JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

JIHOČESKÝ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 1999-2002

Vypracoval: Jan Baštář
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a všechnu použitou literaturu a další prameny jsem uvedl v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona číslo 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, fakultou elektronickou cestou, ve veřejné přístupové části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Českých Budějovicích dne 25. 11. 2009

. . . .
Jan Baštář

Anotace:

Název:	Jihočeský matematický korespondenční seminář 1999 – 2002
Vypracoval:	Jan Baštář
Vedoucí:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Klíčová slova:	Didaktika, práce s nadanými studenty, metody řešení úloh

Obsahem této práce jsou vyřešené úlohy posledních tří ročníků Jihočeského matematického korespondenčního semináře (1999 – 2002), které mohou být využity jako podklad pro další práci s podobnými typy úloh. Jsou vhodné zejména pro nadané studenty středních škol.

Annotation:

Title:	The South Bohemia correspondnce mathematical competition 1999 – 2002
Author:	Jan Baštář
Supervisor:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Keywords:	Didactics, work with talented students, methods of solving problems

This diploma thesis includes solved problems of the last three years of South Bohemia correspondence mathematical competition (1999 – 2002). These tasks can be used as basis for next work with similar types of excercises. They are suitable especially for talented students at secondary schools.

Poděkování

Za cenné rady a připomínky děkuji panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D., který mi pomáhal při přípravě této diplomové práce.

Děkuji rodině a přátelům za podporu a pochopení během celého studia.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Korespondenční semináře jsou velmi významné z hlediska práce s nadanými studenty ani matematické korespondenční semináře nejsou výjimkou. V dnešní době jich existuje celá řada, a to na středních i základních školách. Jejich oblíbenost u studentů a žáků spočívá především v tom, že poskytují relativně dostatek času na vyřešení jednotlivých úloh, stejně tak i na seznámení se s tématem, které nepatří mezi oblasti matematiky vyučované na příslušném typu školy. Například vyšší kola matematické olympiády nebo populární soutěž Klokan takové možnosti širšímu okruhu zájemců z řad studentů nedovolují.

Korespondenční semináře svou podstatou tak pomáhají nejen rozvíjet myšlení a dosavadní znalosti a vědomosti žáků a studentů, ale rovněž posilují pozitivní vztah k matematice. Domnívám se, že právě tento prvek je v současné době pro potřebnou osvětu a popularizaci matematiky důležitý. V posledních letech pojali žáci, studenti, ale i občanská veřejnost matematiku jako disciplínu nesmírně náročnou a nezajímavou, na mnoha typech škol dokonce zbytečnou. Matematika jako vědní disciplína tak dostává jakýsi "‘punc démoničnosti”. Proto korespondenční semináře, které dávají větší prostor pro širší okruh řešitelů, napomáhají motivovat studenty k tomu, že matematika je pro ně přínosem nejenom v získávání matematických dovedností vyřešením určité úlohy. Do povědomí řešitelů tak proniká poznatek, že matematika je disciplína, která je učí systému v práci, vytrvalosti, trpělivosti a důslednosti.

Jihočeský matematický korespondenční seminář je jedním z mnoha. Vznikaly kolem roku 1980. V té době kromě matematické olympiády existoval i korespondenční seminář Ústředního výboru matematické olympiády, který však byl určen pro vymezenou skupinu nejlepších řešitelů matematické olympiády. Pro ostatní studenty byly úlohy tohoto semináře příliš náročné. Proto se Ústřední výbor matematické olympiády obrátil na krajské garanty matematické olympiády s návrhem, zda by se nepokusili o vytvoření "lehčí formy" korespondenčního semináře určené mj. i pro další zájemce o matematiku. Tak proběhl ve školním roce 1980/81 první ročník Jihočeského matematického korespondenčního semináře, u jehož zrodu stála doc. Lada Vaňatová, která byla hlavním garantem semináře až do roku 1989. Na opravě úloh se tehdy značnou měrou podíleli studenti Pedagogické fakulty. Později při sestavování úloh pomáhal Ladě Vaňatové i Pavel Pech. V roce 1989 byla organizace semináře předána učitelům jihočeských gymnázií. Garantem semináře se stal Pavel Leischner z Gymnázia Strakonice a kromě něj sestavovali a opravovali jednotlivá kola v letech 1989 – 2002 tito učitelé: Michaela Koblížková (Gymnázium Jindřichův Hradec), Marie Štěpánková (Gymnázium Tábor) a Petr Sokol (Pedagogická fakulta v Českých Budějovicích).

V roce 2002 došlo ke krizi a Jihočeský matematický korespondenční seminář zanikl.

Kapitola 2

Ročník 1999/2000

2.1 1. série Funkce

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší.)

   (a) Nakreslete grafy funkcí: $f : y = [x]$ ... "celá část x"
   $g : y = \{x\}$ ... "necelá část x"

   Funkce f přiřazuje reálnému číslu x celé číslo $[x]$ tak, aby platilo:

   $$[x] \leq x < [x] + 1$$
   $$\{x\} = x - [x]$$

   (b) Doplňte vhodné tvrzení:

   $$\text{Pro každé } x \in \mathcal{R} \text{ je } f(x+1) = \ldots \tag{1}$$
   $$\text{Pro každé } x \in \mathcal{R} \text{ je } g(x+1) = \ldots \tag{2}$$

   Správně sepsané tvrzení (2) nám říká, že funkce g je periodická s periodou $p = 1$.

   (c) Funkce h je dána rovnicí $y = |\{x\} - 0,5|$. Zjistěte zda je také periodická, určete její nejmenší periodu a nakreslete graf.

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší.)
Dán kartézský systém souřadnic s navzájem kolmými osami x, y. Představte si další číselnou osu (o stejné jednotce jako má souřadný systém) ve tvaru napnutého nekonečného vlákna, jejíž počátek připevníme v bodě $J = [1, 0]$. Vlákno s vyznačenými obrazy reálných čísel pak "namotáme" opakovaně od bodu $[1, 0]$ k bodu $[-1, 0]$ a zpět.

Obraz reálného čísla x na vlákně tak padne do některého bodu $M = [X_M, Y_M]$ úsečky určené body $[-1, 0]$, $[1, 0]$ například:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow [1,0] \\ 1 &\rightarrow [0,0] \\ 2 &\rightarrow [-1,0] \\ 3 &\rightarrow [0,0] \\ 4 &\rightarrow [1,0] \\ 8 &\rightarrow [1,0] \\ -1 &\rightarrow [0,0] \\ -4 &\rightarrow [1,0] \end{aligned}$$

Zavedeme funkce $s : x \rightarrow Y_M \;\; c : x \rightarrow X_M$

(a) Nakreslete grafy a určete vlastnosti funkcí s, c.

(b) Nakreslete graf funkce $j : y = \sqrt{s^2(x) + c^2(x)}$ a zadejte ji jinou rovnicí.

(c) Zjistěte zda je j periodická funkce a pokud ano, určete její (nejmenší možnou) periodu.

Úvod pro příklady 3-6

Dán kartézský systém souřadnic s navzájem kolmými osami x, y a pravidelný $n-$úhelník vepsaný jednotkové kružnici se středem v počátku souřadného systému tak, že bod $J = [1, 0]$ je jeho vrchol.

Představme si další číselnou osu o stejné jednotce jako má soustava souřadnic ve tvaru napnutého nekonečného vlákna. Počátek připevníme v bodě $J = [1, 0]$ vlákno s vyznačenými obrazy reálných čísel pak "namotáváme" opakovaně od bodu $[1, 0]$ po obvodě $n-$úhelníka (kladnou poloosu proti směru hodinových *ručiček). Obraz reálného čísla x na vlákně tak zapadne do některého bodu $M = [X_M, Y_M]$ na obvodu $n-$úhelníka.*

Zavedeme funkce $s_n\colon x \rightarrow Y_M$
$c_n\colon x \rightarrow X_M$

3. (a) Nakreslete grafy a popište vlastnosti funkcí s_4, c_4. (Viz text předchozí úlohy).
   (b) Dokažte: Pro každé $x \in \mathcal{R}$ platí $c_4 = s_4(x + \sqrt{2})$.
   (c) Doplňte vhodné znaménko do tvrzení:
   Pro každé $x \in \mathcal{R}$ je $(s_4(x))^2 + (c_4(x))^2$ znaménko 1.

4. Zopakujte úlohy z příkladu 3. pro funkce $\overline{s_4}$, $\overline{c_4}$ jejichž zavedení se liší tím, že čtverec vepsaný jednotkové kružnici je nahrazen čtvercem opsaným tak, že J je jedním z bodů dotyku. Konstantu ve tvrzení (b) vhodně obměňte.

5. Nakreslete grafy a popište vlastnosti funkcí s_n, c_n pro :
   (a) $n = 3$
   (b) $n = 6$.

6. Určete funkci t_4, která bude příbuznou funkce tangens. Nakreslete její graf, vysvětlete jeho konstrukci a popište vlastnosti.

Řešení

1. Text úlohy.

   (a) Nakreslete grafy funkcí: $f : y = [x]$ ... "celá část x"
   $g : y = \{x\}$ ... "necelá část x"

   Funkce f přiřazuje reálnému číslu x celé číslo $[x]$ tak, aby platilo:

   $$[x] \leq x < [x] + 1, \quad \{x\} = x - [x]\,.$$

   (b) Doplňte vhodné tvrzení:

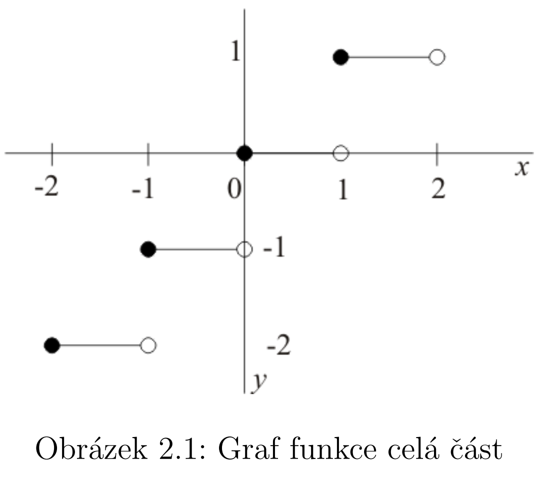
   $$\text{Pro každé } x \in \mathcal{R} \text{ je } f(x+1) = f(x) + 1. \tag{3}$$
   $$\text{Pro každé } x \in \mathcal{R} \text{ je } g(x+1) = g(x). \tag{4}$$

   Správně sepsané tvrzení (4) nám říká, že funkce g je periodická s periodou $p = 1$.

   (c) Funkce h je dána rovnicí $y = |\{x\} - 0,5|$.
   Zjistěte zda je také periodická, určete její nejmenší periodu a nakreslete graf.

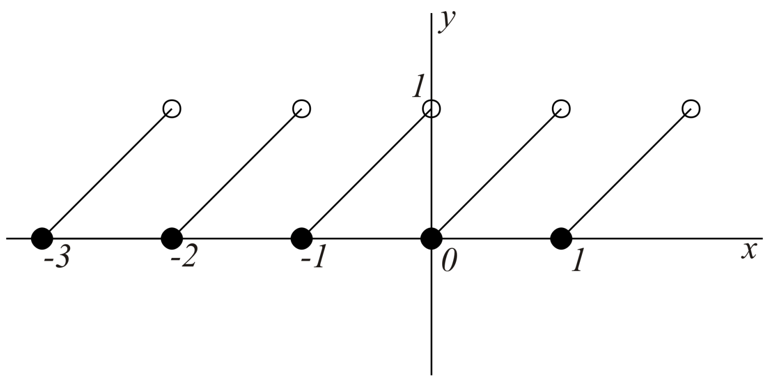
Řešení úlohy.

(a) Graf funkce $f : y = [x]$ y je největší celé číslo $y \leq x$. Např. pro $x = 1,3$ je $y = 1$, pro $x = -2,3$ je $y = -3$. Graf funkce celá část je na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Graf funkce celá část

Graf funkce $g : y = \{x\}$. Graf vzniká po odečtení celé části od určitého čísla. Např. $x = 3,8$ potom $y = 0,8$. Graf funkce g je na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Graf funkce necelá část

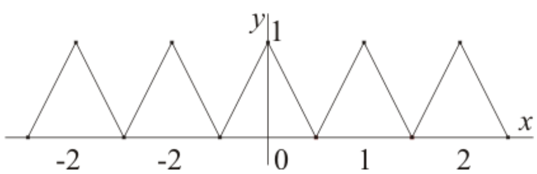
(b)

$$\text{Pro každé } x \in \mathcal{R} \text{ je } f(x+1) = f(x) + 1 \tag{5}$$
$$\text{Pro každé } x \in \mathcal{R} \text{ je } g(x+1) = g(x) \tag{6}$$

(c) Funkce $y = h$ je periodická s periodou $p = 1$.

Důkaz. $h(x+1) = |\{x+1\} - 0,5|$, $h(x+1) = |\{x\} - 0,5| = h(x)$.

Graf funkce $h : y = |\{x\} - 0,5|$ představuje obrázek 2.3.



Obrázek 2.3: Graf funkce h

2. Text úlohy. Dán kartézský systém souřadnic s navzájem kolmými osami x, y. Představte si další číselnou osu (o stejné jednotce jako má souřadný systém) ve tvaru napnutého nekonečného vlákna, jejíž počátek připevníme v bodě $J = [1, 0]$. Vlákno s vyznačenými obrazy reálných čísel pak "namotáme" opakovaně od bodu $[1, 0]$ k bodu $[-1, 0]$ a zpět.

Obraz reálného čísla x na vlákně tak padne do některého bodu $M = [X_M, Y_M]$ úsečky určené body $[-1,0]$, $[1,0]$ například:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \to & [1,0] \\ 1 & \to & [0,0] \\ 2 & \to & [-1,0] \\ 3 & \to & [0,0] \\ 4 & \to & [1,0] \\ 8 & \to & [1,0] \\ -1 & \to & [0,0] \\ -4 & \to & [1,0] \end{array}$$

Zavedeme funkce $s : x \to Y_M$, $c : x \to X_M$.

(a) Nakreslete grafy a určete vlastnosti funkcí s, c.

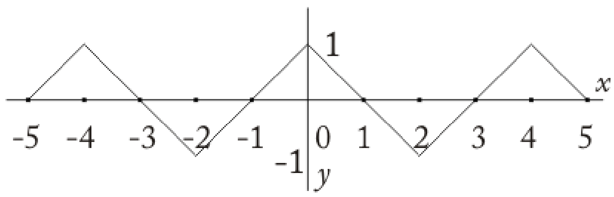
(b) Nakreslete graf funkce $j : y = \sqrt{s^2(x) + c^2(x)}$ a zadejte ji jinou rovnicí.

(c) Zjistěte zda je j periodická funkce a pokud ano, určete její (nejmenší možnou) periodu.

Řešení úlohy.

(a) $s : y = 0$ je konstantní funkce jejímž grafem je osa x.
$c : y = c(x)$ je funkce s periodou $p = 4$ a hodnotami z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

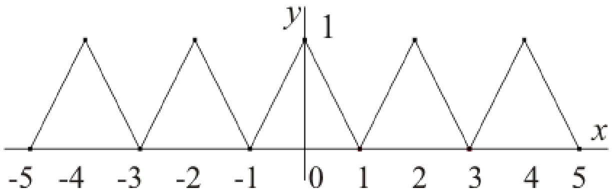
Graf funkce $j : y = c(x)$ je zobrazen na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4:

(b) Různé zápisy funkce j:
$j : y = |c\,(x)|\,,$
$j : y = |X_M|\,,$
$j : y = \left|2 \cdot \left\{\frac{X}{2}\right\} - 1\right|,$
$j : y = |2 \cdot (0,5x - [0,5x]) - 1| = |x - 2 \cdot [0,5x] - 1|\,.$

Graf funkce $j : y = |c(x)|$ je na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5:

Funkce j je periodická a má periodu $p = 2$.

3. Text úlohy.

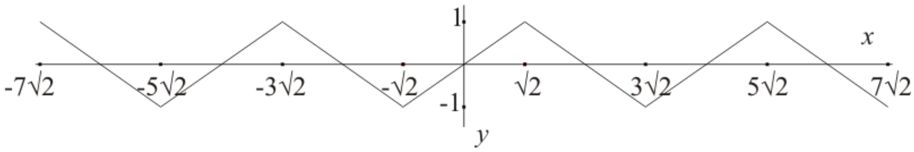
(a) Nakreslete grafy a popište vlastnosti funkcí s_4, c_4 (viz úvod na straně 10).

(b) Dokažte: Pro každé $x \in R$ platí $c_4 = s_4(x + \sqrt{2})$.

(c) Doplňte vhodné znaménko do tvrzení:
Pro každé $x \in R$ je $(s_4(x))^2 + (c_4(x))^2$ znaménko 1.

Řešení úlohy.

(a) Graf funkce $s_4 : y = s_4(x)$ je vidíme na obrázku 2.6.

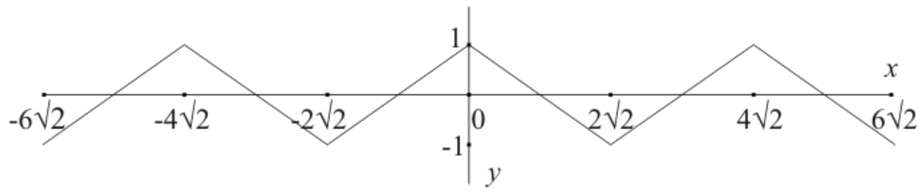


Obrázek 2.6: Graf funkce $y = s_4$

Vlastnosti funkce s_4.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\langle -1, 1\rangle$
Perioda	$p = 4\sqrt{2}$
Sudá/Lichá	L
Rostoucí	$((4k-1)\sqrt{2}, (4k+1)\sqrt{2})$
Klesající	$((4k+1)\sqrt{2}, (4k+3)\sqrt{2})$
Maximum	$(4k+1)\sqrt{2}$
Minimum	$(4k-1)\sqrt{2}$
Omezená	Ano

Graf funkce $c_4 : y = c_4$ je na obrázku 2.7.



Obrázek 2.7: Graf funkce $y = c_4$

Vlastnosti funkce c_4.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\langle -1, 1\rangle$
Perioda	$p = 4\sqrt{2}$
Sudá/Lichá	S
Rostoucí	$((4k-2)\sqrt{2}, (4k)\sqrt{2})$
Klesající	$((4k\sqrt{2}, (4k+2)\sqrt{2})$
Maximum	$(4k\sqrt{2})$
Minimum	$((4k+2)\sqrt{2})$
Omezená	Ano

(b) Pro každé $x \in R$ platí $c_4 = s_4(x+\sqrt{2})$. Lze vyčíst z grafů $\cdots$ posunutím o $-\sqrt{2}$ ve směru osy x přechází graf funkce s_4 do grafu funkce c_4.

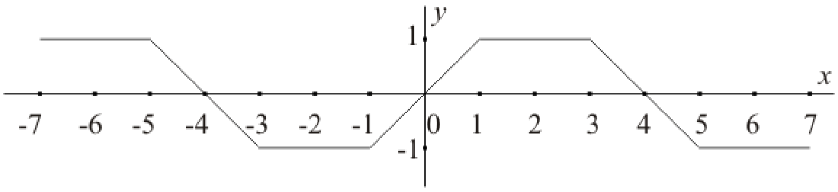
Z definice: přičtením $\sqrt{2}$ na namotané číselné ose se bod M na vepsaném čtverci otočí o $+\ 90^o$ do bodu M': $M = [a, b] \rightarrow M' = [-b, a]$. Tedy pro $s_4(x) = b$, $c_4(x) = a$ je $s_4(x + \sqrt{2}) = a = c_4(x)$.

(c) Platí $(s_4(x))^2 + (c_4(x))^2 \leq 1$. Funkce $y = \sqrt{s_4^2 + c_4^2}$ udává vzdálenost bodu M od počátku souřadného systému.

4. Text úlohy. Zopakujte úlohy z příkladu 3. pro funkce $\overline{s_4}$, $\overline{c_4}$ jejichž zavedení se liší tím, že čtverec vepsaný jednotkové kružnici je nahrazen čtvercem opsaným tak, že J je jedním z bodů dotyku. Konstantu ve tvrzení (b) vhodně obměňte.

Řešení úlohy.

(a) Graf funkce $\overline{s}_4 : y = \overline{s}_4(x)$ si ukážeme na obrázku 2.8.

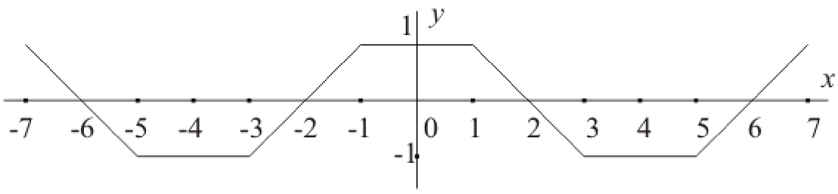


Obrázek 2.8: Graf funkce $y = \overline{s}_4$

Vlastnosti funkce $y = \overline{s}_4$.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\langle -1, 1\rangle$
Perioda	$p = 8$
Sudá/Lichá	L
Rostoucí	$(8k-1, 8k+1)$
Klesající	$(8k+3, 8k+5)$
Maximum	$\langle 8k-1, 8k+3\rangle$
Minimum	$\langle 8k+5, 8k+7\rangle$
Omezená	Ano

Graf funkce $\overline{c}_4 : y = \overline{c}_4(x)$ je na obrázku 2.9.



Obrázek 2.9: Graf funkce $y = \overline{c}_4$

Vlastnosti funkce $y = \overline{c}_4$.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\langle -1, 1\rangle$
Perioda	$p = 8$
Sudá/Lichá	S
Rostoucí	$(8k+5, 8k+7)$
Klesající	$(8k+1, 8k+3)$
Maximum	$\langle 8k-1, 8k+1\rangle$
Minimum	$\langle 8k+3, 8k+5\rangle$
Omezená	Ano

(b) Platí: pro každé $x \in \mathcal{R}$ je $y = \overline{c}_4(x) = \overline{s}_4(x+2)$
Lze vyčíst z grafů. Posunutím o -2 ve směru osy x přechází graf funkce $y = \overline{s}_4$ do grafu funkce $y = \overline{c}_4$.

Z definice: přičtením 2 na namotané číselné ose se bod M na opsaném čtverci otočí o $+90°$ do bodu M' na $M = [a, b] \to M'=[-b, a]$.
Tedy pro: $\overline{s}_4(x) = b, \overline{c}_4(x) = a$ je $\overline{s}_4(x+2) = a = \overline{c}_4(x)$.

(c) Platí $(y = \overline{s}_4(x))^2 + (\overline{c}_4(x))^2 \geq 1$. Funkce $y = \sqrt{s_4^2 + c_4^2}$ udává vzdálenost bodu M od počátku souřadného systému.

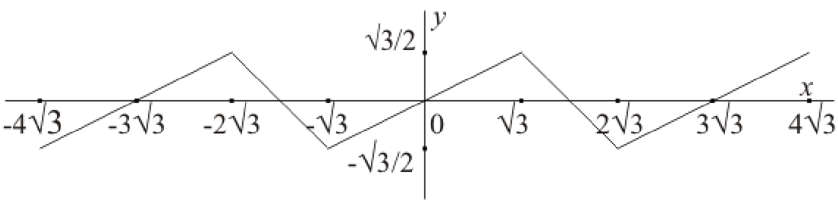
5. Text úlohy. Nakreslete grafy a popište vlastnosti funkcí s_n, c_n pro :

(a) $n = 3$

(b) $n = 6$.

Řešení úlohy.

(a) graf funkce $s_3 : y = s_3(x)$ přestavuje obrázek 2.10.

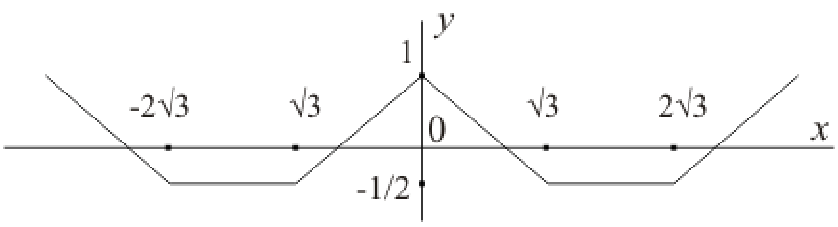


Obrázek 2.10: Graf funkce $y = s_3$

Vlastnosti funkce $y = s_3$.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$
Perioda	$p = 3\sqrt{3}$
Sudá/Lichá	L
Rostoucí	$((3k-1)\sqrt{3}, (3k+1)\sqrt{3})$
Klesající	$((3k+1)\sqrt{3}, (3k+2)\sqrt{3})$
Maximum	$(3k+1)\sqrt{2}$
Minimum	$(3k-1)\sqrt{2}$
Omezená	Ano

Graf funkce $c_3 : y = c_3(x)$.

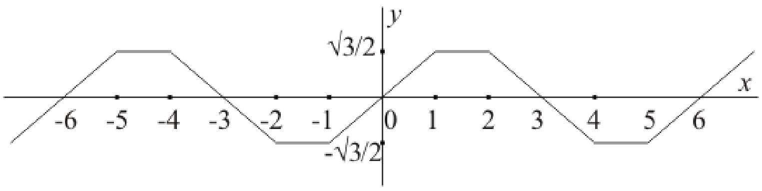


Obrázek 2.11: Graf funkce $y = c_3$

Vlastnosti funkce $y = c_3$.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\langle -0,5; 1 \rangle$
Perioda	$p = 3\sqrt{3}$
Sudá/Lichá	S
Rostoucí	$((3k-1)\sqrt{3}, 3k\sqrt{3})$
Klesající	$(3k\sqrt{3}, (3k+1)\sqrt{3})$
Maximum	$3k\sqrt{3}$
Minimum	$(3k+1)\sqrt{3}, (3k+2)\sqrt{3}$
Omezená	Ano

(b) Graf funkce $s_6 : y = s_6(x)$ je na obrázku2.12.

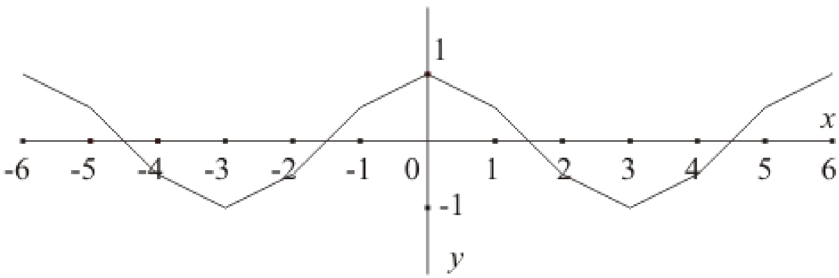


Obrázek 2.12: Graf funkce $y = s_6$

Vlastnosti funkce $y = s_6$.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$
Perioda	$p = 6$
Sudá/Lichá	L
Rostoucí	$((6k-1, 6k+1)$
Klesající	$(6k+2, 6k+4)$
Maximum	$(6k+1, 6k+2)$
Minimum	$(6k+4, 6k+5)$
Omezená	Ano

Graf funkce $c_6 : y = c_6(x)$ je zobrazen na 2.13.



Obrázek 2.13: Graf funkce $y = c_6$

Vlastnosti funkce $y = c_6$.

$D(f)$	$\mathcal{R}$
$H(f)$	$\langle -1; 1\rangle$
Perioda	$p = 6$
Sudá/Lichá	S
Rostoucí	$((6k-3, 6k)$
Klesající	$(6k, 6k+3)$
Maximum	$6k$
Minimum	$6k+3$
Omezená	Ano

6. Text úlohy. Určete funkci t_4, která bude příbuznou funkce tangens. Nakreslete její graf, vysvětlete jeho konstrukci a popište vlastnosti.

   Řešení úlohy. $t_4 : y = s_4(x)/c_4(x)$ musí mít periodu $p = 4\sqrt{2}$, protože jí mají s_4 a c_4. Definiční obor funkce si rozdělíme na intervaly, ve kterých jsou obě funkce s_4 a c_4 lineární.

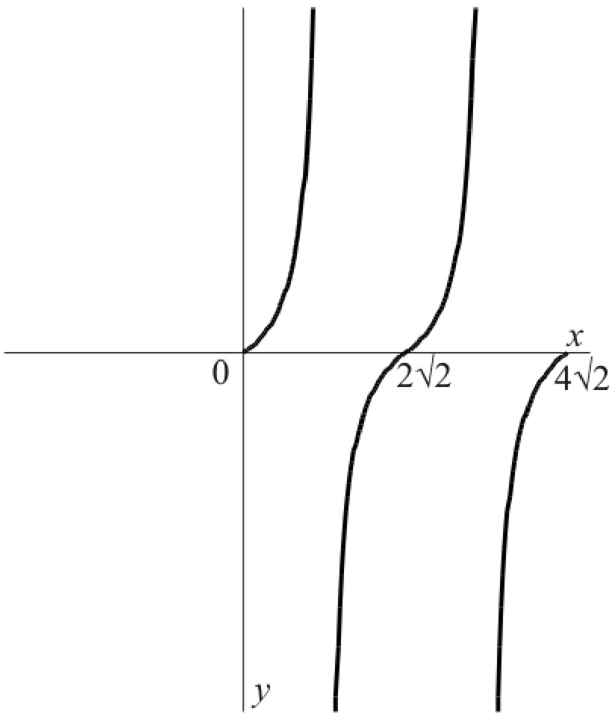
   Vzhledem k periodičnosti stačí rozdělit interval $\left\langle 0; 4\sqrt{2}\right)$:

	$\left\langle 0, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\rangle$	$\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$	$\left(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right\rangle$
s_4	$y = \frac{\sqrt{2}x}{2}$	$y = \frac{-\sqrt{2}x}{2} + 2$	$y = \frac{-\sqrt{2}x}{2} + 2$	$y = \frac{\sqrt{2}x}{2} - 4$
c_4	$y = \frac{-\sqrt{2}x}{2} + 1$	$y = \frac{-\sqrt{2}x}{2} + 1$	$y = \frac{\sqrt{2}x}{2} - 3$	$y = \frac{\sqrt{2}x}{2} - 3$
t_4	$y = \frac{-x}{x-\sqrt{2}}$ $y = \frac{-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - 1$	$y = \frac{x-2\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}$ $y = \frac{-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + 1$	$y = \frac{-x+2\sqrt{2}}{x-3\sqrt{2}}$ $y = \frac{-\sqrt{2}}{x-3\sqrt{2}} - 1$	$y = \frac{x-4\sqrt{2}}{x-3\sqrt{2}}$ $y = \frac{-\sqrt{2}}{x-3\sqrt{2}} + 1$
Graf	část H_1 $S_1 = \left[\sqrt{2}, -1\right]$ jde $[0,0]$	část H_2 $S_2 = \left[\sqrt{2}, 1\right]$ jde $\left[2\sqrt{2}, 0\right]$	část H_3 $S_3 = \left[3\sqrt{2}, -1\right]$ jde $\left[2\sqrt{2}, 0\right]$	část H_4 $S_1 = \left[3\sqrt{2}, 1\right]$ jde $\left[4\sqrt{2}, 0\right]$

   H_i je rovnoosá hyperbola o středu S_i, asymptoty má rovnoběžné se souřadnými osami x, y.

   Poznámka: minimální perioda je $p = 2\sqrt{2} \cdots H_1 \to H_3,\ H_2 \to H_4$.

Definiční obor reálná čísla, kromě lichých násobků $\sqrt{2}$, obor hodnot $\mathcal{R}$, periodická s periodou $p = 2\sqrt{2}$, lichá, neomezená, roste na všech intervalech, kde je definována. Nemá ani maxima ani minima. Graf funkce $t_4 : y = t_4(x)$ je na obrázku 2.14.



Obrázek 2.14: Graf t_4

2.2 2. série Kružnice a kuželosečky

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší.)
   Dány dva různé body A, B takové že $|AB| = 6$ cm. Určitě víte, co je příslušná Thaletova kružnice t. Zjistěte co je Apolloniova kružnice pro body A, B a poměr 2 a pojmenujte ji h. Nakreslete všechny body M, které leží na t i na h.

2. (Jen pro 1. ročník vyššího gymnázia a mladší.)
   Možná jste už slyšeli, že graf kvadratické funkce $f : y = x^2$ je křivka zvaná parabola. Ovšem parabola je definována jako množina všech bodů v rovině jejichž vzdálenosti od zadané přímky d (tzv. řídící přímky) a od daného bodu F (ohniska) jsou stejné.

   Ke grafu funkce $f : y = x^2$ dokreslete řídící přímku d a ohnisko F. Zdůvodněte (pomocí definice a z ní plynoucích vlastností, bez užití vzorců z analytické geometrie).

3. (a) Spočítejte obsah trojúhelníka SOM, kde S, O jsou středy kružnic t a h popsaných v úloze 1 a M je jejich průsečík.
   (b) Výpočet zopakujte s $|AB| = d$ je-li Apolloniova kružnice pro poměr k.

4. Dáno: přímka p na ní dva různé body K, L, tak, že $|KL| = 4$ cm, bod F takový, že $|FL| = 3$ cm, $|FK| = 3,5$ cm, přímka e je rovnoběžná s p a ležící v opačné polorovině určené přímkou p než bod F ve vzdálenosti 5 cm od p. Dvě paraboly P, Q vytínají na přímce p tutéž tětivu KL a nemají další společné body. F je ohnisko paraboly P. Ohnisko G paraboly Q, která má řídící přímku e, leží v opačné polorovině určené přímkou p než bod F. Nakreslete obě paraboly.

5. Dána přímka o na ní dva různé body K, L. Přímka o je na osa paraboly O, body K, L jsou po řadě průsečíky o s tečnou t a normálou n v takovém bodě T paraboly P, že platí $|KT| = 2\,|LT|$ nakreslete parabolu P.

6. Dány různoběžky m, n svírající úhel 60° a bod X, který neleží na žádné z nich. Hyperbola H, (která není nakreslena) s asymptotami m, n prochází bodem X.

(a) Určete tečnu t hyperboly H v bodě X.

(b) Dokreslete hyperbolu H.

Řešení

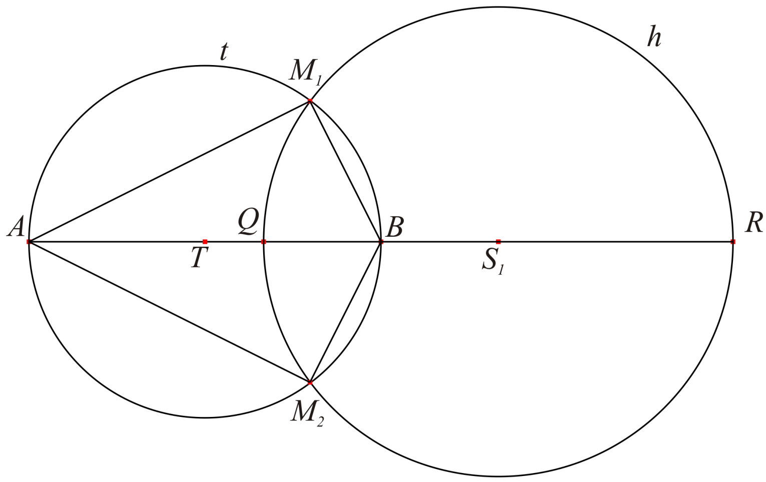
1. **Zadání úlohy.** Dány dva různé body A, B takové že $|AB| = 6$ cm. Určitě víte, co je příslušná Thaletova kružnice t. Zjistěte co je Apolloniova kružnice pro body A, B a poměr 2 a pojmenujte ji h. Nakreslete všechny body M, které leží na t i na h.

   Řešení úlohy. Apolloniova kružnice h je množina všech bodů X v rovině, pro jejichž vzdálenosti od bodů A, B platí: $|AX|:|BX| = 2$.

   (a) Syntetický postup
   Rozbor.
   Jak je již z názvu patrné jde o kružnici h, která musí být symetrická podle AB. Lze snadno najít body Q, R dané vlastnosti. Množina h je pak kružnice opsaná nad průměrem QR se středem S_1.

   Konstrukce.
   1. $t : t$ je kružnice opsaná nad průměrem AB
   2. $Q : Q$ je bod, který dělí úsečku AB v poměru $2 : 1$
   3. $R : B$ je střed úsečky AR
   4. $h : h$ je kružnice opsaná nad průměrem QR
   5. M_1, M_2: průsečíky t s h.

   Průnikem množin t, h je množina $\{M_1; M_2\}$ na obrázku 2.15.



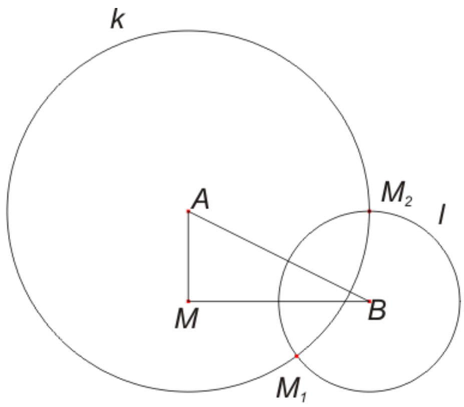
Obrázek 2.15: Konstrukce

   (b) Jiný postup.
   Trojúhelník ABM je zřejmě pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB.

Označíme-li d délku přepony AB, x, $2x$ délky odvěsen a užijeme Pythagorovu větu, můžeme x vyjádřit pomocí d: $5x^2 = d^2$, odtud

$$x = 0,2 \cdot \sqrt{5} \cdot d = 1,2 \cdot \sqrt{5}.$$

Konstrukce přepony o délce $\sqrt{5}$ cm. Přepona pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami o délkách 1 cm, 2 cm. má z Pythagorovy věty délku $\sqrt{5}$ cm. Body M_1, M_2 najdeme jako průsečíky kružnic $k\,(A, 2\text{ cm})$, $l\,(B, 1\text{ cm})$.



Obrázek 2.16: Trojúhelník ABM

2. Text úlohy. Možná jste už slyšeli, že graf kvadratické funkce $f : y = x^2$ je křivka zvaná parabola. Ovšem parabola je definována jako množina všech bodů v rovině jejichž vzdálenosti od zadané přímky d (tzv. řídící přímky) a od daného bodu F (ohniska) jsou stejné.

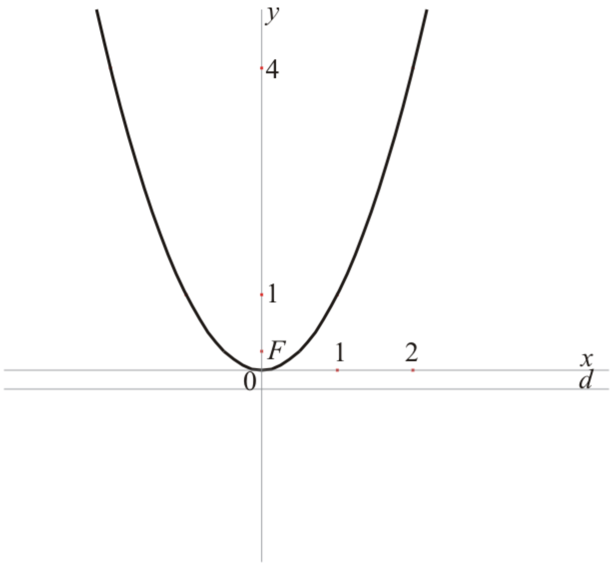
   Ke grafu funkce $f : y = x^2$ dokreslete řídící přímku d a ohnisko F. Zdůvodněte (pomocí definice a z ní plynoucích vlastností, bez užití vzorců z analytické geometrie).

   Řešení úlohy. Z definice paraboly je jasné, že všechny paraboly jsou navzájem podobné (případně shodné, shodují- li se se ve vzdálenosti ohniska od řídící přímky tzv. parametru paraboly p) a že vždy platí:

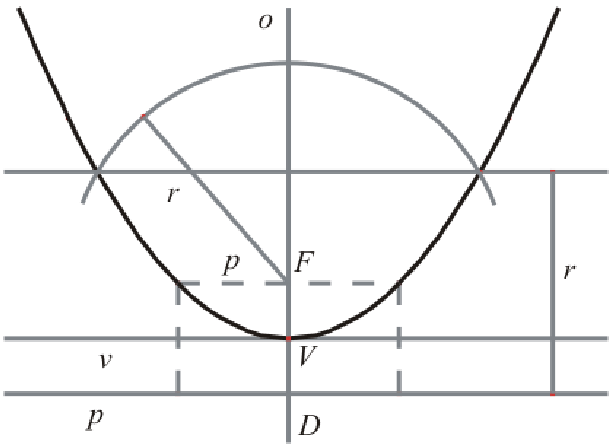
   1) Parabola je symetrická podle osy o jdoucí ohniskem kolmo na řídící přímku
   2) Na ose o leží bod V paraboly, který půlí vzdálenost p ohniska od řídící přímky tzv. vrchol paraboly.
   3) Tětiva paraboly rovnoběžná s řídící přímkou a jdoucí ohniskem F má délku $2p$. Vzdálenost této tětivy od řídící přímky je p, od vrcholové tečny

$p/2$, koncové body tětivy mají od osy paraboly vzdálenost p.

Platnost tvrzení je zřejmá z obrázku 2.17.



Obrázek 2.17: Definice paraboly



Obrázek 2.18: Graf funkce f

Nakreslíme graf funkce f na obr. 2.18 jehož osou je zřejmě osa y, vrcholem počátek souřadnicového systému a hledáme na něm body, které jsou od osy y 2-krát dál než od osy x (například řešíme rovnici ve tvaru $|x| = 2y = 2x^2$). Jsou to zřejmě právě body $R = [1/2; 1/4]$, $S = [-1/2; 1/4]$. Ohnisko je průsečík úsečky RS s osou y, tedy bod $F = [0; 1/4]$. Řídící přímka d je rovnoběžka s osou x jdoucí bodem $[0; 1/4]$.

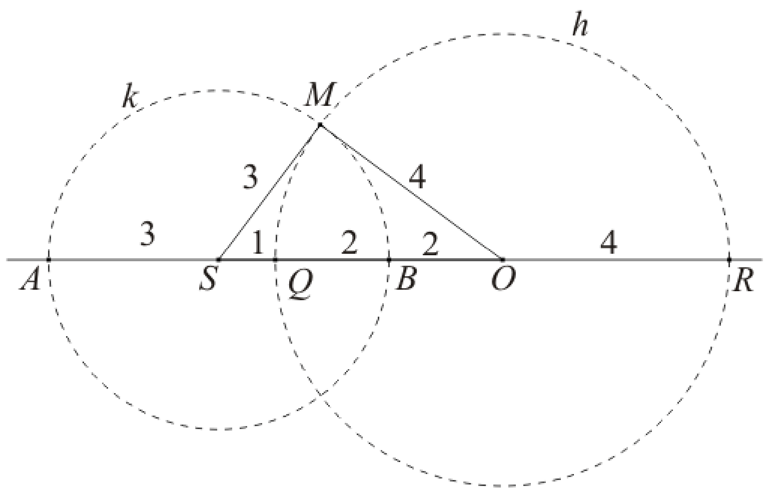
Poznámka: V našem řešení jsme nedokazovali, že graf je skutečně parabolou dle uvedené definice, pouze jsme za předpokladu, že jde o parabolu našli ohnisko F a řídící přímku d.

3. (a) Text úlohy. Spočítejte obsah trojúhelníka SOM, kde S, O jsou středy kružnic t a h popsaných v úloze 1 a M je jejich průsečík.

   (b) Výpočet zopakujte s $|AB| = d$ je-li Apolloniova kružnice pro poměr k.

Řešení úlohy.
Rozbor.
Při označení jako v úloze 1 jsou všechny důležité vzdálenosti vyznačeny v náčrtu 2.19. Vzdálenosti: Víme, že $|AB| = 6$ cm.

$$y = |AR| = 12 \text{ cm}, \quad d = |AB|, \quad y-d = |BR| = 6 \text{ cm}, \quad x = |AQ| = 8 \text{ cm},$$
$$d - x = |QB| = 2 \text{ cm}.$$



Obrázek 2.19: Rozbor

(a) $|SM| = 3$ cm, $|OM| = 4$ cm, $|SO| = 5$ cm. Trojúhelník o stranách $3, 4, 5$ je nejznámějším z pythagorejských trojúhelníků, tedy trojúhelník pravoúhlý. $S = 6$ cm^2 spočítáme z délek odvěsen.

(b) Podmínkou existence Appoloniovy kružnice je kladné $k \neq 1$. Úvahu provedeme dle obrázku pro $k > 1$. (Při $k < 1$ stačí zaměnit označení bodů A, B, čímž se změní poměr na $1/k$).
Platí:

$$|SM| = r_t = \frac{d}{2}, \quad |OM| = r_h = \frac{|RQ|}{2} = \frac{y-x}{2}, \quad |SO| = r_t + r_h - |QB|\,.$$

Platí: $x = |AQ|$ a $y = |AR|$. Odtud a z definice Apolloniovy kružnice dostaneme: $x = k\,|BQ| = k(d-x)$ a $y = k\,|BR| = k(y-d)$.
Potom: $x = kd/(k+1)$ a $y = kd/(k-1)$.
Strany trojúhelníka jsou:

$$|SM| = r_t = \frac{d}{2},$$

$$|OM| = r_h = \frac{|RQ|}{2} = \frac{y-x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{kd}{k-1} - \frac{kd}{k+1}\right) = \frac{kd}{k^2-1}.$$

$$|SO| = r_t + r_h - |QB| = r_t + r_h - (d-x) =$$

$$\frac{d}{2} + \frac{y-x}{2} - d + x = \frac{d(k^2+1)}{2(k^2-1)}.$$

Lze snadno zkontrolovat pomocí obrácení Pythagorovy věty, trojúhelník SOM je pravoúhlý.

$$\frac{d}{2}^2 + \frac{kd}{k^2-1}^2 = \frac{d(k^2+1)}{2(k^2-1)}^2.$$

Potom

$$S = \frac{1}{2}\,|SM|\,|OM| = kd^2\frac{kd^2}{4(k^2-1)}.$$

Poznámka: Tímto řešením dokážeme současně i větu: Pro danou úsečku AB a libovolné k jsou Thaletova a Apolloniova kružnice vždy na sebe kolmé.

4. **Text úlohy.** Dáno: přímka p na ní dva různé body K, L, tak, že $|KL| = 4$ cm, bod F takový, že $|FL| = 3$ cm, $|FK| = 3,5$ cm, přímka e je rovnoběžná s p a ležící v opačné polorovině určené přímkou p než bod F ve vzdálenosti 5 cm od p.

Dvě paraboly P, Q vytínají na přímce p tutéž tětivu KL a nemají další společné body. F je ohnisko paraboly P. Ohnisko G paraboly Q, která má řídící přímku e, leží v opačné polorovině určené přímkou p než bod F. Nakreslete obě paraboly.

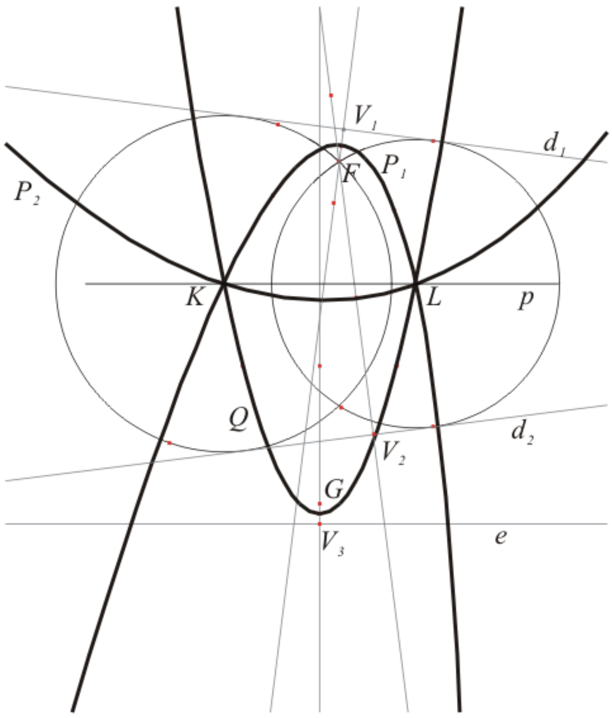
Řešení úlohy.
Rozbor.
1. Parabola Q má řídící přímku e, za osu přímku q, která je osou úsečky KL, ohnisko G takové, že $|GK| = |GL| = 5$ cm je tedy dostatečně určená a lze nakreslit. *Jediná možnost.*

2. Parabola P má ohnisko F, řídící přímku d, od které jsou body K, L stejně vzdálené jako od ohniska F. Řídící přímku najdeme jako společnou tečnu kružnic $k(K, |FK|)$, $l(L, |FL|)$ *Dvě možnosti.*

Konstrukce.
1. G; $|GK| = |GL| = 5$ cm, G leží v opačné polorovině určené přímkou p než bod F.
2. Q; Q je parabola s ohniskem G a řídící přímkou e.
3. Přímka KL, libovolná úsečka KY_1, $Y_1 \in k$, úsečka LY_2 rovnoběžná s KY_1.
4. Přímka $Y_1Y_2 \cap KL$ dostaneme bod Z, Thaletova kružnice nad $LZ \cap$ kružnice l. Přímky d_1, d_2 vedoucí získanými body a bodem Z, společné tečny kružnic $k(K, |FK|)$, $l(L, |FL|$. 5. P_i; P_i je parabola s ohniskem F a řídící přímkou d_i.
6. Zkontrolujeme, zda P_i nemá s Q další společné body.

Nevyhovující parabolu vyloučíme.

Úloha má jediné řešení, které je na obrázku 2.20.



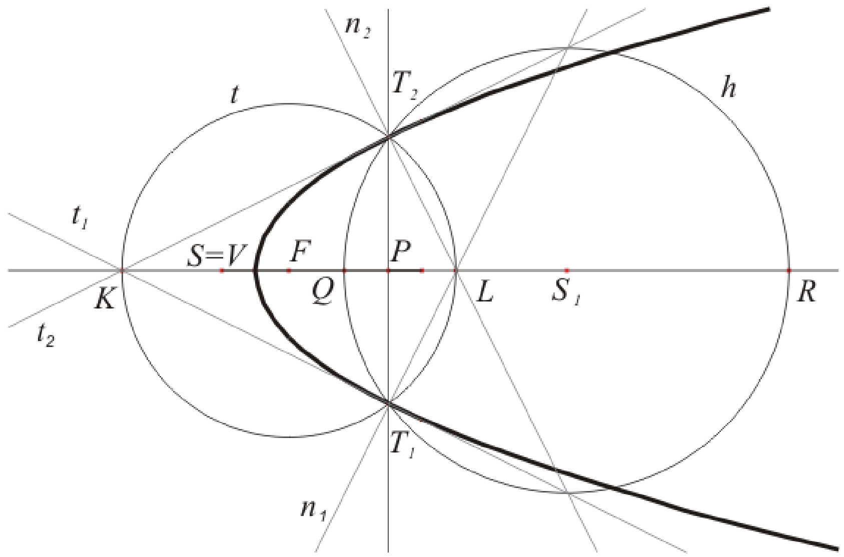
Obrázek 2.20:

5. Text úlohy. Dána přímka o na ní dva různé body K, L. Přímka o je na osa paraboly O, body K, L jsou po řadě průsečíky o s tečnou t a normálou n v takovém bodě T paraboly P, že platí $|KT| = 2\,|LT|$ nakreslete parabolu P.

   Řešení úlohy. Tečna a normála jsou na sebe kolmé, proto leží T na Thaletově kružnici t nad KL. T leží zřejmě na Apolloniově kružnici pro body K, L a poměr 2, kterou v dalším označíme h. Nalezením bodu T jsme převedli na řešení 1. úlohy.

   Dále užijeme větu: Subtangenta paraboly je půlena vrcholem, subnormála je rovna parametru.

   Konstrukce.
   1. T; viz nalezení bodu M v úloze 1.
   2. $P; P$ je kolmý průmět T na o.
   3. $V; V$ je střed KP.
   4. $P; P$ je parabola s osou o, s vrcholem V, s parametrem $p = |PL|$, která prochází bodem T (bodová konstrukce paraboly) na obrázku 2.21.



Obrázek 2.21:

Úloha má jediné řešení (body T sice existují dva. ale na téže parabole).

6. Text úlohy. Dány různoběžky m, n svírající úhel 60° a bod X, který neleží na žádné z nich. Hyperbola H, (která není nakreslena) s asymptotami m, n prochází bodem X.

   (a) Určete tečnu t hyperboly H v bodě X

   (b) Dokreslete hyperbolu H.

Řešení úlohy.

(a) *Rozbor.*
Užijeme větu: Úsek, který vytínají asymptoty libovolné hyperboly na každé její tečně, je půlen příslušným dotykovým bodem. Hledáme nejprve úsečku půlenou bodem X jejíž koncové body leží na přímkách m, n. Tato úloha se běžně řeší v kapitole o shodných zobrazeních.

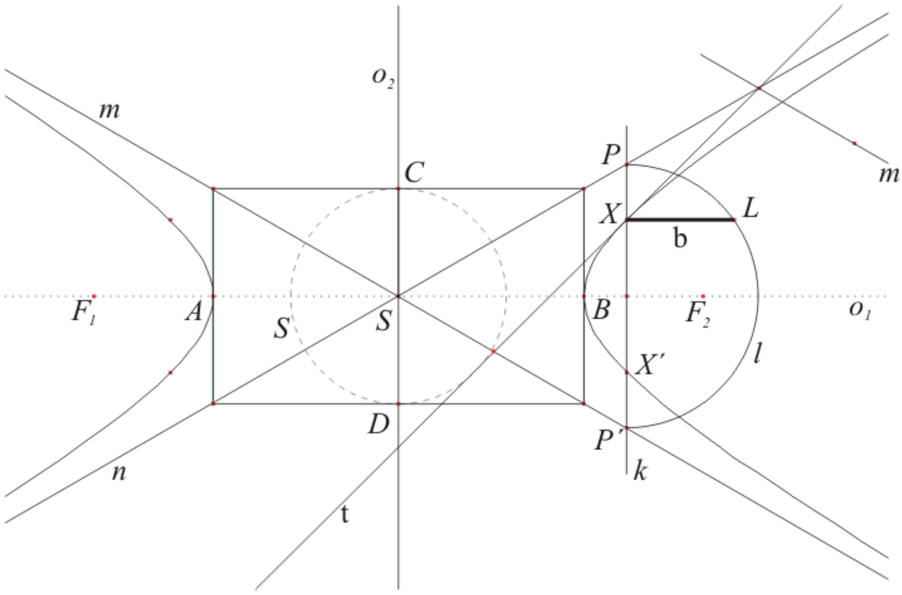
Konstrukce.
1. sestrojíme přímku m', která je s m středově souměrná podle X
2. určíme průsečík N přímek n a m'
3. t je spojnicí bodů N, X.

(b) *Rozbor.*

Již máme sestrojeny asymptoty, bod dotyku X a tečnu t zbývá nám sestrojit samotnou hyperbolu.

Konstrukce.

1. Sestrojíme osy asymptot o_1, o_2.
2. Bodem X vedeme kolmici k na o_1, X' osově souměrný dle o_1.
3. $k \cap m$, n dostaneme body P, P'.
4. Thaletova kružnice l nad P, P'
5. $b \perp k$, $(L, L \cap l)$ b je délka vedlejší poloosy.
6. Kružnice $s(S, b)$ $s \cap o_2$ body C, D.
7. Nyní můžeme sestrojit charakteristický obdélník, dostáváme body A, B.
8. Sestrojíme hyperbolu.



Obrázek 2.22: Hyperbola

2.3 3. série Rovnice

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší)
   Žák měl řešit rovnici:
   $$\frac{x+2}{7x+23} = \frac{x-2}{7(x+1)}$$
   napsal si ji však s chybami: v čitateli na levé straně napsal chybně druhý člen a ve jmenovateli na pravé straně místo znaménka + znaménko −. Navzdory tomu při správném řešení chybně napsané rovnice obdržel správné řešení původní dané rovnice (správný kořen, který mu vyšel jediný). Jak vypadala chybně napsaná rovnice?

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší)
   Řešte v $\mathcal{R}^3$ soustavu rovnic:
   $$\begin{aligned} \frac{yz}{y+z} &= a, \\ \frac{zx}{z+x} &= b, \\ \frac{xy}{x+y} &= c. \end{aligned}$$
   kde a, b, c jsou reálná čísla různá od nuly.

3. Řešte v $\mathcal{R}$ rovnici: $x^2 + |x+3| + |3-x| = 4,5\,|x| + 6$.

4. Řešte v $\mathcal{R}^3$ soustavu rovnic:
   $$\begin{aligned} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2, \\ x^3+y^3+z^3 &= a^3, \end{aligned}$$
   kde a je reálný parametr.

5. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y, pro něž platí:
   $$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y} = 450.$$

6. Určete všechny dvojice reálných čísel m, n tak, aby rovnice:

$$x^4 + 3x^3 + mx^2 - 28x + n = 0$$

měla trojnásobný kořen.

Řešení

1. Text úlohy. Žák měl řešit rovnici:

$$\frac{x+2}{7x+23}=\frac{x-2}{7(x+1)}$$

napsal si ji však s chybami: v čitateli na levé straně napsal chybně druhý člen a ve jmenovateli na pravé straně místo znaménka + znaménko −. Navzdory tomu při správném řešení chybně napsané rovnice obdržel správné řešení původní dané rovnice (správný kořen, který mu vyšel jediný). Jak vypadala chybně napsaná rovnice?

Řešení úlohy.

Vyřešením původní rovnice

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{7x+23} &= \frac{x-2}{7(x+1)} \quad \textit{podmínky } x \neq -1, \quad x \neq 27/3 \\ (x+2)\cdot 7(x+1) &= (x-2)\cdot(7x+23) \\ 12x &= -60 \end{aligned}$$

dostaneme $x=-5$. To dosadíme do rovnice, kterou řešil žák.

$$\begin{aligned} \frac{x+m}{7x+23} &= \frac{x-2}{7(x-1)}, \\ \frac{-5+m}{7\dot{(}-5)+23} &= \frac{-5-2}{7(-5-1)}, \\ (-5+m)\cdot(-42) &= (-7)\cdot(-12), \\ -5+m &= -2. \end{aligned}$$

Po dosazení vypočítáme $m=3$, žák tedy řešil rovnici:

$$\frac{x+3}{7x+23}=\frac{x-2}{7(x-1)}.$$

2. Text úlohy. Řešte v $\mathcal{R}^3$ soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{yz}{y+z} &= a,\\ \frac{zx}{z+x} &= b,\\ \frac{xy}{x+y} &= c,\end{aligned}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla různá od nuly.

Řešení úlohy. Jak je vidět ze zadání, musí být pro nenulová a, b, c i kořeny x, y, z různé od nuly. První rovnice je proto ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{z+y}{yz} = \frac{1}{a}$$

a podobně i zbývající rovnice. Soustavu tedy zapíšeme v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{a}\\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{b}\\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{c}\end{aligned} \tag{7}$$

Sečtením všech tří rovnic dostaneme:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Od této rovnice budeme postupně odčítat jednotlivé rovnice soustavy (7) a upravovat na výsledek:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2abc}{ac+ab-bc}\\ x &= \frac{2abc}{ab+bc-ac}\\ x &= \frac{2abc}{ac+bc-ab}.\end{aligned}$$

3. Text úlohy Řešte v $\mathcal{R}$ rovnici:

$$x^2 + |x+3| + |3-x| = 4,5\,|x| + 6.$$

Řešení úlohy. Mohou nastat čtyři situace.

(a) $(-\propto, -3)$,

(b) $\langle -3, 0\rangle$,

(c) $(0, 3\rangle$,

(d) $(3, \propto)$.

Protože se záměnou x za $-x$ se rovnice nemění, stačí vyřešit jen ty situace kdy je $x \geq 0$ a k nalezeným číslům přidat čísla opačná.
Pro $0 \leq x \leq 3$ má rovnice tvar:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 3 + 3 - x &= 4,5x + 6, \\ x^2 - 4,5x &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Z kořenů rovnice (8) vyhovuje pouze $x_1 = 0$, $x_2 = 4,5$ není z daného intervalu.

Pro $x \geq 3$ nám vyjde

$$\begin{aligned} x^2 + x + 3 - 3 + x &= 4,5x + 6, \\ 2x^2 - 5x - 12 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

$$D = 121, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

a z kořenů kvadratické rovnice (9) vyhovuje pouze první. Kořen 3/2 není z intervalu $\langle 3; \propto)$ Rovnice má tedy kořeny 0 a ± 4.

4. Text úlohy. Řešte v $\mathcal{R}^3$ soustavu rovnic:

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3,$$

kde a je reálný parametr.

Řešení úlohy. Umocněním první rovnice soustavy na druhou dostaneme

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

a odtud využitím druhé rovnice soustavy

$$xy + yz + xz = 0. \tag{10}$$

Umocněním první rovnice soustavy na třetí dále po úpravě máme:

$$a^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + xz) - 3(xyz).$$

Využijeme-li rovnici (10) a třetí rovnici soustavy dostaneme

$$xyz = 0.$$

Je- li $a \neq 0$ plyne z posledních dvou rovnic, že alespoň dvě čísla jsou rovna nule. Kdyby bylo $x = y = z = 0$, muselo by být také $a = 0$. Je-li například $y = z = 0$, dosazením těchto hodnot do první rovnice soustavy dostaneme $x = a$. Další řešení získáme cyklickou záměnou. Řešením soustavy jsou všechny trojice $[x, y, z]$ z množiny $\{[a, 0, 0], [0.a, 0], [0, 0, a]\}$.

5. Text úlohy. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y, pro něž platí:

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 450.$$

Řešení úlohy. Rovnice má po úpravě tento tvar.

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 450.$$

Zřejmě jsou obě čísla x, y různá od nuly. První dva sčítance na levé straně vynásobíme jedničkou napsanou ve tvaru $(x/y)(y/x)$ a potom vytkneme x/y ze všech tří sčítanců. Dostaneme:

$$\frac{x}{y}(y + 1)^2 = 450.$$

Když vezmeme v úvahu, že $450 = 1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ může $(y + 1)^2$ nabývat jen hodnot $1, 9, 25, 225$ a tedy $y \in (\pm 2, \pm 4, -6, 14, -16)$. Postupným dosazením těchto hodnot do $x/y \cdot (y + 1)^2 = 450$ nalezneme příslušná x.

Závěr. $[x, y] \in \{[-900, -2], [100, 2], [-200, -4], [72, 4], [-108, 6], [28, 14]\}$, $\{[-32, -16]\}$.

6. Text úlohy. Určete všechny dvojice reálných čísel m, n tak, aby rovnice:

$$x^4 + 3x^3 + mx^2 - 28x + n = 0$$

měla trojnásobný reálný kořen.

Řešení úlohy. Označme trojnásobný kořen r a jednoduchý kořen s. Platí

$$x^4 + 3x^3 + mx^2 - 28x + n = (x - r)^3(x - s).$$

Po roznásobení dostaneme na pravé straně rovnice polynom, který se rovná polynomu na straně levé. Oba polynomy si jsou rovny jen když mají stejné koeficienty při stejných mocninách proměnné x. Z porovnání koeficientů dostáváme soustavu:

$$-(3r + s) = 3, \quad 3r(r + s) = m, \quad r^3 + 3r^2 s = 28, \quad r^3 s = n.$$

Z první rovnice soustavy vyjádříme s a dosadíme do třetí. Úpravou dostaneme

$$8r^3 + 9r^2 + 28 = 0$$

a odhadneme kořen $r = -2$. Po vydělení kořenovým činitelem $r+2$ obdržíme rovnici

$$8r^2 + 7r + 14 = 0,$$

která nemá reálné kořeny. Je tedy $r = -2$ a dále již snadno dopočítáme $s = 3, \quad m = -6, \quad n = -24.$

2.4 4. série Obsahy a objemy

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Určete obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB, je-li součet délek jeho odvěsen $m = 12$ cm a výška z vrcholu C je $v_c = 5$ cm.

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Všechny strany konvexního $n-$úhelníku jsou tečnami kružnice o poloměru 2 cm. Určete obvod tohoto $n-$úhelníku, je-li jeho obsah:

   (a) $S_1 = 20$ cm^2.

   (b) $S_2 = 12$ cm^2.

3. List papíru má tvar obdélníku o rozměrech $2m, 2n$ (cm), kde $m > n > 0$. Středy delších stran tohoto listu označíme písmeny A, C a středy kratších stran B, D. List přehneme podél úseček AB, BC, CD, DA a AC tak aby vznikl čtyřstěn $ABCD$. Určete objem tohoto čtyřstěnu.

4. Určete obsah trojúhelníku ABC, je-li dána délka a strany BC, velikost úhlu BAC a poloměr r kružnice vepsané.

5. Rovnoběžník $ABCD$ má obsah 312 cm^2. Uvnitř strany AB zvolíme bod E tak, aby $|AE| = 3\,|EB|$ a uvnitř strany AD bod F tak, aby $|FD| = 2\,|AF|$. Průsečík úseček CE a BF označíme G, Určete obsah trojúhelníku BGE.

6. Určete objem čtyřstěnu $ABCD$, má-li jeho síť tvar trojúhelníku s délkami stran 11 cm$, 20$ cm$, 21$ cm.

Řešení

1. Text úlohy. Určete obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB, je-li součet délek jeho odvěsen $m = 12$ cm a výška z vrcholu C je $v_c = 5$ cm.

   Řešení úlohy. Pro daný trojúhelník platí

   $$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab = c^2 + 4S.$$

   Ze zadání tedy obdržíme:

   $$c^2 + 4S = 144,$$
   $$S = \frac{5c}{2}.$$

   Z druhé rovnice vyjádříme c a dosadíme do první, po úpravě máme kvadratickou rovnici

   $$S^2 + 25S - 900 = 0,$$

   která má jediný kladný kořen $S = 20$ cm^2. Nyní musíme ověřit zda daný pravoúhlý trojúhelník vůbec existuje. Provedeme zkoušku, dosadíme vypočtenou hodnotu za S do rovnice $S = 5c/2$ a dostaneme, že $c = 8$ cm. Číslo $b = 12 - a$ dosadíme do Pythagorovy věty

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

   Z rovnice $64 = a^2 + (12-a)^2$obdržíme opět kvadratickou rovnici

   $$a^2 - 12a + 40 = 0,$$

   která má záporný diskriminant. Proto úloha nemá řešení.

2. Text úlohy. Všechny strany konvexního $n-$úhelníku jsou tečnami kružnice o poloměru 2 cm. Určete obvod tohoto $n-$uhelníku, je-li jeho obsah:

   (a) $S_1 = 20$ cm^2.

   (b) $S_2 = 12$ cm^2.

   Řešení úlohy. Nechť $A_1, A_2, \cdots, A_n$ jsou vrcholy $n-$úhelníku a kružnice vepsaná nechť má poloměr r a střed O. Obsah $n-$úhelníku je součtem obsahu trojúhelníků

   $$A_1A_2O, A_2A_3O, \cdots, A_{n-1}A_nO, A_nA_1O$$

se základnami

$$A_1A_2, A_2A_3, A_{n-1}A_n, A_nA_1$$

a stejně velkou výškou r. Proto platí

$$S = (|A_1A_2| + |A_2A_3| + \cdots + |A_{n-1}A_n| + |A_nA_1|)\frac{r}{2}.$$

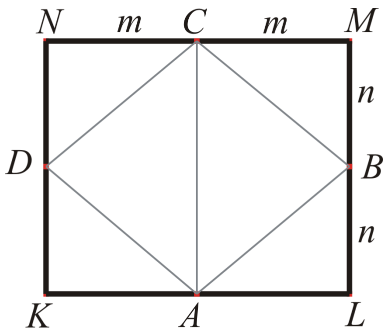
Výraz v závorce nám přestavuje obvod $n-$úhelníku, $o = 2S/r$. Obvod $n-$úhelníku z posledního vztahu již snadno určíme numericky. Je však třeba zapotřebí zvážit za jakých podmínek takový $n-$úhelník existuje. Jeho obvod musí být větší než délka vepsané kružnice:

$$o > 4\pi > 12.$$

Závěr: V případě (a) vychází $o = 20$ cm, v případě (b) by vycházelo $o = 12$ cm, což nevyhovuje podmínce řešitelnosti.

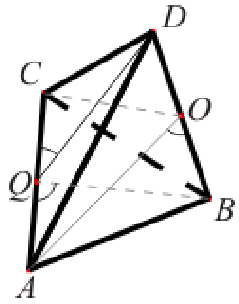
3. **Text úlohy.** List papíru má tvar obdélníku o rozměrech $2m, 2n$ (centimetrů), kde $m > n > O$. Středy delších stran tohoto listu označíme písmeny A, C a středy kratších stran B, D. List přehneme podél úseček AB, BC, CD, DA a AC tak aby vznikl čtyřstěn $ABCD$. Určete objem tohoto čtyřstěnu.

Řešení úlohy. Na obrázku (2.23) je nakreslen původní list papíru.



Obrázek 2.23: List papíru

Na obr. 2.24 situace po přehnutí.

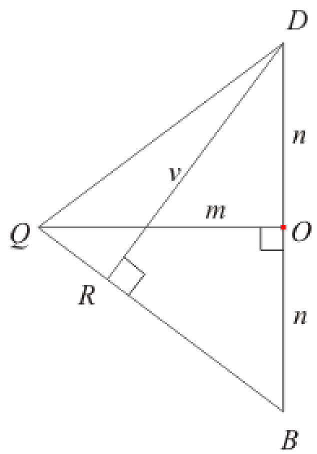


Obrázek 2.24: Přehnutý list papíru

Vrcholy K, L, M, N obdélníkového listu se nyní nachází ve středu O hrany BD čtyřstěnu a proto $|BD| = 2n$. Stěny ACB a ACD jsou rovnoramenné trojúhelníky se společnou základnou AC délky $2n$, jejichž výšky z vrcholů B, D mají společnou patu Q a platí $|BQ| = |DQ| = m$. Obsah podstavy ABC čtyřstěnu je

$$S_p = \frac{|AC| \cdot |QB|}{2} = mn.$$

Tělesová výška DR čtyřstěnu je zřejmě výškou DR trojúhelníku BDQ (obr. 2.25).



Obrázek 2.25: Tělesová výška

Trojúhelníky QBO a DBR jsou pravoúhlé a navíc mají společný úhel při vrcholu B. Jsou tedy podobné. $|DR| / |QO| = |BD| / |BQ|$ a podle Pythagorovy věty pro trojúhelník QBO je

$$|QO| = \sqrt{m^2 - n^2}.$$

Z posledních dvou vztahů dostaneme výšku čtyřstěnu

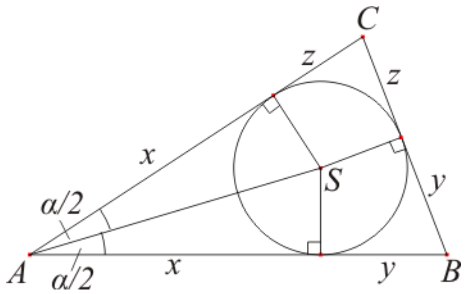
$$v = |DR| = \frac{|BD| \cdot |QO|}{|BQ|} = \frac{2n\sqrt{m^2 - n^2}}{m}.$$

Objem čtyřstěnu je

$$V = \frac{S_p \cdot v}{3} = \frac{2n^2\sqrt{m^2 - n^2}}{3}.$$

4. Text úlohy. Určete obsah trojúhelníku ABC, je-li dána délka a strany BC, velikost úhlu BAC a poloměr r kružnice vepsané.

   Řešení úlohy. Využijeme úvahu z řešení úlohy 2. Viz obr. 2.26.



Obrázek 2.26:

Platí

$$S = (x + y + z) \cdot r, \quad y + z = |BC| = a, \quad x = r \cdot \operatorname{cotg} \alpha/2.$$

Tedy $\quad S = a \cdot r + r^2 \cdot \operatorname{cotg} \alpha/2.$

5. Text úlohy. Rovnoběžník $ABCD$ má obsah 312 cm^2. Uvnitř strany AB zvolíme bod E tak, aby $|AE| = 3\,|EB|$ a uvnitř strany AD bod F tak, aby $|FD| = 2\,|AF|$. Průsečík úseček CE a BF označíme G a průsečík úhlopříčky AC a úsečky BF označme H. Určete obsah trojúhelníka BGE.

   Řešení úlohy. Využijeme větu, která je důsledkem vztahu pro obsah trojúhelníku:

Mají- li dva trojúhelníky shodnou výšku pak poměr jejich obsahů je roven poměru příslušných základen.

Na obrázku 2.27 se trojúhelníky AEG a EBG shodují ve výšce z vrcholu G a navíc $|AE| = 3\,|EB|$. Položme (obsah trojúhelníku EBG) $S_{EBG} = x$ a potom je $S_{AEG} = 3x$. Z podobnosti trojúhelníků AFHca CBH dále máme

$$\frac{|AH|}{|HC|} = \frac{|AF|}{|BC|} = \frac{1}{3}.$$

Odtud plyne, trojúhelníky CHG a AHG mají základny CH a AH v poměru

$$|CH| : |AH| = 3 : 1$$

a mají společnou výšku z vrcholu G. Odtud

$$S_{CHG} = 3S_{AHG}. \tag{11}$$

Můžeme tedy označit $S_{AHG} = y$ a $S_{CHG} = 3y$. Analogicky pro trojúhelníky CHB a AHB platí

$$S_{CHB} = 3S_{AHB} \tag{12}$$

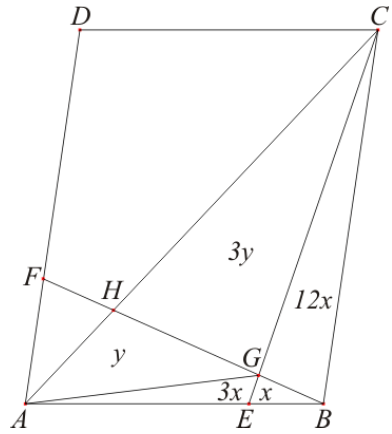
a z rozdílu pravých a levých stran rovnic 12 a 11 plyne

$$S_{CGB} = 3S_{AGB} = 3 \cdot 4x = 12x. \tag{13}$$

Dále zjistíme, že trojúhelník EBC má obsah

$$S = S_{EBC} = S_{EBG} + S_{GBC} = 13x.$$

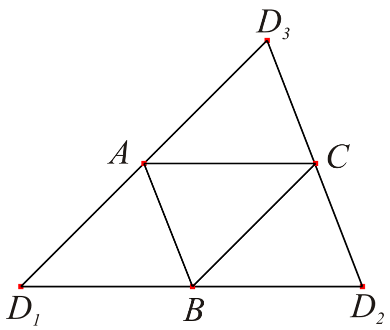
Zároveň je tento obsah roven osmině obsahu rovnoběžníku $ABCD$, neboť $|EB| = |AB|/4$ a výška obou útvarů je stejná. Platí tedy $13x = 39$ a odtud tedy $x = 3\text{cm}^2$.



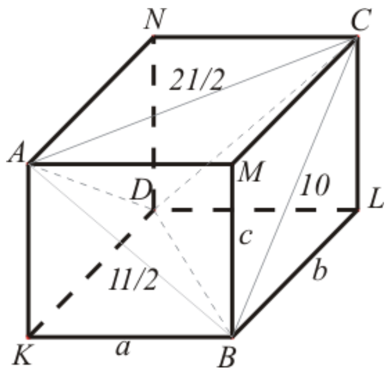
Obrázek 2.27: Rovnoběžnostěn

6. Text úlohy. Určete objem čtyřstěnu $ABCD$, má-li jeho síť tvar trojúhelníku s délkami stran 11 cm, 20 cm, 21 cm.

   Řešení úlohy. Daný čtyřstěn jehož síť je na obrázku 2.28 má každé dvě protější (tj. mimoběžné) hrany stejně dlouhé. Plyne to z obrázku 2.28 a z vlastností středních příček trojúhelníku. Proto mu lze podle obrázku 2.29 opsat rovnoběžnostěn, jehož každá stěna je rovnoběžník se shodnými úhlopříčkami, tj. pravoúhelník. Proto je rovnoběžnostěn kvádrem, pro jehož délky hran při označení dle obrázku 2.29.



Obrázek 2.28:



Obrázek 2.29:

Platí

$$
\begin{aligned}
a^2 + c^2 &= \frac{121}{4} \\
c^2 + b^2 &= 100 \\
a^2 + b^2 &= \frac{441}{4}
\end{aligned}
$$

Vyřešením této soustavy nalezneme

$$a = \frac{9}{2}\ \text{cm}, \quad b = 3\sqrt{10}\ \text{cm} \quad c = \sqrt{10}\ \text{cm}.$$

Pomocí obrázku 2.29 je objem čtyřstěnu $ABCD$ roven třetině objemu celého kvádru.

Každý z trojbokých jehlanů $KBDA$, $LBDC$, $ACHB$ a $ACHD$ má totiž objem $V_1 = abc/6$ a platí

$$V_{ABCD} = V_{KBLDAMNC} - (V_{KBDA} + V_{LBCD} + V_{ACHB} + V_{ACHD}) =$$

$$abc - 4 \cdot \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{3} abc = 45\text{cm}^3.$$

Kapitola 3

Ročník 2000/2001

3.1 1. série Přirozená čísla

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání:

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Určete nejmenší přirozené číslo, jehož třetí mocnina je dělitelná číslem 567567.

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Vyměníme- li v dekadickém zápisu přirozeného čísla n dvě vhodné cifry navzájem, vznikne číslo m, které je o 198 větší než původní číslo n. Navíc platí $m + n = 13776$ Určete všechna taková n.

3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $a_n = 19 \cdot 2^{6n} + 179$ složené tj. a_n není prvočíslo.

4. Délky hran kvádru (v centimetrech) jsou přirozená čísla. Jeho povrch v cm^2 je vyjádřen stejným číslem jako jeho objem v cm^3. Najděte všechny takové kvádry.

5. Určete všechna pěticiferná přirozená čísla $n = \overline{abcba}$, která jsou dělitelná číslem 396 (a, b, c jsou cifry a zápis $n = \overline{abcba}$ znamená $10000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$).

6. Dokažte, že číslo $a_n = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ je pro každé přirozené číslo dělitelné číslem 1897.

Řešení

1. Text úlohy. Určete nejmenší přirozené číslo, jehož třetí mocnina je dělitelná číslem 567567.

   Řešení úlohy. Platí $567567 = 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ hledané číslo je $3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 9009$.

2. Text úlohy. Vyměníme-li v dekadickém zápisu přirozeného čísla n dvě vhodné cifry navzájem, vznikne číslo m, které je o 198 větší než původní číslo n. Navíc platí $m + n = 13776$. Určete všechna taková n.

   Řešení úlohy. Vyřešíme soustavy rovnic:

$$m + n = 13776$$
$$m - n = 198.$$

   Zjistíme, že $n = 6789$ a $m = 6987$. Vidíme, že byly přemístěny cifry 7 a 9.

3. Text úlohy. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $a_n = 19 \cdot 2^{6n} + 179$ složené tj. a_n není prvočíslo.

   Řešení úlohy. Platí

$$\begin{aligned} a_n = 19 \cdot 2^{6n} + 179 &= \\ 19 \cdot 64^n + 179 &= \\ 19 \cdot (63 + 1)^n + 179 &= \\ 19 \cdot 63 \cdot k + 19 + 179 &= \\ 9 \cdot 133 \cdot k + 198 &= \\ 9 \cdot (133k + 22) & \end{aligned}$$

   kde k je celé číslo. Představíme-li si totiž výraz $(63 + 1)^n$ jako součin n stejných výrazů tvaru 63+1, vidíme, že po roznásobení dostaneme 2^n sčítanců, z nichž každý má tvar součinu o n činitelích. Tito činitelé jsou z množiny $\{1; 63\}$. Každý ze sčítanců obsahuje alespoň jednoho činitele 63 s vyjímkou součinu samých jedniček. Proto můžeme položit $(63 + 1)^n = 63 \cdot k + 1$.

   Závěr: Číslo a_n je dělitelné devíti pro každé přirozené n a proto není prvočíslo.

4. Text úlohy. Délky hran kvádru (v centimetrech) jsou přirozená čísla. Jeho povrch v cm^2 je vyjádřen stejným číslem jako jeho objem v cm^3. Najděte všechny takové kvádry.

   Řešení úlohy. Označíme délky hran kvádru a, b, c tak, aby bylo $0 < a \leq b \leq c$.

Z podmínky dostáváme.

$$\begin{aligned} S &= V \\ 2 \cdot (ab + bc + ac) &= a \cdot b \cdot c. \end{aligned}$$

Odtud po vydělení výrazu $2abc$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Jedno řešení je zřejmě $a = b = c = 1/6$. Jestliže nejsou hrany kvádru navzájem shodné, musí platit $a \in \{3; 4; 5\}$. Kdyby totiž bylo $a > 6$ platilo by

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

neboť každé z čísel b, c je větší než a. Je- li $a = 3$, dosadíme do (1) a upravíme na tvar:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}. \tag{2}$$

Zřejmě vyhovuje $1/b = 1/c = 1/12$. Pokud si nejsou délky b, c rovny, musí vzhledem ke (2) platit

$$\frac{1}{6} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12},$$

tedy $b \in \{7; 8; 9; 10; 11\}$. Přípustné hodnoty dosadíme do 2 a vypočítáme c. Vyjdou tyto dvojice $[b; c]$: $[7; 42]$, $[8; 24]$, $[9; 18]$, $[10; 15]$, $[11; 66/5]$. Poslední dvojice nevyhovuje, jelikož c nevyšlo celé číslo. Ostatní dvojice vyhovují.
Je- li $a = 4$ dosadíme do (1) a upravíme na tvar

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

Zřejmě vyhovuje

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{8}.$$

Pokud si nejsou délky b, c rovny, odhadneme $b \in \{5; 6; 7\}$. Po dosazení do (3), určíme tyto dvojice $[b; c]$: $[5; 20]$, $[6; 12]$, $[7; 28/3]$. Poslední dvojice opět nevyšlo celé číslo.

Je- li $a = 5$, dosadíme- li do (1) a upravíme na tvar

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}. \tag{4}$$

Rovnici vyhovuje

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{3}{20},$$

naší úloze však ne, jelikož b, c nejsou celá čísla. Délky b, c nemohou být stejná celá čísla a musí platit $b \in \{5; 6\}$, $b \geq a = 5$. Po dosazení do (4) určíme dvojice $[b; c]$: $[5; 6]$, $[6; 15/2]$. Poslední dvojice nevyhovuje.

Závěr: Řešením úlohy je deset kvádrů jejichž rozměry jsou uvedeny v následující tabulce:

a [cm]	3	3	3	3	3	4	4	4	5	6
b [cm]	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6
c [cm]	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6

5. Text úlohy. Určete všechna pěticiferná přirozená čísla $n = \overline{abcba}$, která jsou dělitelná číslem 396 (a, b, c jsou cifry a zápis $n = \overline{abcba}$ znamená $n = 10000a + 1000b + 100c + 10b + a$).

Řešení úlohy. Rozložíme 396 na prvočísla, $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$, proto musí být číslo

$$n = 10000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$$

dělitelné čtyřmi, devíti a jedenácti. Když si uvědomíme, že $0 \leq a, b, c \leq 9$, můžeme pomocí kriterií pro dělitelnost devíti a jedenácti zjistit, že pro $s = 2a + 2b + c$ a pro $d = 2a - 2b + c$ platí

$$s \in \{9; 18; 27; 36; 45\}, \quad d \in \{0; \pm 11; 22\}.$$

Dále je zřejmé, že rozdíl $s - d = 4b \in \{0; 4; 8; \cdots; 36\}$. V úvahu připadají jen tyto situace:

(a)

$$\begin{aligned} 2a + 2b + c &= 9, \\ 2a - 2b + c &= -11. \end{aligned}$$

Sečtením rovnic zjistíme, že

$$4a + 2c = -2.$$

Což nemůže nastat.

(b)

$$
\begin{aligned}
2a+2b+c &= 36,\\
2a-2b+c &= 0.
\end{aligned}
$$

Odečtením rovnic zjistíme $b = 9$, sečtením $2 \cdot a + c = 18$. Poslední dvojčíslí čísla n, tj. číslo $18+a$ musí být dělitelné čtyřmi. Potom zřejmě $a \in \{2; 6\}$. Dosazením do poslední rovnice zjistíme jediné možné řešení $a = c = 6$. $n = 69696$.

(c) $$2a+2b+c = 27 \text{ a } \quad 2a-2b+c = 11.$$

Odečtením rovnic zjistíme $b = 4$, sečtením $2a+c = 19$. Analogicky jako v předchozím případě nalezneme druhé řešení $n = 84348$.

Závěr: Úloze vyhovují právě dvě čísla 69696 a 84348.

6. Text úlohy. Dokažte, že číslo $a_n = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ je pro každé přirozené číslo dělitelné číslem 1897.

Řešení úlohy. Číslo $1897 = 7 \cdot 271$ proto stačí dokázat, že je dělitelné 7 a 271.

Při důkazu využijeme tvrzení: Pro každá přirozená čísla u, v, n platí $u^n - v^n = (u-v) \cdot c$ kde

$$c = u^{n-1} + u^{n-2} \cdot v + u^{n-3} \cdot v^2 + \cdots + u \cdot v^{n-2} + v^{n-1}$$

je přirozené číslo. (Jde o známý vztah uváděný v tabulkách, jehož platnost snadno ověříme dosazením pravé strany druhého výrazu za c do prvního výrazu a roznásobením.) Pomocí uvedeného vztahu dostaneme:

$$a_n = (2903^n - 803^n) - (464^n - 261^n) = 2100 \cdot k + 203 \cdot l = 7(300 \cdot k + 29 \cdot l)$$

kde k, l jsou přirozená čísla. Je tedy a_n dělitelné sedmi.

Podobně:

$$a_n = (2903^n - 484^n) - (803^n - 261^n) = 2439 \cdot r + 542 \cdot s = 271(9 \cdot r + 2 \cdot s)$$

kde r, s jsou přirozená čísla, tedy a_n je dělitelné číslem 271.

Závěr: Pro každé n přirozené je a_n dělitelné číslem 1897.

3.2 2. série Trojúhelníky

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky 3 cm a obvodem 13 cm. Uvnitř stran BC a AC sestrojte po řadě body D, E tak, aby čtyřúhelník $ABDE$ byl lichoběžník s obvodem $7,4$ cm.

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán poloměr kružnice trojúhelníku opsané, délka těžnice z vrcholu A a délka strany AB:

$$r = 4,5 \text{ cm}, t_a = 5 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}.$$

3. Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB se dá rozdělit přímkou procházející jeho jedním vrcholem na dva rovnoramenné trojúhelníky. Určete takové trojúhelníky uvedením velikosti jeho vnitřních úhlů.

4. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD Jejichž délky jsou po řadě $2a, 2b$. Jeho výška splňuje vztah $v > a + b$. Kolmice na rameno BC procházející středem ramene AD protíná spojnici středů O_1, O_2 základem lichoběžníku v bodě M. Z bodu M jsou sestrojeny tečny MT, MU (s body dotyku T, U) ke kružnicím s průměry AB, CD.
   Dokažte, že platí: $|MT| = |MU|$.

5. Nerovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnou AB má vnitřní úhly $\angle DAB$ a $\angle ABC$ ostré. Středy kružnic opsaných trojúhelníkům ACD, ABD, BCD označme po řadě K, L, M, N. Dokažte, že čtyřúhelníky $KLMN$ a $ABCD$ jsou si podobné a že koeficient podobnosti, která převádí lichoběžník $ABCD$ na lichoběžník $KLMN$ je

$$k = \frac{|\mathrm{cotg}\,|\angle ABC| - \mathrm{cotg}\,|\angle DAB||}{2}.$$

6. K danému čtverci $ABCD$ se stranou délky $a = 5$ cm sestrojte čtyřúhelník $KLMN$ tak, aby body A, B, C, D ležely po řadě uvnitř stran KL, LM, MN, NA, obsahy trojúhelníků ABL, cm$B$, ADK, DCN byly (v daném pořadí) v poměru $1 : 2 : 3 : 4$, a aby součet těchto obsahů byl roven obsahu čtverce $ABCD$.

Řešení

1. Zadání úlohy. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky 3 cm a obvodem 13 cm. Uvnitř stran BC a AC sestrojte po řadě body D, E tak, aby čtyřúhelník $ABDE$ byl lichoběžník s obvodem $7,4$ cm.

   Řešení úlohy. Trojúhelníky EDC a ABC jsou podobné. Platí:

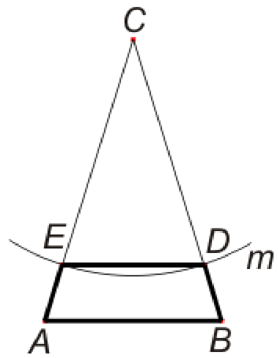
$$\begin{aligned} |AC| &= |BC| = 5cm, \\ |ED| &= k \cdot |AB|, \\ |CE| &= |CD| = 5 \cdot k, \\ |AE| &= |BD| = |BC| - |CD| = 5 \cdot (1-k). \end{aligned}$$

   a pro obvod lichoběžníka $ABDE$ dostaneme

$$o = 10(1-k) + 3 + 3k = 7,4.$$

   Odtud $k = 0,8$ a $|CE| = |CD| = 4$ cm.

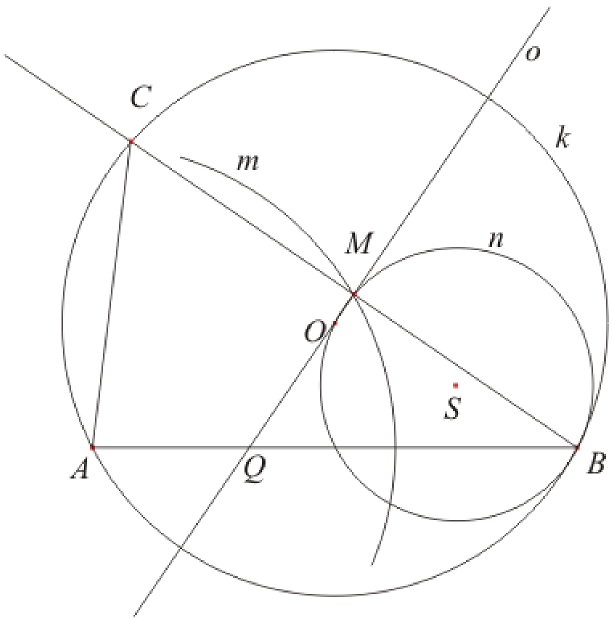
   Konstrukce.
   Body E, D nalezneme jako průsečíky kružnice $m(C, 4 \text{ cm})$ s rameny AC a BC



Obrázek 3.1: Lichoběžník $ABDE$

2. Zadání úlohy. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán poloměr kružnice trojúhelníku opsané, délka těžnice z vrcholu A a délka strany AB:

$$r = 4,5 \text{ cm}, t_a = 5 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}.$$



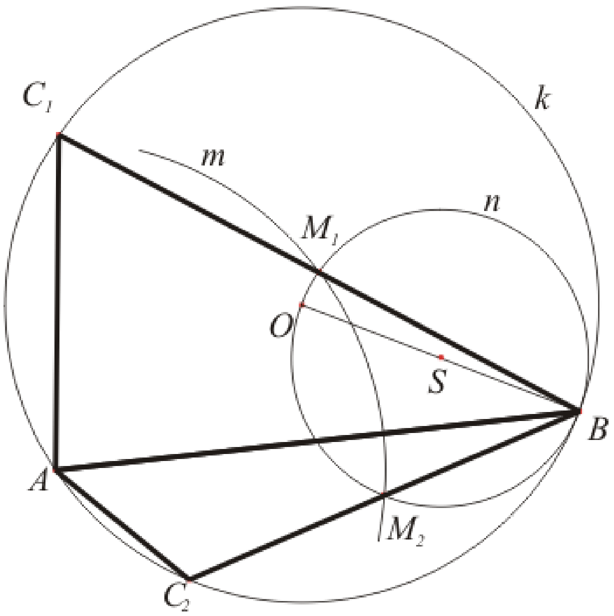
Obrázek 3.2: Rozbor

Řešení úlohy.

Rozbor. Předpokládáme, že je takový trojúhelník sestrojen. Z obrázku 3.2 vidíme, že lze snadno sestrojit opsanou kružnici $k(O, r = 4,5 \text{ cm})$ s tětivou AB dané délky c. Zbývá tedy odhalit konstrukci vrcholu C. Kdybychom znali střed M strany BC, najdeme C jako průsečík polopřímky BM s kružnicí k. Tím náš problém převádíme na sestrojení bodu M. Bod M zřejmě leží na kružnici $m(A, t_a)$, neboť $|AM| = t_a$. Kolmice na BC bodě M je však osa tětivy BC a prochází tedy středem O kružnice k. Úhel BQM je tedy pravý a bod M proto leží na Thaletově kružnici $n(S, |SB|)$, kde S je střed úsečky OB. Bod M proto můžeme sestrojit jako průnik kružnic m, n.

Konstrukce a její správnost jsou zřejmé z rozboru.

Diskuze. Pro zadané délky má úloha dvě řešení. viz obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Konstrukce trojúhelníku z úlohy 2

3. **Zadání úlohy.** Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB se dá rozdělit přímkou procházející jeho jedním vrcholem na dva rovnoramenné trojúhelníky. Určete takové trojúhelníky uvedením velikosti jeho vnitřních úhlů.

   Řešení úlohy. Vnitřní úhly o velikostech δ_1, δ_2 při základnách dílčích rovnoramenných trojúhelníků jsou vždy ostré. Proto platí:

$$\delta_1 + \delta_2 < 180^\circ \tag{5}$$

   Dále je zřejmé, že

   dílčí trojúhelník má hlavní vrchol na ose své základny. (6)

   Předpokládejme nejprve, že dělící přímka prochází vrcholem A a protíná rameno BC v jeho vnitřním bodě D. Vzhledem k (6) nemůže být $|AD| = |BD|$, ani $|AC| = |DC|$, také nemůže být $|BA| = |DA|$ nebo $|AD| = |CD|$ a $|AB| = |DB|$. V prvém případě platí podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku ADC $\delta_1 = 2\delta_2$ a z podmínky, že součet velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka $ABC = 180^\circ$, dostaneme $5\delta_2 = 180^\circ$. Prvním řešením je tedy každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly o velikostech $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$. Viz obrázek 3.4 a.

Ve druhém případě (obr. 3.4 b) dostaneme analogicky $\delta_1 = 2\delta_2$ a

$$2(\delta_1 + \delta_2) + \delta_2 = 180°.$$

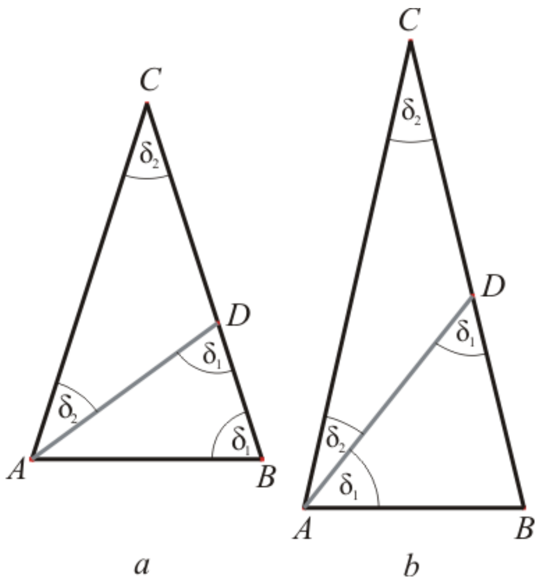
Vyřešením této soustavy zjistíme, že druhým řešením, je každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly:

$$\frac{540°}{7}, \quad \frac{540°}{7} \quad \text{a} \ \frac{180°}{7}.$$

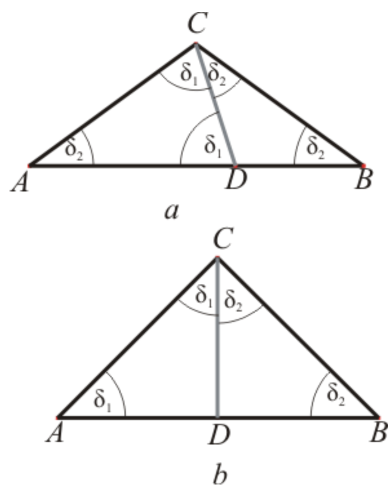
Prochází- li dělící přímka bodem B, jde vzhledem k osové souměrnosti trojúhelníka ABC podle osy jeho základny o stejnou situaci jako v prvním případě.

Nechť dělící přímka prochází bodem C vrcholem dílčího trojúhelníku. Vzhledem k podmínce (5) nemohou pak být body A a Bsoučasně hlavními vrcholy dílčích trojúhelníků. Existují celkem tři možnosti:

(a) $|CA| = |DA|$ a $|CD| = |BD|$, pak podle obr. 3.5 a platí $\delta_1 = 2\delta_2$ a $\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_2 = 180°$. Odtud zjistíme, že třetím řešením je každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly o velikostech $36°, 36°, 108°$.



Obrázek 3.4:



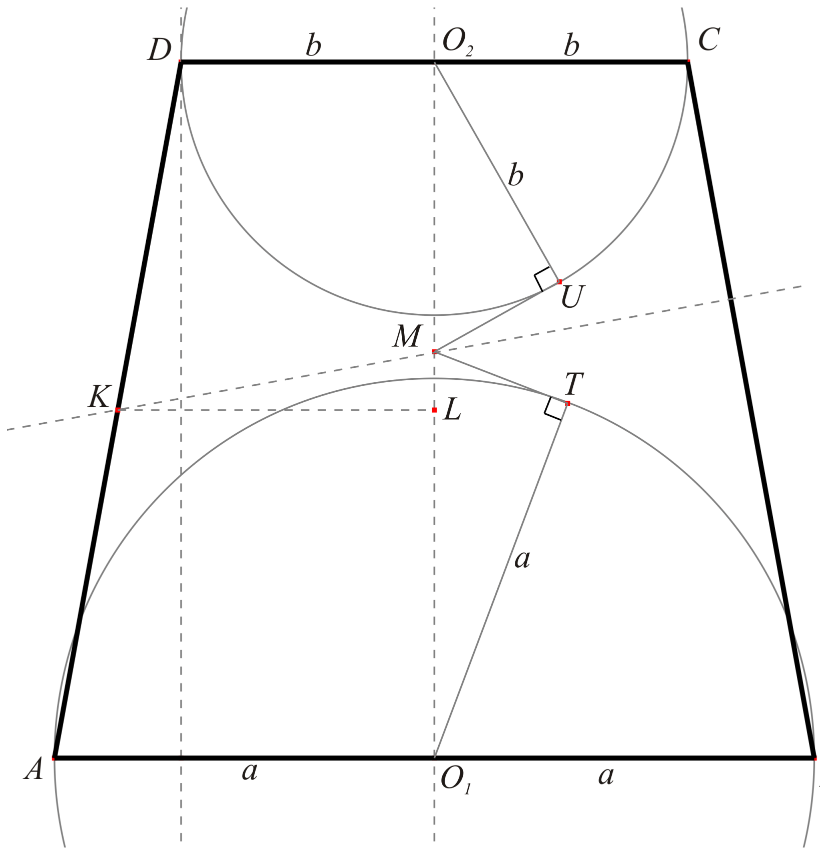
Obrázek 3.5:

(b) $|CB| = |DB|$ a $|AD| = |CD|$. To vede vzhledem k symetrii podle osy základny AB na stejný trojúhelník ABC jako v předchozím případě.

(c) je-li $|AD| = |CD| = |BD|$, zjistíme z obr. 3.5 b podmínky $\delta_1 = \delta_2$ a $\delta_1 + \delta_2 = 90°$. Tím je úloha vyřešena.

4. Zadání úlohy. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD Jejichž délky jsou po řadě $2a, 2b$. Jeho výška splňuje vztah $v > a + b$. Kolmice na rameno BC procházející středem ramene AD protíná spojnici středů O_1, O_2 základem lichoběžníku v bodě M. Z bodu M jsou sestrojeny tečny MT, MU (s body dotyku T, U) ke kružnicím s průměry AB, CD. Dokažte, že platí: $|MT| = |MU|$.

   Řešení úlohy. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $0 < b < a$. Při označení podle obr. 3.6 platí:



Obrázek 3.6: Rovnoramenný lichoběžník

$|AQ| = a - b$, $|KL| = (a + b)/2$, $|DQ| = v$, $|LM| = x$. Z podobnosti trojúhelníků KLM a DAQ dostáváme:

$$\frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{2v}$$

odtud:

$$2vx = a^2 - b^2 \tag{7}$$

Rozdíl druhých mocnin délek tečen můžeme vyjádřit z trojúhelníků MO_1T a MO_2U pomocí Pythagorovy věty:

$$\left|MT^2\right| - \left|MU^2\right| = \left(\frac{v}{2}+x\right)^2 - a^2 - \left(\frac{v}{2}+x\right)^2 + b^2.$$

Po dosazení ze (7) je rozdíl roven nule a proto $|MT| = |MU|$.
Ukážeme, že za podmínky $v > a+b$ uvedené v zadání této úlohy leží bod M vždy mezi kružnicemi na obr. a proto uvažované tečny existují. Nechť $v = a+b+m$, kde $m > 0$.
Platí:

$$|O_1M| = \frac{v}{2} + |LM| = \frac{v}{2} + x.$$

S využitím vztahu (7) dostaneme

$$|O_1M| = \frac{v^2+a^2-b^2}{2v} = a + \frac{a^2-b^2}{2v} - a + \frac{(b+m)^2-b^2}{2v} > a.$$

Podobně zjistíme

$$|O_2M| = \frac{v}{2} - x = b + \frac{v^2-a^2+b^2}{2v} - b > b.$$

Dokažte:

$$|MT| = |MU|$$

$$|MT|^2 = |MU|^2 = \frac{(a+b+v)\cdot(a+b-v)\cdot(a-b+v)\cdot(a-b-v)}{4v^2}.$$

5. Zadání úlohy. Nerovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnou AB má vnitřní úhly $\angle DAB$ a $\angle ABC$ ostré. Středy kružnic opsaných trojúhelníkům ACD, ABD, BCD označme po řadě K, L, M, N. Dokažte, že čtyřúhelníky $KLMN$ a $ABCD$ jsou si podobné a že koeficient podobnosti, která převádí lichoběžník $ABCD$ na lichoběžník $KLMN$ je

$$k = \frac{|\mathrm{cotg}\,|\angle ABC| - \mathrm{cotg}\,|\angle DAB||}{2}.$$

Řešení úlohy. Osu úsečky AB označme o_{AB} podobně další osy. Z konstrukce čtyřúhelníku $KLMN$ je zřejmé, že body K, L leží na o_{AD} body LM na o_{AB} a body M, K na o_{AC} z kolmosti těchto os na příslušné úsečky plyne že trojúhelník KLM a trojúhelník ADC se shodují v odpovídajících si vnitřních úhlech. Tedy trojúhelník KLM je podobný trojúhelníku ADC. Analogicky $\triangle MNK \cong \triangle CBA$. V důsledku podobnosti uvedených dvojic trojúhelníků je pak čtyřúhelník $KLMN$ podobný lichoběžníku $ABCD$. Koeficient podobnosti můžeme určit jako podíl $k = h/v$, kde h, v jsou výšky lichoběžníků $KLMN$ a $ABCD$. Na obr. mají délku $v = |DP| = |CQ|$, délku $h = |RS|$. Z pravoúhlých trojúhelníků APD a BQC zjistíme

$$|AP| = v \cdot \operatorname{cotg} |\angle DAB| \quad \text{a} \quad |QB| = v \cdot \operatorname{cotg} |\angle ABC| \,.$$

Dále platí:

$$h = |AS| - |AP| - |PR| = \frac{a}{2} - v \cdot \operatorname{cotg} |\angle DAB| - \frac{c}{2}$$

a podobně

$$h = |RQ| + |QB| - |SB| = \frac{c}{2} + v \cdot |\angle ABC| - \frac{a}{2}$$

sečtením obou vztahů dostaneme $2h = v \cdot (\operatorname{cotg} |\angle ABC| - \operatorname{cotg} |\angle DAB|)$.

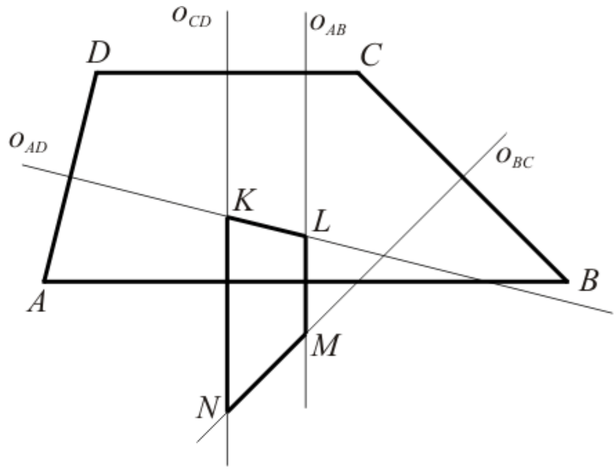
Při odvození vztahů jsme vycházeli z obrázku 3.7 tj. předpokládali jsme, že $|\angle DAB| > |\angle ABC|$. Pokud platí v posledním vztahu opačná nerovnost budou i v rozdílu cotangens opačná znaménka. Proto je:

$$k = \frac{h}{v} = \frac{\cot |\angle ABC| - \cot |\angle DAB|}{2}.$$

6. **Zadání úlohy.** K danému čtverci $ABCD$ se stranou délky $a = 5$ cm sestrojte čtyřúhelník $KLMN$ tak, aby body A, B, C, D ležely po řadě uvnitř stran KL, LM, MN, NA, obsahy trojúhelníků ABL, CMB, ADK, DCN byly (v daném pořadí) v poměru $1 : 2 : 3 : 4$, a aby součet těchto obsahů byl roven obsahu čtverce $ABCD$.

Řešení úlohy.
Rozbor. Z poměru trojúhelníků snadno zjistíme že i poměr jejich výšek z vrcholů L, M, N je stejný. Ve shodě s obr. 3.8 proto položíme $|LL_1| = x$, $|MM_1| = 2x$, $|KK_1| = 3x$ a $|NN_1| = 4x$. Z podmínky pro součet obsahů máme

$$a \cdot \frac{(x + 2x + 3x + 4x)}{2} = a^2$$



Obrázek 3.7: Nerovnoramenný lichoběžník

a odtud $x = a/5 = 1$ cm.

Pravoúhlé trojúhelníky LL_1B a BM_1M jsou podobné. Nechť $|L_1B| = y$. Z podobnosti dostaneme

$$\frac{|BM_1|}{x} = \frac{2x}{y} \text{ tj. } \quad |BM_1| = \frac{2x^2}{y}.$$

Dále pomocí obr. 3.8

$$|M_1C| = 5x - |BM_1| = \frac{x(5y - 2x)}{y}.$$

Analogicky z podobnosti trojúhelníků MM_1C a CN_1N dostáváme

$$|CN_1| = \frac{8xy}{5y - 2x} \text{ a } \quad |N_1D| = \frac{x(17y - 10x)}{5y - 2x},$$

z podobnosti trojúhelníků NN_1D a DK_1K pak

$$|DK_1| = \frac{x(60y - 24x)}{17y - 10x} \text{ a } \quad |K_1A| = \frac{x(17y - 10x)}{17y - 10x}$$

a z podobnosti trojúhelníků KK_1A a AL_1L nakonec vztah

$$\frac{3x}{5x - y} = \frac{|K_1A|}{x}$$

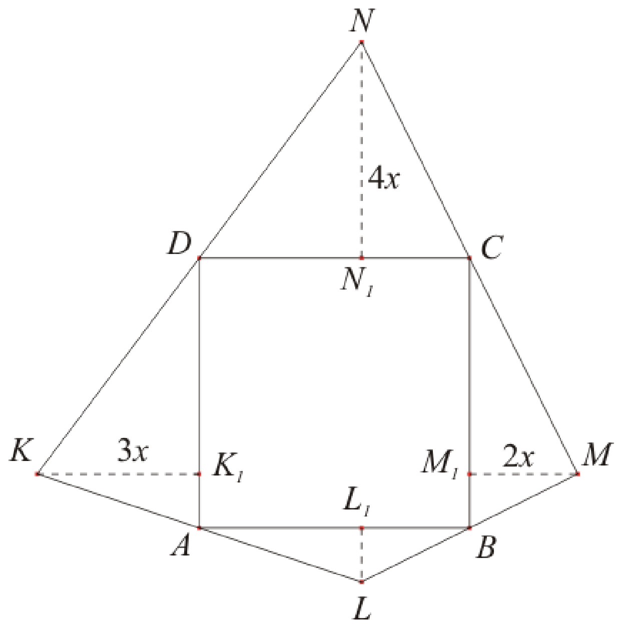
z něhož po dosazení za $|K_1A|$ dostaneme kvadratickou rovnici:

$$y^2 - 4xy + 4x^2$$

$$D = 16x^2 - 16x^2 = 0$$

a $y = 4x/2 = 2x$ víme, že $x = a/5 = 1$ cm potom $y = 2$ cm.

Konstrukce.
Vně daného čtverce sestrojíme přímky m_1, m_2, m_3, m_4 po řadě rovnoběžná se stranami AB, BC, CD a AD tak, aby $|AB, m_1| = 1$ cm, $|BC, m_2| = 2$ cm, $|CD, m_3| = 4$ cm, $|AD, m_4| = 3$ cm. Bod L_1 je průsečík úsečky AB s kružnicí $k(B, 2\text{ cm})$, L je průsečík přímky m_1 s kolmicí na AB vedenou bodem L_1 a body M, N K jsou průsečíky dvojic přímek $[m_2, LB]$, $[m_3, MC]$ a $[m_4, ND]$. Správnost konstrukce a jednoznačnost řešení plynou z rozboru.



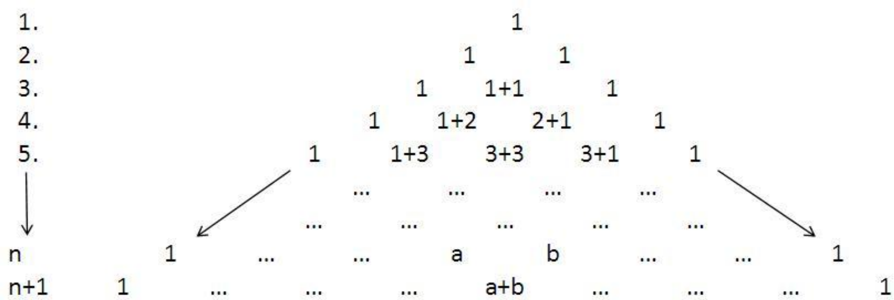
Obrázek 3.8: Čtyřúhelník $KLMN$

3.3 3. série Pascalův trojúhelník, matematická indukce

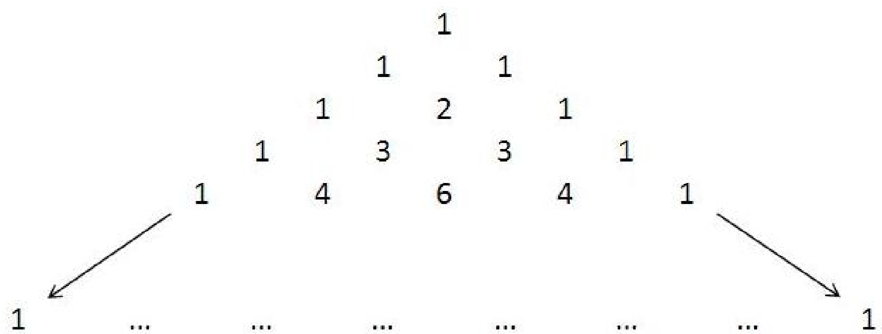
Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Na následujících řádcích je uveden začátek tabulky, které se říká Pascalův trojúhelník.
   Obrázek 3.9 ukazuje, jak se Pascalův trojúhelník vytváří.



Obrázek 3.9: Tvorba Pascalova trojúhelníku



Obrázek 3.10: pascalův trojúhelník

Na obrázku 3.10 vidíme jak po sečtení vypadá Pascalův trojúhelník. Každý řádek začíná i končí číslem 1, čísla mezi jednotkami získáváme sčítáním dvou čísel předcházejícího řádku.

(a) Součet všech čísel v jistém řádku Pascalova trojúhelníku je A. Jaký je součet všech čísel řádků následujícího?

(b) Urči a zdůvodni velikost součtu všech čísel $p-$tého řádku Pascalova trojúhelníku.

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
Co se stane s Pascalovým trojúhelníkem, když v něm ponecháme číslo 1 na začátku i na konci, ale místo sčítání budeme

   (a) dělat aritmetický průměr (1. Packalův trojúhelník)

   (b) určovat absolutní hodnotu rozdílu (2. Packalův trojúhelník).

3. Co se stane s Pascalovým trojúhelníkem, když v něm ponecháme číslo jedna na začátku i na konci řádků, ale místo sčítání budeme odčítat (3. Packalův trojúhelník)? Vypište několik řádků příslušného trojúhelníka a slovy popište respektive dokažte nějaké jeho vlastnosti. Jaké číslo bude v tomto trojúhelníku ve stém řádku na třetím místě a v tisícím řádku na 999. místě?

4. Jaký je součet všech napsaných čísel pokud jsme napsali 100 řádků 3. packalova trojúhelníku?

5. Prvních $k-$řádků Pascalova trojúhelníku doplňte čísly z následujících řádků tak, aby napsaná čísla vytvořila kosočtverec. Sečtěte všechna čísla napsaná na obvodu tohoto kosočtverce.

6. Pro které nejmenší k bude součet všech čísel kosočtverce vytvořeného dle předchozí úlohy už větší než 10000?

Řešení

1. Zadání úlohy.

   (a) Součet všech čísel v jistém řádku Pascalova trojúhelníku je A_n. Jaký je součet všech čísel řádků následujícího?

   (b) Urči a zdůvodni velikost součtu všech čísel p-tého řádku Pascalova trojúhelníku.

   Řešení úlohy.

   (a) Následující schéma znázorňuje, jak vzniká $(n+1)$-ní řádek z $n-$tého:

   $$\begin{array}{lcccccccc} n-\text{tý řádek} & & 1 & & a_1 & \cdots & a_{n-2} & & 1 \\ (n+1)-\text{ní řádek} & 1 & & b_1 & & \cdots & & b_{n-1} & & 1. \end{array}$$

   Víme, že

   $$A_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-2} + 1.$$

   Součet čísel v dalším řádku je

   $$A_{n+1} = 1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} + 1 =$$
   $$= 1 + (1 + a_1) + (a_1 + a_2) + \cdots + (a_{n-3} + a_{n-2}) + (a_{n-2} + 1) + 1 =$$
   $$= 2(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-2} + 1) =$$
   $$A_{n+1} = 2A_n.$$

   (b) Ze schématu Pascalova trojúhelníku plyne, že součet čísel v prvním řádku je 1. $A_1 = 1 = 2^0$, ve druhém $A_2 = 2^1 = 2A_1$ a podle výsledku z úlohy (a) máme, že $A_n = 2A_{n-1}$. Odtud $A_n = 2^{n-1}$.

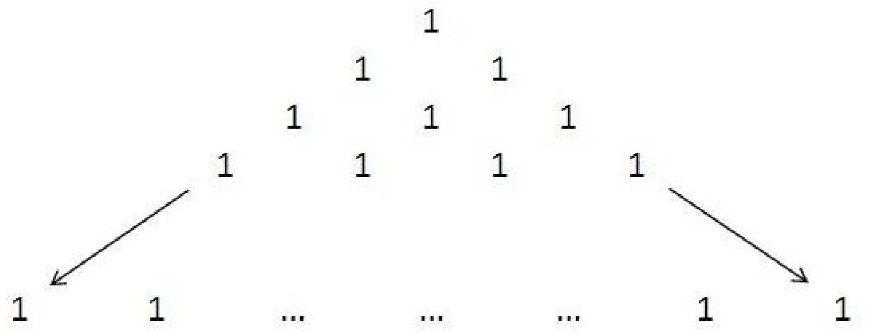
2. Zadání úlohy. Co se stane s Pascalovým trojúhelníkem, když v něm ponecháme číslo 1 na začátku i na konci, ale místo sčítání budeme:

   (a) dělat aritmetický průměr (1. Packalův trojúhelník).

   (b) určovat absolutní hodnotu rozdílu (2. Packalův trojúhelník).

   Řešení úlohy.

   (a) Pokud místo sčítání, děláme aritmetický průměr, tak dostaneme všude samé jednotky, jelikož $(1+1)/2 = 1$
   Sestavený 1. Packalův trojúhelník vidíme na obrázku 3.11.

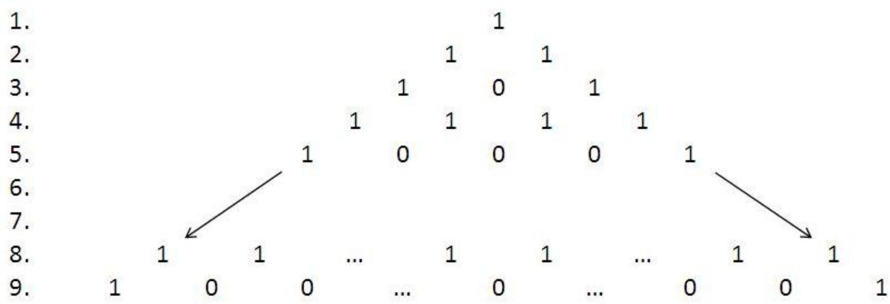


Obrázek 3.11: 1. Packalův trojúhelník

(b) Pro absolutní hodnotu rozdílu, platí:

$$A_n = 1 + |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-3} - a_{n-2}| + |a_{n-2} - 1| + 1.$$

V sudém řádku je $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-3} = a_{n-2} = 1$. V následujícím (lichém) řádku proto dostaneme absolutní hodnotu rozdílu jedniček a tudíž $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-3} = a_{n-2} = 0$.

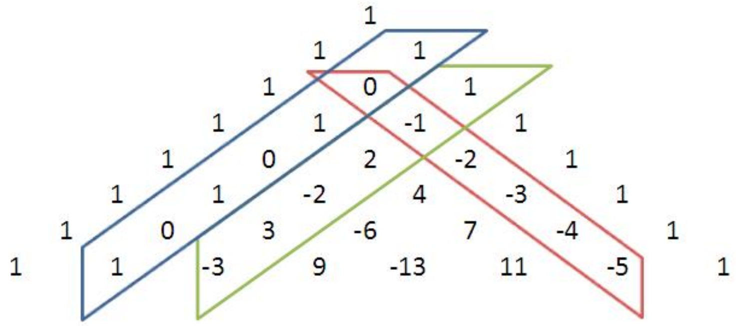


Obrázek 3.12: 2. Packalův trojúhelník

Z obrázku 3.12 můžeme vypozorovat, že v lichých řádcích se nám vyskytují pouze 0 a v sudých 1.

3. **Zadání úlohy.** Co se stane s Pascalovým trojúhelníkem, když v něm ponecháme číslo jedna na začátku i na konci řádku, ale místo sčítání budeme odčítat (3. Packalův trojúhelník)? Vypište několik řádků příslušného trojúhelníka a slovy popište respektive dokažte nějaké jeho vlastnosti. Jaké číslo bude v tomto trojúhelníku ve stém řádku na třetím místě a v tisícím řádku na 999. místě?

Řešení úlohy. Na obrázku 3.13 vidíme, že na třetí pozici v 3. Packalově



Obrázek 3.13: 3. Packalův trojúhelník

trojúhelníku střídají po sobě jdoucí čísla a k nim čísla opačná. Ve stém řádku na třetí pozici. V sudém řádku na třetí pozici bude záporné číslo, tudíž $a_4 = -1$ označím si diferenci $d = -1/2$, a pro a_{100} platí

$$a_{100} = a_4 + (n-4)d = -1 - 48 = -49.$$

Na třetí pozici ve stém řádku bude číslo -49.

Na 999. místě v 1000. řádku dle obrázku 3.13 označíme $a_3 = 0$, $d = -1$ pro $a_{1000} = a_3 + (n-3)d = 0 - 997 = -997$.

4. Zadání úlohy. Jaký je součet všech napsaných čísel pokud jsme napsali 100 řádků 3. packalova trojúhelníku?

   Řešení úlohy. Součet řádků 3. Packalova trojúhelníka je roven součtu jednotek na ramenech trojúhelníka, tedy kromě prvého řádku, je součet roven 2. Tudíž $S_1 + S_{99} = 1 + (2 \cdot 99) = 199$.

5. Zadání úlohy. Prvních k-řádků Pascalova trojúhelníku doplňte čísly z následujících řádků tak, aby napsaná čísla vytvořila kosočtverec. Sečtěte všechna čísla napsaná na obvodu tohoto kosočtverce.

$$s = \binom{2k-2}{k-1} + 2\left[\underbrace{\binom{2k-3}{k-2} + \binom{2k-4}{k-3} + ... + \binom{k-1}{0}}_{n}\right] + 2(k-1) - 1$$

$$n = \binom{k-1}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k+1}{2} + ... + \binom{2k-3}{k-2} =$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Obrázek 3.14:

$$= \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + ... + \binom{2k-3}{k-1} =$$

$$= \underbrace{\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}}_{\binom{k+1}{k}} + \binom{k+1}{k-1} + ... + \binom{2k-3}{k-1}$$

$$= \binom{k}{k} + \underbrace{\binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1}}_{\binom{k+2}{k} atd.} + ... + \binom{2k-3}{k-1}$$

$$n = \binom{2k-2}{k}$$

$$s = \binom{2k-2}{k-1} + 2\binom{2k-2}{k} + 2k - 3.$$

Zkouška pro $k = 2$ dle obrázku 3.14 vychází $s = 5$ a výpočtem:

$$s = \binom{2}{1} + 2\binom{2}{2} + 4 - 3 = 5.$$

Pro $k = 3$ podle obrázku 3.14 $s = 17$.

$$s = \binom{4}{2} + 2\binom{4}{3} + 6 - 3 = 17$$

6. **Zadání úlohy.** Pro které nejmenší p bude součet všech čísel kosočtverce vytvořeného dle předchozí úlohy už větší než 10000?

   Řešení úlohy.

$$s = \binom{2k-2}{k-1} + 2\binom{2k-2}{k} + 2k - 3 > 10000.$$

Pro $k = 5$ dosazením dostaneme.

$$s = \binom{8}{4} + 2\binom{8}{5} + 10 - 3 = 189.$$

Pro $k = 6$ je součet roven

$$s = \binom{10}{5} + 2\binom{10}{6} + 12 - 3 = 681.$$

Pro $k = 7$ platí

$$s = \binom{12}{6} + 2\binom{12}{7} + 14 - 3 = 2519.$$

Pro $k = 8$ dostaneme

$$s = \binom{14}{7} + 2\binom{14}{8} + 16 - 3 = 9451.$$

Pro $k = 9$ musí být součet větší než 10000, jelikož jenom hodnota $\binom{16}{8}$ je 12870. Pro $k = 8$ nám vyšel součet menší než 10000.

3.4 4. série Zajímavá čísla

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Dvanácti ciferné číslo zapsané samými jednotkami rozložte na prvočinitele.

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Určete nejmenší přirozené dvojciferné číslo n, pro které platí: Existují nesoudělná přirozená čísla a, c tak, že $n^2 = c^2 - a^2$.

3. Najdi všechny uspořádané dvojice přirozených čísel jejichž součin je šesticiferné číslo zapsané samými trojkami.

4. K dvojcifernému přirozenému číslu n, které je zapsané dvěma stejnými ciframi existují přirozená čísla a, c tak, že $n^4 = c^2 - a^2$ a rozdíl $c - a$ je maximální.

5. Dokažte každé liché prvočíslo p různé od 5 má násobek, který je v dekadické soustavě zapsán samými jednotkami. Tento násobek je nejvýše $p-$ciferný.

6. Najděte číslo J zapsaný samými jednotkami tak, aby bylo dělitelné sedmnácti.

Řešení

1. **Zadání úlohy.** Dvanácti ciferné číslo zapsané samými jednotkami rozložte na prvočinitele.

   Řešení úlohy. Naše číslo bude určitě dělitelné 3 a 11.

$$\begin{aligned} 111111111111 : 3 &= 37037037037 \\ 37037037037 : 37 &= 1001001001 \\ 1001001001 : 11 &= 91000091 \\ 91000091 : 91 &= 1000001 \\ 91 : 7 &= 13 \\ 1000001 : 101 &= 9901. \end{aligned}$$

   Zjistili jsme, že je dělitelné 37 a 91. 91 ale není prvočíslo a je dělitelné 7, $91 : 7 = 13$.

   Závěr. $111111111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901$.

2. **Zadání úlohy.** Určete nejmenší přirozené dvojciferné číslo n, pro které platí: Existují nesoudělná přirozená čísla a, c tak, že $n^2 = c^2 - a^2$.

   Řešení úlohy. Pro n platí, že $n \geq 0$ a $n^2 = c^2 - a^2$. Odhad

$$n^2 = (c + a)(c - a).$$

   Pro $n = 10$ dostaneme:

$$\begin{aligned} 100 &= c + a \\ 1 &= c - a. \end{aligned}$$

   Odtud

$$101 = 2c$$

   c není přirozené číslo.

   Pro $n = 11$ dostaneme

$$\begin{aligned} 121 &= c + a \\ 1 &= c - a \\ 122 &= 2c \end{aligned}$$

   $c = 61$ a $a = 60$.

Zkouška: $c^2 - a^2 = 61^2 - 60^2 = 121 = 11^2$.

Závěr: Nejmenší dvojciferné číslo je $n = 11$.

3. **Zadání úlohy.** Najdi všechny uspořádané dvojice přirozených čísel jejichž součin je šesticiferné číslo zapsané samými trojkami.

   Řešení úlohy. $a \cdot b = 333333\ 333333 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$
   vypíšeme všechny uspořádané dvojice, pro $a \leq b$:

$$[1; 333333]\,, \quad [3; 111111]\,, \quad [7; 47619]\,, \quad [9; 37037]\,, \quad [11; 30303]\,,$$
$$[13; 25641]\,, \quad [21; 15873]\,, \quad [33; 10101]\,, \quad [37; 9009]\,, \quad [39; 8547]\,, \quad [63; 5291]\,,$$
$$[77; 4329]\,, \quad [91; 3663]\,, \quad [99; 3367]\,, \quad [111; 3003]\,, \quad [117; 2849]\,, \quad [143; 2331]\,,$$
$$[231; 1443]\,, \quad [259; 1287]\,, \quad [273; 1221]\,, \quad [333; 1001]\,, \quad [407; 819]\,,$$
$$[429; 777]\,, \quad [481; 693]\,.$$

   Další dostaneme záměnou a za b.

4. **Zadání úlohy.** K dvojcifernému přirozenému číslu n, které je zapsané dvěma stejnými ciframi existují přirozená čísla a, c tak, že $n^4 = c^2 - a^2$ a rozdíl $c - a$ je maximální.

   Řešení úlohy. Číslo zapsané stejnými ciframi, můžeme zapsat jako $(10\bar{a}+\bar{a})^4 = c^2 - a^2$ upravením dostaneme $(11\bar{a})^4$, kde $\bar{a} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
   Vyzkoušením možností zjistíme:

$$\begin{aligned} 11^4 \cdot 9^4 &= c^2 - a^2 \\ 11^4 &= c + a \\ 9^4 &= c - a \end{aligned}$$

   sečtením dostaneme, že $c = 10601$ a $a = 4040$ a rozdíl $c - a = 6561$.

5. **Zadání úlohy.** Dokažte každé liché prvočíslo p různé od 5 má násobek, který je v dekadické soustavě zapsán samými jednotkami. Tento násobek je nejvýše p-ciferný.

   Řešení úlohy. Využijme Dirichletův princip. Vezmeme posloupnost

$$1, 11, 111, ..., \overbrace{11...1}^{p+1}.$$

   Zbytků při dělení číslem p je p:

0	1	2	...	$p-1$

Proto 2 čísla z naší posloupnosti dávají po dělení číslem p tentýž zbytek. Jejich rozdíl, označme jej d, $d = 111...100...0$ je dělitelný číslem p, tedy:

$$p/d = 11\cdots1 \cdot 10^k$$

ale p nedělí 10^k tedy $p/\overbrace{11...1}^{p}$.

6. Zadání úlohy. Najděte číslo J zapsané samými jednotkami tak, aby bylo dělitelné sedmnácti.

   Řešení úlohy. Platí:
   $10^8 + 1 = 17 \cdot 5882353$ a tak $17|(10^8 + 1) \cdot (10^8 - 1) = 10^{16} - 1 = a$, číslo a lze zapsat ve tvaru

   $$a = \underbrace{99\cdots9}_{16} = \underbrace{11\cdots1}_{16} \cdot 9$$

   avšak číslo 9 není dělitelné číslem 17. Platí tedy, že $17|\underbrace{11\cdots1}_{16}$. Hledané číslo je $J = \underbrace{11\cdots1}_{16}$.

Kapitola 4

Ročník 2001-2002

4.1 1. série Obarvování

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Stěny $n-$stěnu chceme obarvit tak, aby sousední stěny měly různou barvu, ukažte, že existuje mnohostěn, na jehož obarvení stačí pouze dvě barvy. (Sousední stěny jsou stěny, které mají společnou právě jednu hranu).

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   U pravidelného čtyřstěnu obarvíme každou z jeho stěn jinou barvou, kolik rozlišitelných obarvení můžeme pro čtyři zvolené barvy dostat?

3. Dán pravidelný trojboký hranol. Jeho hrany a stěnové úhlopříčky obarvěte dvěma různými barvami (např. černě a bíle) tak, aby žádný z trojúhelníků jejichž strany jsou na obarvených úsečkách neměl všechny strany obarveny stejnou barvou. Kolika rozlišitelnými způsoby můžete toto barvení provést?

4. Ukažte, že mezi pravidelnými mnohostěny existuje jediný druh, u kterého stačí dvě barvy na obarvení jeho stěn tak, aby sousední stěny měli dvě různé barvy.

5. Dán pětiboký hranol s podstavami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všechny hrany obou základen a všechny úsečky A_jB_k pro všechna j, k z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou obarveny černě nebo bíle, aby žádný trojúhelník, jehož vrcholy jsou vrcholy zadaného hranolu a jehož všechny strany jsou obarveny,

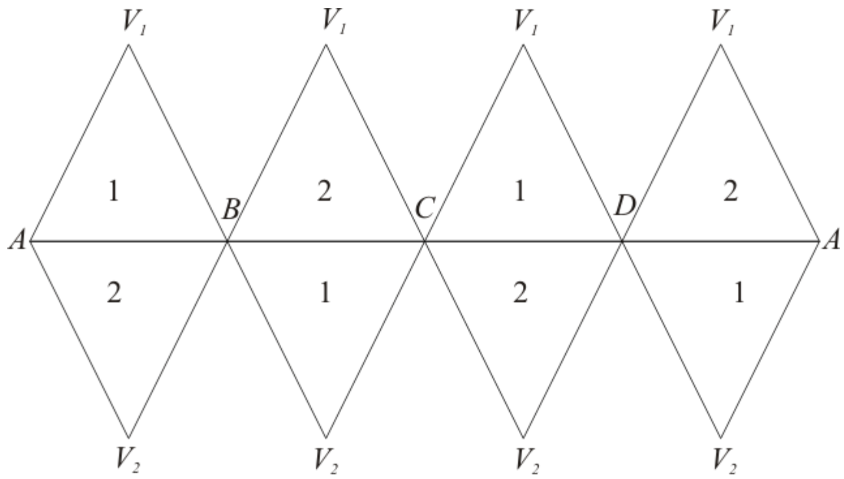
nebyl jednobarevný. Dokažte že všech deset podstavných hran má stejnou barvu.

6. U krychle obarvíme každou z jejích stěn jinou barvou. Kolik rozlišitelných obarvení můžeme pro 6 zvolených barev dostat?

Řešení

1. **Zadání úlohy.** Stěny n-stěnu chceme obarvit tak, aby sousední stěny měly různou barvu, ukažte, že existuje mnohostěn, na jehož obarvení stačí pouze dvě barvy. (Sousední stěny jsou stěny, které mají společnou právě jednu hranu).

   Řešení úlohy. Hledaný mnohostěn musí splňovat podmínku, že v každém jeho vrcholu se stýká právě sudý počet stěn. Vyhovuje například pravidelný osmistěn. Barvy označíme 1 a 2 a na 4.1 vidíme že se barvy stěn střídají.



Obrázek 4.1: Síť pravidelného osmistěnu

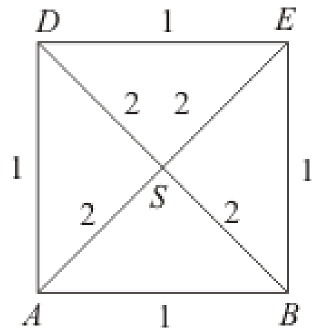
2. **Zadání úlohy.** U pravidelného čtyřstěnu obarvíme každou z jeho stěn jinou barvou, kolik rozlišitelných obarvení můžeme pro čtyři zvolené barvy dostat?

   Řešení úlohy. Označme barvy a, b, c, d. Položíme-li čtyřstěn na vodorovnou podložku tak, aby barva a byla na podložce a otočíme-li ho, aby stěna barvy b směřovala dozadu. Potom z našeho pohledu barva c může být vpravo nebo vlevo a barva d na zbývající stěně.
   Závěr: Rozlišitelná obarvení stěn pravidelného čtyřstěnu existují jen dvě.

3. **Zadání úlohy.** Dán pravidelný trojboký hranol. Jeho hrany a stěnové úhlopříčky obarvěte dvěma různými barvami (např. černě a bíle) tak, aby žádný z trojúhelníků jejichž strany jsou na obarvených úsečkách neměl všechny strany obarveny stejnou barvou. Kolika rozlišitelnými způsoby můžete toto barvení provést?

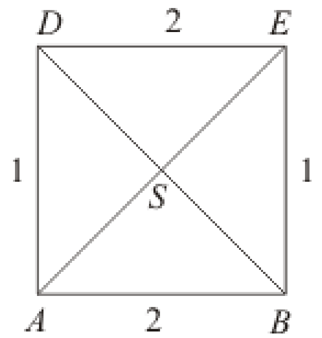
Řešení úlohy. Nejprve budeme zkoumat obarvení pravoúhelníku a jeho úhlopříček barvami 1 a 2 tak, aby žádný trojúhelník neměl všechny strany stejné barvy.

(a) Jestliže strany pravoúhelníku mají všechny barvu 1 pak úhlopříčky musí mít barvu 2 jako na obr. 4.2.



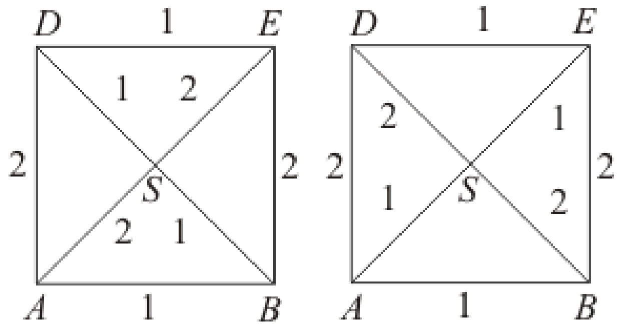
Obrázek 4.2: Možnosti obarvení

(b) Není možné, aby tři strany měly barvu 1 a jedna strana barvu 2. Pak by totiž úhlopříčky musely mít barvu 2 a vznikl by jednobarevný trojúhelník ohraničený těmito úhlopříčkami a stranou barvy 2. Na obrázku 4.3 je to trojúhelník SEB

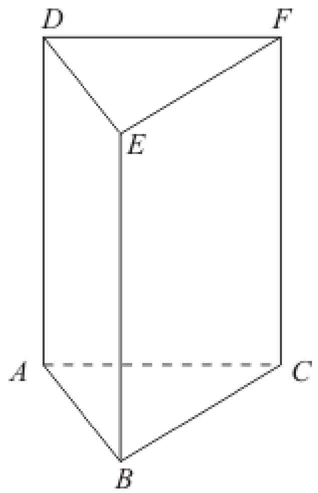


Obrázek 4.3: Možnosti obarvení

(c) Pokud jsou dvě strany pravoúhelníku barvy 1 a dvě strany barvy 2 mohou mít stejnou barvy pouze strany protilehlé a existují jen dvě různé možnosti obarvení jak vidíme na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Možnosti obarvení

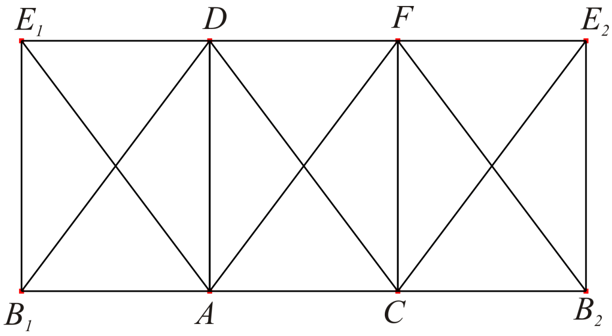


Obrázek 4.5: Trojboký hranol

Předchozí výsledky nyní využijeme při řešení původní úlohy. Hranol označme $ABCDEF$ jako na obr. 4.5.

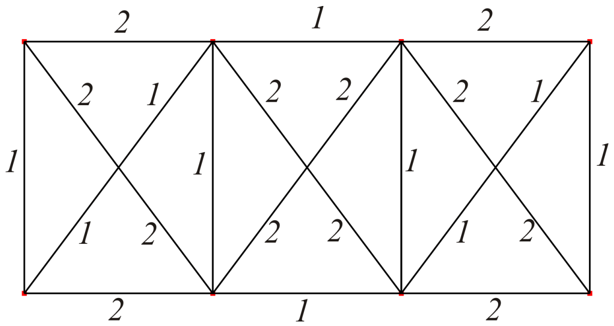
Protože všechny hrany i stěnové úhlopříčky jsou obsaženy v plášti hranolu stačí se zabývat jen tímto pláštěm viz obrázek 4.6 složeným ze tří shodných pravoúhelníků.

Víme, že trojúhelníková stěna musí mít právě dvě strany téže barvy. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy vrcholy hranolu označit tak, aby hrana DF měla barvu 1 a hrany ED a FD barvu 2. Proto musí mít vzhledem k uvedeným odstavcům (a), (b), (c) hrana AC barvu 1 a hrany AB, BC barvu 2 jsou možné tyto situace:



Obrázek 4.6: Stěny trojbokého hranolu

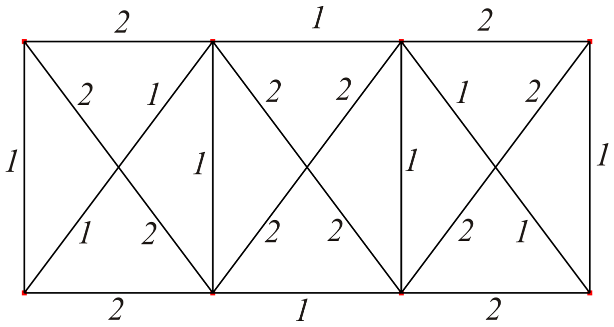
Mají-li svislé hrany AD a CF barvu 1 má vzhledem k bodu (b), také BE barvu 1 a ve stěně $CBEF$ má jedna úhlopříčka barvu 1 a druhá barvu 2. Stejně je tomu i ve stěně $BADE$. Zdánlivě to vede na $2 \cdot 2 = 4$ možnosti, ale ve skutečnosti máme pouze 3 možnosti. Obarvení na obrázku 4.7 je totiž souměrné podle průsečíku úhlopříček O prostřední stěny. Záměna barev na úhlopříčkách krajních stěn je ekvivalentní s otočením hranolu kolem osy kolmé na stěnu $ACFD$ a procházející bodem O. Při obarvení dle obrázku 4.8 získáme záměnou barev na úhlopříčkách krajních pravoúhelníků nové obarvení. Máme tedy celkem tři rozlišitelná obarvení a další tři dostaneme, když zaměníme barvy na všech uvažovaných úsečkách.



Obrázek 4.7:

Závěr. Existuje šest různých obarvení pravidelného trojbokého hranolu dvěma barvami, tak aby žádný z trojúhelníků jejichž strany jsou na obarvených úsečkách neměl všechny strany obarveny stejnou barvou.

4. **Zadání úlohy.** Ukažte, že mezi pravidelnými mnohostěny existuje jediný druh, u kterého stačí dvě barvy na obarvení jeho stěn tak, aby sousední stěny měli



Obrázek 4.8:

dvě různé barvy.

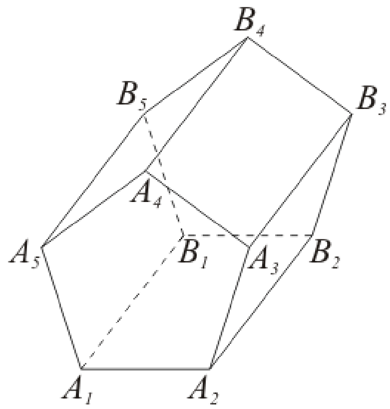
Řešení úlohy. V úloze 1 jsme ukázali, že v hledaném mnohostěnu musí každý vrchol náležet sudému počtu stěn. To splňuje z pravidelných mnohostěnů pouze pravidelný osmistěn. Zbývající pravidelné mnohostěny jsou krychle, pravidelný čtyřstěn, pravidelný dvanácti stěn a pravidelný dvaceti stěn. U krychle se při každém vrcholu stýkají 3 stěny, u pravidelného čtyřstěnu tři, u pravidelného dvanáctistěnu tři a u pravidelného dvacetistěnu je to pět stěn.

5. **Zadání úlohy.** Dán pětiboký hranol s podstavami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všechny hrany obou základen a všechny úsečky A_jB_k pro všechna j,k z množiny $\{1,2,3,4,5\}$ jsou obarveny černě nebo bíle, aby žádný trojúhelník, jehož vrcholy jsou vrcholy zadaného hranolu a jehož všechny strany jsou obarveny, nebyl jednobarevný. Dokažte že všech deset podstavných hran má stejnou barvu.

   Řešení úlohy. Důkaz provedeme sporem:
   Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že existuje obarvení, kde je hrana A_1A_2 bílá a hrana A_2A_3 černá. Z pěti úseček $A_2B_1, A_2B_2, \cdots, A_2B_5$ mají alespoň tři stejnou barvu. Např. bílou. Alespoň dva z vrcholů, do kterých tyto bílé úsečky vedou jsou sousední. Označme je B_iB_j. Hrana jimi určená musí být černá, abychom nedostali stejnobarevný trojúhelník. Černé pak musí být i hrany A_1B_i a A_1B_j, abychom nedostali jednobarevný trojúhelník $A_1A_2B_i$, respektive $A_1A_2B_i$. Nyní však máme trojúhelník $A_1B_iB_j$ jednobarevný - spor.

   Dokázali jsme, že pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ má stěny téže hrany a pětiúhelník $B_1B_2B_3B_4B_5$ také. Zbývá ukázat, že barvy stěn obou pětiúhelníků jsou stejné. To provedeme sporem.

   Nechť hrany $A_1A_2A_3A_4A_5$ jsou bílé a hrany $B_1B_2B_3B_4B_5$ černé barvy. Pak z žádného vrcholu A_j nesmějí jít více než dvě černé úsečky tj celkem nejvýše 10 černých a z žádného vrcholu B_k nesmějí jít více než dvě bílé úsečky tj. celkem nejvýše 10 bílých. Nemůžeme obarvit všech $5 \cdot 5 = 25$ hran - spor. Pětiboký hranol máme na obrázku 4.9.

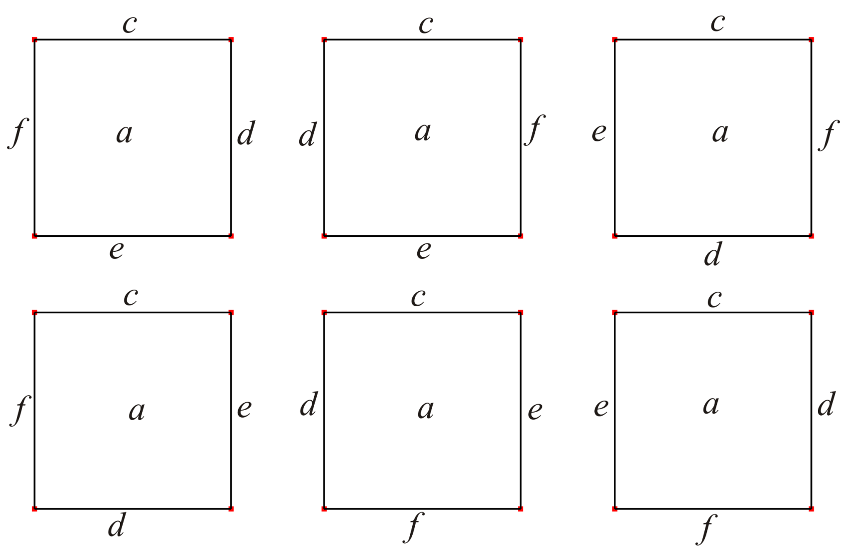


Obrázek 4.9:

Závěr: Vyhovující obarvení je například takové, že všechny podstavné hrany černé a ostatní úsečky bílé.

6. **Zadání úlohy.** U krychle obarvíme každou z jejích stěn jinou barvou. Kolik rozlišitelných obarvení můžeme pro 6 zvolených barev dostat?

   Řešení úlohy. Libovolnou ze šesti barev označíme písmenem b a umístíme krychli na vodorovnou podložku tak,aby na ní ležela stěnou barvy b. Pro barvu a horní stěny máme celkem 5 možností. Zbývající barvy označíme c, d, e, f. Při pohledu shora máme 6 možností. Celkem tedy existuje $5 \cdot 6 = 30$ možností. Viz obrázek 4.10.



Obrázek 4.10:

4.2 2. série Mocnost bodu ke kružnici

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Nechť k je kružnice o středu S a poloměru r a M je bod. Délku $|MS|$ označíme d. Potom číslo $m = d^2 - r^2$ nazýváme mocnost bodu M ke kružnici k.

   (a) Pro vnější bod M kružnice k a jeho mocnost m dokažte: Je-li T bod dotyku tečny vedené z bodu M ke kružnici k pak $|MT|^2 = m$.

   (b) K dané kružnici $k(S; 3\text{ cm})$ narýsujte množinu všech bodů jejichž mocnost k této kružnici je 4.

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Dána kružnice k a bod M jehož mocnost ke kružnici k je kladné číslo m.

   (a) Dokažte: Pro každou sečnu kružnice k jdoucí bodem M platí: pokud A, B jsou průsečíky přímky s kružnicí k potom $|AB| \cdot |BM| = m$.

   (b) Předchozí tvrzení přeformulujte pro situaci, kdy má bod M zápornou mocnost.

3. Dána kružnice k a na ní bod A. Sestrojte trojúhelník ABC se středem D strany BC tak, aby byl trojúhelník ABD kružnici k vepsán, přímka AC byla tečnou kružnice k a $|AC| = 2\,|AD|$.

4. Dány kružnice k, l protínající se ve dvou různých bodech A, B určete její chordálu tj. množinu bodů, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost.

5. Dokažte, že v každém trojúhelníku jsou si rovny součiny úseků, na které dělí libovolnou z výšek trojúhelníka jejich průsečík.

6. Dána kružnice k a dva různé body A, B, které na ni neleží. Body A, B proložte kružnici l tak, aby společné body obou kružnic půlily kružnici k.

Řešení

1. Text úlohy. Nechť k je kružnice o středu S a poloměru r a M je bod. Délku $|MS|$ označíme d. Potom číslo $m = d^2 - r^2$ nazýváme mocnost bodu M ke kružnici k.

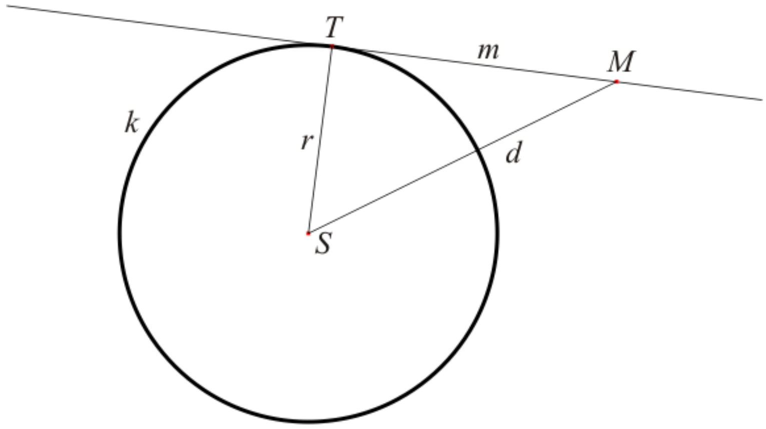
   (a) Pro vnější bod M kružnice k a jeho mocnost m dokažte: Je-li T bod dotyku tečny vedené z bodu M ke kružnici k pak $|MT|^2 = m$.

   (b) K dané kružnici $k(S; 3\text{ cm})$ narýsujte množinu všech bodů jejichž mocnost k této kružnici je 4.

   Řešení úlohy.

   (a) Úsečka ST na obrázku 4.11, jejíž délka je poloměrem kružnice, je kolmá na tečnu, jenž je dána úsečkou MT, přepona vzniklého pravoúhlého trojúhelníku má délku $|SM|$, ze zadání víme, že $|SM| = d$, $|ST| = r$. Dosazením do Pythagorovy věty dostaneme:

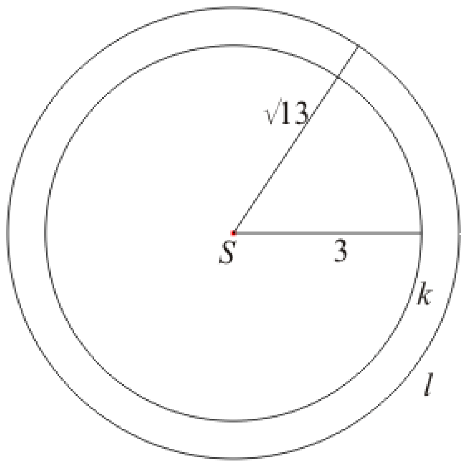
   $$|MT|^2 = |SM|^2 - |ST|^2 = d^2 - r^2 = m.$$



Obrázek 4.11: Mocnost bod dotyku

   Tím je úloha dokázána.

   (b) Hledanou množinou je množina všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost $d = \sqrt{r^2 + m} = \sqrt{13}$, tedy kružnice l o poloměru $\sqrt{13}$ soustředná s k.
   Délku $\sqrt{13}$ sestrojíme jako přeponu pomocného pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami délek 3 cm a 2 cm. Konstrukce je na obrázku 4.12



Obrázek 4.12: Hledaná množina bodů

2. Text úlohy. Dána kružnice k a bod M jehož mocnost ke kružnici k je kladné číslo m.
   (a) Dokažte: Pro každou sečnu kružnice k jdoucí bodem M platí: pokud A, B jsou průsečíky přímky s kružnicí k potom $|MA| \cdot |BM| = m$.
   (b) Předchozí tvrzení přeformulujte pro situaci, kdy má bod M zápornou mocnost.

   Řešení úlohy.

   (a) Vzhledem ke kladné mocnosti je M vnější bod kružnice k. Tvrzení nejprve ověříme pro sečnu $A'B'$ jdoucí středem S.

   $$|MA'| \cdot |MB'| = (d+r)(d-r) = d^2 - r^2 = m.$$

   Je- li AB libovolná sečna jdoucí bodem M (A, B leží na kružnici k a označení volíme dle obrázku 4.13), stačí ukázat, že

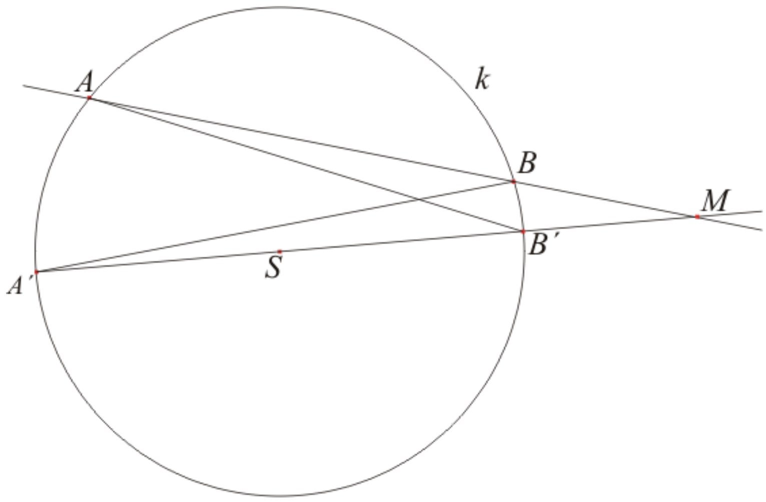
   $$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|.$$

   Trojúhelníky $AB'M$ a $A'BM$ jsou podobné podle věty uu (úhly při A, A' jsou obvodové k témuž oblouku BB' a úhel při M je oběma trojúhelníkům společný). Z podobnosti plyne

   $$|MA| : |MB'| = |MA'| : |MB|$$

   a odtud

   $$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| = m$$



Obrázek 4.13: Mocnost bodu M ke kružnici k

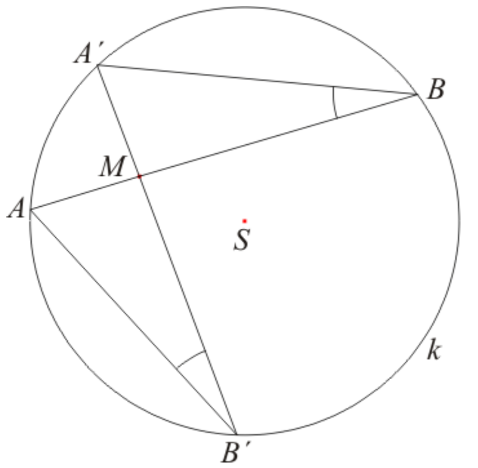
(b) Dokážeme, že pro vnitřní bod M kružnice k a jeho mocnost m k této kružnici platí, $|MA| \cdot |MB| = -m$.

Pokud bod M leží uvnitř průměru $A´B´$ kružnice, platí

$$|MA´| = r^2 - d^2 = -m.$$

Pokud tětiva AB, která prochází bodem M není průměrem, pak z podobnosti trojúhelníku $AB´M$ a $A´BM$ na obr. 4.14 dostaneme:

$$|MA| \cdot |MB| = |MA´| \cdot |MB´|\,.$$



Obrázek 4.14:

3. Text úlohy. Dána kružnice k a na ní bod A. Sestrojte trojúhelník ABC se středem D strany BC tak, aby byl trojúhelník ABD kružnici k vepsán, přímka AC byla tečnou kružnice k a $|AC| = 2\,|AD|$.

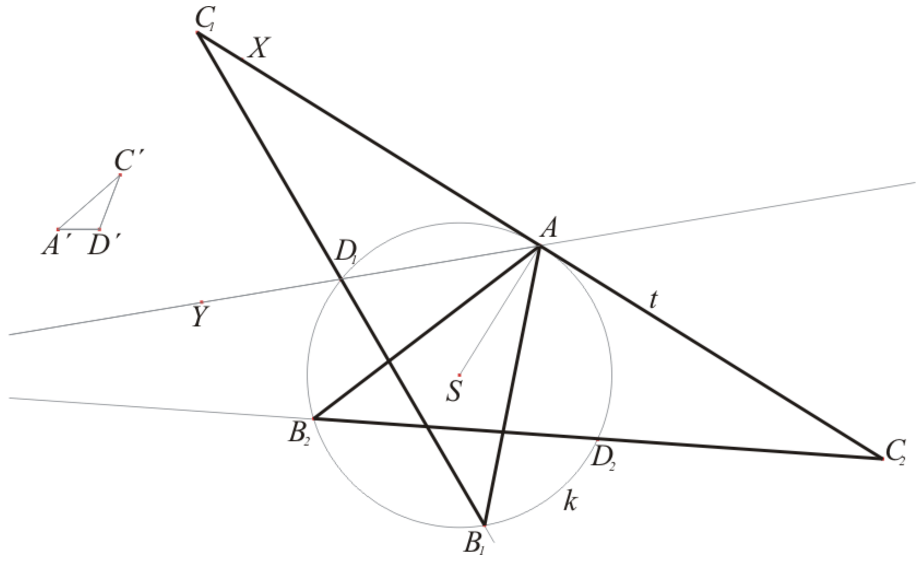
Řešení úlohy.
Rozbor.
Z mocnosti bodu C ke kružnici k plyne

$$\left|AC^2\right| = 2 \cdot \left|CD^2\right|. \text{ Tedy } |AC| : |CD| : |AD| = 2 : \sqrt{2} : 1.$$

V trojúhelníku ACD známe jeho poměr stran.

Konstrukce.
1. Libovolný pomocný trojúhelník $A´B´C´$ o stranách $a´ = \sqrt{2}$
$c´ = 1, \quad d´ = 2$.
2. $t:\ t$ je tečna k v bodě A
3. $X:\ X$ je libovolný bod na t různý od A
4. Polopřímka AY: $|\angle XAY| = |\angle C´A´D´|$
5. $D:\ D \in k$ a $D \in$ polopřímce AY
6. $C:\ C \in$ polopřímce AX a $|\angle ADC| = |\angle C´A´D´|$
7. $B:\ B \in k$ a $B \in$ úhlopříčce CD a B je různý od D
8. Trojúhelník ABC

Důkaz.
V trojúhelníku ACD platí $a : c : d = \sqrt{2} : 1 : 2$ (je podobný s trojúhelníkem $A´C´D´$ dle uu). Pro mocnost m bodu C ke kružnici k platí $m = |CA|^2 = |CD| \cdot |CB|$. Odtud: $d^2 = a \cdot |CB|$. Body A, B, D leží na kružnici k dle konstrukce.



Obrázek 4.15: Konstrukce trojúhelníku ABC

Diskuze. Úloha má vždy dvě řešení. Viz obrázek 4.15.

4. Text úlohy. Dány kružnice k, l protínající se ve dvou různých bodech A, B určete její chordálu tj. množinu bodů, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost.

   Řešení úlohy.
   Rozbor.
   Body A, B mají k oběma kružnicím stejnou mocnost O. Každý bod M přímky AB má k oběma kružnicím stejnou mocnost $m = |MA| \cdot |MB|$ a znaménko mocností je záporné. Pro ostatní body přímky AB je nezáporné.

   Hypotéza: Chordála je přímka AB.

   (a) *Důkaz.* Každý bod přímky AB má k oběma kružnicím k, l stejnou mocnost - viz rozbor.

   (b) Nechť M je bod neležící na přímce AB. Označíme m_k jeho mocnost ke kružnici k a m_l jeho mocnost ke kružnici l.
   Rozlišíme několik případů:

      i. Bod M leží vně obou kružnic.
      Přímka MA resp. MB je tečna některé z kružnic k, l. Například přímka MA je tečna ke kružnici k. Potom Přímka Ma protíná kružnici l v dalším bodě X a platí $m_k = |MA|^2$, $m_l = |MA| \cdot |MX|$.

Tedy m_k je různé od m_l. M Nepatří chordále.

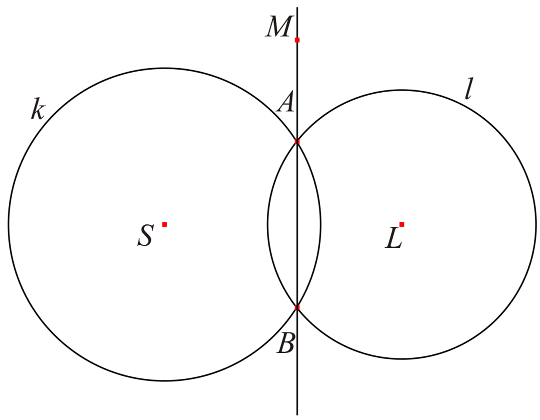
Nechť přímka MA protíná obě z kružnic ve dvou bodech. Další průsečík s kružnicí k označíme K, další průsečík s kružnicí l označíme L. K a L musí být různé body (k, l, nemohou mít víc společných bodů než A, B).

Potom $m_k = |MA| \cdot |MK|$ je různé od $m_l = |MA| \cdot |ML|$. Tudíž bod M nepatří chordále.

ii. Bod M leží na jedné z kružnic k, l. Potom se jedna z mocností rovná nule a druhá je nenulová.

iii. Bod M leží uvnitř jedné z kružnic. Potom se mocnosti liší znaménkem a nemohou být tedy stejné.

iv. Bod M leží uvnitř obou kružnic. Přímka MA protíná kružnici k v dalším bodě K a kružnici l v bodě L a absolutní hodnoty mocností $|MA| \cdot |MK|$, $|MA| \cdot |ML|$ se zřejmě liší.
Odpověď. Chordálou je přímka AB viz obrázek 4.16



Obrázek 4.16: Chordála

5. Text úlohy. Dokažte, že v každém trojúhelníku jsou si rovny součiny úseků, na které dělí libovolnou z výšek trojúhelníka jejich průsečík.

Řešení úlohy. Označme A, B, C vrcholy trojúhelníka, P, Q paty kolmic spuštěných z vrcholů A, B a V průsečík výšek. Mohou nastat tyto možnosti:

(a) Trojúhelník je pravoúhlý a V je v některém z vrcholů A, B, C. Potom jeden z úseků na každé výšce je roven 0 a všechny zkoumané součiny jsou nulové, tedy sobě rovné.

(b) Trojúhelník je ostroúhlý, P i Q leží na Thaletově kružnici t nad průměrem AB a V je vnitřní bod kružnice t a pro jeho mocnost m ke kružnici t platí:

$$m = |VA| \cdot |VP| = |VB| \cdot |VQ| \,.$$

(c) Trojúhelník je tupoúhlý, V je vnější bod Thaletovy kružnice t nad průměrem AB a pro jeho mocnost m ke kružnici t platí:

$$m = |VA| \cdot |VP| = |VB| \cdot |VR| \,.$$

Obdobně ukážeme, že $|VA| \cdot |VP| = |VC| \cdot |VR|$, kde R je pata třetí výšky. Všechny tři součiny úseků na výškách se tedy sobě rovnají. Tvrzení je dokázáno.

6. Text úlohy. Dána kružnice k a dva různé body A, B, které na ni neleží. Body A, B proložte kružnici l tak, aby společné body obou kružnic půlily kružnici k.

Řešení úlohy.
Rozbor.
Označme C, D společné body obou kružnic. S střed kružnice k a r její poloměr. Pak úsečka CD je průměrem dané kružnice k a současně tětivou hledané kružnice l. Označme F další průsečík přímky SA s kružnicí l. Vyjádříme mocnost m bodu S ke kružnici l :

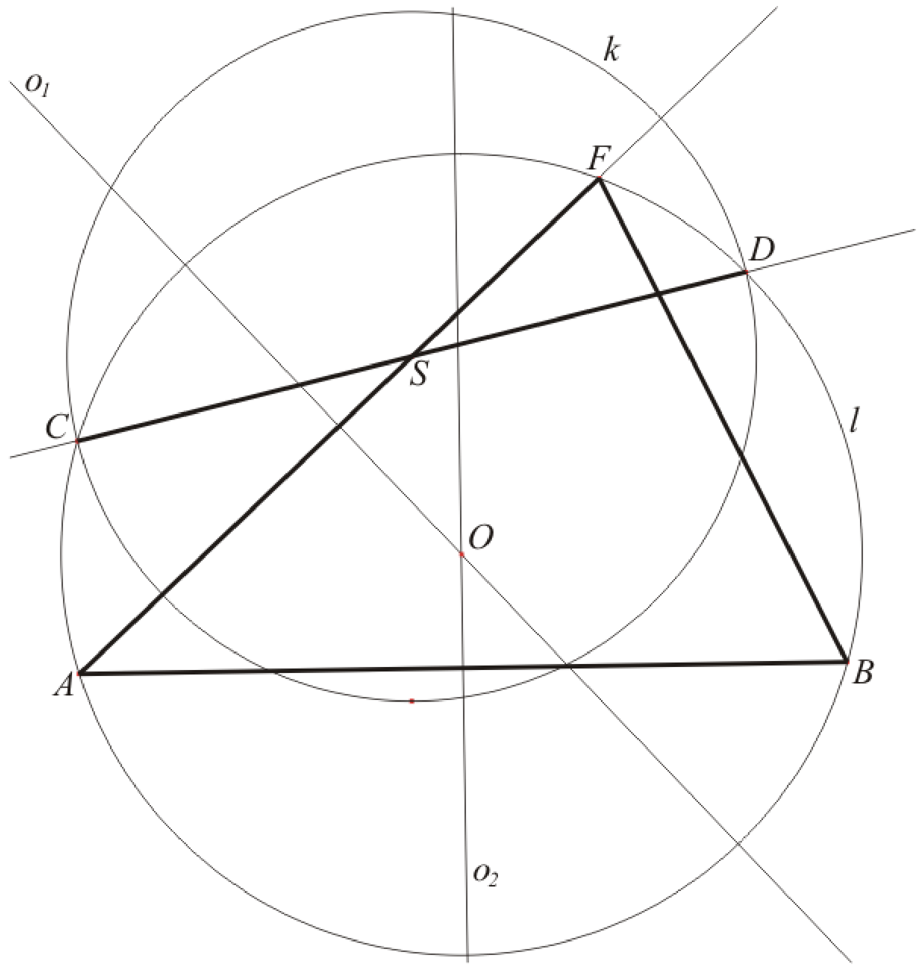
$$m = |SA| \cdot |SF| = |SC| \cdot |SD|$$

a délku

$$|SF| = |SC| : |SA| = r^2 : |SA| \,.$$

Konstrukce: viz obrázek 4.17.
1. Určíme délku x tak, aby platilo $x : r = r : |SA|$.
2. $F : F$ leží na polopřímce opačné k polopřímce SA tak, že $|SF| = x$.
3. o_1 osa strany AF, o_2 osa strany AB.
4. Průnikem o_1 a o_2 Získáme bod O
5. $l : l$ je kružnice opsaná trojúhelníku ABF s poloměrem AO.

Důkaz.
Protože právě jeden z bodů A, F leží uvnitř kružnice k ($|SF| \cdot |SA| = r^2$ a A neleží na kružnici k) musí se obě kružnice protínat. Je-li jeden z průsečíků



Obrázek 4.17: Kružnice opsaná trojúhelníku ABF

bod C, bude mít druhý konec D té tětivy kružnice l, která jde body S i C, od S vzdálenost r, tedy bude také ležet na kružnici k. CD je průměr kružnice k a tedy jí půlí.

Diskuze.
Pokud S neleží na přímce AB má úloha jediné řešení.
Leží-li S na přímce AB pak úloha nemá žádné řešení, pokud F nesplyne s B, pokud F a B splynou je též jedno řešení.

4.3 3. série Přirozená čísla, dělitelnost

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Najděte všechna přirozená čísla x, která vyhovují rovnici:
   $$\sqrt[3]{15-2x}+3\sqrt{x-3}=7.$$

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Určete všechna dvojciferná přirozená čísla n taková, aby každé z čísel $\overline{2n}, \overline{3n}, \overline{4n}, \overline{5n}, \overline{6n}, \overline{7n}, \overline{8n}$ a $\overline{9n}$ mělo stejný součet cifer jako číslo n.

3. Zjistěte zda existují přirozená čísla x, y taková, aby čísla x^2+y a $x+y^2$ byla druhými mocninami celých čísel.

4. Pro trojici navzájem různých přirozených čísel platí: Součet kterýchkoli dvou čísel z této trojice je dělitelný číslem třetím. Najděte všechny takové trojice.

5. Určete všechna přirozená čísla x, y, která vyhovují rovnici
   $$x^3+y^3=xy+61.$$

6. Dokažte, že mezi každými třiceti devíti po sobě jdoucími přirozenými čísly můžeme najít číslo, jehož ciferný součet je dělitelný jedenácti.

Řešení

1. Text úlohy. Najděte všechna přirozená čísla x, která vyhovují rovnici:

$$\sqrt[3]{15-2x}+3\sqrt{x-3}=7.$$

Řešení úlohy. Rovnice má smysl právě když $15-2x \geq 0$ a $x-3 \geq 0$, tedy když $x \in \{3,4,5,6,7\}$. Dosazováním těchto hodnot do dané rovnice zjistíme, že vyhovuje jen $x=7$.

2. Text úlohy. Určete všechna dvojciferná přirozená čísla n taková, aby každé z čísel $\overline{2n}, \overline{3n}, \overline{4n}, \overline{5n}, \overline{6n}, \overline{7n}, \overline{8n}$ a $\overline{9n}$ mělo stejný součet cifer jako číslo n.

Řešení úlohy. Číslo $9n$ je dělitelné devíti a tedy i jeho ciferný součet je dělitelný devíti . Podle zadání je také n dělitelné devíti. Navíc je n dvojciferné, proto mohou připadat v úvahu jen tato čísla:

$$18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99.$$

Vyzkoušením zjistíme, že $n \in \{18, 45, 90, 99\}$.

3. Text úlohy. Zjistěte zda existují přirozená čísla x, y taková, aby čísla x^2+y a $x+y^2$ byla druhými mocninami celých čísel.

Řešení úlohy. Nechť $y \geq x$ potom

$$x^2 < x^2+y \leq x^2+x < x^2+2x+1 = (x+1)^2.$$

Číslo x^2+y se tedy nachází mezi druhými mocninami dvou po sobě jdoucích čísel a proto nemůže být druhou mocninou celého čísla. Po záměně x za y v předchozích úvahách nakonec zjistíme, že podmínkám úlohy nevyhovují žádná přirozená čísla x, y.

4. Text úlohy. Pro trojici navzájem různých přirozených čísel platí:
Součet kterýchkoli dvou čísel z této trojice je dělitelný číslem třetím. Najděte všechny takové trojice.

Řešení úlohy. Čísla označíme a, b a c tak, aby platilo $a < b < c$. Z posledních vztahů máme $a+b < 2c$. Nechť $a+b = k \cdot c$, kde k je přirozené číslo. Je tedy $k \cdot c < 2c$, odtud $k=1$ a proto $c = a+b$. Dále máme $a+c = 2a+b = l \cdot b$, kde l je přirozené číslo. Zřejmě je $2a < 2b$ a $b \leq b$. Sečtením posledních vztahů dostaneme $l \cdot b = 2a + b < 3b$ a odtud $l \leq 2$. Zřejmě nemůže být $l = 1$ a proto $a + c = 2b$. Kromě toho již víme $c = a + b$. Tedy $b = 2a$ a $c = 3a$.

Zkouškou se přesvědčíme, že úloze vyhovuje každá trojice

$$[a, b, c] = [a, 2a, 3a],$$

kde a je libovolné přirozené číslo.

5. Text úlohy. Určete všechna přirozená čísla x, y, která vyhovují rovnici

$$x^3 + y^3 = xy + 61.$$

Řešení úlohy. S každou dvojicí $[x, y]$ zřejmě rovnici vyhovuje i dvojice $[y, x]$. Proto můžeme předpokládat, že $y \leq x$, najít všechna řešení splňující tuto podmínku a pak už jen přidat ta, která vzniknou záměnou x za y v dosud nalezeném řešení.

Nechť je tedy $y \leq x$. Uvažujme nejprve $y = 1$. Dosazením za do zadané rovnice po malé úpravě dostaneme $x^3 = x + 60$, $x = 4$. Jiná hodnota čísla x nevyhovuje, protože kubická funkce, kterou představuje pravá strana rovnice, se s lineární funkcí na pravé straně protínají pouze v jednom bodě.

Analogicky zjistíme, že pro $y = 2$ a $y = 3$ nevychází y celé číslo. Pro $y > 4$ pak již vychází $x < 1$.

Závěr. Všechna řešení představují dvojice $x = 4$, $y = 1$ a $x = 1$, $y = 4$.

6. Text úlohy. Dokažte, že mezi každými třiceti devíti po sobě jdoucími přirozenými čísly můžeme najít číslo, jehož ciferný součet je dělitelný jedenácti.

Řešení úlohy. Mezi prvními dvaceti (ze 39 libovolně zvolených po sobě jdoucích čísel) se určitě nachází dvě, jejichž poslední cifra je 0. Aspoň u jednoho z těchto dvou čísel, označme je n, není předposlední cifrou číslice 9. Čísla $n, n + 1, \ldots, n + 9$ a $n + 19$ patří mezi vybraných 39 čísel. Jejich ciferné součty jsou po řadě $s, s + 1, \ldots, s + 9, s + 10$. Mezi jedenácti po sobě jdoucími přirozenými čísly je však jedno dělitelné jedenácti. (Zbytky při dělení po sobě jdoucích přirozených čísel pevně zvoleným dělitelem tvoří totiž opět řadu po sobě jdoucích přirozených čísel.) Tím je úloha dokázána.

4.4 4. série Zlatý řez, pravidelný pětiúhelník

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   Předpokládejme, že bod C dělí úsečku AB délky u na dvě části. $|AC| = a$ a $|CB| = u-a$, $a > u-a > 0$ tak, že poměr délky celé úsečky ku délce její větší části je stejný jako poměr délky této větší části ku délce kratší části úsečky. Takovéto rozdělení úsečky se nazývá zlatý řez a a poměr $u : a = a : (u-a)$ určený číslem $\varphi = u/a$ je poměr zlatého řezu.
   Dokažte, že platí:

   (a) $\varphi = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

   (b) $\sqrt{2+\varphi} + \sqrt{3-\varphi} = \sqrt{3+4\varphi}$.

2. (Jen pro první ročník vyššího gymnázia a nižší.)
   V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$, jehož strana má délku a, označme G střed strany AB a F průsečík přímek AE a BC. Vyjádřete délku úseček EC, DG a BF pomocí délky a.

3. V pravidelném pětiúhelníku o straně délky a jsou r a ρ poloměry kružnice pětiúhelníku opsané a vepsané. Dokažte, že platí:
   $r\varphi = 2\rho$ a $a = r\sqrt{3-\varphi}$.

4. Fibonacciova posloupnost je posloupnost přirozených čísel $\{F_n\}$, jejíž první dva členy jsou $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pro další členy

   $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n > 1.$$

   Výčtem ji lze znázornit takto:

   $$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots.$$

   Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

   (a) $\varphi^n = F_{n\varphi} + F_{n-1}$.

   (b) $(-\varphi)^{-n} = F_{n+1} - F_{n\varphi}$.

   (c) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$.

5. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s hlavním vrcholem A a obvodem $o = 8 + \sqrt{80}$ cm. Uvnitř strany AC je umístěn bod D tak, že platí:

$$|AC| \cdot |CD| = |AD|^2$$

a zároveň je trojúhelník BCD podobný trojúhelníku ABC. Určete délky stran trojúhelníku ABC.

6. Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ se dvěma navzájem kolmými průměry KL a MN. Konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice k se obvykle provádí takto:

   Nejprve sestrojíme střed O úsečky LS, potom kružnici $h(O, |OM|)$, která protne přímku KL v bodech P a Q. Kratší odvěsna pravoúhlého trojúhelníku PQM je shodná se stranou hledaného pětiúhelníku a delší odvěsna je shodná s jeho úhlopříčkou. Pětiúhelník tedy již snadno sestrojíme opakovaným nanášením délky jeho strany, nebo úhlopříčky na kružnici k pomocí kružítka. Důkaz této konstrukce můžete nalézt například v publikaci Josefa Poláka: Přehled středoškolské matematiky.

   Dokažte jinou méně známou konstrukci. V dané kružnici $k(S, r)$ se dvěma navzájem kolmými průměry KL a MN sestrojíme kružnici k_1 s průměrem SL, potom kružnici k_2 se středem v bodě M tak, aby se vně dotýkal kružnice k_1. Kružnice k_2 protne kružnici k ve dvou sousedních vrcholech A, B hledaného pětiúhelníku. Zbývající vrcholy sestrojíme opakovaným nanášením úsečky délky $|AB|$ jako tětivy na kružnici k pomocí kružítka.

Řešení

1. Text úlohy. Předpokládejme, že bod C dělí úsečku AB délky u na dvě části. $|AC| = a$ a $|CB| = u - a$, $a > u - a > 0$ tak, že poměr délky celé úsečky ku délce její větší části je stejný jako poměr délky této větší části ku délce kratší části úsečky. Takovéto rozdělení úsečky se nazývá zlatý řez a a poměr $u : a = a : (u - a)$ určený číslem $\varphi = u/a$ je poměr zlatého řezu.
   Dokažte, že platí:

   (a) $\varphi = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
   (b) $\sqrt{2+\varphi} + \sqrt{3-\varphi} = \sqrt{3+4\varphi}$.

   Řešení úlohy.

   (a) Podle zadání platí $a/u = u/a - a/a$. Položíme zde $u/a = \varphi$:
   $$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \tag{1}$$
   a upravíme vztah na tvar
   $$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \tag{2}$$
   Jediné vyhovující řešení této kvadratické rovnice je
   $$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{3}$$
   neboť zřejmě $\varphi > 1$.

   (b) Pomocí vztahů (1) a (3) postupně máme
   $$\begin{aligned}
   &\sqrt{(2+\varphi)(3-\varphi)} = \sqrt{6+\varphi-\varphi^2} = \sqrt{5} = 2\varphi - 1,\\
   &2\sqrt{(2+\varphi)(3-\varphi)} = 4\varphi - 2,\\
   &2 + \varphi + 2\sqrt{(2+\varphi)(3-\varphi)} + 3 - \varphi = 3 + 4\varphi,\\
   &(\sqrt{2+\varphi} + \sqrt{3-\varphi})^2 = 3 + 4\varphi.
   \end{aligned}$$
   Výrazy na obou stranách poslední rovnosti jsou kladné, proto můžeme odmocnit a dostaneme co jme chtěli dokázat.

2. Text úlohy. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$, jehož strana má délku a, označme G střed strany AB a F průsečík přímek AE a BC. Vyjádřete délku

úseček EC, DG a BF pomocí délky a.

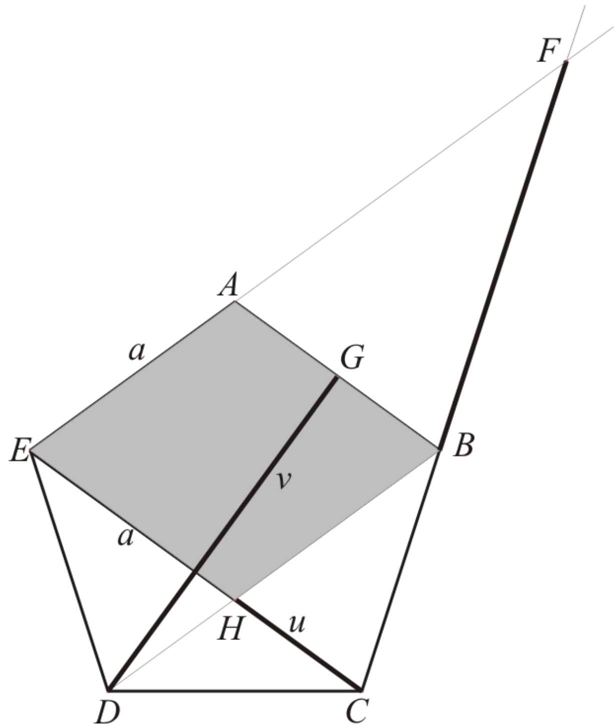
Řešení úlohy. Nechť H je průsečík úhlopříček EB, BD. Platí $|EC| = u$ a $|DG| = v$. Ze souměrnosti pravidelného pětiúhelníku plyne, že jeho úhlopříčky jsou navzájem shodné a navíc je každá rovnoběžná s tou stranou pětiúhelníku, s níž nemá společný bod. Viz obrázek 4.18. Proto je čtyřúhelník $ABHE$ kosočtverec, $|EH| = a$, $|HC| = u - a$ a $|EB| = u$. Z podobnosti trojúhelníků ABH a CDH dostáváme

$$\frac{|EB|}{|CD|} = \frac{|EH|}{|HC|}$$

a odtud

$$\frac{u}{a} = \frac{a}{u-a} = \varphi$$

a tedy $u = a\varphi$.



Obrázek 4.18: Pravidelný pětiúhelník

Čtyřúhelník $AFBD$ je rovněž kosočtverec se stranou délky $|BF| = u$. Z pravoúhlého trojúhelníku GBD na obrázku 4.18 dále máme

$$|DG|^2 = |BD|^2 - |BG|^2,$$

takže

$$v^2 = a^2\varphi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Pomocí (2) nakonec dostaneme

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{2\varphi^2 - 1} = \frac{a}{2}\sqrt{2\varphi + 1}.$$

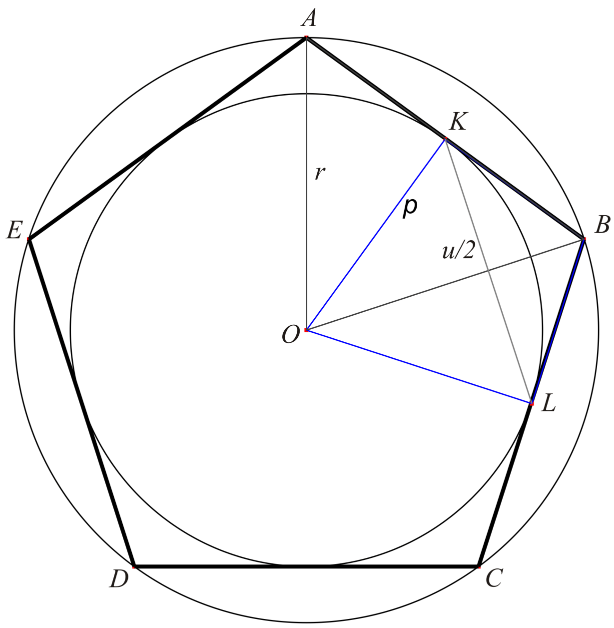
Závěr. $|EC| = |BF| = a\varphi$ a $|DG| = a/a\sqrt{2\varphi + 1}$.

3. Text úlohy. V pravidelném pětiúhelníku o straně délky a jsou r a ρ poloměry kružnice pětiúhelníku opsané a vepsané. Dokažte, že platí: $r\varphi = 2\rho$ a $a = r\sqrt{3 - \varphi}$.

   Řešení úlohy. Nechť K, L jsou středy stran AB a BC, O je společný střed kružnice opsané a vepsané. Obsah čtyřúhelníku $KBLO$ je roven obsahu trojúhelníku ABO. Viz obrázek 4.19. Odtud:

$$\frac{1}{2}|BO| \cdot |KL| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |KO|.$$

   Po dosazení $|KL| = u/2 = a \cdot \varphi/2$, $|BO| = r$, $|AB| = a$ a $|KO| = \rho$ snadno dojdeme k požadovanému vztahu $r\varphi = 2\rho$.



Obrázek 4.19: Obsah čtyřúhelníku

Při druhém důkazu vyjdeme z Pythagorovy věty pro trojúhelník KBO. Tedy:

$$|OB|^2 = |KB|^2 + |KO|^2 .$$

Lze z ni dostat

$$4r^2 = a^2 + 4\rho^2 = a^2 + r^2\varphi^2.$$

Odtud vyjádříme a:

$$a = r\sqrt{4-\varphi^2} = r\sqrt{3-\varphi}.$$

Závěr. Tím je úloha dokázána.

4. Text úlohy. Fibonacciova posloupnost je posloupnost přirozených čísel $\{F_n\}$, jejíž první dva členy jsou $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pro další členy

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n > 1.$$

Výčtem ji lze znázornit takto:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

(a) $\varphi^n = F_{n\varphi} + F_{n-1}$.

(b) $(-\varphi)^{-n} = F_{n+1} - F_{n\varphi}$.

(c) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$.

Řešení úlohy.

(a) Opakovaným využitím vztahu a rekurentní definice mocniny s přirozeným exponentem postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1, \\ \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi &= 2\varphi + 1, \\ \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi+1) + \varphi &= 3\varphi + 2. \end{aligned}$$

Koeficienty na levých stranách zřejmě vytvářejí Fibonacciovu posloupnost a obecně tedy platí

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1}. \tag{4}$$

(b) Analogicky jako v případě (a) dostáváme:

$$\begin{aligned}(-\varphi)^{-1} = -\frac{1}{\varphi} &= 1-\varphi,\\ (-\varphi)^{-2} = -\frac{1}{\varphi}+1 &= 2-\varphi,\\ (-\varphi)^{-3} = -\frac{2}{\varphi}+1 &= 3-2\varphi.\end{aligned}$$

Tudíž lze obecně psát

$$(-\varphi)^{-n} = F_{n+1} - F_n \cdot \varphi. \tag{5}$$

(c) Podle definice Fibonacciovy posloupnosti platí

$$F_{n-1} - F_{n+1} = -F_n.$$

Nyní využijeme vztahů (4) a (5) dostaneme

$$\varphi^n - (-\varphi)^n = (2\varphi - 1)F_n = \sqrt{5}F_n.$$

Vyjádříme F_n

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Vztah (6) se nazývá Binetův vzorec.

5. Text úlohy. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s hlavním vrcholem A a obvodem $o = 8 + \sqrt{80}$ cm. Uvnitř strany AC je umístěn bod D tak, že platí:

$$|AC| \cdot |CD| = |AD|^2$$

a zároveň je trojúhelník BCD podobný trojúhelníku ABC. Určete délky stran trojúhelníku ABC.

Řešení úlohy. Z podobnosti trojúhelníků ABC a BCD zjistíme:
$|AC| \,/\, |BC| = |BC| \,/\, |CD|$. Odtud ze zadání úlohy dostáváme:

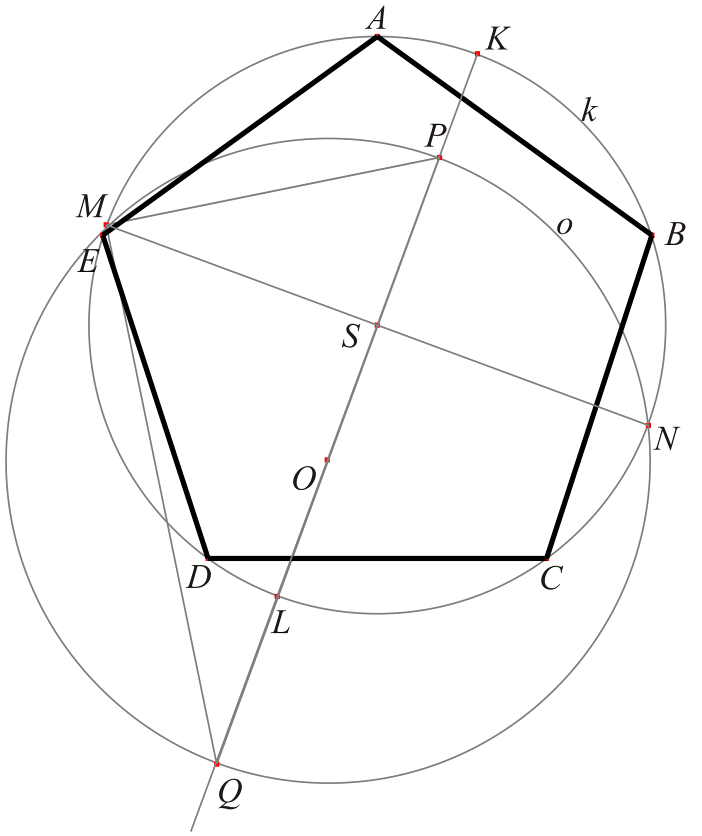
$$|AD|^2 = |AC| \cdot |CD| = |BC|^2 .$$

Můžeme tedy položit $|AC| = |AD| = |BD| = a$, $|AB| = |AC| = b$ a $b = \varphi \cdot a$, neboť ze vztahu v zadání úlohy plyne, že bod D dělí úsečku AC v poměru zlatého řezu.
Obvod trojúhelníku ABC je $(2\varphi + 1)a = 8 = \sqrt{80}$. Z tohoto vztahu snadno určíme

$$a = 4 \text{ cm}, \quad b = a \cdot \varphi = \frac{4(1+\sqrt{5})}{2} = 2(1+\sqrt{5}) \text{ cm}.$$

6. Text úlohy. Nechť je dána kružnice $k(S,r)$ se dvěma navzájem kolmými průměry KL a MN. Konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice k se obvykle provádí takto:

Nejprve sestrojíme střed O úsečky LS, potom kružnici $h(O, |OM|)$, která protne přímku KL v bodech P a Q. Kratší odvěsna pravoúhlého trojúhelníku PQM je shodná se stranou hledaného pětiúhelníku a delší odvěsna je shodná s jeho úhlopříčkou. Pětiúhelník tedy již snadno sestrojíme opakovaným nanášením délky jeho strany, nebo úhlopříčky na kružnici k pomocí kružítka. Konstrukci vidíme na obr. 4.20. Důkaz této konstrukce můžete nalézt například v publikaci Josefa Poláka: Přehled středoškolské matematiky.

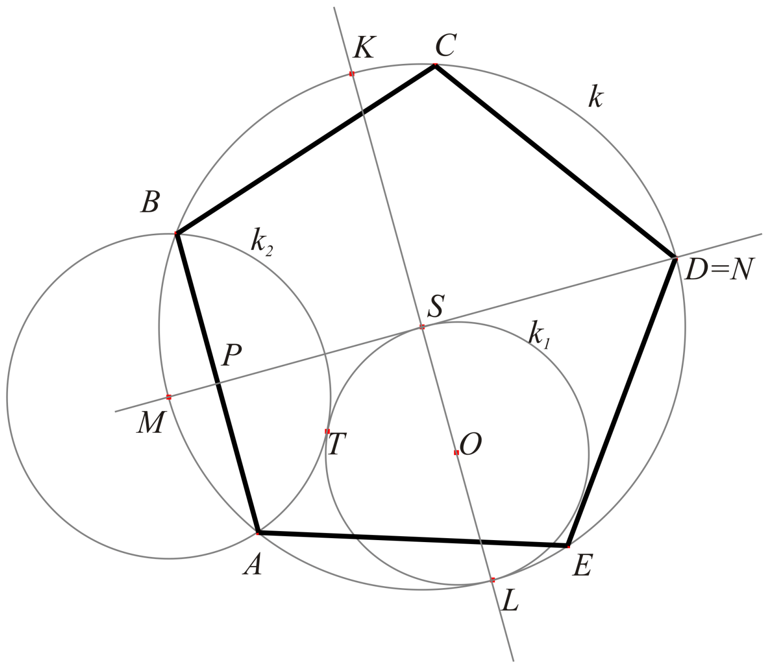


Obrázek 4.20: Konstrukce pětiúhelníka

Dokažte jinou méně známou konstrukci. V dané kružnici $k(S,r)$ se dvěma navzájem kolmými průměry KL a MN sestrojíme kružnici k_1 s průměrem SL, potom kružnici k_2 se středem v bodě M tak, aby se vně dotýkal kružnice k_1. Kružnice k_2 protne kružnici k ve dvou sousedních vrcholech A, B hledaného pětiúhelníku. Zbývající vrcholy sestrojíme opakovaným nanášením úsečky délky $|AB|$ jako tětivy na kružnici k pomocí kružítka.

Řešení úlohy. Označme $|AB| = a$, T bod dotyku kružnic k_1 a k_2, O střed úsečky $|SL|$ a P střed $|AB|$ viz obrázek 4.21.

Pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník MOS určíme $|OM| = r\sqrt{5}/2$.



Obrázek 4.21: Jiná konstrukce pětiúhelníka

Dále:

$$|MB| = |MT| = \frac{r(\sqrt{5}-1}{2} = \frac{r}{\varphi} = r(\varphi - 1).$$

Podle Thaletovy věty je trojúhelník BNM pravoúhlý a můžeme pro něj použít Eukleidovu větu o odvěsně ($c_b \cdot c = b^2$), podle níž

$$|PM| = \frac{|MB|^2}{|MN|} = \frac{r^2(\varphi-1)^2}{2r} = \frac{r(2-\varphi)}{2}.$$

Podle Eukleidovy věty o výšce $v^2 = c_a \cdot c_b$ pro tentýž trojúhelník platí:

$$\frac{a^2}{4} = |PM|\,|PN| = \frac{r}{2}(2-\varphi)\left(2r - (2-\varphi)\frac{r}{2}\right) =$$

$$\frac{r^2}{4}(2-\varphi)(2+\varphi) = \frac{r^2}{4}\left(4-\varphi^2\right) = \frac{r^2}{4}(3-\varphi).$$

Je tedy $a = r\sqrt{3-\varphi}$ a to je vztah mezi délkou strany pravidelného pětiúhelníku a poloměrem kružnice, do níž je tento pětiúhelník vepsán (viz úloha 3). Tím je důkaz proveden.

Kapitola 5

Závěr

Cílem diplomové práce bylo sepsání a vyřešení posledních tří ročníků Jihočeského korespondenčního semináře z matematiky z let 1999 – 2002. Touto prací se stává seminář kompletně zpracován od dob jeho počátku (1980) až po zánik (2002).

Řešené úlohy jsou určené všem zájemcům o matematiku a to jak z řad studentů tak i pedagogů. Mohou být využity při seminářích z matematiky jako netradiční úlohy a inspirovat studenty a vyučující.

Díky diplomové práci jsem seznámil s neobvyklými úlohami, které přede mnou řešili soutěžící JKMS. Naučil jsem ovládat matematické programy Cabri II Plus a LaTeX.

Literatura

[1] Bartsch, H.-J.: *Matematické vzorce*. Praha, SNTL, 1987

[2] Harant, M., Lanta, O.: *Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník SVVŠ*. Praha, SPN, 1965

[3] Horák, S.: *Nerovnosti v trojúhelníku*. Praha, JČMF Mladá fronta, 1986

[4] Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha, Prometheus, 2002

[5] Koblížková, M.: *Objevujeme mnohostěny – sbírka řešených úloh pro zájemce o geometrii. (dizertační práce), UK v Praze, Praha, 2004*

[6] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Praha, Prometheus, 1998

[7] *Originály tiskopisů zadání jednotlivých sérií semináře*