájemných pohybech (relativní pohyb př. 2 a tento př. 4).

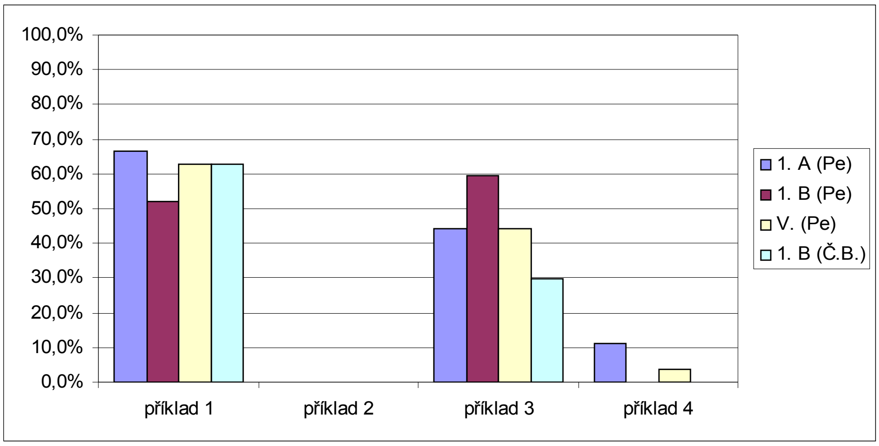
Pro studenty, kteří si nedokáží představit, jak je zadání myšleno, by bylo dobré jim ukázat extrémní příklad, u kterého by podobné řešení vedlo k očividně špatné odpovědi. Takový příklad uvedli Koman a Hejný v [1]: Tři hlemýždi závodí v lezení na 2 metry. Hlemýžď *A* zvítězí před *B* o 1 metr a hlemýžď *B* zvítězí před hlemýžděm *C* také o jeden metr.

Nyní by asi studentům došlo, že odpověď 2 metry je nesmyslná. Znamenalo by to totiž, že za dobu, nežli dolezl hlemýžď *A* do cíle, se hlemýžď *C* nedostal přes startovní čáru.

Tabulka 5. Úspěšnost řešení jednotlivých příkladů v jednotlivých třídách.

Správné řešení	**1. A (Pe)**	**1. B (Pe)**	**V. (Pe)**	**1. B (Č.B.)**	**Celkově**
příklad 1	66,7%	51,9%	63,0%	63,0%	61,2%
příklad 2	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
příklad 3	44,4%	59,3%	44,4%	29,6%	44,4%
příklad 4	11,1%	0,0%	3,7%	0,0%	3,7%

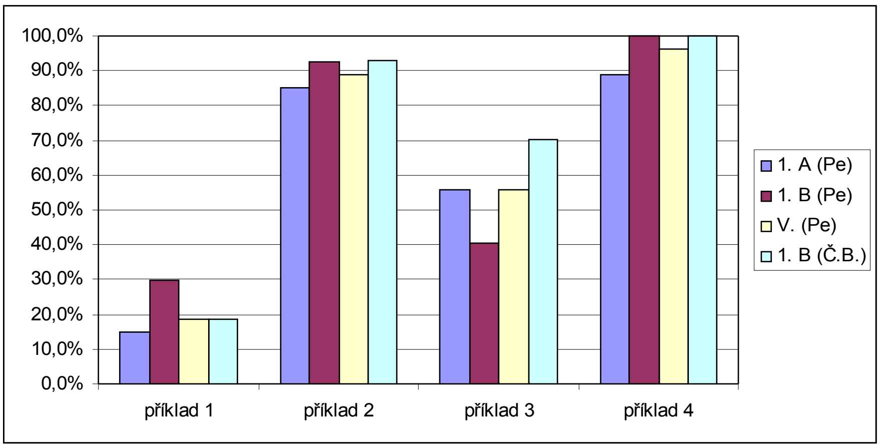
Graf 1. Úspěšnost jednotlivých tříd v jednotlivých příkladech.



Tabulka 6. Neúspěšnost jednotlivých příkladů v jednotlivých třídách.

Špatné řešení	**1. A (Pe)**	**1. B (Pe)**	**V. (Pe)**	**1. B (Č.B.)**	**Celkově**
příklad 1	14,8%	29,6%	18,5%	18,5%	20,4%
příklad 2	85,2%	92,6%	88,9%	92,9%	89,9%
příklad 3	55,6%	40,7%	55,6%	70,4%	55,6%
příklad 4	88,9%	100,0%	96,3%	100,0%	96,3%

Graf 2. Neúspěšnost jednotlivých tříd v jednotlivých příkladech.



Test neprokázal zásadní rozdíly v úspěšnosti mezi jednotlivými třídami, v nichž byl zadán. Ukázal však na poměrně velké potíže studentů při řešení úloh, ve kterých nemají zadané přímo všechny informace. Dále studentům dělá problémy představit si rovnoměrný pohyb. Když už si ho někteří představí, tak se dále nesnaží přemýšlet nad tím, zda by úloha nemohla mít třeba i jiná řešení (jak ukázal př. 2). Studentům také dělá velké problémy, pokud dostanou v zadání dvě různé situace. Jak můžeme vidět u příkladu 4, většina studentů tyto situace neodliší a obě situace sloučí do jedné, což poté vede ke špatným výsledkům.

Jak test ukázal, bylo by dobré, kdyby si takovéto úlohy studenti více procvičovali. Několik takových příkladů uvádím v následující sbírce, kde řešené příklady mohou posloužit jako ukázka postupů a neřešené úlohy k procvičení.

3. Sbírka příkladů

3.1. Základní úlohy

První část sbírky úloh je zaměřena na procvičení vztahu $s = v \cdot t$, užití přímé úměrnosti a převody jednotek. V řešených úlohách uvádím různé možnosti, jak úlohu řešit.

Příklad 1. Honza jede na kole pravidelným tempem po rovné silnici mezi Hlubokou a Týnem nad Vltavou. Za jednu sekundu ujede 7 metrů, kolik kilometrů ujede za čtvrt hodiny?

Řešení. U tohoto příkladu si ukážeme dvě možnosti řešení. Při prvním způsobu vyjdeme ze vztahu $s = v \cdot t$. Poté vyřešíme příklad na základě přímé úměry. Důležitý je správný převod jednotek.

$v = 7$ m/s
$t = 15$ min
$t = 15 \cdot 60$
$\underline{t = 900 \text{ s}}$
$s = 7 \cdot 900$
$s = 6\,300$ m
$s = 6\,300 : 1\,000$
$\underline{s = 6{,}3 \text{ km}}$

Jiný způsob řešení.

1 s……………………………7 m
15 min (900 s = 15 · 60)……x m

$900 : 1 = x : 7$
$x = 900 \cdot 7$
$x = 6\,300$ m
$x = 6\,300 : 1\,000$
$\underline{x = 6{,}3 \text{ km}}$

Závěr. Honza ujede na kole za čtvrt hodiny 6,3 kilometrů.

Příklad 2. Hajný Robátko obejde les za 35 minut. Za kolik minut oběhne 5krát stejný les jelen, běží-li 7krát rychleji?

Řešení. Nejprve si spočítáme čas x, za který oběhne les jelen jednou a poté za jak dlouho ho oběhne 5krát.

$x = 35 : 7$

$\underline{x = 5\,\text{min}}$

$5x = 5 \cdot 5$

$\underline{5x = 25\,\text{min}}$

Závěr. Jelen oběhne 5krát les za 25 minut.

Příklad 3. Vojáci pochodovali rychlostí 115 kroků za minutu. Kolik kilometrů ušli za 43 minut pochodu, je-li délka vojenského kroku 75 centimetrů?

Řešení. Nejprve si musíme spočítat rychlost v, kterou vojáci jdou, a poté vypočítáme, kolik ušli za 43 minut.

$v = 115 \cdot 0{,}75$

$v = 86{,}25$ m/min

$s = 86{,}25 \cdot 43$

$s = 3716{,}49$ m

$\underline{s \doteq 3{,}7\,\text{km}}$

Jiné řešení.

Za 1 minutu ………………………115 kroků,

odtud plyne, že 43 minut to bude 43krát více, tedy

$x = 43 \cdot 115$ kroků

$x = 4\,945$ kroků,

1 krok ……………………………0,75 metrů (75 cm = 0,75 m),

z toho vyplývá, že 4 945 kroků bude 0,75ti násobek

$s = 4\,945 \cdot 0{,}75$ m

$s = 3\,708{,}75$ m

$s = 3\,708{,}75 : 1\,000$ km

$\underline{s \doteq 3{,}7 \text{ km}}$

Předchozí postup budeme v dalším textu zapisovat pomocí následujícího schématu.

115 kroků……………… 1 min

$\underline{x \text{ kroků} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 43 \text{ min}}$

$x : 115 = 43 : 1$

$x = 43 \cdot 115$

$x = 4945$ kroků

Nyní ještě musíme vynásobit délkou (délka jednoho kroku je 75 centimetrů, my si tuto délku převedeme nejprve na metry s_1) jednoho kroku a poté ještě počtem kroků. Nakonec zbývá pouze převést počet metrů (který získáme) na počet kilometrů.

$s_1 = 75 : 100$

$s_1 = 0{,}75$

$s = 4\,945 \cdot 0{,}75$

$s = 3\,708{,}75$ m

$s = 3\,708{,}75 : 1\,000$

$\underline{s \doteq 3{,}7 \text{ km}}$

Závěr. Vojáci za 43 minut ušli přibližně 3,7 kilometrů.

Příklad 4. Letadlo uletí za 4 minuty 86 400 metrů. Kolik kilometrů uletí za 57 sekund a kolik za jednu hodinu?

Řešení. Nejprve si vypočítáme, kolik kilometrů letadlo uletí za 1 minutu, za 1 sekundu a nakonec kolik uletí za 57 sekund a 1 hodinu.

První možnost řešení: požijeme vzorec $s = v \cdot t$.

$t_{1m} = 86\,400 : 4$

$\underline{t_{1m} = 21\,600 \text{ m}}$

$t_{1s} = 21\,600 : 60$

$\underline{t_{1s} = 360 \text{ m}}$

$t_{57s} = 360 \cdot 57$

$t_{57s} = 20\,520 \text{ m}$

$\underline{t_{57s} = 20{,}52 \text{ km}}$

$t_{1h} = 21\,600 \cdot 60$

$t_{1h} = 1\,296\,000 \text{ m}$

$\underline{t_{1h} = 1\,296 \text{ km}}$

Jiný způsob řešení.

4 min………………86 400 m

$\underline{1 \min (60 s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \text{ m}}$

$1 : 4 = x : 86\,400$

$x = 86\,400 : 4$

$\underline{x = 21\,600 \text{ m}}$

60 s…………………21 600 m

$\underline{57\ s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \text{ m}}$

$57 : 60 = x : 21\,600$

$x = 57 \cdot 21\,600 : 60$

$x = 20\,520 \text{ m}$

$\underline{x = 20{,}52 \text{ km}}$

1 min………………21 600 m

$\underline{60 \min \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \text{ m}}$

$60 : 1 = x : 21\,600$

$x = 60 \cdot 21\,600$

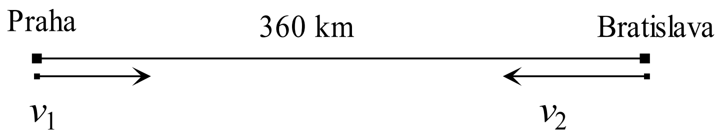
$x = 1\,296\,000 \text{ m}$

$\underline{x = 1\,296 \text{ km}}$

Závěr. Letadlo uletí za 57 sekund 20,52 kilometrů a za 1 hodinu uletí 1 296 kilometrů.

Příklad 5. Na silnici z Prahy do Bratislavy (vzdálenost 360 kilometrů) vyjela současně proti sobě dvě auta. Automobil, který vyjel z Prahy, ujede za čtvrt hodiny 27 kilometrů a automobil, který vyjel z Bratislavy, ujede každé 2 minuty 4 kilometry. Jaká vzdálenost je mezi automobily po jedné hodině a jaká po 2 hodinách?

Řešení.



Obr. 3.1.1. Základní úlohy

Nejprve si zjistíme, jakou rychlostí (v_1,v_2) oba automobily jely. Tuto rychlost vypočítáme dosazením do vzorečku $v = \frac{s}{t}$.

$$\left(\frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{ min}\right)$$

$$v_1 = \frac{27}{\frac{15}{60}}$$

$$v_1 = 27 \cdot \frac{60}{15}$$

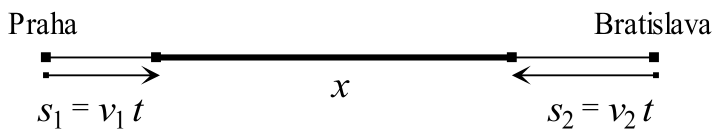
$$\underline{v_1 = 108\text{ km/h}}$$

$$v_2 = \frac{4}{\frac{2}{60}}$$

$$v_2 = 4 \cdot \frac{60}{2}$$

$$\underline{v_2 = 120\text{ km/h}}$$

Vzdálenost mezi automobily po jedné a dvou hodinách vypočítáme použitím vzorce $s_n = s - t \cdot v$; $n = 1{,}2$, kde s_n jsou vzdálenosti mezi auty po jedné a dvou hodinách, s je vzdálenost obou aut před vyjetím, t je čas (jedna hodina, dvě hodiny) a v je relativní rychlost.



Obr. 3.1.2. Základní úlohy

Při výuce tohoto tématu by bylo dobré na začátku vytvořit žákům jasnou představu a jasnou interpretaci rozdílu $d = s - (s_1 + s_2)$.

a) Je-li $s > s_1 + s_2$ pak $d > 0$, z toho vyplývá, že auta se ještě nepotkala a vzdálenost mezi nimi je rovna $x = d$.

b) Je-li $s = s_1 + s_2$ pak $d = 0$ a tedy i $x = 0$. Tato situace nastane v okamžiku setkání.

c) Je-li $s < s_1 + s_2$ pak $d = s - (s_1 + s_2) < 0$. Auta se již minula a vzdalují se od sebe. Jejich vzdálenost $x = (s_1 + s_2) - s = -d$.

Pokud již studenti znají absolutní hodnostu můžeme celé shrnout jako $x = |d|$.

Nyní se vraťme k příkladu 5.

(Jelikož auta se přibližují – jedou proti sobě, tak tuto rychlost dostaneme jako součet rychlostí automobilů.) Tak například za jednu hodinu ujede automobil, jenž vyjel z Prahy trasu dlouhou 108 kilometrů a automobil, který vyjel z Bratislavy trasu dlouhou 120 kilometrů. Z toho vidíme, že oba automobily ujely vzdálenost $s_1 + s_2 = 108 + 120 = 228$ kilometrů a tuto vzdálenost musíme odečíst, abychom zjistili, jak vzdáleny jsou automobily právě po té jedné hodině. Obdobně budeme postupovat při zjišťování vzdálenosti automobilů po dvou hodinách.

$d_1 = 360 - 1 \cdot (108 + 120)$

$\underline{d_1 = 132 \text{ km}}$

$d_2 = 360 - 2 \cdot (108 + 120)$

$\underline{d_2 = -96 \text{ km}}$

Nyní by asi bylo vhodné, podívat se na to, co nám vyšlo. Pokud se podíváme na s_1 tak si myslím, že nikdo nezapochybuje, že automobily jsou od sebe vzdáleny po jedné

hodině cesty 132 kilometrů. Ovšem jak si vysvětlit, že po dvou hodinách jsou od sebe automobily vzdáleny - 96 kilometrů, to už tak jasné asi všem nebude.
Zde bychom se mohli zamyslet nad tím, za jak dlouho by se oba automobily střetly.

$s = v \cdot t$

$360 = 228 \cdot t$

$t = \dfrac{360}{228}$

$t = \dfrac{30}{19}\ \mathrm{h}$

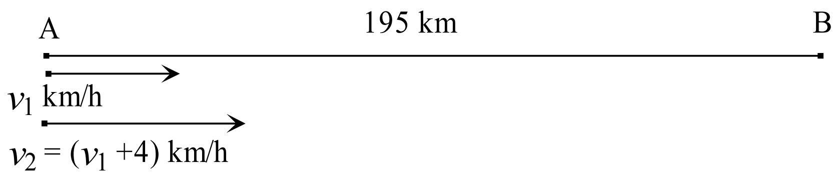
$\underline{t \doteq 1\ \mathrm{h}\ 35\,\mathrm{min}}$

Jak je vidět, automobily se budou míjet přibližně za 1 hodinu a 35 minut. Po uplynutí této doby dojde k tomu, že oba automobily se budou zase vzdalovat, a tento jev se projeví tím způsobem, že hodnoty, které nám budou vycházet, budou záporné. A to je právě náš případ.

Závěr. Vzdálenost mezi automobily po jedné hodině je 132 kilometrů a po dvou hodinách je 96 kilometrů.

Příklad 6. Dva cyklisté vyjeli současně, oba z A do B. Vzdálenost míst A, B je 195 km. Ten z cyklistů, jehož střední rychlost byla o 4 km/h větší než rychlost druhého, dorazil do B o hodinu dříve. Jakou měl rychlost?

Řešení.



Obr.3.1.3. Základní úlohy

Nejprve dosadíme do vzorečku $s = v \cdot t$ (označení zachováme dle obrázku).

$$195 = (v_1 + 4)\cdot(t_1 - 1) \tag{1}$$

Nyní si vypočítáme čas t_1 v závislosti na v_1.

$195 = v_1 \cdot t_1$

$t_1 = \dfrac{195}{v_1}$

Čas t_1 dosadíme do výrazu (1) a dále upravíme.

$195 = (v_1 + 4)\cdot\left(\dfrac{195}{v_1} - 1\right)$

$195 = 195 - v_1 + \dfrac{4\cdot 195}{v_1} - 4 \quad /\cdot v_1$

$195v_1 = 195v_1 - v_1^2 + 780 - 4v_1$

$0 = v_1^2 + 4v_1 - 780$

$D = 16 - 4\cdot(-780)$

$D = 3136$

$\sqrt{D} = 56$

$v_{11,12} = \dfrac{-4 \pm 56}{2}$

$v_{11} = -30 \quad \text{NELZE}$

$\underline{v_{12} = 26\ \text{km/h}}$

Po úpravách kvadratické rovnice dostáváme dva různé výsledky $v_{11} = -30\ \text{km/h}$ a $v_{12} = 26\ \text{km/h}$. Rychlost v_{11} je záporná, což nelze, tento výsledek nemá smysl. Tudíž námi hledaná rychlost je rychlost v_{12}.

Rychlost cyklisty, který jel o 4 km/h pomaleji je 26 km/h. Tedy cyklista, který jel o 4 kilometry rychleji, jel rychlostí *v*.

$v = v_{12} + 4$

$v = 26 + 4$

$\underline{v = 30\ \text{km/h}}$

Závěr. Cyklista, jehož střední rychlost byla o 4 km/h větší, jel rychlostí 30 km/h.

Příklad 7. Tatínek jel na motocyklu rychlostí 120 km/h do města vzdáleného 90 kilometrů. Po cestě se na 70 minut zastavil na oběd. V kolik hodin dojel do města, jestliže vyjížděl v půl dvanácté?

Řešení. Nejprve si vypočítáme, jak dlouho by tatínkovi trvala cesta bez zastávky na oběd. Poté přičteme dobu přestávky a nakonec ještě přičteme čas, kdy tatínek vyjel do města.

$$t_1 = \frac{90}{120}$$

$$\underline{t_1 = 0{,}75 \text{ h}}$$

$$t_2 = \frac{70}{60}$$

$$\underline{t_2 = 1{,}1\overline{6}}$$

$$t = 1{,}1\overline{6} + 0{,}75 + 11{,}5$$

$$t = 13{,}41\overline{6} \text{ h}$$

$$\underline{t = 13 \text{ h } 25 \text{ min}}$$

Závěr. Tatínek dorazil do města ve 13 hodin a 25 minut.

3.1.1 Úlohy na procvičení

Úloha 1. Nákladní automobil jede stálou rychlostí po dálnici. Za tři a půl hodiny ujede 315 kilometrů. Kolik decimetrů ujede touto stálou rychlostí za 1 minutu?
[15 000 decimetrů]

Úloha 2. Hlemýžď leze stálou rychlostí 470 milimetrů za 47 minut. Za jak dlouho se přeplazí přes desetimetrovou lávku? Výsledek napište v hodinách a minutách.
[16 hodin a 40 minut]

Úloha 3. Rychlonožka trénoval na atletické závody. Za 2 hodiny oběhl 18krát celý les, přitom deset oběhů je 10 000 metrů. Kolik metrů uběhne Rychlonožka za 15 minut?
[2 250 metrů]

Úloha 4. Za velkým rybníkem lyžují na kopci králíci z klobouku Bob a Bobek. Bob ujede za 20 sekund 180 metrů a Bobek sjede 4500 decimetrů za 1 minutu. Kdo je dříve pod kopcem u potoka, vystartují-li oba najednou a ze stejného místa?
[Dříve u potoka je Bob, jede rychlostí 32,4 km/h, zatímco Bobek pouze 27 km/h]

Úloha 5. Když se králíci probudili, vyšli si na výlet a načapali zloděje. Vyrušený zloděj je začne pronásledovat. Bob při útěku uběhne za 5 minu 2 kilometry. Bobek uběhne každých 25 sekund 12 500 centimetrů. Zloděj při pronásledování uběhne 5700 decimetrů za 3 minuty. Doběhne zloděj Boba, Bobka? Nebo dokonce oba?
[Ani Boba ani Bobka]

Úloha 6. Z Prahy do Brna vyjede automobil a z Brna do Prahy vyjede současně motocykl. Vzdálenost z Prahy do Brna je 250 kilometrů. Automobil ujede za každých 10 minut 20 kilometrů a motocykl ujede za každých 5 minut 11 kilometrů. Jaká je vzdálenost mezi autem a motocyklem po 30 minutách, po jedné hodině, po dvou hodinách?
[Po 30 minutách – 124 kilometrů, po 1 hodině 2 kilometry a po 2 hodinách 254 kilometrů]

Úloha 7. Gepard vyvine na krátkou vzdálenost rychlost kolem 100 km/h. Pokud však kořist nedohoní po 400 m sprintu, musí zpomalit a před dalším lovem si odpočinout. Z jaké minimální vzdálenosti mu může uniknout klokan, který na krátkou vzdálenost dosahuje rychlosti asi 55 km/h? Co vás na této úloze zaráží?
[Minimální vzdálenost musí být větší než 180 metrů. Klokan s gepardem se nemohou geograficky setkat.]

3.2 Úlohy o setkávání

Druhá část sbírky úloh bude zaměřena na úlohy o setkávání vozidel.

Příklad 1. Z Paříže do Bordeaux vyjede vlak. O padesát minut déle vyjede vlak z Bordeaux do Paříže. Oba vlaky jedou stejně rychle. Který vlak bude blíž Bordeaux, až se vlaky potkají?

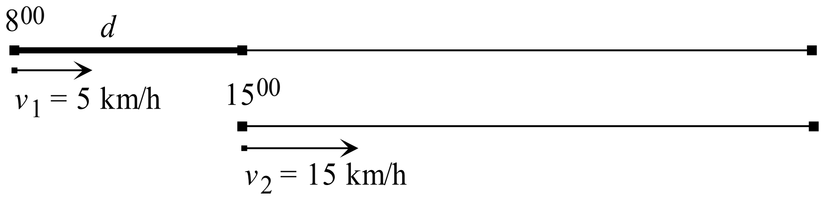
Řešení. Pokud se ptáme na situaci, kdy se vlaky potkají, znamená to, že jsou na jednom místě. Tudíž jedno místo je od jiného místa vzdáleno pouze o jednu danou vzdálenost. Musí tedy mít oba dva vlaky stejnou vzdálenost od Bordeaux.

Závěr. Oba vlaky jsou stejně vzdáleny od Bordeaux.

Příklad 2. Turista vyšel v 8 hodin ráno, ve 3 hodiny odpoledne za ním vyjel cyklista průměrnou rychlostí 12 km/h. Určete, v kolik hodin cyklista dohoní chodce, jehož průměrná rychlost je 5 km/h.

Řešení. Tento typ příkladu můžeme řešit více způsoby. Naznačím zde dvě možnosti, jak řešit tento příklad.

1. způsob řešení - relativní rychlost. Výpočet pomocí relativní rychlosti je náročnější na představu studentů, nežli řešení pomocí sčítání (nebo odčítání) drah (viz druhé řešení).



Obr. 3.2.1. Úlohy o setkávání

Relativní rychlost v, je rychlost, kterou se přibližuje cyklista k turistovi. Relativní rychlost v určíme jako rozdíl rychlosti v_2 (kterou jede cyklista) a rychlosti v_1 (kterou jde turista). Kdyby turista stál na místě a cyklista se k němu přibližoval, byla by rychlost, kterou se cyklista k turistovi přibližuje, rovna rychlosti v_2. V našem případě ale turista nestojí, dále se pohybuje a tedy rychlost, kterou se přibližuje cyklista k turistovi, je o turistovu rychlost v_1 nižší. Relativní rychlost tedy vypočítáme jako $v = v_2 - v_1$.
Délku trasy, kterou má náskok turista, vypočítáme pomocí vzorečku $d = v \cdot t$. Po dosazení za v dostáváme rovnici $d = (v_2 - v_1) \cdot t$. Nyní si vypočítáme, jak velký náskok má turista. Tento náskok vypočítáme pomocí vzorce $d = v_1 \cdot t_1$, kde t_1 udává dobu od okamžiku, kdy vyšel turista, do chvíle, než vyjel cyklista. Dosazením vypočítáme vzdálenost d, kterou ušel, nežli se dal na cestu cyklista (náskok turisty).

$d = 5 \cdot (15 - 8)$

$d = 5 \cdot 7$

$\underline{d = 35 \text{ km}}$

Nyní, když dosadíme do vztahu $d = (v_2 - v_1) \cdot t$ za všechny proměnné, které již známe, dokážeme vypočítat čas t.

$d = (v_2 - v_1) \cdot t$

$35 = (12 - 5) \cdot t$

$35 = 7t$

$\underline{t = 5 \text{ hod}}$

Tento čas t nám říká, jak dlouho bude trvat cyklistovi, nežli dojede turistu. Cyklistovi bude trvat 5 hodin, než dojede turistu. Jelikož cyklista vyjížděl v 15 hodin a dalších

5 hodin bude na cestě, než se potká s turistou, musí se turista s cyklistou setkat ve

$t_0 = 15 + 5$, neboli $t_0 = 20$ hod.

Závěr. Cyklista dojede turistu ve 20 hodin.

2. způsob řešení – sčítání drah (odčítání drah). Délka trasy s_2, kterou ujede cyklista, nežli dojede turistu, je rovna součtu délky trasy s_1 a délky d, kterou ušel turista od počátku chůze do okamžiku, než vyjel cyklista.

$s_2 = s_1 + d$, a odtud $s_2 - s_1 = d$

Nyní si vyjádříme vzdálenosti s_1 a s_2 pomocí vzorce $s = v \cdot t$ a dosadíme do předchozí rovnice.

$s_1 = v_1 \cdot t$

$s_2 = v_2 \cdot t$

$v_2 \cdot t = v_1 \cdot t + d$, neboli $(v_1 - v_2) \cdot t = d$

V tuto chvíli zbývá dopočítat délku trasy d, dosadit do poslední rovnice všechny známé informace a dopočítat čas t, který nám bude říkat, za jak dlouho dojede cyklista turistu. Délku trasy d je trasa, kterou ušel turista, nežli se dal na cestu cyklista (náskok, který měl turista před cyklistou).

$d = v_1 \cdot t_1$

$d = 5 \cdot (15 - 8)$

$d = 5 \cdot 7$

$\underline{d = 35 \text{ km}}$

$(v_2 - v_1) \cdot t = d$

$(12 - 5) \cdot t = 35$

$7t = 35$

$\underline{t = 5 \text{ hod}}$

Cyklista dojede turistu za 5 hodin. Pokud cyklista vyjížděl v 15 hodin a potřebuje 5 hodin na dojetí turisty, setkají se turista s cyklistou v $t_s = 15 + 5$, neboli $t_s = 20$ hodin.

Závěr. Cyklista dojede turistu ve 20 hodin.

Na závěr můžeme provést zkoušku, zda je výpočet pořádku. Tu provedeme tak, že vypočítáme trasu, kterou ušel turista od 8^{00} hodin ráno do 20^{00} hodin večer (tudíž za 12 hodin chůze) a jakou ujel cyklista od 15^{00} do 20^{00} (tedy za 5 hodin jízdy).

$s_1 = 12 \cdot 5$

$\underline{s_1 = 60 \text{ km}}$

$s_2 = 5 \cdot 12$

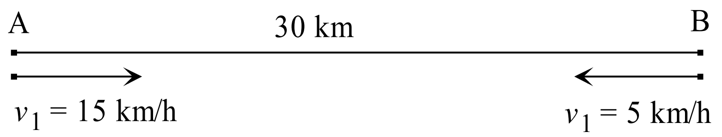
$\underline{s_2 = 60 \text{ km}}$

Jak je vidět oba urazili stejnou trasu. Můžeme tedy říci, že výsledek je správný.

Závěr. Cyklista dožene turistu ve 20 hodin.

Příklad 3. Z místa *A* vyjel cyklista rychlostí 15 km/h. Ve stejném okamžiku vyšel z místa *B* vzdáleného od místa *A* 30 km proti němu chodec rychlostí 5 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od místa *A* se potkají?

Řešení.



Obr. 3.2.2. Úlohy o setkávání

1. způsob řešení – relativní rychlost. Nejprve si vypočítáme relativní rychlost v, která nám říká, o kolik se k sobě každou hodinu přiblíží cyklista a chodec. Získáme ji jako součet rychlostí $v_1 + v_2$.

$v = v_1 + v_2$

$v = 15 + 5$

$\underline{v = 20 \text{ km/h}}$

Dále budeme tento příklad řešit pomocí vztahu $s = v \cdot t$ a to v podobě $t = \frac{s}{v}$.

$t = \frac{s}{v}$

$t = \frac{30}{20}$

$t = 1{,}5 \text{ hod}$

$\underline{t = 1 \text{ hod } 30 \text{ min}}$

Nyní zbývá pouze vypočítat, jak vzdálené je místo *A* od místa setkání cyklisty a chodce. (Pomocí vztahu $s = v \cdot t$.)

$s = v \cdot t$

$s = 15 \cdot 1{,}5$

$\underline{s = 22{,}5 \text{ km}}$

Závěr. Chodec se setká s cyklistou po 1 hodině a 30 minutách ve vzdálenosti 22,5 kilometrů od místa *A* (tedy místa vyjetí cyklisty).

2. možnost řešení – součet dráhy. Za dobu *t* ujede cyklista trasu s_1, kterou vypočítáme pomocí vzorce $s_1 = v_1 \cdot t$. Za stejný čas *t* ujde chodec trasu s_2, kterou dostaneme jako $s_2 = v_2 \cdot t$. Celková trasa *s*, o kterou se k sobě chodec s cyklistou za dobu *t* přiblíží, je rovna $s = s_1 + s_1$. Po dosazení za s_1 a s_2 dostaneme rovnici

$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$, neboli $\mathrm{s} = (v_1 + v_2) \cdot t$. Nyní dosadíme do poslední rovnice všechny údaje ze zadání.

$\mathrm{s} = (v_1 + v_2) \cdot t$

$30 = (15 + 5) \cdot t$

$30 = 20t$

$t = \frac{3}{2} \text{ hod}$, neboli $\underline{t = 1 \text{ hod } 30 \text{ min}}$

Dále potřebujeme vypočítat, jak daleko od *A* se cyklista s chodcem setkají, což vypočítáme pomocí vzorce $s_1 = v_1 \cdot t$.

$s_1 = v_1 \cdot t$

$s_1 = 15 \cdot 1{,}5$

$\underline{s_1 = 22{,}5 \text{ km}}$

Správnost řešení si můžeme jednoduše ověřit vypočítáním vzdálenosti, kterou ujde chodec za onu 1,5 hodinu. Tuto vzdálenost poté přičteme ke vzdálenosti, kterou ujede cyklista. Součet vzdáleností by nám měl dát dohromady délku trasy od místa *A* do místa *B* (tedy 30 kilometrů).

$s_{ch} = v \cdot t$

$s_{ch} = 1{,}5 \cdot 5$

$\underline{s_{ch} = 7{,}5 \text{ km}}$

$s + s_{ch} = 7{,}5 + 22{,}5$

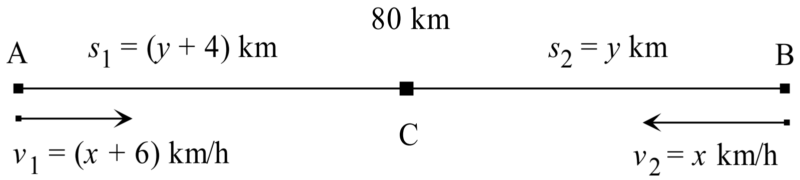
$\underline{s + s_{ch} = 30 \text{ km}}$

Opravdu platí, že vzdálenost, kterou ujde chodec a kterou ujede cyklista dohromady, dává vzdálenost míst *A* a *B*.

Závěr. Chodec se setká s cyklistou po 1 hodině a 30 minutách ve vzdálenosti 22,5 kilometrů od místa *A*, ze kterého vyjel cyklista.

Příklad 4. Ze dvou míst *A*, *B* vzdálených od sebe 80 km vyjela proti sobě současně dvě auta. Auto z *A* jelo průměrnou rychlostí o 6 km/h větší než auto z *B*, a do okamžiku setkání ujelo o 4 km více, určete průměrné rychlosti aut a dobu, za jakou se setkala.

Řešení.



Obr. 3.2.3. Úlohy o setkávání

Na začátku si vypočítáme vzdálenost, kterou každý automobil ujede, nežli se potkají. Tuto vzdálenost vypočítáme vyřešením rovnice $s = s_1 + s_2$, jelikož víme, že $s_1 = (y + 4)$ km a $s_2 = y$ km. Označení odpovídá označení v obrázku. Z posledních tří rovnic můžeme vypočítat vzdálenost s_1 a poté i vzdálenost s_2.

$$s = s_1 + s_2$$
$$s_1 = s_2 + 4$$
$$80 = s_2 + s_2 + 4$$
$$80 = 2s_2 + 4$$
$$76 = 2s_2$$
$$\underline{s_2 = 38\ \text{km}}$$
$$s_1 = s_2 + 4$$
$$s_1 = 38 + 4$$
$$\underline{s_1 = 42\ \text{km}}$$

Nyní využijeme vztah $s = v \cdot t$, do kterého dosadíme údaje, které známe. Dále využijeme informace, že auto, které vyjelo z místa *A,* jede o 6 km/h vyšší rychlostí (tedy, že $v_1 = v_2 + 6\,(\text{km/h})$).

$$80 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$$
$$80 = (v_2 + 6) \cdot t + v_2 \cdot t$$

Dále si umíme vyjádřit, jaké vzdálenosti auta ujedou. Pokud všechny tyto informace shrneme do rovnic, dostaneme soustavu dvou rovnic s dvěmi neznámými (v_2 a t). Tuto soustavu vyřešíme a dostaneme hledané rychlosti i čas, za který se obě auta setkají.

$$38 = v_2 \cdot t$$
$$\underline{42 = (v_2 + 6) \cdot t}$$
$$v_2 = \frac{38}{t}$$
$$42 = \left(\frac{38}{t} + 6\right) \cdot t$$
$$42 = 38 + 6t$$
$$6t = 4$$
$$t = \frac{4}{6}$$
$$t = \frac{2}{3}\ \text{hod}$$
$$\underline{t = 40\ \text{km}}$$

$$v_2 = \frac{38}{\frac{2}{3}}$$

$$\underline{v_2 = 57 \text{ km/h}}$$

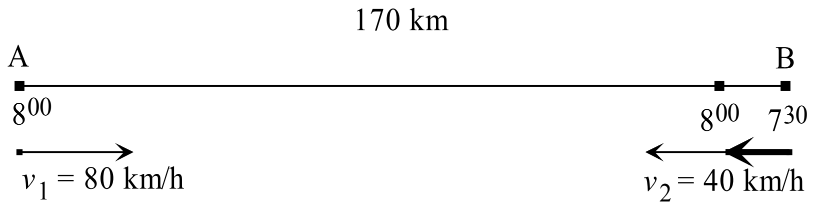
$$v_1 = v_2 + 6$$

$$\underline{v_1 = 63 \text{ km/h}}$$

Závěr. Průměrná rychlost auta, které vyjelo z místa *A*, je 63 km/h. Auto, které vyjelo z místa *B*, jelo průměrnou rychlostí 57 km/h. Obě auta se potkaly po 40 minutách jízdy.

Příklad 5. Ze stanic *A* a *B*, vzdálených od sebe 170 km, jedou proti sobě dva vlaky. Rychlík, který ujede za hodinu 80 km, vyjel ze stanice *A* v 8 hodin. Osobní vlak vyjel ze stanice *B* v 7 hodin a 30 minut a jel rychlostí 40 km/h. V kolik hodin a jak daleko od stanice *A* se oba vlaky potkají?

Řešení.



Obr. 3.2.4. Úlohy o setkávání

Vlak, který vyjel ze stanice *B* má 30 minut (neboli půl hodiny) náskok. My víme, jak jede rychle, proto také víme, jakou vzdálenost s_2 ujede za onu půl hodinu. Tuto vzdálenost odečteme od původní vzdálenosti s_0 (tedy 170 kilometrů), která nám udává, jak jsou vzdáleny stanice *A* a *B*. Odečtením této vzdálenosti se příklad převede na podobný typ příkladu, jako byl předchozí příklad 4, bude se tedy řešit analogicky s tímto příkladem. Pouze s tím rozdílem, že dobu *t*, po kterou jedou oba vlaky, nežli se střetnou, musíme přičíst k času, ve kterém vyjel vlak ze stanice *A*. Tím dostaneme čas střetnutí t_s.

$s = s_0 - s_1$

$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 40$

$\underline{s_1 = 20\ \text{km}}$

$s = 170 - 20$

$\underline{s = 150\ \text{km}}$

$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$

$150 = 80 \cdot t + 40 \cdot t$

$150 = 120t$

$t = 1{,}25\ \text{hod}$

$\underline{t = 1\ \text{hod}\ 15\ \text{min}}$

$t_s = t + 8$

$t_s = 1{,}25 + 8$

$t_s = 9{,}25\ \text{hod}$

$\underline{t_s = 9\ \text{hod}\ 15\ \text{min}}$

$s_s = v_1 \cdot t$

$s_s = 80 \cdot 1{,}25$

$\underline{s_s = 100\ \text{km}}$

(Vzdálenost s_s lze také vypočítat tím způsobem, že od vzdálenosti mezi stanicemi odečteme vzdálenost, kterou ujede vlak jedoucí ze stanice *B*. Nesmíme zapomenout, že vlak ze stanice *B* jede o 30 minut déle – tuto dobu musíme připočíst.)

$s_s = 170 - (v_2 \cdot (t + 0{,}5))$

$s_s = 170 - 40 \cdot 1{,}75$

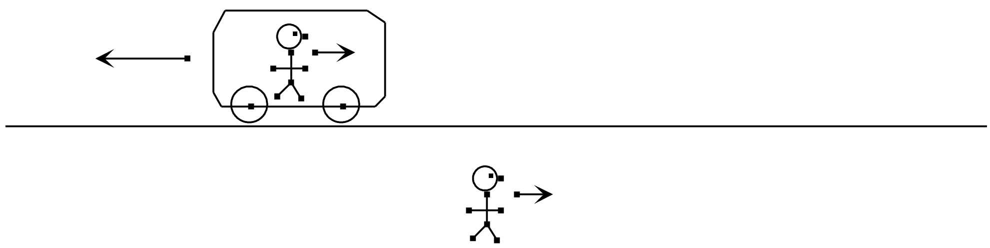
$s_s = 170 - 70$

$\underline{s_s = 100\ \text{km}}$

Závěr. Vlaky se potkají v 9 hodin a 15 minut ve vzdálenosti 100 kilometrů od stanice *A*.

Příklad 6. Věřitel jedoucí tramvají zpozoroval svého dlužníka jdoucího podél kolejí, ale v opačném směru, nežli jela tramvaj. Během deseti sekund se věřitel dostal k východu, vyskočil z tramvaje a běžel, aby dlužníka dohonil. Věřitel běžel dvakrát rychleji, než byla rychlost dlužníkovy chůze, ale pětkrát pomaleji, než byla rychlost tramvaje. Po kolika sekundách dohonil věřitel dlužníka?

Řešení.



Obr. 3.2.5. Úlohy o setkávání

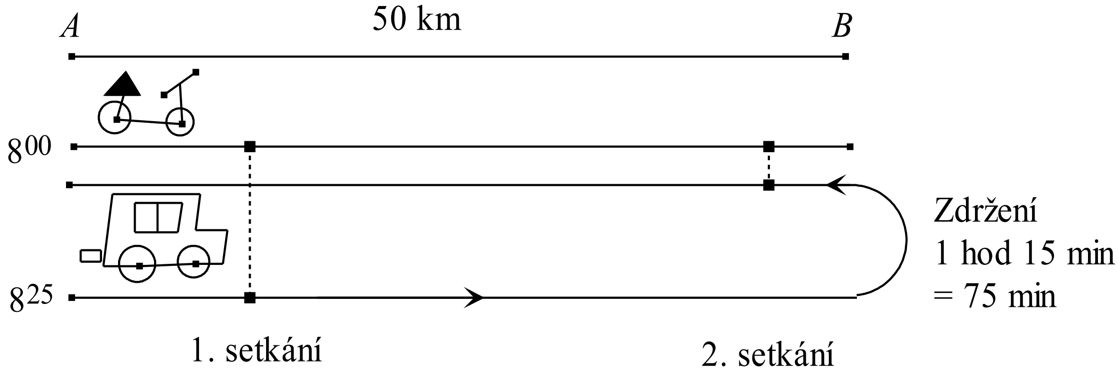
Ze zadání víme, že za jednu sekundu urazí dlužník jednu jednotku délky, věřitel dvě jednotky délky a tramvaj deset jednotek délky. Doba, kterou potřebuje věřitel, nežli se dostane k východu, je 10 sekund, za tu dobu ujede tramvaj $10 \cdot 10$ jednotek délky (tedy 100 jednotek délky). Také dlužník jde dále podél tratě, a nežli se věřitel dostane k východu tramvaje, ujde dlužník dalších 10 délek. Dlužník má tedy před věřitelem náskok 110ti délek. (Poté je již řešení analogické s řešením příkladu 3.) Nyní již známe náskok a známe také relativní rychlost, kterou se věřitel přibližuje k dlužníkovi ($v = v_1 - v_2$, kde $v_1 = 2$ j/s je rychlost věřitele a $v_2 = 1$ j/s je rychlost, kterou se pohybuje dlužník.). Z těchto údajů lehce vypočítáme, za jak dlouho doběhne věřitel dlužníka.

Víme, že $s = v \cdot t$ a tedy $t = \frac{s}{v}$, t tedy vypočítáme jako $t = \frac{110}{1}$, odtud $\underline{t = 1\,\text{min}\,50\,\text{s}}$.

Závěr. Věřitel doběhne dlužníka po 1 minutě a 50 sekundách.

Příklad 7. V 8 hodin ráno vyjel cyklista z *A* do 50 km vzdáleného *B*. Když ujel 10 km, předjelo ho auto, které vyjelo z *A* v 8 hodin 25 minut. Řidič automobilu dojel do *B*, tam se zdržel 1 hodinu 15 minut, a potom se opět vracel do *A*. Zpáteční cesta mu trvala o třetinu kratší dobu než cesta tam. Cyklistu potkal 5 km před *B*. V kolik hodin se řidič automobilu vrátil do *A*?

Řešení.



Obr. 3.2.6. Úlohy o setkávání

Čas, za který auto dojede z *A* do *B*, označíme t. Na zpáteční cestu potřebuje auto již jen $\frac{2}{3}t$. Celkový čas, který strávil řidič automobilu na cestě z *A* do *B* a zpět (včetně zdržení v *B*) je tedy roven $t + \frac{2}{3}t + 75 = \frac{5}{3}t + 75$. Potřebujeme určit t.

Ze zadání dále víme, že řidič automobilu vyjel o 25 minut později než cyklista a dojel ho po 10 kilometrech (tedy v $\frac{1}{5}$ cesty). Z těchto údajů si můžeme vyjádřit rychlost cyklisty, jako

$v = \dfrac{10}{25 + \dfrac{t}{5}}$, což po úpravě dává $v = \dfrac{50}{125 + t}$ km/min.

Pokud známe rychlost a délku trasy můžeme vypočítat dobu t_1, kterou potřeboval cyklista na cestu z *A* do *B*.

$$t_1 = \frac{s}{v}$$

$$t_1 = \frac{50}{\frac{50}{125+t}}$$

$$t_1 = (125+t)\ \text{min}$$

Po druhé se cyklista a auto potkají v $\frac{9}{10}$ cesty, tedy dobu t_1, která uplyne, můžeme vyjádřit jako

$$t_1 = \frac{9}{10}(125+t),\ \text{neboli}\ t_1 = \frac{225}{2} + \frac{9}{10}t.$$

Doba t_2, která uplyne, nežli do druhého místa setkání dojede auto je rovna součtu doby, kterou potřebuje auto na cestu z *A* do *B*, o kterou se zdrželo v *B* a kterou potřebuje, aby se dostalo do $\frac{1}{10}$ cesty zpět.

$$t_2 = t + 75 + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3t}$$

$$t_2 = 75 + \frac{16}{15}t$$

V okamžiku, kdy se potkají auto a cyklista, potřebují oba (cyklista i řidič automobilu) stejnou dobu. Tyto dvě rovnice tedy můžeme porovnat. Nesmíme ale zapomenout přičíst čas, o který vyjelo auto dříve k času t_2 (nebo odečíst tento čas od času t_1), poté by tyto časy měly být stejné. Dostali jsme dvě rovnice o dvou neznámých, tudíž z nich již vyjádříme čas t, který nám říká, za jak dlouho dojede auto z *A* do *B*.

$$t_1 = t_2 + 25$$

$$\frac{225}{2} + \frac{9}{10}t = 75 + \frac{16}{15}t + 25$$

$$\frac{1}{6}t = \frac{25}{2}$$

$$\underline{t = 75\ \text{min}}$$

Nyní zbývá pouze dopočítat dobu t_{ABA}, než se automobil vrátí zpět do *A* (tedy včetně zdržení v *B*).

$t_{ABA} = \frac{5}{3}t + 75$

$t_{ABA} = \frac{5}{3} \cdot 75 + 75$

$\underline{t_{ABA} = 200 \text{ min}}$

Nyní pouze přičteme 200 minut (tedy 3 hodiny a 20 minut) k času, ve kterém auto vyjelo.

$t_{návratu} = 8 \text{ hod } 25 \text{ min} + 3 \text{ hod } 20 \text{ min}$

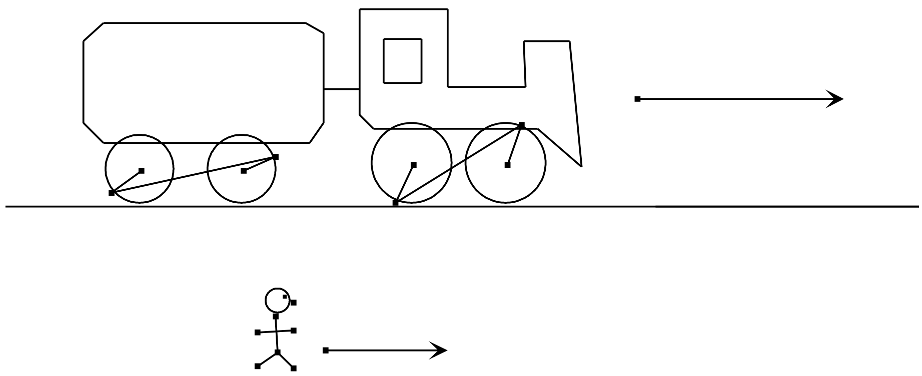
$\underline{t_{návratu} = 11 \text{ hod } 45 \text{ min}}$

Závěr. Řidič automobilu se vrátil do *A* v 11 hodin a 45 minut.

Příklad 8. Opravář metra jde pěšky podzemní drahou podél trati metra v Mexiku. Každých 5 minut projíždí proti němu souprava a každých 6 minut jej míjí souprava jedoucí ve směru jeho chůze. V okamžiku, kdy došel na místo, kde měl vykonat jakousi opravu, jej míjela souprava. Za jak dlouho projede kolem tohoto místa další souprava stejným směrem? Předpokládáme, že soupravy jezdí v obou směrech stejně rychle a ve stejných vzdálenostech od sebe.

Řešení.

Tento příklad si na začátku rozdělíme na dvě situace. První situací bude situace, kdy opravář jde stejným směrem, kterým jezdí soupravy.

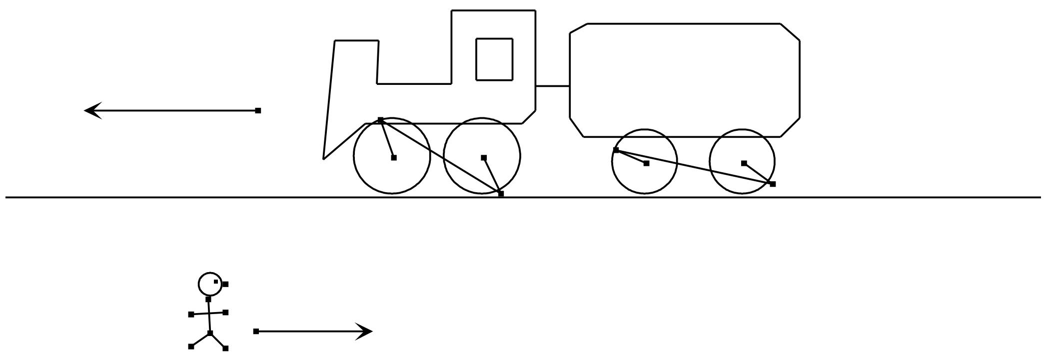


Obr. 3.2.7. Úlohy o setkávání

Označíme si s odstup jednotlivých souprav, v jejich rychlost a u rychlost opraváře.

Pak musí platit $s = (v - u) \cdot 6$.

Druhý případ nastane, pokud soupravy jezdí opačným směrem, než jde opravář.



Obr. 3.2.8. Úlohy o sekávání

Při stejném označení jako u předchozí situace, musí platit vztah $s = (v + u) \cdot 5$.

Těmito dvěmi úvahami získáme dvě rovnice, ze kterých vypočítáme, čemu se rovná s.

$$s = 6 \cdot (v - u)$$
$$s = 5 \cdot (v + u)$$
$$\overline{6v - 6u = 5v + 5u}$$
$$v = 11u$$
$$s = 6 \cdot (11u - u)$$
$$s = 60u$$

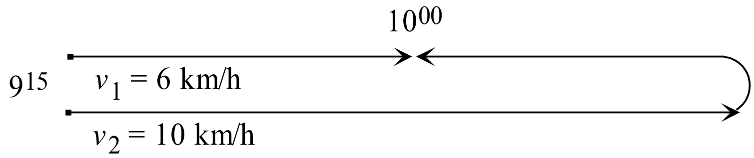
Nyní znovu použijeme vztah $s = v \cdot t$, ze kterého si vyjádříme čas t. Do vzorce $t = \frac{s}{v}$ dosadíme, vše co známe.

$$t = \frac{s}{v}$$
$$t = \frac{60u}{11u}$$
$$t = \frac{60}{11} \text{ min}$$
$$t \doteq 5{,}45 \text{ min}$$
$$\underline{t \doteq 5 \text{ min } 27 \text{ s}}$$

Závěr. Kolem tohoto místa projede další souprava za 5 minut a 27 sekund.

Příklad 9. Dva delfíni plují oceánem po přímce rychlostí 6 km/h. Najednou se jeden oddělí a pluje dopředu rychlostí 10 km/h. Po nějaké době se obrátí a vrátí se zpět. Pomalejší delfín mezitím nemění směr ani rychlost plavby. V kolik hodin se rychlejší delfín obracel zpět, jestliže se od sebe oddělili v 9 hod 15 minut a opět se setkali přesně v 10 hodin?

Řešení.



Obr. 3.2.9. Úlohy o setkávání

Nejprve si vypočítáme, jakou každý delfín uplave vzdálenost od 9 hodin a 15 minut do 10 hodin (tedy za $\frac{3}{4}$ hodiny).

$$s_1 = \frac{3}{4} \cdot 6$$

$$\underline{s_1 = 4{,}5 \text{ km}}$$

$$s_2 = \frac{3}{4} \cdot 10$$

$$\underline{s_2 = 7{,}5 \text{ km}}$$

Vypočítáme vzdálenost, kterou uplaval delfín, jenž plaval napřed, navíc.

$$s = s_2 - s_1$$

$$s = 7{,}5 - 4{,}5$$

$$\underline{s = 3 \text{ km}}$$

Vzdálenost 3 kilometry, je vzdálenost, kterou uplaval navíc delfín, který plaval napřed a poté se zase vrátil ke druhému delfínovi. Tedy pokud nás zajímá, v kolik hodin se otáčel (t), musíme počítat pouze cestu zpět $\left(\frac{1}{2}s\right)$. Pokud známe vzdálenost, kterou delfín uplaval, i rychlost, jakou plaval, umíme zjistit i dobu, kterou potřeboval delfín k uplavání této vzdálenosti. Nakonec odečteme čas (t_0), který delfín potřeboval na návrat k druhému delfínovi od 10 hodin a vyjde nám čas, ve který se musel delfín obracet, aby se setkal s druhým delfínem přesně v 10 hodin.

$$t_0 = \frac{\frac{1}{2}s}{v}$$

$$t_0 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3}{10}$$

$$\underline{t_0 = \frac{3}{20}\,\text{hod}}$$

$$t = 10 - \frac{3}{20}$$

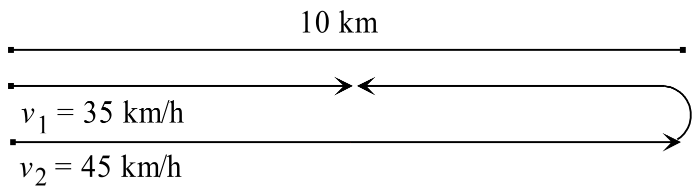
$$t = \frac{197}{20}\,\text{hod}$$

$$\underline{t = 9\,\text{hod}\ 51\,\text{min}}$$

Závěr. Delfín se musel obracet zpět v 9 hodin a 51 minut.

Příklad 10. Skupina cyklistů trénovala před závodem na silnici. Všichni jeli pohromadě rychlostí 35 km/h. Náhle se jeden od nich oddělil a jel dopředu rychlostí 45 km/h. Ujel 10 kilometrů, pak se obrátil a vracel se stejnou rychlostí zpět. Jaká doba uplynula od okamžiku, kdy opustil skupinu, do jeho návratu?

Řešení.



Obr. 3.2.10. Úlohy o setkávání

Cyklista ujede vzdálenost $s_1 = 10\text{ km}$ za dobu t_0. Rychlost, kterou jede tento cyklista, bude označovat v_1 a rychlost, kterou jede skupina cyklistů, budeme značit v_2.

$$t_0 = \frac{s_1}{v_1}$$

$$t_0 = \frac{10}{45}$$

$$\underline{t_0 = \frac{2}{9}\ \text{hod}}$$

Měli bychom si uvědomit, že po celou tuto dobu pojede dále i skupina. Vzdálenost s_2, kterou tato skupina ujede, vypočítáme pomocí následujícího vztahu.

$$s_2 = v_2 \cdot t_0$$

$$s_2 = 35 \cdot \frac{2}{9}$$

$$\underline{s_2 = \frac{70}{9}\ \text{km}}$$

Nyní vypočítáme vzdálenost mezi cyklistou a skupinou, jelikož poté můžeme spočítat, za jak dlouho se opět setkají.

$$s = s_1 - s_2$$

$$s = 10 - \frac{70}{9}$$

$$\underline{s = \frac{20}{9}\ \text{km}}$$

Dobu t_1 vypočítáme pomocí součtu vzdáleností, které cyklista a skupina cyklistů ujedou, nežli se setkají.

$$s = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_1$$

$$s = (v_1 + v_2) \cdot t_1$$

$$\frac{20}{9} = (45 + 35) \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{\frac{20}{9}}{35 + 45}$$

$$\underline{t_1 = \frac{1}{36}\ \text{hod}}$$

Tato doba společně s časem, který potřebuje cyklista k ujetí 10 kilometrů, nám říká, jak dlouho byl cyklista mimo skupinu.

$$t = t_0 + t_1$$

$$t = \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$$

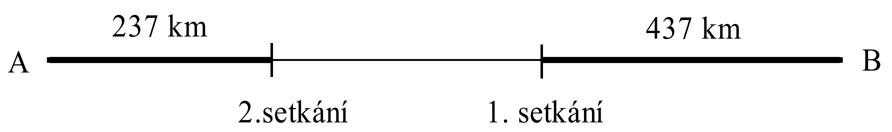
$$t = \frac{1}{4}\ \text{hod}$$

$$\underline{t = 15\ \text{min}}$$

Závěr. Od okamžiku, kdy cyklista opustil skupinu, do jeho návratu uplynulo 15 minut.

Příklad 11. Z místa A a B vyletěla současně letadla rovnoměrným pohybem proti sobě. Poprvé se setkala ve vzdálenosti 437 kilometrů od B. Po příletu do míst B, A se každé letadlo zdrželo půl hodiny na svém stanovišti (v místě přistání) a pak vyletělo stejnou rychlostí jako při prvním letu zpět. Při tomto zpátečním letu se setkala 237 kilometrů od A. Určete vzdálenost $|AB|$.

Řešení.



Obr. 3.2.11. Úlohy o setkávání

Vezměme si nejprve první setkání. Použijeme vzorec $t = \frac{s}{v}$ a dosadíme do něj informace, které máme o prvním setkání. Délka s je délka celé dráhy z A do B. První letadlo, které letělo z místa A, uletělo dráhu dlouhou $s_1 = (s - 437)$ kilometrů a letělo rychlostí v_1. Druhé letadlo, které letělo z místa B, uletělo dráhu dlouhou $s_2 = 437$ kilometrů a letělo rychlostí v_2. Čas do prvního setkání t_1 je stejný pro obě letadla (vyletěla ve stejný okamžik). Když dosadíme do vzorce $t = \frac{s}{v}$ a porovnáme obě pravé části, dostaneme následující rovnici.

$$t_1 = \frac{s - 437}{v_1}$$

$$t_1 = \frac{437}{v_2}$$

$$\frac{s - 437}{v_1} = \frac{437}{v_2} \tag{1}$$

Nyní si podobně vyjádříme druhé setkání. Od prvního do druhého setkání uletělo první letadlo dráhu $s_3 = 437 + s - 237$ a letělo (stejně jako do prvního setkání) průměrnou rychlostí v_1. Druhé letadlo uletělo od prvního do druhého setkání dráhu dlouhou $s_4 = s - 437 + 237$ a letělo průměrnou rychlostí v_2. Čas do druhého setkání t_2 je opět stejný pro obě letadla. Opět dosadíme do vztahu $t = \frac{s}{v}$ a porovnáme pravé strany.

$$t_2 = \frac{437 + s - 237}{v_1}$$

$$t_2 = \frac{s - 437 + 237}{v_2}$$

$$\frac{s - 437 + 237}{v_2} = \frac{437 + s - 237}{v_1} \tag{2}$$

Vynásobením rovnice (1) a (2) nám z rovnice vypadnou proměnné v_1, v_2 a dostaneme rovnici o jedné proměnné.

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow \quad \frac{(s - 437) \cdot (s - 437 + 237)}{v_1 \cdot v_2} = \frac{437 \cdot (437 + s - 237)}{v_1 \cdot v_2} \quad / v_1 \cdot v_2$$

$$(s - 437) \cdot (s - 200) = 437 \cdot (s + 200)$$

$$s^2 - 637s + 87\,400 = 437s + 87\,400$$

$$s^2 = 637s + 437s \quad / s$$

$$\underline{s = 1074 \text{ km}}$$

Závěr. Vzdálenost $|AB|$ je rovna 1074 kilometrů.

3.2.1 Úlohy na procvičení

Úloha 1. Pan Václav vyšel na výlet v 7 hodin ráno a šel průměrnou rychlostí 5 km/h. V 10 hodin dopoledne (téhož dne) vyjel za ním na kole jeho syn rychlostí 17 km/h. Kolik bylo hodin, když ho dohonil?
[11 hodin 15 minut]

Úloha 2. Při vojenském cvičení vyjela z tábora v 6 hodin vojenská kolona rychlostí 40 km/h. O hodinu později za ní byla vyslána motospojka jedoucí rychlostí 70 km/h. Za jakou dobu dostihne spojka kolonu?
[2 hodiny a 20 minut]

Úloha 3. Jedeme na kole podél Labe z Jaroměře do Pardubic (celkem 47 kilometrů). Pod Kunětickou horu dorazíme asi po 2 hodinách a 15 minutách jízdy. Zde si chvilku odpočineme. Do Pardubic nám pak zbývá asi 6 kilometrů. Za jak dlouho tam dorazíme, pojedeme-li stále stejnou rychlostí?
[Asi 20 minut]

Úloha 4. Při cyklistických závodech jel peloton průměrnou rychlostí 40 km/h. Jeden závodník ztratil hned na počátku závodu defektem 2 minuty. Jak dlouho pak musel jet rychlostí 50 km/h, aby opět dostihl peloton?
[8 minut]

Úloha 5. Dva přátelé Jan a Lukáš se vydali na výlet. Vyjeli současně z jistého místa toutéž cestou. Jan jel na kole průměrnou rychlostí 20 km/h, Lukáš na motocyklu průměrnou rychlostí 60 km/h. Lukáš se s přítelem dohodl, že dojede na paseku vzdálenou 70 km (měl tam dozor nad prací dřevorubců) a hned se vrátí naproti Janovi. Až se potkají, odpočinou si, snědí přesnídávku a vrátí se společně domů. Za jak dlouho od okamžiku výjezdu se oba přátelé opět setkali?
[1 hodina 45 minut]

Úloha 6. V 9 hodin vyjel Pavel na kole z místa *A* do místa *B* rychlostí 15 km/h. V 9 hodin a 45 minut vyjel Petr z *B* do *A* rychlostí 20 km/h. Oba přátelé se chtěli setkat přesně v polovině cesty a uspořádat tam piknik. Podařilo se jim dojet do této poloviny současně? V kolik hodin se setkali a kolik každý z nich ujel?
[Ve 12 hodin, oba ujeli 45 kilometrů]

Úloha 7. Průzkumná loď eskadry dostala za úkol prokoumat moře 70 mil ve směru, ve kterém se pohybuje eskadra. Přitom eskadra pluje rychlostí 35 mil/h a průzkumná loď rychlostí 70 mil/h. Určete, za jak dlouhou dobu se průzkumná loď vrátí k eskadře.
[1 hodina 20 minut]

Úloha 8. Vlastní rychlost plavidla je rychlost, jakou by plavidlo mělo na klidné vodní hladině jezera. Z místa *A* vyplul člun s vlastní rychlostí 3 km/h po proudu řeky a současně s ním vyplul z místa *B,* nacházejícího se 10 kilometrů po proudu od *A*, motorový člun směrem k *A*. Vlastní rychlost motorového člunu je 12 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od *A* se obě lodě potkají, je-li rychlost proudu 2 km/h.
[Za 40 minut, $\frac{10}{3}$ kilometrů od *A*]

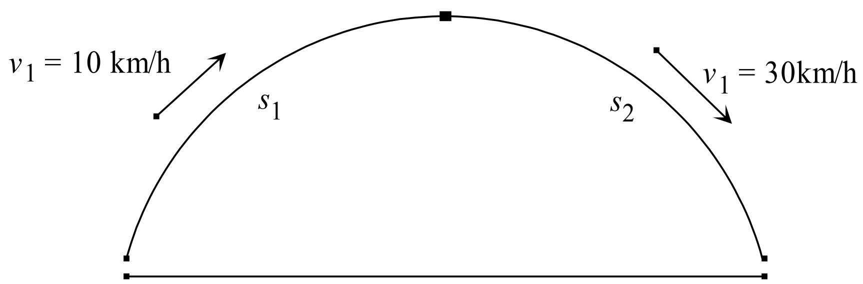
Úloha 9. Autobus jel z místa *A* do místa *B* rychlostí 65 km/h, přičemž po každých šestnácti kilometrech měl desetiminutovou přestávku. Takových zastávek je celkem pět ($|AB|$ = 96 km). Současně s autobusem vyjel z místa *B* naproti autobusu cyklista rychlostí 21 km/h. Jak daleko od *A* dojde k setkání?
[64 km]

3.3 Další úlohy

Ve třetí části mé sbírky příkladů jsou úlohy na zaměřené na výpočet průměrné rychlosti, úlohy s komplikovanými texty a v druhé části obtížnější nestandardní úlohy.

Příklad 1. Cyklista jede nejprve do kopce stálou rychlostí 10 km/h a potom urazí stejnou dráhu z kopce stálou rychlostí 30 km/h. Určete jeho průměrnou rychlost.

Řešení.



Obr. 3.3.1. Další úlohy

Průměrnou rychlost vypočítáme jako poměr celkové délky trasy a celkového času, který bude cyklista potřebovat na vyjetí a sjetí kopce.

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

Pokud za t_1 a t_2 dosadíme $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$; $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$, dostaneme

$$v = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}.$$

Dále víme, že délka trasy s_1 je stejně dlouhá jako délka trasy s_2 ($s_1 = s_2 = s$). Z této úvahy vidíme, že $s_1 + s_2 = 2s$. Pokud toto všechno znovu dosadíme do naší rovnice, dostaneme následující rovnici.

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}}$$

$$v = \frac{2s}{\frac{v_2 + v_1}{v_1 \cdot v_2} \cdot s}$$

$$v = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Jak vidíme, průměrnou rychlost vypočítáme jako aritmetický průměr rychlostí. Když nyní dosadíme dílčí rychlosti, dostaneme hledanou průměrnou rychlost, kterou jede cyklista.

$$v = \frac{2 \cdot 10 \cdot 30}{10 + 30}$$

$$v = \frac{600}{40}$$

$$\underline{v = 15 \text{ km/h}}$$

Závěr. Cyklista jel průměrnou rychlostí 15 km/h.

Příklad 2. Osobní vlak po odjezdu z nádraží jel průměrnou rychlostí 34 km/h, za 2 hodiny vyjel za ním rychlík a dostihl ho ve stanici, vzdálené od výchozího nádraží 136 kilometrů. Jaká byla průměrná rychlost rychlíku?

Řešení. Ze zadání víme, v jaké vzdálenosti od nádraží se potkají, neboli jakou vzdálenost oba vlaky ujedou, nežli se potkají. Z tohoto údaje si můžeme zjistit, jak dlouho pojede osobní vlak, nežli ho rychlík dostihne. Tento čas vypočítáme pomocí vzorce $t = \frac{s}{v}$.

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{136}{34}$$

$$\underline{t = 4 \text{ hod}}$$

Osobní vlak pojede vzdálenost, nežli ho dojede rychlík, 4 hodiny. Ze zadání dále víme, že rychlík pojede o dvě hodiny méně, tedy 4 – 2 = 2 hod.
Nyní zbývá pouze dopočítat rychlost rychlíku v, kterou ujede vzdálenost 136 kilometrů za 2 hodiny.

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{136}{2}$$

$$\underline{v = 68 \text{ km/h}}$$

Závěr. Rychlík musí jet průměrnou rychlostí 68 km/h.

Příklad 3. Turista se na prohlídku stezky vydal ve 3 hodiny odpoledne a její prohlídku chtěl ukončit za 2 hodiny. Kdyby šel rychlostí 4,2 km/h, dorazil by do cíle o čtvrt hodiny později, tj. v 17 hodin a 15 minut. Jakou rychlostí musí jít, aby došel do cíle v 16 hodin 45 minut?

Řešení. Z údajů o rychlosti chůze turisty a času, který na ujití stezky potřebuje, si vypočítáme, jak dlouhá byla délka s prohlídky. K tomuto výpočtu využijeme vztah $s = v \cdot t$. Rychlost v je dána v zadání a je rovna 4,2 km/h, kdežto dobu t, po kterou turista šel prohlídku, si musíme dopočítat. Dobu t vypočítáme odečtením času, ve kterém turista vyšel na prohlídku, od času, kdy prohlídku ukončil.

$$s = v \cdot t$$

$$s = 4{,}2 \cdot (17{,}25 - 15)$$

$$\underline{s = 9{,}45 \text{ km}}$$

Když máme vypočítanou délku turistovy prohlídky, můžeme vypočítat, jakou rychlostí musí turista jít, aby ji dokončil v požadovaných 16 hodin a 45 minut. Tuto rychlost vypočítáme pomocí stejného vzorce jako trasu, pouze s tím rozdílem, že tentokrát si vyjádříme rychlost v_0.

$$v_0 = \frac{s}{t}$$

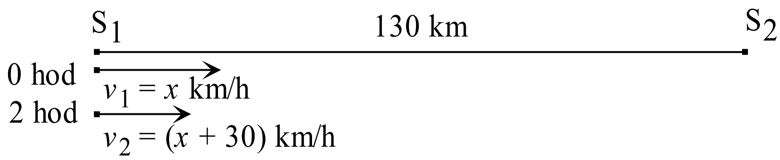
$$v_0 = \frac{9{,}45}{16{,}75 - 15}$$

$$\underline{v_0 = 5{,}4 \text{ km/h}}$$

Závěr. Turista musí jít rychlostí 5,4 km/h, aby dokončil prohlídku v 16 hodin 45 minut.

Příklad 4. Do stanice vzdálené 130 kilometrů vyjede osobní vlak, za 2 hodiny po něm rychlík. Rychlík ujede za hodinu o 30 kilometrů víc než osobní vlak. Proto dojede k cíli o 10 minut dřív. Jaké jsou průměrné rychlosti obou vlaků?

Řešení.



Obr. 3.3.2. Další úlohy

Nejprve si shrneme, co všechno již známe ze zadání.

$s = 130 \text{ km}$

$v_1 = x \text{ km/h}$

$v_2 = (x + 30) \text{ km/h}$

$t_1 = y \text{ hod}$

$t_2 = \left(y - \frac{13}{6} \right) \text{hod}$

Kde s je vzdálenost stanic; v_1, v_2 jsou rychlosti, kterými jedou osobní vlak (v_1) a rychlík (v_2); t_1 je doba, za kterou dojede osobní vlak do stanice vzdálené 130 kilometrů; t_2 je doba, za kterou rychlík dojede do stanice vzdálené 130 kilometrů. Od této doby však musíme odečíst ony 2 hodiny, o které rychlík vyjel později a 10 minut $\left(\frac{1}{6}\text{hod}\right)$, o které přijel dříve, abychom mohly porovnat jízdu osobního vlaku a rychlíku.

Nyní si z informací, které jsme si vypsali, sestavíme dvě rovnice o dvou neznámých, které vyjádříme pomocí vztahu $s = v \cdot t$. První rovnice bude vyjadřovat pohyb osobního vlaku, druhá rychlíku.

$$130 = x \cdot y$$

$$\underline{130 = (x + 30) \cdot \left(y - \frac{13}{6}\right)}$$

$$y = \frac{130}{x}$$

$$130 = (x + 30) \cdot \left(\frac{130}{x} - \frac{13}{6}\right)$$

$$130 = x \cdot \frac{130}{x} + 30 \cdot \frac{130}{x} - x \cdot \frac{13}{6} - 30 \cdot \frac{13}{6}$$

$$0 = \frac{3\,900}{x} - \frac{13x}{6} - 65$$

$$0 = 3900 \cdot 6 - 13x \cdot x - 65 \cdot 6x$$

$$0 = 23\,400 - 13x^2 - 390x$$

$$0 = -x^2 - 30x + 1800$$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 720}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm 90}{-2}$$

$$\underline{x_1 = 30 \text{ km/h}}$$

$$x_2 = -60 \text{ km/h} \quad \text{NELZE}$$

Jak vidíme x_1 nám vyšlo 30 km/h a x_2 vyšlo - 60 km/h, toto řešení rovnice je pro nás nesmyslné, jelikož rychlost nemůže být záporná. Nyní když známe rychlost v_1 ($v_1 = x$) dopočítáme rychlost v_2.

$$v_2 = x + 30$$

$$v_2 = 30 + 30$$

$$\underline{v_2 = 60 \text{ km/h}}$$

Závěr. Průměrná rychlost osobního vlaku je 30 km/h, průměrná rychlost rychlíku je 60 km/h.

Příklad 5. Vlak má ujet 20 kilometrů z *A* do *B* konstantní rychlostí. Jednou vlak dojel touto rychlostí do poloviny cesty, tam se zdržel 3 minuty a musel svou rychlost zvýšit o 10 km/h, aby dojel do *B* včas. Podruhé se vlak zdržel v polovině cesty 5 minut. Jak rychle musel jet zbytek cesty, aby dojel včas?

Řešení. Tento příklad může na první pohled vypadat složitěji. Při řešení budu počítat se vzdáleností $s = 10\ \text{km}$, jelikož vše, co máme zadáno, se odehrává pouze na polovině trati. Vztah $s = v \cdot t$ nám vyjadřuje situaci, která nastala, pokud nedošlo k žádnému zpoždění. Pokud došlo ke zpoždění o 3 minuty $\left(\frac{1}{20}\ \text{hod}\right)$, tak čas, který pojede vlak do stanice *B,* se zkrátí o tři minuty. Tyto 3 minuty musíme odečíst. Zároveň se musí změnit i rychlost. Ta se, jak víme ze zadání, zvýší o 10 km/h. Z těchto údajů si již můžeme vypočítat, jak rychle a jak dlouho jel vlak, když měl zpoždění 3 minuty.

$$s = v \cdot t$$
$$10 = v \cdot t$$
$$10 = (v + 10) \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right)$$

$$t = \frac{10}{v}$$
$$10 = (v + 10) \cdot \left(\frac{10}{v} - \frac{1}{20}\right)$$
$$10 = 10 - \frac{v}{20} + \frac{100}{v} - \frac{10}{20}$$
$$0 = v^2 + 10v - 2000$$
$$\underline{v_1 = 40\ \text{km/h}}$$
$$v_2 = -50\ \text{km/h} \quad \text{NELZE}$$
$$t = \frac{10}{40}$$
$$\underline{t = \frac{1}{4}\ \text{hod}}$$

Jak vidíme, rychlost, kterou jel vlak bez časového deficitu, je 40 km/h. Doba, kterou polovinu trasy jede, je $\frac{1}{4}$ hodiny (tedy 15 minut). Nyní již zbývá pouze dopočítat rychlost v_0, kterou bude muset jet vlak, pokud bude mít zpoždění 5 minut, aby dojel včas do stanice *B*. Pro zjištění rychlosti, kterou musel vlak jet, aby dohnal 5ti minutovou ztrátu, využijeme opět vzorec $s = v \cdot t$, kde rychlost $v_0 = 40 + x$ (40 km/h jede vlak bez časového deficitu, jelikož měl vlak zpoždění musí jet rychleji o *x* km/h) a čas

$t_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$ ($\frac{1}{4}$ hodiny je doba, kterou vlak jede bez zpoždění, to ale musíme odečíst.

Zpoždění je 5 minut tedy $\frac{1}{12}$ hodiny).

$$10 = (40 + x) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right)$$
$$10 = 10 + \frac{x}{4} - \frac{10}{3} - \frac{x}{12}$$
$$0 = 2x - 40$$
$$x = 20$$

Nyní již pouze dopočítáme rychlost v_0, kterou musí jet vlak, pokud má 5 minut zpoždění.

$$v_0 = 40 + x$$
$$v_0 = 40 + 20$$
$$\underline{v_0 = 60 \text{ km/h}}$$

Závěr. Vlak musí jet rychlostí 60 km/h, aby dojel do stanice včas.

Příklad 6. Internát jisté hornické školy je od ní značně vzdálen a žáci musí být přiváženi do školy autobusem na osmou hodinu ranní. Jestliže autobus se žáky pojede rychlostí 30 km/h, přijede do školy příliš brzo – o 30 minut dříve. Jestliže pojede rychlostí 20 km/h, přijede naopak příliš pozdě – také o 30 minut. Jak je vzdálen internát od školy a jak rychle má jet autobus, aby přijel ke škole přesně v 8 hodin ráno? Předpokládáme, že okamžik odjezdu autobusu od internátu je pevně stanoven.

1. možnost řešení. Pokud pojede autobus rychlostí $v_1 = 30$ km/h, ujede celou trasu *s* za dobu t_1, která je rovna času *t* zkrácený o 30 minut. Pokud pojede autobus rychlostí

$v_2 = 20\ \text{km/h}$, ujede celou trasu s za dobu t_2, která je o 30 minut delší než požadovaný čas t.

Vyjádříme si pohyb autobusu, pokud pojede rychlostí 30 km/h a poté si druhou rovnicí vyjádříme pohyb autobusu při rychlosti 20 km/h, pomocí vzorce $s = v \cdot t$. Z těchto dvou rovnic vypočítáme dobu t, jakou pojede autobus tak, aby přijel do školy včas a délku trasy autobusu s.

$$s = v_1 \cdot \left(t - \frac{1}{2} \right)$$
$$\underline{s = v_2 \cdot \left(t + \frac{1}{2} \right)}$$
$$s = 30 \cdot \left(t - \frac{1}{2} \right)$$
$$\underline{s = 20 \cdot \left(t + \frac{1}{2} \right)}$$
$$s = 30t - 15$$
$$s = 20t + 10 \quad / \cdot (-1)$$
$$0 = 10t - 25$$
$$10t = 25$$
$$\underline{t = 2{,}5\ \text{hod}}$$
$$s = 30t - 15$$
$$\underline{s = 60\ \text{km}}$$

Nyní již známe dobu t, kterou pojede autobus, aby přijel do školy přesně na 8 hodinu, a známe také vzdálenost s internátu od školy. Dosazením do vzorce $s = v \cdot t$ vypočítáme rychlost v, kterou musí autobus jet, aby dojel do školy včas.

$$v = \frac{s}{t}$$
$$v = \frac{60}{2{,}5}$$
$$\underline{v = 24\ \text{km/h}}$$

Závěr. Autobus musí jet rychlostí 24 km/h, aby dojel z internátu do školy v 8 hodin. Tento internát je od školy vzdálen 60 kilometrů.

2. možnost řešení. Všimněme si, že pokud jede autobus průměrnou rychlostí 20 kilometrů, přijede o 30 minut později, pokud však jede průměrnou rychlostí 30 kilometrů, přijede o 30 minut dříve. Čas, o který přijede autobus dříve při jízdě vyšší rychlostí, je stejný jako čas, o který přijede autobus později, pokud pojede rychlostí nižší. Bude nás zajímat průměrná rychlost těchto dvou rychlostí, jelikož tou by měl autobus přijet přesně na 8 hodinu.
Použijeme vzorec, který jsme si odvodili v příkladu 1. této kapitoly, do kterého dosadíme a spočítáme průměrnou rychlost.

$$v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

$$v = \frac{2 \cdot 30 \cdot 20}{30 + 20}$$

$$\underline{v = 24 \text{ km/h}}$$

Nyní nám zbývá dopočítat vzdálenost internátu od školy. Tuto vzdálenost můžeme vypočítat pomocí následujících úvah. Pokud autobus jede rychlostí 30 km/h ujede za 2 minuty 1 kilometr, pokud pojede rychlostí 20 km/h ujede za 3 minuty 1 kilometr. Z této úvahy vidíme, že pokud autobus pojede rychleji, ujede kilometr o 1 minutu rychleji. Autobus přijede, pojede-li rychleji, o $t_0 = 30 + 30$ min později. Minut, které autobus pomalejší jízdou ztratil, je 60 a jelikož na každém kilometru autobus ztratil 1 minutu, tak i kilometrů musel jet 60.

Závěr. Autobus musí jet rychlostí 24 km/h, aby stihnul dojet z internátu do školy, vzdálené 60 kilometrů, včas.

Příklad 7. Loď plula po řece jedním směrem a pak se navrátila do výchozího místa. Doby celé plavby byla 6 hodin a celkově loď urazila 36 kilometrů. Plula stále stejnou vlastní rychlostí (tj. rychlostí, jakou má na klidné vodní hladině vzhledem k této hladině) a nikde nedělala zastávky. Určete vlastní rychlost lodi, byla-li rychlost proudu 3 km/h.

Řešení. Ze zadání víme, že celá trasa, kterou loď plula je $2s = 36$ kilometrů, tedy cesta tam i zpět. Jedna cesta byla dlouhá $s = 36:2,$ neboli $s = 18$ kilometrů. Dále víme, že rychlost proudu $u = 3$ km/h. Poslední informace, kterou máme k dispozici je čas $t = 6$ hodin, tento čas však nemůžeme, tak jako u délky trasy, vydělit 2, jelikož loď nepluje stále stejnou rychlostí. Loď pluje jednu cestu po proudu, tedy rychlostí $v_1 = v + u,$ kde v je vlastní rychlost lodi. Druhou cestu plula loď proti proudu, tedy rychlostí $v_2 = v - u.$ Nyní vezmeme-li dobu plavby lodi, tak musí být rovna součtu podílů vyjadřujících dobu pro jednotlivé cesty plavby lodi.

$$2t = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$$

$$6 = \frac{18}{v+u} + \frac{18}{v-u}$$

$$6 = \frac{18}{v+3} + \frac{18}{v-3}$$

$$6 = \frac{36v}{v^2 - 9}$$

$$6v^2 - 36v - 54 = 0$$

$$v^2 - 6v - 9 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+36}}{2}$$

$$v_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{72}}{2}$$

$$v_1 = 3 + \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{v_1 \doteq 7{,}24 \text{ km/h}}$$

$$\mathrm{v}_2 = 3 - \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$v_2 \doteq -1{,}24 \quad \text{NELZE}$$

Závěr. Loď plula vlastní rychlostí přibližně 7,24 km/h.

Příklad 8. Cesta z hájovny na nádraží je dlouhá 5 kilometrů. Jednou přijel hajný vlakem a šel z nádraží domů rychlostí 6 km/h. V okamžiku, kdy opustil nádraží, vyšla také z hájovny jeho žena a šla mu naproti rychlostí 4 km/h. S ní vyběhl jejich pes Azor a běžel rychlostí 20 km/h k hajnému, tam se okamžitě otočil a běžel zpět k jeho ženě, od ní opět k hajnému a tak to dělal stále, dokud se oba manželé nepotkali. Kolik kilometrů pes celkem uběhl?

Řešení. Na první pohled by se mohlo zdát, že je potřeba si vyjádřit cestu k hajnému zkrácenou o to co hajný již ušel, potom cestu k ženě hajného a tak pořád dokola dokud se hajný a jeho žena nesetkali.

Řešení je však mnohem jednodušší, stačí si vybrat ze zadání pro nás podstatné informace. Nás bude zajímat především to, že pes Azor běhá rychlostí 20 km/h, a poté nás zajímá, jak dlouho běhá – dokud se nepotkají hajný se svou ženou. Tudíž ze zbývajících informací si vypočítáme, jak dlouho bude trvat, nežli se hajný se svou ženou setkají, a poté pouze dosadíme do vzorce $s = v \cdot t$.

Dobu t, nežli se setkají hajný se svojí ženou, vypočítáme například pomocí relativní rychlosti nebo součtu drah. Zde ukáži výpočet pomocí součtu drah. Výpočet pomocí relativní rychlosti by byl analogický s příkladem 2 z příkladů o setkávání.

$s = s_1 + s_2$, kde $s_1 = v_1 \cdot t$ a $s_2 = v_2 \cdot t$. Potom

$$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$$
$$s = (v_1 + v_2) \cdot t$$
$$5 = (6 + 4) \cdot t$$
$$5 = 10t$$
$$\underline{t = \frac{1}{2}\ \text{hod.}}$$

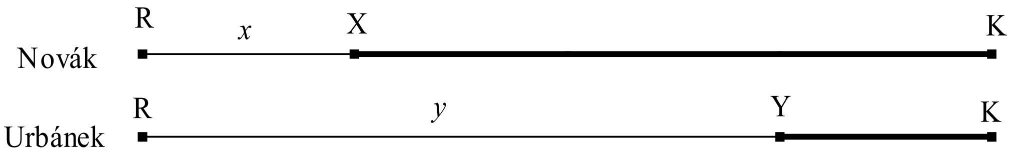
Doba, nežli se setká hajný se svojí ženou, je $\frac{1}{2}$ hodiny. Nyní víme, že Azor běhá $\frac{1}{2}$ hodiny rychlostí 20 km/h. Pomocí vzorce $s = v \cdot t$ dopočítáme, jakou vzdálenost naběhal.

$$s = 20 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\underline{s = 10\ \text{km}}$$

Závěr. Pes Azor uběhne celkem 10 kilometrů.

Příklad 9. Dva piloti, Novák a Urbánek opustili současně letiště na Ruzyni a mířili na letiště Kennedy v New Yorku. Jeden z nich letěl nadzvukovým letadlem, druhý letěl pomaleji než zvuk. V určitém okamžiku se ukázalo, že kdyby Novák uletěl dvakrát více, zbývalo by mu do cíle jeden a půlkrát méně, a kdyby Urbánek uletěl jeden a půlkrát méně, zbývalo by mu do cíle dvakrát více, Jak se jmenoval pilot nadzvukového letadla?

Řešení.



Obr. 3.3.3. Další úlohy

Označme d vzdálenost mezi letišti. Potom víme, že kdyby Novák uletěl vzdálenost x, zbývala by mu uletět trasa dlouhá $d - x.$ Kdyby Novák uletěl $2x$ více, zbývalo by mu do cíle $\frac{2(d-x)}{3}$, do cíle mu bude zbývat také $d - 2x$. Musí tedy platit $\frac{2(d-x)}{3} = d - x.$

Po úpravě dostaneme $x = \frac{d}{4}.$ Novák byl v daném okamžiku v $\frac{1}{4}$ celé délky trasy.

Urbánek uletěl do daného okamžiku vzdálenost y a zbývá mu ještě uletět $d - y.$ Kdyby Urbánek uletěl $\frac{2}{3}y$, zbývalo by mu ještě uletět $2(d - y).$ Potom musí platit

$2(d - y) = d - 2(d - y).$ Po úpravě dostaneme, že $y = \frac{3}{4}d.$ Urbánek v daném okamžiku již uletěl $\frac{3}{4}$ celé délky trasy.

Urbánek byl již v daném okamžiku ve $\frac{3}{4}$ trasy, zatímco Novák byl tom samém okamžiku teprve v $\frac{1}{4}$ trasy. Urbánek letěl rychleji a tedy nadzvukovým letadlem.

Závěr. Nadzvukovým letadlem letěl Urbánek.

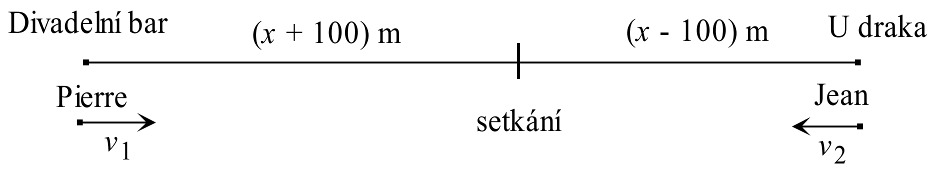
Příklad 10. Každou sobotu mezi patnáctou a šestnáctou hodinou hraji tenis se svým přítelem Filipem. Moje žena pro mne přijíždí automobilem vždy přesně v 16 hodin 10 minut. (Předpokládáme, že vždy jezdí stejnou cestou a stejnou rychlostí tam i zpět.) Jednou Filip onemocněl, já jsem o tom nevěděl a jako obvykle přišel na hřiště. V 15 hodin 5 minut jsem pochopil, že Filip nepřijde, a tak jsem šel domů. Cestou jsem potkal manželku přijíždějící pro mne. Sedl jsem si k ní do auta a domů jsme dojeli o 10 minut dříve než obvykle.
Tato příhoda na první pohled nevypadá zajímavě, ale dovedli byste z ní zjistit vztah mezi rychlostí mé chůze a rychlostí manželčina auta?

Řešení. Máme určit poměr rychlosti v_1, kterou šel muž, a rychlosti v_2 jeho manželky. Jelikož domů přijeli domů o 10 minut dříve, víme, že na jedné cestě ušetřili $10:2 = 5$ minut. S manželkou se tedy setkal o pět minut dříve než obvykle, tedy v 16^{05}. Jelikož víme, že vycházel v 15^{05}, šel trasu, kterou jeho manželka autem ujede za 5 minut, jednu hodinu (tedy 60 minut). Rychlosti jsou v opačném poměru, nežli jsou časy, za které urazí muž a jeho manželka trasu od kamaráda k nim domů. (Vyplývá to ze vztahu
$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$.)
$v_1 : v_2 = 5:60 = \underline{1:12}$

Závěr. Auto jelo rychlostí 12krát větší, nežli byla rychlost jeho chůze.

Příklad 11. V tentýž okamžik, kdy Pierre opustil bar „U draka“, vyšel z „Divadelního baru“ Jean. Pierre mířil do „Divadelního baru“ a Jean do baru „U draka“. Oba šli rovnoměrně, ale každý jinou rychlostí. Když se setkali, prohlásil Pierre, že ušel o 200 metrů více. Měl pravdu, ale Jeanovi se to nelíbilo a proto jej uhodil. Oba se pořádně poprali a pak se každý odebral ke svému cíli. Pohybovali se opět rovnoměrně, ale každý poloviční rychlostí, než původně. Proto zbytek cesty trval Pierrovi 8 minut a Jeanovi 18 minut. Určete délku cesty z jednoho baru do druhého.

Řešení.



Obr. 3.3.4. Další úlohy

Celá délka trasy z baru „U draka“ do „Divadelního baru“ je dlouhá $s = 2x$. Pierre do setkání s Jeanem ušel trasu $s_1 = (x + 100)$ m, do té doby ušel Jean trasu dlouhou $s_2 = (x - 100)$ m. Poměr rychlostí je stejný jako poměr délek tras, které Pierre a Jean ušli. Platí tedy následující rovnice.

$$\frac{x+100}{x-100} = \frac{v_1}{v_2} \qquad (1)$$

Pierre ušel zbývající část trasy od setkání (tedy trasu $x - 100$ m) za 8 minut rychlostí v_1 a Jean ušel trasu dlouhou $x + 100$ m za 18 minut rychlostí v_2. Musí tedy platit

$$x - 100 = 8v_1 \text{ a } x + 100 = 18v_2 \qquad (2)$$

Z (1) a (2) dostáváme $\frac{18}{8} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$, neboli $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$.

Nyní se vrátíme ke vztahu (1) a dosadíme za $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$.

$\frac{x+100}{x-100} = \frac{3}{2} \quad / \cdot (x-100) \cdot 2$

$2x + 200 = 3x + 300$

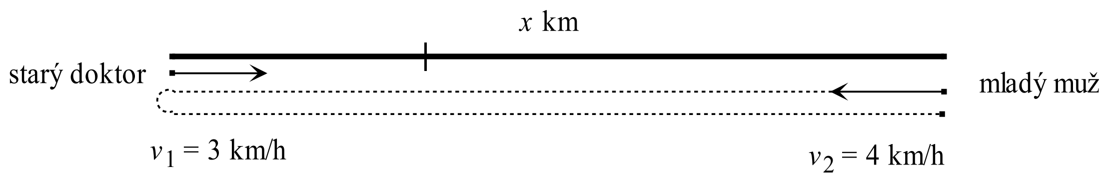
$\underline{x = 500 \text{ m}}$

Délka trasy z baru „U draka“ do „Divadelního baru“ je $2x$, tedy $s = 2 \cdot 500$, což se rovná 1000 metrů (1 kilometr).

Závěr. Délka cesty z jednoho baru do druhého je 1 kilometr.

Příklad 12. „Stavte se zítra u mne,“ řekl starý doktor svému příteli. „Díky. Vyjdu ve tři hodiny. Možná, že i vy dostanete chuť se projít. Jestli ano, vyjděme stejně a setkáme se v polovině cesty.“ „Zapomněl jste, že jsem už starý; ujdu tak 3 km/h. A vy jste mladý, i když půjdete pomalu, ujdete 4 km/h. Musíte mne trochu zvýhodnit.“ „To máte pravdu. Protože ujdu za 1 hodinu o 1 kilometr více než vy, zvýhodním vás tím, že ujdu o 1 kilometr více než vy; to znamená, že vyjdu o čtvrt hodiny dříve. Stačí vám to?“ „To je od vás velmi milé,“ odpověděl doktor. A tak se také stalo. Mladší muž vyšel ve tři čtvrtě na tři a šel rychlostí 4 km/h. Doktor vyšel přesně ve tři a šel rychlostí 3 km/h. Když se setkali, doktor se obrátil a doprovodil svého mladého přítele do svého domu. Teprve po návratu domů si mladý muž uvědomil, že díky čtvrt hodině, o kterou vyšel dříve, ušel on sám ne dvakrát, ale čtyřikrát víc než starý doktor. Jaká je vzdálenost mezi oběma domy?

Řešení.



Obr. 3.3.5. Další úlohy

Pokud si označíme vzdálenost mezi domy x, potom mladý muž ušel vzdálenost $s_1 = 2x$, cestu ke starému doktorovi a zpět domů. Doktor ušel vzdálenost čtyřikrát menší tedy $s_2 = \frac{x}{2}$. V době setkání starý doktor ušel vzdálenost $\frac{s_2}{2} = \frac{x}{4}$, zbývající část neboli $\frac{3x}{4}$ ušel mladý muž.

Nyní si vypočítáme, za jak dlouho ušel starý doktor (t_1) a mladý muž (t_2) vzdálenost, kterou ušli, než se setkali, pomocí vzorce $t = \frac{s}{v}$.

$$t_1 = \frac{\frac{x}{4}}{3}$$

$$t_1 = \frac{x}{12}$$

$$t_2 = \frac{\frac{3x}{4}}{4}$$

$$t_2 = \frac{3x}{16}$$

Jak ze zadání také víme, tak mladý muž šel o čtvrt hodiny déle, musí tedy platit, že

$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$. Po úpravě této rovnice dostaneme $x =$ 2,4 km.

Závěr. Vzdálenost mezi domy je 2,4 kilometrů.

3.3.1 Úlohy na procvičení:

Úloha 1. Chlapec, který venčil svého psa, šel průměrnou rychlostí 3 km/h. Když byli v půlce své obvyklé trasy, začalo pršet. Proto se chlapec obrátil a utíkal se psem domů průměrnou rychlostí 7 km/h. Jaká byla průměrná rychlost chlapce venčícího psa?
[4,2 km/h]

Úloha 1. Automobil ujede nejprve určitou dráhu stálou rychlostí 80 km/h a potom urazí o 50 procent větší dráhu rychlostí 60 km/h. Určete jeho průměrnou rychlost.
[$\frac{200}{3} \doteq$ 66,7 km/h]

Úloha 2. Auto vyjelo z Českých Budějovic do Prahy (156 kilometrů) v 6 hodin ráno. O půl druhé hodiny později vyjel z Prahy do Českých Budějovic motocykl průměrnou

rychlostí o 4 km/h menší než byla průměrná rychlost auto. Určete tyto průměrné rychlosti, víte-li, že auto a motorka projížděly kolem sebe v 7 hodin a 45 minut.
[Auto 77,5 km/h, motocykl 81,5 km/h]

Úloha 3. V 8 hodin vyjel na kole pan N. z Hradce Králové a jel do České Skalice (36 km) průměrnou rychlostí 14 km/h. Za půl hodiny vyrazil za ním ze stejného místa jeho syn Karel. Jakou nejmenší průměrnou rychlostí musel jet, aby otce dohonil dřív, než ukončil jízdu v České Skalici.
[Cca 17,4 km/h]

Úloha 4. V jedné pařížské rodině chystali oslavu mužových úspěchů. Jeho manželka, známá dáma, objednala telefonicky k večeři pečivo: „Oslava začíná v 18 hodin a já potřebuji, abyste mi čerstvé pečivo přivezli přesně v tuto dobu."
Vedoucí pekárny jí odpověděl: „Paní, řidič odveze pečivo hned, jak bude upečeno. Bude-li mít štěstí, a na ulicích nebude žádný provoz, pojede průměrnou rychlostí 60 km/h a přijede k vám v 17 hodin a 45 minut. Bude-li však na ulicích velký provoz, pojede průměrnou rychlostí 20 km/h a přiveze vám pečivo až v 18 hodin 15 minut."
Jakou průměrnou rychlostí musí jet auto, má-li dorazit přesně v 18 hodin?
[30 km/h]

Úloha 5. Loďka jede 10 kilometrů po proudu a pak 6 kilometrů proti proudu, řeka teče rychlostí 1 km/h. V jakých mezích musí být vlastní rychlost loďky, aby celá cesta trvala déle než 3 hodiny a méně než 4 hodiny?

$$\left[v = \left(4; \frac{1}{3} \cdot \left(8 + \sqrt{61}\right) \right) \doteq (4; 5{,}3) \text{ km/h} \right]$$

Úloha 6. Po kmeni stromu leze přímo vzhůru k nejbližší větvi housenka. Housenka je zřejmě velmi unavená nebo má poškozené pohybové ústrojí, protože leze jen s obtížemi: za první minutu urazí 5 dm, za druhou $2\frac{1}{2}$ dm, za třetí $1\frac{1}{4}$ dm, za čtvrtou $\frac{5}{8}$ dm atd. Vzdálenost k první větvi, na které je listí – potrava housenky – je o zlomek

centimetru větší než jeden metr. Za kolik minut doleze housenka k této větvi? A podaří se jí to před západem slunce (20 h), jestliže začala svoje „cestování“ za svítání (4 h)?
[Housenka nikdy nedoleze k první větvi.]

Úloha 7. Markéta vychází ze školy vždy přesně v poledne a jede domů. Ve stejnou dobu jí přijíždí ke škole naproti z domova otec. Jednou byl pěkný den a pan učitel pustil děti ze školy o něco dříve. Za čtvrt hodiny po odchodu potkala Markéta otce, sedla do jeho auta a dojeli domů o 10 minut dříve než obvykle. V kolik hodin vyšla Markéta ze školy?
[11 hodin 40 minut]

Úloha 8. Na jednom konci vesnice měl krám řezník, na druhém pekař. Jednou poslal řezník svého syna do pekařství a ve stejném okamžiku poslal také pekař svého syna do řeznictví. Oba synové si šli naproti rovnoměrnými pohyby. Když se setkali, ušel řezníkův syn o 500 metrů více, než pekařův. Přitom mu zbývalo do cíle 10 minut cesty, kdežto pekařovu synovi zbývalo 22,5 minuty. Jak daleko je pekařství od řeznictví?
[2,5 kilometru]

Úloha 9. Manželé Pospíšilovi se vypravili na návštěvu ke svým příbuzným. Oba vyjeli z domu současně, ale každý svým autem. K příbuzným dorazili také současně, pán měl ale cestou celkové zdržení rovné třetině doby čisté jízdy své manželky. Paní se zdržela po dobu rovnou čtvrtině doby čisté jízdy svého muže. Jaký je poměr rychlostí manželů?
[9:8]

Úloha 10. Na řece se projížděla na lodičce dvě děvčata: Anička a Mařenka. Právě plavala po proudu a nechala se jím volně unášet, když za nimi něco padlo do vody. Byl to míč, který tam hodilo dítě hrající si na břehu. Anička vyskočila z loďky, chvíli plavala proti proudu, chytila míč, obrátila se a dohonila loďku. Předpokládejme, že proti proudu i po proudu vynakládala tutéž energii a vyvíjela tutéž osobní rychlost. Která cesta trvala plavkyni déle, plavba proti proudu nebo po proudu?
[Obě cesty Aničce trvaly stejně dlouho.]

Úloha 11. Dva přátelé, Džin a Čin, bydlí v jedné ulici. Jednou v neděli o deváté hodině se náhodou oba rozhodli, že se navštíví. Oba si zavolali rikšu a vyjeli na ulici. Na ulici se potkali, ale neviděli se, v tom okamžiku Džin právě ujel o 1,5 kilometrů větší vzdálenost než Čin. Džin přijel k přítelovu domu za 6 minut a 45 vteřin. Činovi trvalo ještě 12 minut od střetnutí, než přijel k cíli. Oba rikšové jeli různou, ale stálou rychlostí, kterou udržovali celou cestu, jak daleko od sebe bydlí oba přátelé?
[10,5 kilometrů]

4. Závěr

Ve své diplomové práci jsem se zaměřila na slovní úlohy o pohybu, které se z dnešních učebnic středoškolské matematiky pomalu vytrácejí. Test, který jsem zadala studentům gymnázií, nedopadl příliš úspěšně. Jak test ukázal, studentům nedělají ani tak problémy standardní úlohy, které mají nejspíše dostatečně procvičené, ani jim nedělá větší problémy zorientovat se v dlouhém a nepřehledném textu. Test však také ukázal, že studentům dělá velké problémy představit si vzájemné pohyby.

Navazující druhá část diplomové práce obsahuje sbírku příkladů, která má přiblížit studentům středních škol problematiku řešení slovních úloh o pohybu. Každá část sbírky obsahuje příklady určitého typu, kdy na začátku každé části jsou příklady řešené, na kterých se snažím podrobným postupem studentům ukázat správná řešení, a na ně navazují neřešené příklady, které umožní studentům zjistit, jak se v této problematice orientují.

Na slovních úlohách o pohybu si mohou studenti procvičit orientaci a správnou interpretaci textu, používání vzorečků i převody jednotek a správné vyhodnocení získaných výsledků.

5. Seznam použité literatury

[1] Hejný, M., Koman, M.: *Tři běžci a tři hlemýždi, Učitel matematiky,* roč. 3 (1994/1995), č. 3, str. 12 – 13, Praha: JČMF, 1995.

[2] Husar, P.: *Matematika - Příprava k přijímacím zkouškám na osmiletá gymnázia*, Praha: Fragment, 2004.

[3] Calda, E.: *Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU 1*, Praha: Prometheus, 2002.

[4] Jirásek, F. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné školy a pro studijní obory středních odborných učilišť 1. část*, Praha: Prometheus,1986.

[5] Odvárko, O., Řepová, J., Skříček, L., *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 2. část*, Praha: Prometheus, 1984.

[6] Charvát, J., Houf, J., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*, Praha: Prometheus, 1999.

[7] Půlpán, Z., Drahotský, P.: *Přijímací zkoušky na střední školy*, Praha: SPN, 2001.

[8] Kubešová, N., Cibulková, E.: *Matematika – přehled středoškolské matematiky (edice Matematika)*, Třebíč: Nakladatelství VÝUKA.CZ, 2006.

[9] Kubát, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Praha: SPN, 1986.

[10] Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Praha: Prometheus, 2005.

[11] Kubát, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Praha: Victoria Publishing, 1993.

[12] Kowal, S.: *Matematika pro volné chvíle (zábavou k vědě)*, Praha: SNTL, 1985.

[13] Pereľman, J., I.: *Zajímavá algebra*, Praha: SNTL, 1985.

[14] Novotná, J., Bílá, A., Fritová, H.: *Dohoní gepard klokana?*, Praha: Prometheus, 1997

[15] Leischner, P.: *Metody řešení úloh I a II* – sbírka úloh na adrese http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/externi/kat_mat_82142/metody.pdf