JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Heronovské trojúhelníky

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: M-VT

Vedoucí diplomové práce

RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Autor

Dohnalová Alice

2010

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně na základě materiálů, které uvádím v přehledu použité literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

V Rudolfově, dne 15. listopadu 2010

....

Alice Dohnalová

Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za ochotu, cenné rady a odborné vedení při zpracovávání této práce.

Anotace

Název: Heronovské trojúhelníky

Vypracoval: Alice Dohnalová

Vedoucí: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Didaktika matematiky, geometrie, diofantovské rovnice, heronovské trojúhelníky, Heron Alexandrijský.

Práce obsahuje vybrané vlastnosti a problémy spojené s heronovskými trojúhelníky. Je využitelná jako matematická pomůcka pro práci v zájmové matematice na střední škole.

Annotation

Heading: Heronian triangles

Author: Alice Dohnalová

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Key words: Mathematics education, geometry, Diophantine equations, Heronian triangles, Heron of Alexandria.

Work includes choosen properties and problems pair with Heronian triangles. It's available like mathematical utility for work in special-interest mathematics on secondary school.

Obsah

1 Úvod

Heronovské trojúhelníky budí zájem matematiků již několik staletí. Neustále se objevují nové otázky či nevyřešené problémy, které se zabývají heronovskými trojúhelníky.

Tato práce je určená pro výuku v zájmové matematice na středních školách. Obsahuje metodický materiál, který se zabývá heronovskými trojúhelníky.

Téma heronovské trojúhelníky jsem si zvolila ze dvou důvodů. První důvod je ten, že heronovské trojúhelníky jsou ve středoškolské matematice opomíjeny. Druhým důvodem je fakt, že neexistuje žádná česká publikace či příručka, která by jim byla věnována. Jediné rozšířené periodikum, ve kterém se objevují články s tímto tématem, je časopis Učitel matematiky. Což je dle mne velká škoda, protože heronovské trojúhelníky jsou zajímavým rozšířením učiva o trojúhelnících.

Práce je rozdělena do šesti kapitol (včetně úvodu a závěru). Druhá kapitola je věnována historii a slouží jako motivace k problému heronovských trojúhelníků. Třetí, čtvrtá a pátá kapitola je věnována teorii čísel. Kapitola Perfektní trojúhelníky je vhodná pro práci se začátečníky, kapitoly Heronovské trojúhelníky a Pythagorejské trojúhelníky jsou vhodné pro práci se studenty pokročilými, protože se v nich objevují složitější matematické operace a především diofantovské rovnice.

1.1 Úvodní pojmy

Před tím, než se začneme věnovat problematice heronovských trojúhelníků, připomeneme některé základní pojmy a vztahy, se kterými budeme v textu pracovat, a základní vlastnosti trojúhelníků.

Nejprve si uvedeme jednu z vlastností tečen ke kružnici a množiny trojúhelníků, které díky tečnám vzniknou. Mějme kružnici k a na ní dva pevně zvolené body T a U. Z bodů T, U sestrojíme tečny k dané kružnici, které se protínají v bodě A, a třetí tečnu ke kružnici k, která má proměnný bod dotyku označený V. Podmínka třetí tečny je, aby protínala úsečku AT v jejím vnitřním bodě B a úsečku AU v jejím vnitřním bodě C (viz obrázek 1.1). Pokud je tato podmínka splněna, pak všechny trojúhelníky s vrcholy A, B, C mají stejný obvod a platí

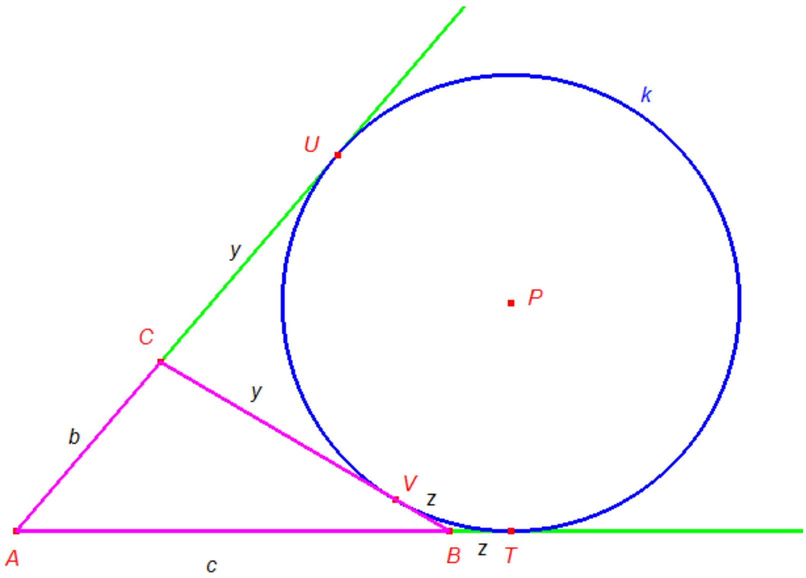
$$s = |AT| = |AU|. \tag{1.1}$$

Vztah (1.1) platí, protože

$$|CV| = |CU| = y, \;\; |BV| = |BT| = z \tag{1.2}$$

a

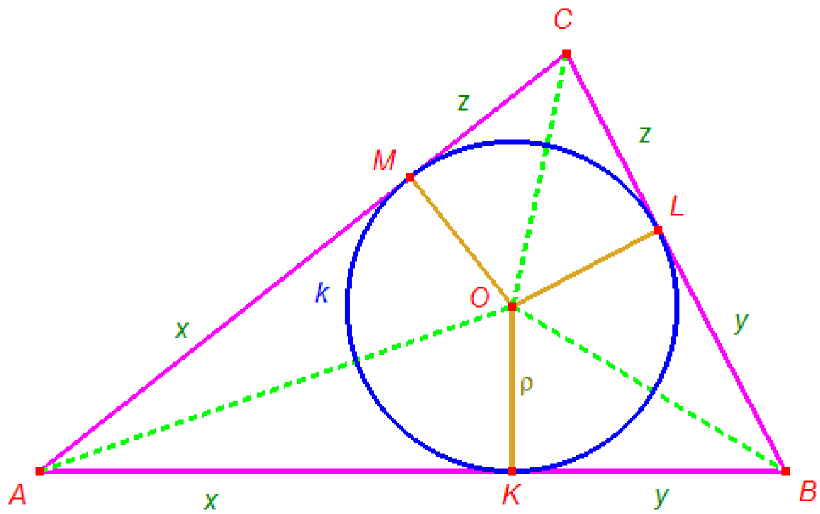
$$o = 2s = c + z + y + b = (c + z) + (b + y) = |AT| + |AU| = 2|AT|. \tag{1.3}$$



Obrázek 1.1 - Tečny ke kružnici

Z vlastností tečen kružnice také vyplývají následující vztahy (viz obrázek 1.2)

$$|AK| = |AM| = x, \;\; |KB| = |BL| = y, \;\; |LC| = |CM| = z. \tag{1.4}$$



Obrázek 1.2 - Kružnice vepsané trojúhelníku *ABC*

Poloviční obvod trojúhelníka je

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = x+y+z\,. \tag{1.5}$$

K odvození nejprve zavedeme vyjádření délek stran trojúhelníka (pomocí obrázku 1.2)

$$a = y+z,\ b = x+z,\ c = x+y\,, \tag{1.6}$$

proto je poloviční obvod trojúhelníka $s = (a+b+c)/2 = (2x+2y+2z)/2 = x+y+z$.

Ze vztahu pro poloviční obvod vyjádříme další vztahy

$$x = s-(y+z) = s-a = \frac{1}{2}(b+c-a),$$

$$y = s-(x+z) = s-b = \frac{1}{2}(a+c-b),$$

$$z = s-(x+y) = s-c = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

a vynásobíme každý vztah číslem dva

$$\left.\begin{aligned} 2x &= b+c-a, \\ 2y &= a+c-b, \\ 2z &= a+b-c. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Další vztahy odvozené ze vztahu (1.5) jsou

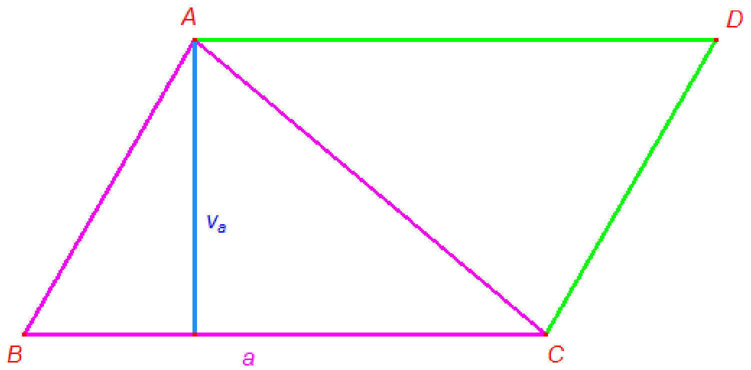
$$s-a=x,\ s-b=y,\ s-c=z. \tag{1.8}$$

Ukážeme si několik vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníka, se kterými budeme v textu pracovat, a jejich odvození. Nebudu zde uvádět Heronův vzorec, protože je mu věnována celá podkapitola 2.3.3.

První způsob, jak vypočítat obsah trojúhelníka, je vyjádřen známým vzorcem

$$S=\frac{av_a}{2}=\frac{bv_b}{2}=\frac{cv_c}{2}, \tag{1.9}$$

který je možné odvodit z obsahu rovnoběžníka $S=av_a$ (viz obrázek 1.3). Obsah trojúhelníka *ABC* je polovičním obsahem rovnoběžníka *ABCD*.



Obrázek 1.3 - Odvození obsahu trojúhelníka

Obsah trojúhelníka lze vypočítat i pomocí poloměru kružnice vepsané nebo připsané.

Použijeme-li pro výpočet obsahu trojúhelníka poloměr ρ kružnice vepsané, vypadá vzorec takto

$$S = \rho s . \tag{1.10}$$

K jeho odvození využijeme obrázek 1.2. Obsah trojúhelníka *ABC* lze vypočítat jako součet obsahů dílčích trojúhelníků $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$. Protože výšky z vrcholu *O* na protější strany všech dílčích trojúhelníků se rovnají číslu ρ, můžeme napsat

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\rho a + \frac{1}{2}\rho c + \frac{1}{2}\rho b = \frac{1}{2}\rho(a+b+c), \tag{1.11}$$

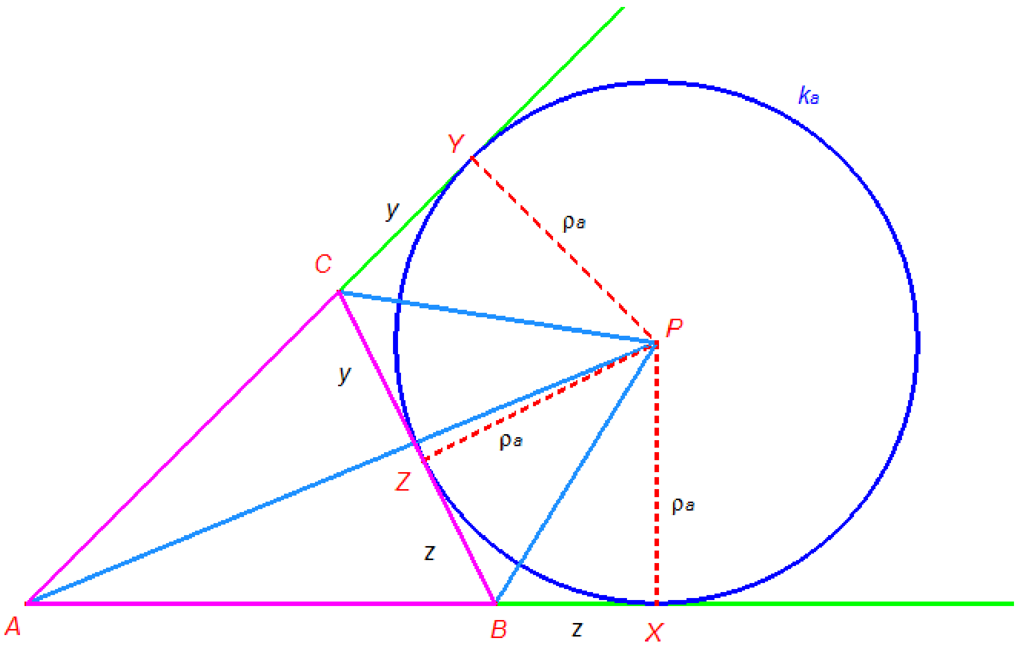
po úpravě $S_{ABC} = \rho s$, kde $a+b+c = 2s$.

Ze vztahu (1.10) je patrné, že poloměr kružnice vepsané se vypočítá

$$\rho = \frac{S}{s}. \tag{1.12}$$

Při použití poloměru ρ_a kružnice připsané ke straně *a* k výpočtu obsahu trojúhelníka obdržíme vzorec

$$S = x\rho_a . \tag{1.13}$$



Obrázek 1.4 - Kružnice připsaná

Připomeňme, že střed kružnice připsané leží v průsečíku osy $\sphericalangle BAC$ a os vnějších úhlů ležících při straně *a*. Obsah trojúhelníka *ABC* vypočítáme jako součet obsahů trojúhelníků *APC* a *ABP*, od kterého odečteme obsah trojúhelníka *BPC*, tj. $S_{ABC} = S_{APC} + S_{ABP} - S_{BPC}$. Spustíme-li výšky ze středu *P* na protilehlé strany všech dílčích trojúhelníků, pak mají stejnou délku ρ_a, proto

$$S_{ABC} = \frac{b\rho_a}{2} + \frac{c\rho_a}{2} - \frac{a\rho_a}{2},$$

po dosazení vztahů (1.6)

$$S_{ABC} = \frac{(x+z)\rho_a}{2} + \frac{(x+y)\rho_a}{2} - \frac{(y+z)\rho_a}{2} = x\rho_a.$$

Dále se budeme zabývat pouze těmi trojúhelníky, které mají délky stran celočíselné. Je zřejmé, že když *a*, *b*, *c* jsou přirozená čísla, která určují délky stran nějakého trojúhelníka, pak i podobný trojúhelník se stranami délek *ka*, *kb*, *kc* $(k \in N)$ má délky stran celočíselné. Takových trojúhelníků je nekonečně mnoho (podle toho, jaké *k* zvolíme). Abychom si zjednodušili vysvětlování, omezujeme se často jen na trojúhelníky s celočíselnými stranami *a*, *b*, *c* nesoudělnými, tzn. $a,\ b,\ c \in N$ a $D(a,\ b,\ c) = 1$. Takové trojúhelníky se nazývají *primitivní trojúhelníky* (někdy se označují jako *základní trojúhelníky*).

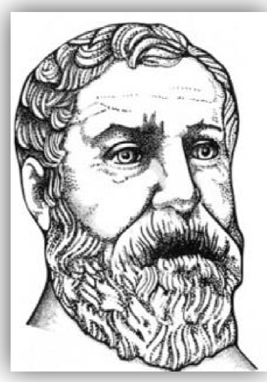
2 Heron Alexandrijský a jeho dílo

2.1 Úvod

Heron Alexandrijský (též zvaný Méchanikos), největší experimentátor starověku, byl významným starořeckým vynálezcem, fyzikem a v neposlední řadě i matematikem (jeho velkým zájmem byly metrické obrazce). Jak uvádí E. F. Robertson [20], byl Heron prvním matematikem, který se hlouběji věnoval trigonometrii.

Žil v římské provincii v Ptolemaiovském Egyptě v prvním století našeho letopočtu. Daleko přesnější je odhad, že Heron žil v letech 10 – 70 našeho letopočtu. Jeho dílo reprezentuje Helénistickou vědeckou tradici.

V matematice je jméno Herona Alexandrijského spojováno s výpočtem obsahu obecného trojúhelníka, známe-li délky všech jeho stran.



Obrázek 2.1 - Heron z Alexandrie (převzato z [20])

2.2 Vynálezy a díla

Nejznámějším Heronovým vynálezem je větrník, pomocí kterého jako první poukázal na využití větru. Dalším zajímavým vynálezem je tzv. větrná koule, kterou lze považovat za první stroj poháněný parou. Pomocí této větrné koule dnes demonstrujeme princip reaktivního pohonu. Větrná koule je také známa jako Heronova baňka.
V některých spisech můžeme nalézt popis různých automatů napodobujících lidské

bytosti (androidy). Právě tato „programovatelná“ automatická zařízení se stala prvním oficiálním krůčkem k výzkumu kybernetiky.

Obrázek 2.2 - Heronova baňka (převzato z [6])

Heron se zabýval geometrickými, mechanickými i počtářskými problémy. Byl ovlivněn Řeckem i orientem. Jeho spisy se dělí do několika kategorií – technické práce, mechanické práce a matematická díla.

Do dnešní doby se zachoval pouze zlomek původních Heronových spisů, ale naštěstí některá díla byla zachována v arabských rukopisech. Pouze ve fragmentech se zachovala díla *Geodesia* a *Geoponica*.

V díle *Automaty* Heron popisuje stroje, které mají přihlížející pobavit nebo oklamat. Je zde i popis strojů, které umožňovaly zázraky v chrámech mechanickými nebo pneumatickými prostředky, např. automatické otevírání a zavírání dveří chrámů.

Mechaniku psal Heron pro architekty. Obsahuje popis prostředků pro zvedání těžkých předmětů. Toto dílo se zachovalo pouze v arabštině.

Metrika je sbírka matematických poznatků starověku. *Kniha I* tohoto spisu je věnována trojúhelníkům, pravidelným polygonům, povrchům válce, kužele, hranolu. Uvádí zde i geometrické odvození Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka (objev tohoto vzorce se ale připisuje Archimédovi) a metodu pro určení přibližné druhé odmocniny z libovolného kladného čísla (blíže viz podkapitola 2.3.1). *Kniha II* poskytuje informace o trojrozměrných tělesech, tj. o válcích, koulích, ale i pyramidách, a měřeních s nimi spojenými. *Kniha III* se zabývá plochami a výpočtem objemů těles.

Pneumatika pojednává o Stratonovi a jeho učení o vzduchu. Uvádí i popis strojů pracujících na vzduch, páru, vodu, tlak a popis vodních varhan. V *Pneumatice* můžeme nalézt i první teoretické úvahy o tlaku v kapalinách.

Dioptrika, kniha o zeměměřičství a astronomii, je sbírka metod pro měření délek, která obsahuje popis přístroje podobného teodolitu. Heron se snažil zjistit vzdálenost mezi Alexandrií a Římem pomocí rozdílů mezi místními časy.

Dílo *Geometria* obsahuje typy úloh, jejichž řešení vede na neurčité rovnice. U těchto úloh postupuje tak, že nejprve formuluje daný problém (úlohu) s konkrétními údaji, a poté algoritmizuje postup řešení daného problému. Heron bohužel neuvádí vysvětlení svých postupů. V *Geometrii* se poprvé objevuje symbol označující neznámé číslo. Zajímavé je, že Heron sám neznámé nepoužívá, používá je až Diofantos.

Ve *Stereometrice* jsou ukázky trojrozměrných výpočtů, které navazují na druhou kapitolu *Metriky*.

Catoptrica líčí o světelném paprsku, který dle Heronových představ putuje nekonečnou rychlostí. Poprvé se tu můžeme setkat s teorií, podle které je vidění zprostředkováno paprsky světla vyzařovaného do očí.

Mensurae obsahuje popisy nástrojů použitých k měření v dílech *Stereometrica* a *Metrica*.

Dílo *Belopoeica* popisuje válečné stroje (v této knize je určitá podobnost s Philonovou prací) a *Cheiroballistra* popisuje katapult.

Definiotiones je souhrn definic a pojmů používaných v geometrii. V knize je jich asi 133.

V poslední době se vyskytují domněnky, že díla *Geometria*, *Stereometrica*, *Mensurae*, *Cheiroballistra* a *Definitiones* Heron nesepsal.

Nejucelenější vydání Heronových děl bylo vydáno v Lipsku nakladatelstvím Teubner roku 1903.

2.3 Heronovy matematické přínosy

2.3.1 Odmocnina

V Heronových svazcích můžeme nalézt různé výpočetní algoritmy, např. *iterační postup*, který jako první popsal a použil ve svých výpočtech. Heron pomocí tohoto postupu dokázal vypočítat při daném obsahu čtverce délku jeho strany. Postup spočíval v tom, že čtverec převedl na obdélník a zvolil délku jedné z jeho stran. Druhou stranu dopočítal prostým dělením. Heron došel k zjištění, že pokud první ze stran podhodnotil, druhá strana obdélníka vyšla nadhodnocená. Proto délku strany čtverce odhadl jako aritmetický průměr délek obou stran obdélníka. Opakováním postupu výsledek zpřesňoval. Tato metoda se dá použít, pokud chceme zjistit druhou odmocninu libovolného kladného čísla. Někdy je iterační metoda označována jako metoda Babylónská, protože iterační výpočet odmocniny znali již Babylóňané.

Poznámka 2.1. Podobně, jako dokázal vypočítat délku strany čtverce při známém obsahu, dokázal vypočítat i délku hrany krychle, pokud byl znám její objem. Postupoval tak, že krychli převedl na čtyřboký hranol. Zvolil čtvercovou stěnu, dopočítal výšku a následně udělal vážený průměr, kde dal hraně dvojnásobnou váhu než výšce.

Při výpočtu odmocniny z čísla S budeme dle iterační metody postupovat následujícím způsobem:

Číslo *S* budeme považovat za obsah čtverce o straně délky a_i, která je hledanou hodnotou odmocniny.

Platí tedy vztah $S = a_i^2$. Daný čtverec převedeme na obdélník o stranách *b*, *c*. Zvolíme délku strany *b*, která bude mít prvotní hodnotu b_1. Délku strany *c* odvodíme ze vzorce pro obsah obdélníka $S = b_1 c_1$, odtud

$$c_1 = \frac{S}{b_1}. \tag{2.1}$$

Délka strany čtverce je v první aproximaci aritmetickým průměrem stran obdélníka

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b_1 + c_1\right).$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu vztah (2.1) obdržíme

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{S}{b_1}\right).$$

Pokud neobdržíme dostatečně přesný výsledek, pokračujeme v metodě dále. Další krok zapíšeme vztahem

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{S}{a_1}\right). \tag{2.2}$$

Postup výpočtu lze zapsat takto

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{S}{a_i}\right). \tag{2.3}$$

Kroky výpočtu provádíme do té doby, než se číslo a_{i+1} výrazně neliší od předešlého kroku výpočtu, tj. dokud při výpočtech nebudeme dostávat stejný výsledek.

Příklad 2.1. Pomocí iterační metody určete délku strany čtverce, jehož obsah je 576.
Řešení: Jako počáteční hodnotu a_1 si zvolíme číslo 3 a dosadíme ho do vztahu (2.3). Po zaokrouhlení vyjde $a_2 = 97,5$ a tento výsledek opět dosadíme

do vztahu (2.3). Tento krok zopakujeme ještě dvakrát a po zaokrouhlení vyjdou následující výsledky $a_3 = 51,7;$ $a_4 = 31,4$ a $a_5 = 24,9$. Jak můžeme vidět, tak každý výsledek se výrazně liší od výsledku předchozího výpočtu. Při dalším výpočtu získáme výsledek $a_6 = 24.$ Tento výsledek se již „výrazně" neliší od výsledku předešlého, proto toto číslo je hledanou odmocninou. Pro kontrolu můžeme učinit ještě několik kroků iterační metody (pokaždé nám vyjde číslo 24) nebo daný výsledek umocníme.

Poznámka 2.2. Heronova iterační metoda je speciálním případem *Newtonovy metody tečen*.
Aplikace Newtonovy metody tečen pro výpočet délky strany čtverce ze známého obsahu S: Mějme funkci $f\left(x\right) = x^2 - S.$ Při hledání kořenu této funkce vycházejme z toho, že číslo a_1 je přibližná hodnota hledaného kořenu. Přesnější hodnotu vypočítáme pomocí následujícího vztahu

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = a_1 - \frac{a_1^2 - S}{2a_1} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{S}{a_1}\right).$$

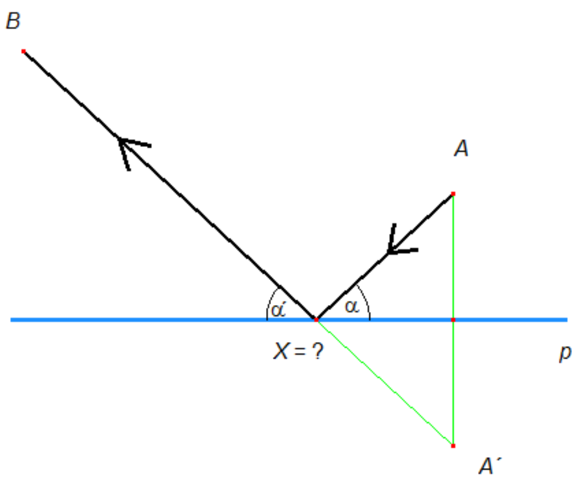
Jak můžeme vidět, tak jsme obdrželi vztah (2.2).

2.3.2 Heronova úloha

Heron studoval odraz a lom světla. Našel tzv. *princip nejkratší dráhy*. Světlo se při odrazu šíří z bodu *A* do bodu *B* přes takový bod *X*, aby jeho dráha byla minimální

$$s = |AX| + |XB| = |A'X| + |XB| = |A'XB| \geq |A'B|, \tag{2.4}$$

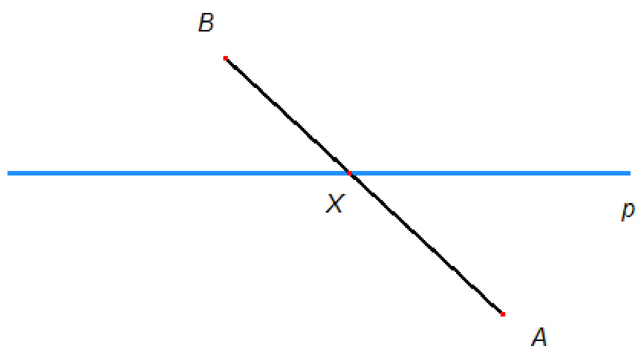
$$s_{\min} = A'B.$$



Obrázek 2.3 - Princip nejkratší dráhy

Příklad 2.2. (Heronova úloha) Mějme dva různé body *A*, *B*, které leží ve stejné polorovině určené přímkou *p*. Naším úkolem je nalézt bod *X* ležící na přímce *p* tak, aby lomená čára *AXB* měla minimální délku.

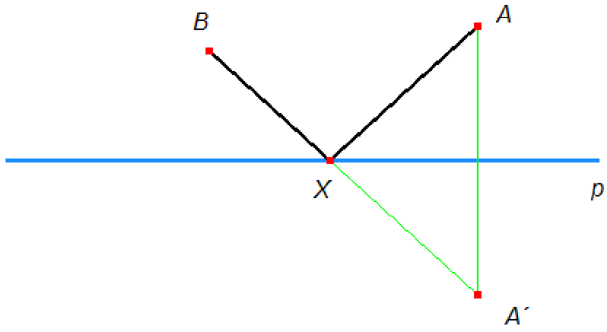
Řešení: Kdybychom řešili podobnou úlohu, která se liší od Heronovy úlohy tím, že body *A*, *B* leží v opačných polorovinách, pak by byla délka $|AX|+|XB|$ nejkratší pro bod *X*, který leží na přímce *p* a který se nachází mezi body *A*, *B* (viz obrázek 2.4).



Obrázek 2.4 - Body *A*, *B* leží v opačných polorovinách

Vrátíme se zpět k Heronově úloze, kterou pomocí osové souměrnosti převedeme na tento typ příkladu. Sestrojíme bod *A´*, který je osově souměrný s bodem *A* podle přímky p. Hledaným bodem X je průsečík přímky p a úsečky BA'. Protože bod X je bodem samodružným ($X = X'$) a osová souměrnost zachovává vzdálenosti, pak platí

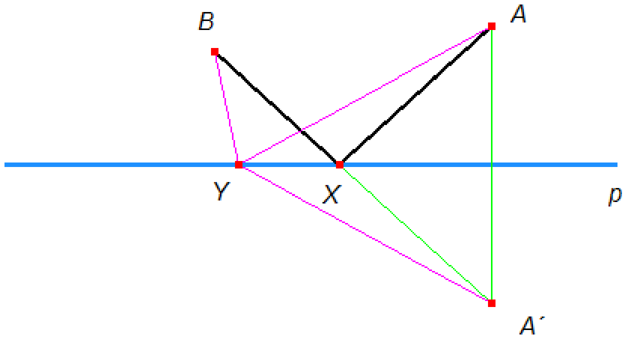
$$|AX| + |XB| = |BX| + |XA'| = |BA'|.$$



Obrázek 2.5 - Heronova úloha

Abychom ukázali, že délka lomené čáry AXB je opravdu minimální, tak si na přímce p zvolíme libovolný bod Y, který je různý od bodu X. Využijeme vlastností osové souměrnosti a trojúhelníkovou nerovnost, platí tedy tento vztah

$$|BY| + |YA'| = |AY| + |YB| > |BX| + |XA'| = |AX| + |XB| = |BA'|.$$



Obrázek 2.6 - Pomocný obrázek k Heronově úloze

Heronova úloha má jediné řešení.

Poznámka 2.3. Heronův princip nejkratší dráhy zobecnil v 17. století Pierre de Fermat na *princip nejkratšího času*.

2.3.3 Heronův vzorec

Heronovi připisujeme známý vztah pro obsah obecného trojúhelníka *ABC* o stranách délek *a*, *b*, *c*

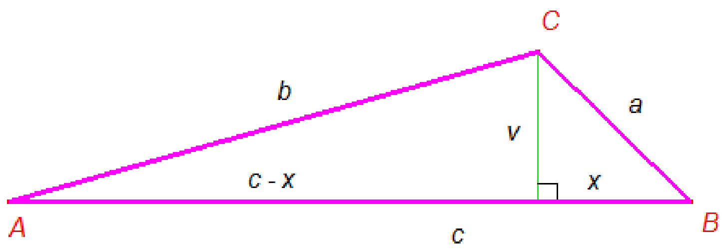
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{2.5}$$

Vztah (2.5) se nazývá *Heronův vzorec*.

V následujícím textu si ukážeme několik důkazů vztahu (2.5).

Důkaz Heronova vzorce pomocí Pythagorovy věty.

a) Úhly α, β jsou ostré.



Obrázek 2.7 – Situace $\alpha < 90°$

Pro trojúhelník z obr. 2.7 platí vztahy

$$b^2 = v^2 + x^2, \tag{2.6}$$

$$v^2 = a^2 - (c-x)^2. \tag{2.7}$$

Ze soustavy daných rovnic vyjádříme *x*

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

a dosadíme do rovnice (2.6) a vyjádříme výšku

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2},$$

$$v = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2c}.$$

Po dosazení výšky v do vzorce pro obsah trojúhelníka $S = cv/2$, vyjde vztah

$$S = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{4}.$$

Po rozepsání

$$S = \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}}{4}$$

a rozložení

$$S = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)}}{4}$$

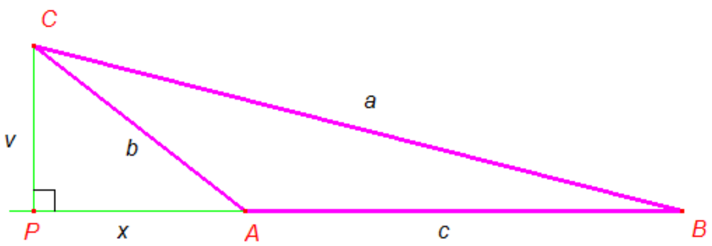
dostaneme vztah

$$S = \frac{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}}{4}. \qquad (2.8)$$

Odtud a ze vztahů (1.7) plyne Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

b) Úhel α nebo β je tupý.



Obrázek 2.8 – Situace $\alpha > 90°$

V tupoúhlém trojúhelníku platí vztahy

$$b^2 = v^2 + x^2, \tag{2.9}$$

$$v^2 = a^2 - (c + x)^2\,. \tag{2.10}$$

Ze vztahů (2.9) a (2.10) vyjádříme x

$$x = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

a dosadíme do rovnice (2.9) a vyjádříme výšku

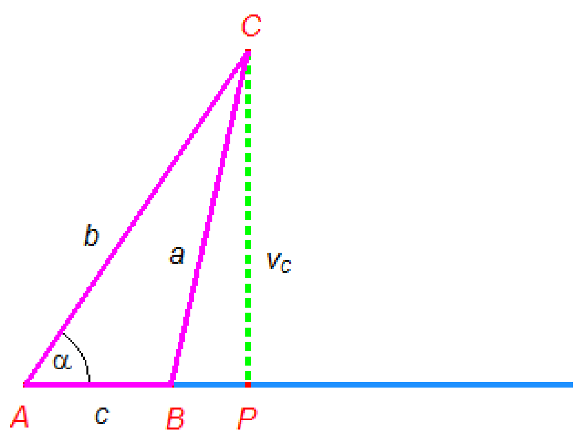
$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4c^2}\,,$$

$$v = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}}{2c}\,.$$

Dále provádíme stejné kroky jako v případě a).

Odvození pomocí goniometrických funkcí

Je dán trojúhelník *ABC* se stranami délek *a*, *b*, *c*. Naším úkolem je vypočítat jeho výšku ke straně *c* a obsah *S* (z daných délek stran).



Obrázek 2.9 - Zadaný trojúhelník

Pro daný trojúhelník platí

$$|AP| = b \cdot \cos\alpha,$$

$$v_c^2 = b^2\left(1 - \cos^2\alpha\right).$$

Víme, že $\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$ (odvození viz [8]).

Dosazením

$$v_c^2 = b^2\left(1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right),$$

$$v_c^2 = b^2 \cdot \frac{2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}.$$

Upravíme podle algebraických vzorců

$$v_c^2 = \frac{\left(a+c-b\right)\left(a+c+b\right)\left(b+c-a\right)(a+b-c)}{4c^2}. \tag{2.11}$$

Označme $a + b + c = 2s$ a po dosazení do (2.11) dostaneme, že

$$v_c = \frac{2}{c}\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}. \tag{2.12}$$

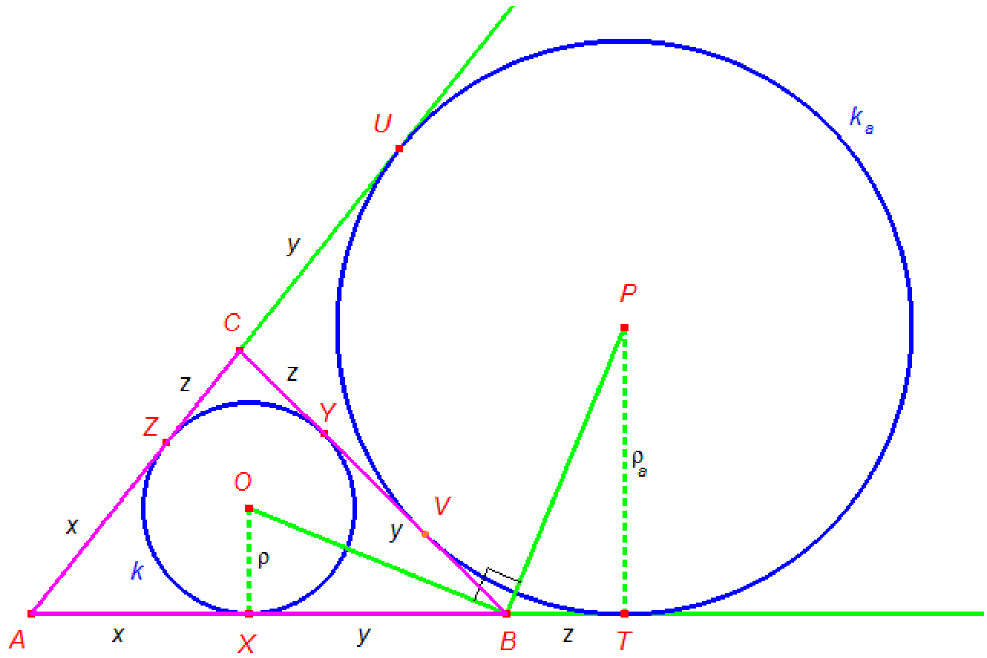
Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka *ABC* o stranách *a*, *b*, *c* odvodíme tak, že vyjádření (2.12) dosadíme do vzorce pro obsah trojúhelníka (1.9), pak

$$S = \sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)(s-c)}.$$

Odvození pomocí kružnice připsané

Mějme trojúhelník *ABC* se stranami délek *a*, *b*, *c*, kružnici vepsanou trojúhelníku $k(O,\ \rho)$ a ke straně *a* kružnici připsanou $k_a(P,\ \rho_a)$.

Průsečíky trojúhelníka s kružnicí vepsanou k označíme X, Y, Z. Průsečík kružnice připsané k_a se stranou a označíme V, s polopřímkou AB označíme T a s polopřímkou AC označíme U (viz obrázek 2.10).



Obrázek 2.10 - Obrázek k důkazu, řešení pomocí kružnice připsané

Protože polopřímky AT a AU jsou tečny kružnice k_a s body dotyku T a U, platí $|AT| = |AU|$. Z vlastností tečen kružnice vyplývají i následující vztahy

$$|AX| = |AZ| = z,\ |XB| = |BY| = y,\ |YC| = |CZ| = z,\ |TP| = \rho_a,\ |OX| = \rho. \qquad (2.13)$$

Z obrázku je patrné, že $s = |AT| = |AB| + |BT|$, odůvodnění viz vztahy (1.2) a (1.3), odtud plyne $|BT| = z.$ Navíc je známo, že osy OB a BT úhlů různoběžek CB a AB jsou na sebe kolmé. Pomocí tohoto faktu snadno ověříme, že $|\sphericalangle XBO| = |\sphericalangle TPB| = \beta / 2.$ Z toho plyne, že pravoúhlé trojúhelníky XBO a TPB jsou podobné dle věty *uu*. Díky této podobnosti můžeme vyjádřit vztah $|BT| / |XO| = |TP| / |XB|$, dosazením vztahů (2.13) získáme $z / \rho = \rho_a / y$,

$$\rho_a = \frac{zy}{\rho}. \tag{2.14}$$

Do vztahu (1.13) dosadíme vztah (2.12), tím $S = xyz / \rho$. Toto vyjádření pro obsah trojúhelníka *ABC* vynásobíme se vztahem (1.10) a odmocníme

$$S = \sqrt{sxyz}. \tag{2.15}$$

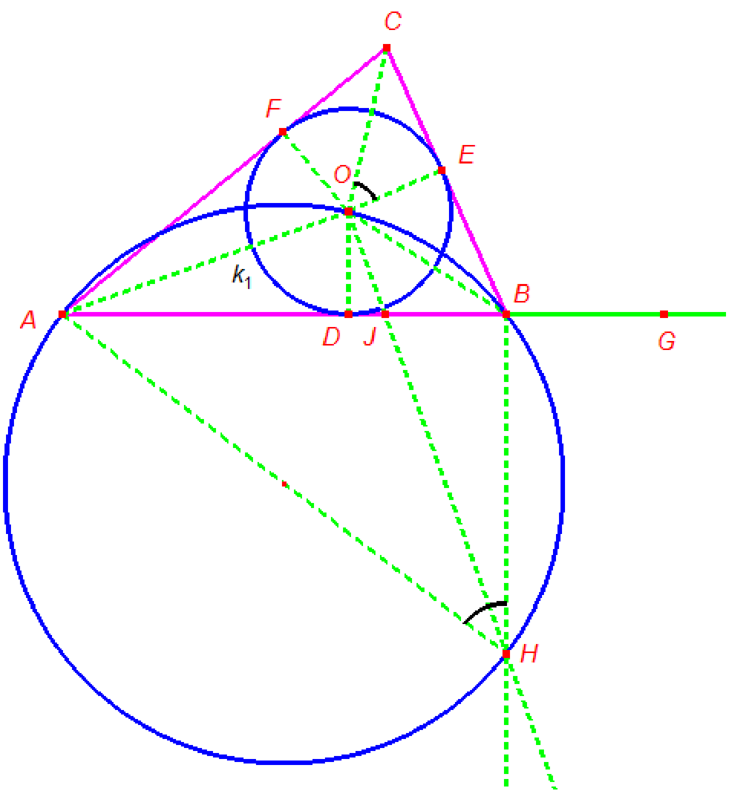
Po dosazení vyjádření (1.8) do vztahu (2.15) získáme Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Heronův důkaz Heronova vzorce

Tento důkaz, založený na originálním důkazu Herona Alexandrijského uvedeného v díle *Metrica*, je upraven za pomoci [7] a [11] do dnešních matematických zápisů.

Mějme obecný trojúhelník *ABC* o stranách *a*, *b*, *c* (viz obrázek 2.11).



Obrázek 2.11 - Pomocný obrázek k důkazu

Bod O je průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníka, body D, E, F jsou paty výšek z bodu O na příslušné strany trojúhelníka, k_1 je kružnice vepsaná trojúhelníku ABC. Bod G byl zvolen na polopřímce opačné k polopřímce BA tak, aby $|BG| = |CE|$. Bod H je průsečík kolmice z bodu O na úsečku AO (průsečík kolmice se stranou c je bod J) a kolmice z bodu B na úsečku AG.

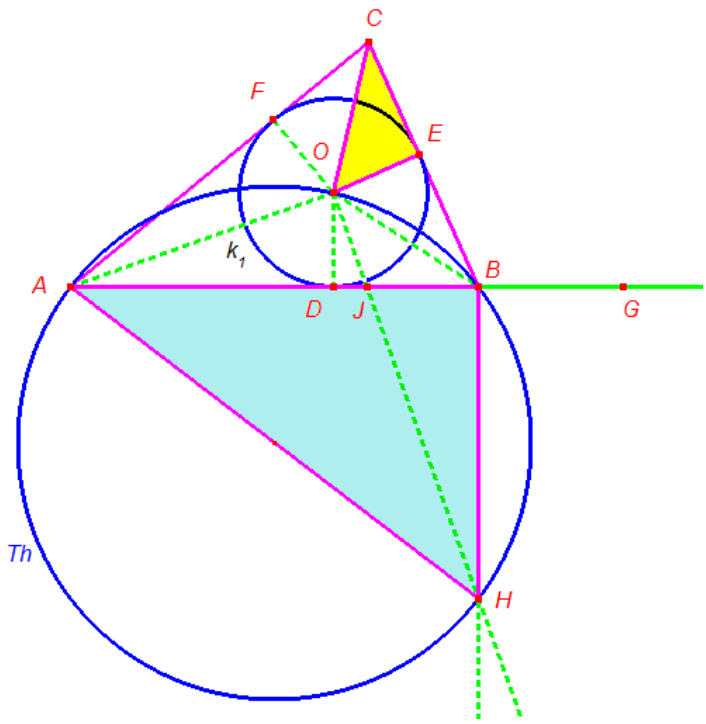
Připomeňme, že
$o = a + b + c = |BC| + |CA| + |AB| = (|BE| + |EC|) + (|AF| + |FC|) + (|AD| + |BD|)$.
Odtud $o = 2(|CE| + |BD| + |AD|) = 2(|GB| + |BD| + |AD|) = 2|AG|$, tedy $s = |AG|$.

Věnujme pozornost bodům A, H, B, O, které leží na téže (Thaletově) kružnici. Čtyřúhelník $AHBO$ je tedy tětivový. Z toho plyne, že protilehlé úhly dávají v součtu 180°, tudíž $|\measuredangle AOB| + |\measuredangle AHB| = 180°$. Z obrázku 2.12 dále plyne, že $(|\measuredangle COF| + |\measuredangle COE|) + (|\measuredangle BOE| + |\measuredangle BOD|) + (|\measuredangle AOD| + |\measuredangle AOF|) = 360°$.

Zápis zjednodušíme $2|\measuredangle COE| + 2|\measuredangle BOD| + 2|\measuredangle AOD| = 360°$, tak $|\measuredangle COE| + |\measuredangle BOD| + |\measuredangle AOD| = 180°$. Ale $|\measuredangle BOD| + |\measuredangle AOD| = |\measuredangle AOB|$, proto $|\measuredangle COE| + |\measuredangle AOB| = 180°$. Porovnáním vztahů $|\measuredangle COE| + |\measuredangle AOB| = 180°$ a $|\measuredangle AOB| + |\measuredangle AHB| = 180°$ zjistíme, že $|\measuredangle COE| = |\measuredangle AHB|$.

Trojúhelníky COE a AHB jsou podobné dle věty *uu*, protože $|\measuredangle COE| = |\measuredangle AHB|$ a $|\measuredangle CEO| = |\measuredangle ABH|$, proto platí vztah

$$\frac{|AB|}{|CE|} = \frac{|HB|}{|OE|}. \tag{2.16}$$



Obrázek 2.12 - Vyznačení podobných trojúhelníků *COE* a *AHB*

Také trojúhelníky *OJD* a *HJB* jsou podobné dle věty *uu*, protože $|\measuredangle OJD| = |\measuredangle HJB|$ a $|\measuredangle \mathrm{ODJ}| = |\measuredangle \mathrm{HBJ}|$, platí vztah

$$\frac{|HB|}{|OD|} = \frac{|BJ|}{|DJ|}. \tag{2.17}$$

Z obrázku 2.12 plyne, že $|OD| = |OE|$ a $|BG| = |CE|$. Po dosazení do vztahů (2.16) a (2.17) odvodíme vztah

$$|AB| / |BG| = |BJ| / |DJ|. \tag{2.18}$$

V dalším kroku provedeme několik algebraických úprav rovnice (2.18). Nejprve rovnici rozšíříme

$$\frac{|AB|}{|BG|} + 1 = \frac{|BJ|}{|DJ|} + 1,$$

odtud

$$\frac{|AB|}{|BG|} + \frac{|BG|}{|BG|} = \frac{|BJ|}{|DJ|} + \frac{|DJ|}{|DJ|}.$$

Dále $|AB|+|BG|=|AG|$ a $|BJ|+|DJ|=|BD|$, proto

$$\frac{|AG|}{|BG|}=\frac{|BD|}{|DJ|}.$$

Tento vztah můžeme upravit

$$\frac{|AG|}{|BG|}\cdot\frac{|AG|}{|AG|}=\frac{|BJ|}{|DJ|}\cdot\frac{|AD|}{|AD|},$$

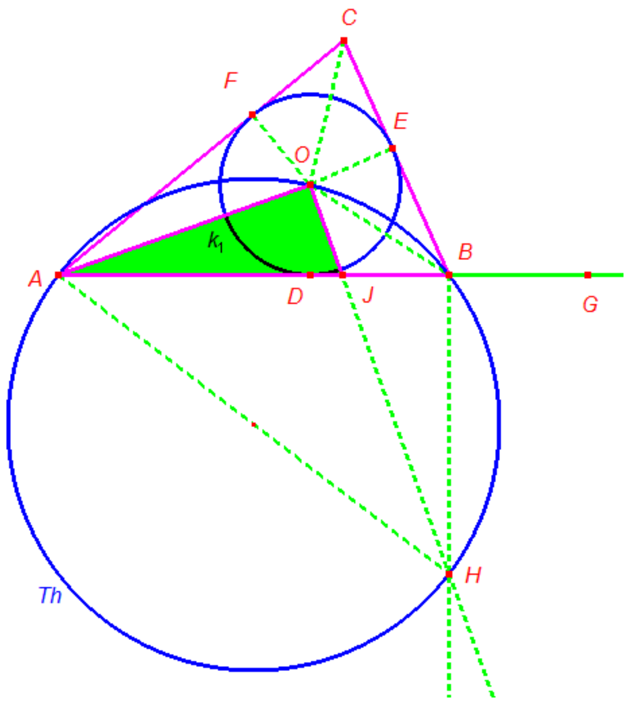
pak

$$\frac{|AG|^2}{|BG|\cdot|AG|}=\frac{|BD|\cdot|AD|}{|DJ|\cdot|AD|}.$$

Protože trojúhelník AOJ je pravoúhlý a bod D leží na přeponě tohoto trojúhelníka, pak dle Euklidovy věty o výšce $|DJ|\cdot|AD|=|OD|^2$, tento vztah dosadíme do vztahu z předchozí věty. Tím dostaneme

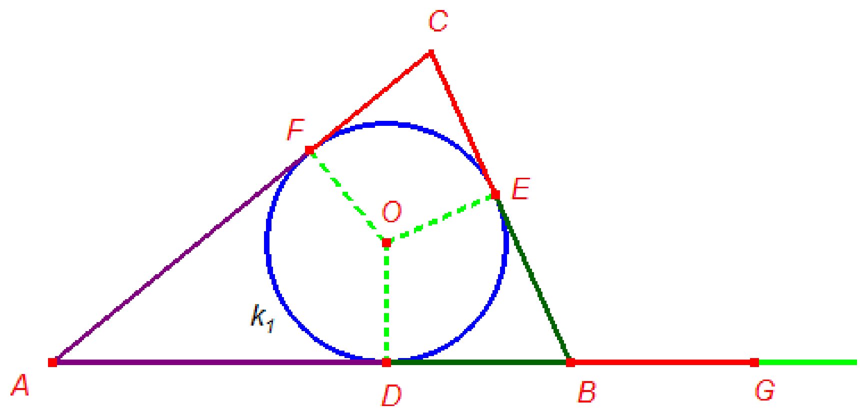
$$\frac{|AG|^2}{|BG|\cdot|AG|}=\frac{|BD|\cdot|AD|}{|OD|^2},$$

po úpravě $|AG|^2\cdot|OD|^2=|BG|\cdot|AG|\cdot|BD|\cdot|AD|$.



Obrázek 2.13 - Vyznačení trojúhelníka *AJO*

Z toho plyne, že $|AG|\cdot|OD| = \sqrt{|BG|\cdot|AG|\cdot|BD|\cdot|AD|}$. Obsah trojúhelníka ABC je $S_{ABC} = |AG|\cdot|OD| = \sqrt{|BG|\cdot|AG|\cdot|BD|\cdot|AD|}$, ale nezapomeňme, že $|AG| = s$.



Obrázek 2.14- Obrázek k důkazu: vyznačení úseků o stejných délkách

Všimněme si, že $|BG| = |AG| - |AB| = s - c$,

$|BD| = |AG| - (|AD| + |BG|) = |AG| - (|AF| + |CF|) = s - b$,

$|AD| = |AG| - (|BD| + |BG|) = |AG| - (|BE| + |CF|) = s - a$.

Odtud obdržíme vztah

$$S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

3 Heronovské trojúhelníky

V této kapitole si povíme něco o *heronovských trojúhelnících* a jejich základních vlastnostech. Na konci kapitoly je několik úloh k procvičení.

Definice 3.1. Trojúhelníky, jejichž délky stran i obsah jsou přirozená čísla, nazýváme *heronovské trojúhelníky*.

3.1 Základní vlastnosti heronovských trojúhelníků

Věta 3.1. Obvod *o* každého heronovského trojúhelníka je sudé číslo. Polovina obvodu heronovského trojúhelníka je celé číslo.

Důkaz: Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje heronovský trojúhelník, jehož obvod je liché číslo. Tedy $a + b + c$, $b + c - a$, $c + a - b$, $a + b - c$ jsou lichá čísla, pak ale výraz pod odmocninou ve vztahu

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

není celé číslo. Odtud plyne, že $a + b + c$, $b + c - a$, $c + a - b$, $a + b - c$ jsou čísla sudá, tím je poloviční obvod celým číslem.

Důsledek věty 3.1. Každý základní heronovský trojúhelník má dvě délky stran liché a jednu sudou.

Důkaz: Podle věty 3.1 je $a + b + c$ číslo sudé. Trojúhelník je primitivní, proto a, b, c nemohou být všechna sudá čísla. Je tedy jediná možnost – dvě délky stran jsou liché a jedna sudá.

Věta 3.2. Mají-li všechny strany heronovského trojúhelníka společného dělitele *D*, potom je jeho obsah dělitelný číslem D^2.

Důkaz: Mají-li všechny strany společného dělitele *D*, pak je můžeme zapsat následujícím způsobem

$$a = eD,\ b = fD,\ c = gD,\ \text{kde } D,\ e,\ f,\ g \in N.$$

Potom vztah pro poloviční obvod můžeme zapsat takto $s = D(e + f + g)/2.$ Tento vztah dosadíme do Heronova vzorce (2.5) a upravíme

$$S^2 = \frac{1}{2}D(e+f+g)\frac{1}{2}(Df+Dg-De)\frac{1}{2}(De+Dg-Df)\frac{1}{2}(De+Df-Dg),$$

$$S^2 = \frac{1}{16}D^4(e+f+g)(f+g-e)(e+g-f)(e+f-g),$$

$$S = \frac{1}{4}D^2\sqrt{(e+f+g)(f+g-e)(e+g-f)(e+f-g)}.$$

Vidíme, že obsah *S* heronovského trojúhelníka je dělitelný číslem D^2 tehdy, když všechny jeho strany jsou dělitelné číslem *D*.

Věta 3.3. Je-li délka strany *a* rovna délce strany *b* (*a* = *b*), potom délka strany *c* je sudé číslo a výška na tuto stranu v_c je číslo celé.

Důkaz: Pokud *a* = *b*, potom $s = (a + a + c)/2 = a + c/2.$ Dle věty 3.1 víme, že poloviční obvod *s* heronovského trojúhelníka je celé číslo, proto délka strany *c* musí být sudé číslo, můžeme ji tedy zapsat jako $c = 2c_1,\ c_1 \in N.$

Nyní dokážeme druhou část věty, tedy že výška v_c je celé číslo. Důkaz vychází ze vzorce obsahu rovnoramenného trojúhelníka $S = v_c \cdot c/2 = v_c \cdot c_1$. Z tohoto vzorce vyjádříme výšku

$$v_c = \frac{S}{c_1}, \tag{3.1}$$

kde c_1 je celé číslo (viz první část důkazu) a *S* je dle definice 3.1 také celé číslo. Pomocí Pythagorovy věty vyjádříme vztah pro výšku rovnoramenného trojúhelníka

$$v_c = \sqrt{a^2 - c_1^2}, \tag{3.2}$$

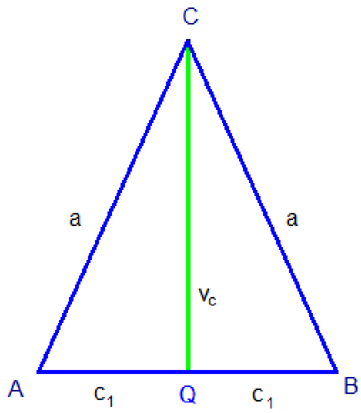
kde v_c je racionální číslo. Vztahy (3.1) a (3.2) si jsou rovny

$$\frac{S}{c_1} = \sqrt{a^2 - c_1^2},$$

proto můžeme napsat následující vztah

$$v_c^2 = \frac{S^2}{c_1^2} = a^2 - c_1^2.$$

Výraz $a^2 - c_1^2$ je celé číslo, protože je to rozdíl dvou celých čísel. Z toho plyne, že i výraz S^2 / c_1^2 je celé číslo, $c_1^2 \mid S^2$ a $c_1 \mid S$, proto c_1 / S je celé číslo. Vidíme tedy, že výška v_c je číslo přirozené.



Obrázek 3.1 - Pomocný obrázek k důkazu

Důsledek věty 3.3. Neexistuje žádný rovnostranný heronovský trojúhelník.

Důkaz: Pokud by platilo, že $a = b = c$, pak by poloviční obvod s trojúhelníka byl $s = 3a/2$. Dle věty 3.1 víme, že s je celé číslo, proto délka strany a je číslo sudé a vyjádříme ji $a = 2a_1$, $a_1 \in N$. Obsah rovnostranného heronovského trojúhelníka vypočítáme následujícím způsobem

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{3}{2}a - a\right)^3},$$

po úpravě a dosazení $a = 2a_1$

$$S=\sqrt{\frac{3}{2^4}2^4a_1^4}=a_1^2\sqrt{3},$$

což je iracionální číslo. Dostali jsme tedy spor s definicí 3.1.

Věta 3.4. Pro heronovské trojúhelníky platí, že velikost nejmenší ze stran je alespoň 3, tj. $\min(a,\ b,\ c)\geq 3.$

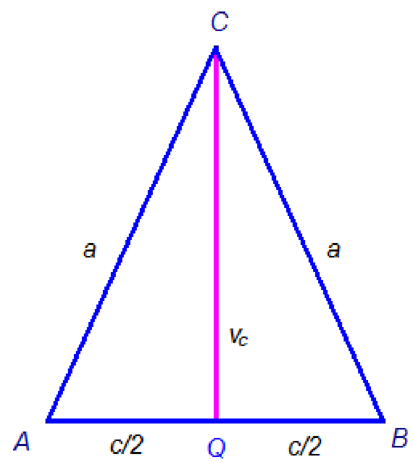
Důkaz: Důkaz provedeme sporem. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\min(a,\ b,\ c)=c<3.$ Tedy $c\in\{1,2\}.$

1. Pokud strana c má velikost jedna, pak z trojúhelníkové nerovnosti $|a-b|<c=1$ plyne $b=a.$ Obvod trojúhelníka je $o=2a+1,$ tedy liché číslo, a to je v rozporu s větou 3.1.

2. Předpokládejme $c=2.$ Analogicky jako v předchozí situaci máme $|a-b|<c=2.$ Jsou dvě možnosti:

   a) $b=a+1$ nebo $a=b+1$. Bez újmy na obecnosti uvažujme jen $b=a+1.$ Obvod trojúhelníka je $o=2a+3,$ což je liché číslo a to odporuje větě 3.1.

   b) $b=a.$ K důkazu využijeme obrázek 3.2. Z obrázku vidíme, že velikost strany a můžeme vypočítat pomocí Pythagorovy věty, tedy $a^2=v_c^2+(c/2)^2$. Po dosazení $c=2$ dostaneme vztah $v_c=\sqrt{a^2-1}$. Dle věty 3.3 je velikost výšky v_c celé číslo, čehož zde nikdy nedosáhneme.



Obrázek 3.2 - Pomocný obrázek k důkazu

3.2 Konsekutivní trojúhelníky (Consecutive Triangles)

Speciálním případem heronovských trojúhelníků jsou tzv. *konsekutivní trojúhelníky (consecutive triangles)*, jejichž délky stran jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla. V zahraničí se též označují jako *super heronian triangles*.

V publikaci [21] se uvádí, že prvním z matematiků, kteří se jimi zabývali, byl Japonec Nakane Genkei, jehož první práce z této oblasti pochází z roku 1922.

Věta 3.5. Délky stran konsekutivního trojúhelníka jsou dány vztahy

$$a = 2y - 1,\ b = 2y,\ c = 2y + 1, \tag{3.3}$$

kde y je přirozené číslo, pro něž je $\sqrt{3(y^2-1)}$ číslo celé. Obsah trojúhelníka je

$$S = y\sqrt{3(y^2-1)}. \tag{3.4}$$

Důkaz: Označme $a = x-1,\ b = x,\ c = x+1.$ Podle věty 3.1 víme, že poloviční obvod trojúhelníka $s = 3x/2$ musí být číslo přirozené. Proto platí $x = 2y,$ kde $y \in N.$
Tím jsme dokázali vztahy (3.3). Navíc musí být obsah trojúhelníka celé číslo. Z rovnic (3.3) plyne $s-a = y+1,\ s-b = y,\ s-c = y-1.$ Dosazením do Heronova vzorce $S = \sqrt{3y^2\left(y+1\right)(y-1)},$ po algebraické úpravě $S = y\sqrt{3\ (y^2-1)}.$

Odvození vztahů pro nalezení délek konsekutivních trojúhelníků (viz [15], str. 43 – 44)*:*
Abychom nalezli všechny konsekutivní trojúhelníky, musíme zjistit, pro která y je výraz $\sqrt{3(y^2-1)}$ číslo celé. Výraz pod odmocninou označíme parametrem $t^2,\ t \in N$ (vzorec pro obsah trojúhelníka má tvar $S = yt$). Je patrné, že parametr t je dělitelný číslem 3, proto jej přepíšeme jako $t = 3u,\ u \in N.$

Provedeme algebraické úpravy

$$3\left(y^2-1\right) = t^2,$$

$$3(y^2-1) = 9u^2,$$

$$y^2 - 3u^2 = 1. \tag{3.5}$$

Rovnice (3.5) je tzv. Pellova rovnice (obecný zápis vypadá takto: $x^2 - Dy^2 = 1$, kde číslo D je přirozené číslo, pro které platí $D \neq n^2$, n libovolné celé číslo). K vyřešení Pellovy rovnice jsou standardní postupy, které zde nebudu uvádět, protože jsou pro studenty složité (pěkně vysvětleno např. v [2]).

Soustavě (3.5) vyhovuje řešení $y_1 = 2,\ u_1 = 1.$ Další řešení dostaneme

za předpokladu $y_n + u_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$ pomocí rekurentních vztahů pro $n+1$. člen

následujícím způsobem

$$y_{n+1} + u_{n+1}\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = \left(y_n + u_n\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 2y_n + 3u_n + \sqrt{3}(y_n + 2u_n).$$

Tím získáme rekurentní vztahy

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= 2y_n + 3u_n, \\ u_{n+1} &= y_n + 2u_n, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

$n = (1,\ 2,\ \ldots)$.

Věta 3.6. Délky stran konsekutivního trojúhelníka jsou $b_n - 1,\ b_n,\ b_n + 1,$ kde b_n lze vyjádřit rekurentním zápisem

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n, \tag{3.7}$$

$$b_1 = 4,$$

$$b_2 = 14,$$

kde $n = 1,\ 2,\ 3\ ...$

Důkaz: K důkazu použijeme vztahy (3.6). Vztah (3.7) můžeme vyjádřit takto

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n = 8y_{n+1} - 2y_n = 8(2y_n + 3u_n) - 2y_n = 14y_n + 24u_n. \tag{3.8}$$

Při dalším vyjádření vztahu (3.7) budeme vycházet z toho, že $b_n = 2y_n$.

$$b_{n+2} = 2y_{n+2} = 2(2y_{n+1} + 3u_{n+1}) = 4(2y_n + 3u_n) + 6(y_n + 2u_n) = 14y_n + 12u_n. \tag{3.9}$$

Jak můžeme vidět, tak vztahy (3.8) a (3.9) se rovnají.

Věta 3.7. Poloměr ρ kružnice vepsané je vždy celé číslo.

Důkaz: Platí

$$\rho = \frac{S}{s} = \frac{S}{3y} = \frac{yt}{3y} = \frac{t}{3} = u,$$

kde $u \in N$ (viz předchozí věta).

Příklad 3.1. Ukázka prvních pěti konsekutivních trojúhelníků, jejich obvodu, obsahu a poloměru kružnice vepsané.

Délka str. *a*	**Délka str. *b***	**Délka str. *c***	**Obvod *o***	**Obsah *S***	**Poloměr *ρ***
3	4	5	12	6	1
13	14	15	42	84	4
51	52	53	156	1170	15
193	194	195	582	16296	56
723	724	725	2172	226974	209

Tabulka 3.1 - Ukázka konsekutivních trojúhelníků

3.3 Heronovské trojúhelníky, jejichž délky stran tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti

Věta 3.8. Jsou-li délkami stran heronovského trojúhelníky tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pak jsou dány vztahy

$$a = 2y - d,\ b = 2y,\ c = 2y + d, \tag{3.10}$$

kde y je přirozené číslo, pro něž je $\sqrt{3(y^2 - d^2)}$ celé číslo. Obsah tohoto trojúhelníka je

$$S = y\sqrt{3(y^2 - d^2)}. \tag{3.11}$$

Důkaz: Označme $a = x - d,\ b = x,\ c = x + d.$ Dle věty 3.1 víme, že poloviční obvod trojúhelníka $s = 3x/2$ musí být přirozené číslo. Proto platí $x = 2y,$ kde $y \in N.$

Tím jsme dokázali vztahy (3.10). Navíc musí být obsah trojúhelníka celé číslo. Z rovnic (3.10) plyne $a = 2y - d,\ b = 2y,\ c = 2y + d.$ Dosazením do Heronova vzorce (2.5) vyjde $S = \sqrt{3y^2\left(y+d\right)\left(y-d\right)},$ po algebraické úpravě $S = y\sqrt{3(y^2 - d^2)}.$

Věta 3.9. Mají-li číslo *y* $\left(y = x/2\right)$ a diference *d* největšího společného dělitele *g*, $g \in N,$ pak g^2 dělí obsah *S*.

Důkaz: Číslo *y* vyjádříme jako $y = kg$, diferenci *d* vyjádříme jako $d = lg$, kde $k,\ l \in N.$ Tato vyjádření dosadíme do vztahu (3.11)

$$S = kg\sqrt{3(k^2g^2 - l^2g^2)},$$

částečným odmocněním dostaneme vztah $S = kg^2\sqrt{3(k^2 - l^2)}$, ze kterého je zjevné, že číslo g^2 je dělitelem obsahu *S*.

3.4 Další vlastnosti heronovských trojúhelníků

3.4.1 Určování délek stran heronovských trojúhelníků

Délky stran heronovských trojúhelníků se někdy označují jako *heronovská čísla*. Vztahy pro generování heronovských čísel navrhl R. D. Carmichael v knize *Diophantine analysis* (New York, 1915). Stále jsou nacházeny nové metody hledání heronovských čísel.

Věta 3.10. *Carmichaelova poučka* (převzato z [15], str. 49 – 50): Trojúhelník s celočíselnými délkami stran *a*, *b*, *c* je heronovský tehdy, můžou-li být délky stran zapsány následujícími vztahy

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{(m-n)(k^2+mn)}{d}, \\ b &= \frac{m(k^2+n^2)}{d}, \\ c &= \frac{n(k^2+m^2)}{d}, \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

d, *m*, *n*, *k* jsou celá kladná čísla, $m > n$, *d* je libovolný dělitel všech čitatelů.

Důkaz: Ověříme, že i pro tyto vztahy platí, že poloviční obvod *s* a obsah *S* heronovského trojúhelníka jsou celá čísla.

Poloviční obvod *s* heronovského trojúhelníka vyjádřený se vztahy (3.12)

$$s = \frac{(m-n)(k^2+mn)+m(k^2+n^2)+n(k^2+m^2)}{2d} = \frac{2mk^2+2m^2n}{2d} = \frac{m(k^2+mn)}{d}.$$

Obsah *S* heronovského trojúhelníka vyjádřený se vztahy (3.12)

$$S = \sqrt{\frac{1}{d^4}(mk^2+nm^2)(nk^2+mn^2)(nm^2-mn^2)(mk^2-nk^2)},$$

po úpravě a odmocnění

$$S = \frac{kmn(m-n)(k^2+mn)}{d^2}.$$

Jak můžeme vidět, tak poloviční obvod i obsah vyjádřeny pomocí vztahů (3.12) jsou pro všechna *k*, *m*, *n*, *d* čísla celá.

3.4.2 Rozklady heronovských trojúhelníků na pythagorejské

Rozkladem heronovských trojúhelníků na pythagorejské se zabýval Paul Yiu, z jehož prací [18] a [19] jsem při zpracování této problematiky vycházela.

Nejprve si upřesníme některé pojmy. Grafy přímek o rovnicích $x = c$ a $y = c$ představují v kartézské soustavě souřadnic pro všechna $c \in Z$ *síť jednotkových čtverců* (stručněji *čtvercovou síť*). Průsečíky těchto přímek budeme nazývat *mřížové body*. Trojúhelník, jehož vrcholy leží v mřížových bodech, nazýváme *mřížový trojúhelník*.

Věta 3.11. Každý heronovský trojúhelník může být nakreslen jako mřížový trojúhelník s jedním vrcholem v počátku kartézského souřadného systému a dalšími vrcholy v mřížových bodech (p, q), (u, v).

Důkaz: (Převzato z [19], str. 262 a 263.) Důkaz stačí provést jen pro primitivní heronovské trojúhelníky. Do Heronova vzorce (2.5) dosadíme vztah pro poloviční obvod (1.5), obdržíme

$$S = \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)},$$

po umocnění a roznásobení dostáváme

$$16S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2. \tag{3.13}$$

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že délka strany *c* je liché číslo a délky stran *a*, *b* mají různou paritu. Takto definovaný primitivní heronovský trojúhelník odpovídá hledanému celočíselnému řešení následující rovnice

$$16M^2 = -x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2, \tag{3.14}$$

kde číslo *z* je liché. Pro vyřešení rovnice (3.14) nejprve zavedeme následující substituci

$$x^2 = X,\ y^2 = Y,\ z^2 = Z,\ 4M = 2N,$$

rovnici přepíšeme

$$(2N)^2 = -X^2 - Y^2 - Z^2 + 2XY + 2YZ + 2ZX$$

a upravíme jako kvadratickou rovnici s neznámou *Z*

$$Z^2 - 2(X+Y)Z + (X-Y)^2 + (2N)^2 = 0. \tag{3.15}$$

Rovnice (3.15) má celočíselné řešení pouze tehdy, je-li diskriminant této rovnice druhou mocninou celého sudého čísla, tj.

$$(2T)^2 = (X+Y)^2 - (X-Y)^2 - (2N)^2.$$

Odtud dostáváme

$$(X+Y)^2 = (2T)^2 + (X-Y)^2 + (2N)^2, \tag{3.16}$$

přičemž $D(X+Y,\ X-Y,\ T) = 1$. Paul Yiu uvádí, že řešení tohoto typu diofantovské rovnice je uvedeno v publikaci [12], str. 14. Řešení má tvar

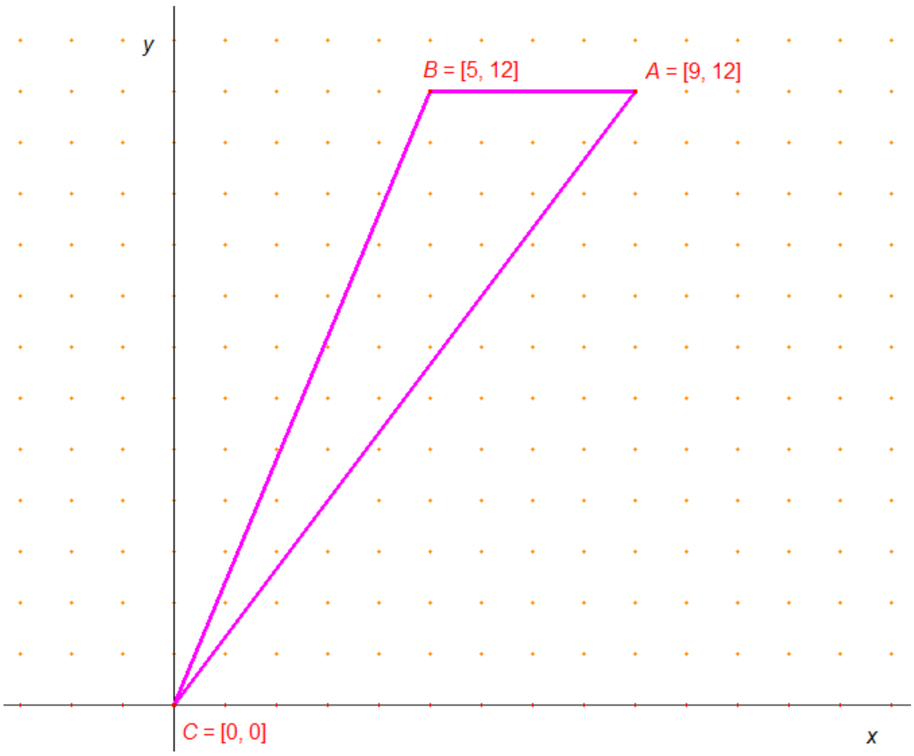
$$X = p^2 + q^2,\ Y = u^2 + v^2,\ T = pu + qv,\ N = pv - qu, \tag{3.17}$$

kde p, q, u, v jsou celá čísla.

Kvadratická rovnice (3.15) má celočíselné kořeny tvaru $Z = (X+Y) \pm 2T$, po substituci za vztahy (3.17) mají kořeny tvar

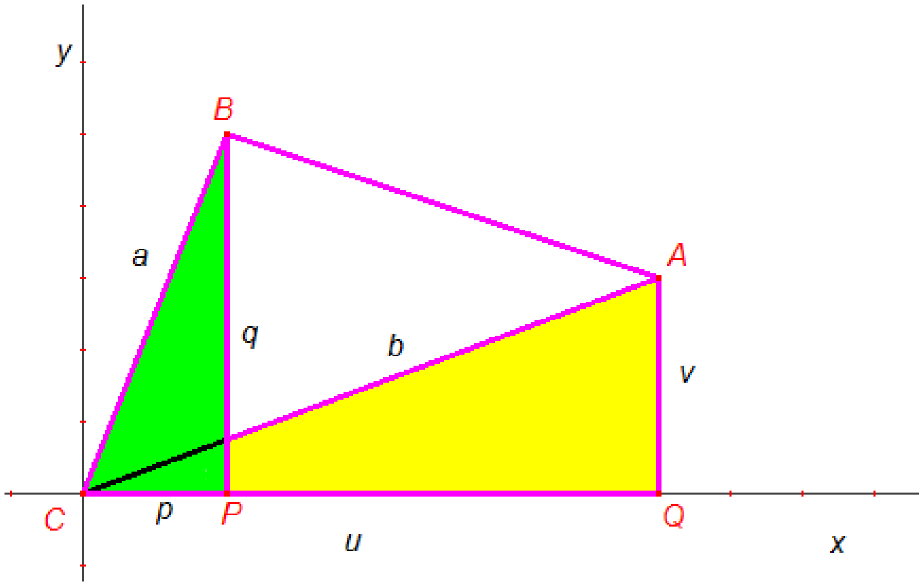
$$Z = (p \pm u)^2 + (q \pm v)^2.$$

Vrátíme se na začátek důkazu a dosadíme zpět do původních vztahů substituci (3.17), pak $a^2 = p^2 + q^2$, $b^2 = u^2 + v^2$, $c^2 = (p \pm u)^2 + (q \pm v)^2$. Z těchto vztahů lze již lehce odvodit, za pomoci vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v rovině, souřadnice vrcholů trojúhelníka. Vrchol C leží v počátku systému souřadnic, vrchol $A = [u, v]$ a $B = [p, q]$.



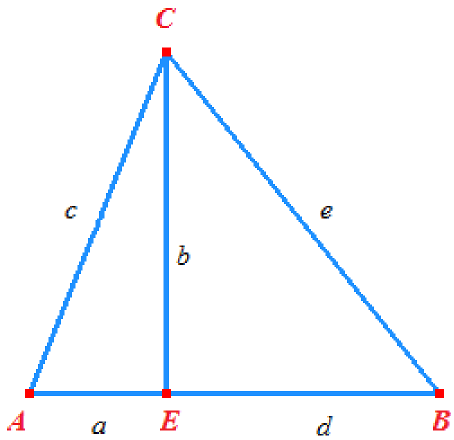
Obrázek 3.3 - Mřížový trojúhelník

Z věty 3.11 vyplývá, že vrcholy každého heronovského trojúhelníka jsou určeny dvěma pythagorejskými trojúhelníky umístěnými podle obrázku 3.4.

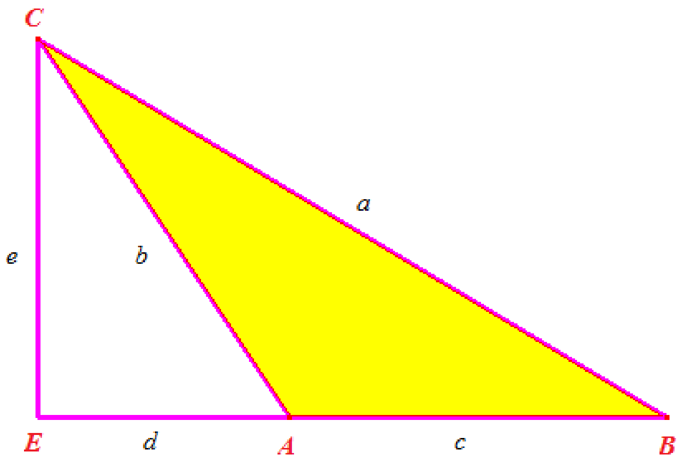


Obrázek 3.4 - Mřížový trojúhelník určený dvěma pyth. trojúhelníky

V následujících úvahách se budeme zabývat otázkou, které heronovské trojúhelníky vzniknou sjednocením dvou pythagorejských trojúhelníků podle obr. 3.5 nebo jejich rozdílem podle obr. 3.6.



Obrázek 3.5 - Heronovský trojúhelník vzniklý sjednocením dvou pythagorejských trojúhelníků



Obrázek 3.6 - Heronovský trojúhelník vzniklý rozdílem dvou pythagorejských trojúhelníků

Takové trojúhelníky budeme nazývat *rozložitelné trojúhelníky*. Heronovský trojúhelník, který nelze určit dvěma pythagorejskými trojúhelníky podle obrázku 3.5 nebo 3.6 budeme nazývat *nerozložitelný trojúhelník*.

Problematiku rozložitelnosti heronovských trojúhelníků podává P. Yiu v [18]. Bez důkazu uvedeme jeho výsledek:

Primitivní heronovský trojúhelník je možné rozložit na dva pythagorejské trojúhelníky nejvýše jedním způsobem, to znamená jen tehdy, když má nejvýše jednu celočíselnou výšku. Tato věta je shrnutím tří dílčích tvrzení:

1. Primitivní pythagorejský trojúhelník je nerozložitelný.
2. Primitivní rovnoramenný heronovský trojúhelník je rozložitelný pouze na dva shodné pythagorejské trojúhelníky.
3. Heronovský trojúhelník, který není pythagorejský, avšak má dvě celočíselné výšky, nemůže být primitivní.

Fitch Cheney objevil první nerozložitelný trojúhelník (25, 35, 39) s obsahem $S = 420$.

Příklad 3.2. Odvoďte vztah pro obsah heronovského trojúhelníka, který vznikne složením dvou pythagorejských trojúhelníků, a odůvodněte, proč je celým číslem.
K řešení použijte označení z obrázku 3.5.
Řešení: Obsah heronovského trojúhelníka, který vznikne složením dvou pythagorejských trojúhelníků, je

$$S = \frac{1}{2}(a+d)b.$$

Obsah trojúhelníka *ABC* je součet obsahů dílčích pythagorejských trojúhelníků. Obsah pythagorejského trojúhelníka je celé číslo, tím i obsah složeného heronovského trojúhelníka je číslo celé.

Příklad 3.3. Je možné rozložit heronovský trojúhelník *ABC* s délkami stran (13, 20, 21)? Pokud ano, tak napište pythagorejské trojúhelníky, ze kterých je tento trojúhelník složen.
Řešení: Postup rozdělení heronovského trojúhelníka *ABC* na dva pythagorejské trojúhelníky není složitý. Známe-li délky jeho stran, vypočítáme obsah pomocí Heronova vzorce (2.5). Pomocí obsahu a délek stran určíme příslušné výšky trojúhelníka pomocí vztahů (1.9). Je-li nějaká výška celočíselná, pak zkoumáme, zda existují dva primitivní pythagorejské trojúhelníky, které mají jednu délku odvěsny rovnu výšce daného trojúhelníka. Pokud takové dva trojúhelníky nalezneme, pak jeden pythagorejský trojúhelník musí mít délku přepony rovnu délce jedné ze stran trojúhelníka *ABC*, ke které není vedená celočíselná výška, a druhý musí mít délku přepony rovnu délce strany druhé.

V našem případě má daný trojúhelník obsah $S = 126$ a výšky

$$v_a = \frac{252}{13} = 19\frac{5}{13},$$

$$v_b = \frac{252}{20} = 12\frac{3}{5},$$

$$v_c = \frac{252}{21} = 12.$$

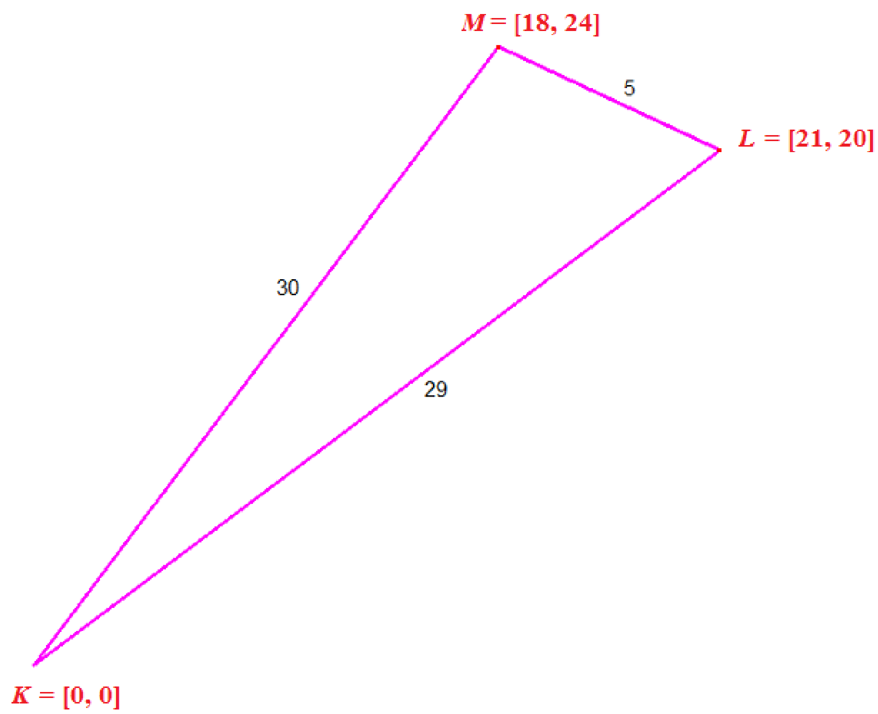
Protože výška ke straně *c* je celočíselná, tak hledáme pythagorejské trojúhelníky, které mají jednu z odvěsen rovnu výšce v_c. Takovými pythagorejskými trojúhelníky jsou (5, 12, 13), (9, 12, 15), (12, 16, 20) a (12, 35, 37). Z další podmínky plyne, že délky přepon pythagorejských trojúhelníků, ze kterých je heronovský trojúhelník složen, jsou délkami stran daného trojúhelníka, ke kterým není vedena celočíselná výška, tj. vyhovují pythagorejské trojúhelníky (5, 12, 13) a (12, 16, 20). Trojúhelník *ABC* je tedy rozložitelný, $(12,\ 5,\ 13) \cup (12,\ 16,\ 20) = (13,\ 20,\ 21)$.

Příklad 3.4. Je trojúhelník *KLM* rozložitelný, jsou-li délky jeho stran (5, 29, 30) a obsah je 72?

Řešení: Pomocí vztahů (1.9) vypočítáme výšky trojúhelníka *KLM*

$$v_k = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5},$$
$$v_l = \frac{144}{30} = 4\frac{12}{15},$$
$$v_m = \frac{144}{29} = 4\frac{28}{29}.$$

Protože ani jedna z výšek není celočíselná, pak trojúhelník *KLM* je nerozložitelný.



Obrázek 3.7 - Nejmenší nerozložitelný heronovský trojúhelník

3.4.3 Heronovské trojúhelníky a Fermatova čísla

Definice 3.2. *Fermatova čísla* jsou všechna čísla tvaru

$$F_m = 2^{2^m} + 1,$$

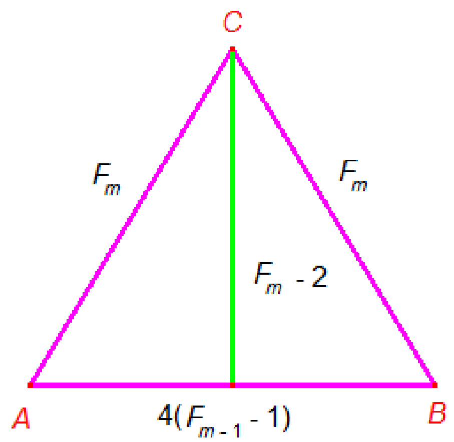
pro $m \geq 0$.

Fermat se domníval, že všechna takto zapsaná čísla jsou prvočísla. Toto tvrzení bylo vyvráceno roku 1723 matematikem Leonhardem Eulerem. Euler přišel na to, že číslo F_m pro m = 5 není prvočíslo, tj.

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Příklad 3.5. Existují heronovké trojúhelníky, jejichž délky všech stran jsou mocninami prvočísel?

Řešení: Ano, takové heronovské trojúhelníky existují a jsou pouze dva. Prvním je pythagorejský trojúhelník (3, 4, 5), druhým je dle věty 3.12 rovnoramenný trojúhelník $(2^n + 1,\ 2^n + 1,\ 2^{1+n/2})$.



Obrázek 3.8 - Heronovský trojúhelník k příkladu 3.5

Věta 3.12. Má-li heronovský trojúhelník délky stran rovny mocninám přirozených čísel, pak jsou délky stran buď (3, 4, 5), nebo je lze zapsat $\left(F_m,\ F_m,\ 4\left(F_{m-1} - 1\right)\right)$ za podmínek, že $m \geq 1$ a číslo F_m je prvočíslo.

Důkaz: Důkaz této věty je pěkně vysvětlen v publikaci [9], str. 111 – 116.

3.4.4 Heronovské trojúhelníky a Fibonacciho čísla

Příklad 3.6. Existují heronovské trojúhelníky, jejichž délky všech stran jsou Fibonacciho čísla?

Řešení: Fibonacciho čísla jsou čísla, která jsou členy Fibonacciho posloupnosti. Prvních devět Fibonacciho čísel je $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 22\}$, kde každé číslo, počínaje třetím členem, je součtem dvou čísel předchozích. Aby délky stran trojúhelníka nebyly v rozporu s trojúhelníkovou nerovností (součet dvou libovolných délek trojúhelníka musí být větší než délka strany zbývající), tak hledáme trojúhelníky rovnoramenné. Jediným trojúhelníkem, který vyhovuje zadání, je trojúhelník (5, 5, 8). Jiný heronovský trojúhelník, jehož délky stran by byly Fibonacciho čísly, není zatím znám.

3.5 Úlohy k procvičení

V této podkapitole je několik úloh, které mohou sloužit k procvičení problematiky heronovských trojúhelníků. Výsledky naleznete na konci práce v kapitole Výsledky.

Úloha 3.1. Zjistěte, zda je možné sestrojit trojúhelník *ABC* se stranami délek a = 13 cm, b = 14 cm, c = 15 cm. Pokud ho sestrojit lze, tak vypočítejte jeho obsah.

Úloha 3.2. Farmář se rozhodl oplotit své trojúhelníkové pole, ale už přesně neví, jak dlouhé jsou jeho jednotlivé strany. Ví pouze, že z pole má 585 kg obilí při výnosnosti 0,5 kg/m^2 a že délka každé jeho strany je o jeden metr delší než délka strany předchozí. Kolik pletiva bude farmář potřebovat?

Úloha 3.3. Na vylepení reklamního plakátu trojúhelníkového tvaru je třeba plocha $156\ \mathrm{m}^2$. Určete délky stran plakátu, pokud délky tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 11 m.

Úloha 3.4. Dopočítejte zbývající strany heronovského trojúhelníka, znáte-li

a) $S = 60\ \text{cm}^2$, $o = 36\ \text{cm}$, $a = 13\ \text{cm}$,

b) $S = 36\ \text{cm}^2$, $o = 54\ \text{cm}$, $b = 25\ \text{cm}$.

Úloha 3.5. Dopočítejte strany heronovského trojúhelníka, určete souřadnice zbylého bodu a vypočítejte obsah

a) $B = [21,\ 28]$, $c = 15$,

b) $A = [30,\ 16]$, $b = 34$.

Úloha 3.6. Určete, z jakých trojúhelníků vznikl heronovský trojúhelník

a) (11, 13, 20),

b) (4, 13, 15).

Úloha 3.7. Je možné rozložit heronovský trojúhelník (5, 29, 30) s obsahem S = 72? Pokud ano, tak napište pythagorejské trojúhelníky, ze kterých je tento trojúhelník složen.

Úloha 3.8. Odvoďte vzorec pro obsah heronovského trojúhelníka, který vznikne rozdílem dvou pythagorejských trojúhelníků, a vysvětlete, proč je celým číslem. K řešení použijte označení z obrázku 3.6.

4 Pythagorejské trojúhelníky

Nejjednoduššími heronovskými trojúhelníky jsou tzv. *pythagorejské trojúhelníky*. Jejich název je odvozen od Pythagorovy věty.

Definice 4.1. *Pythagorejským trojúhelníkem* nazveme každý pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran jsou tzv. *pythagorejská čísla*.

Definice 4.2. *Pythagorejská čísla* jsou trojice celých čísel, která vyhovují Pythagorově větě. Jsou to tedy taková čísla, která jsou řešením rovnice

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{4.1}$$

kde *a, b, c* jsou přirozená čísla. Jsou-li čísla *(a, b, c)* pythagorejská, pak i čísla *(ka, kb, kc)* jsou pythagorejská, $k \in N$.

Pythagorejské trojice obecně hledají řešení rovnice $c^n = a^n + b^n,\ n \in N$, aby $a,\ b,\ c \in N$. Dle Pierre de Fermata nemá tato rovnice pro $n > 2$ celočíselné řešení. Toto tvrzení je známo jako *Velká Fermatova věta* (viz podkapitola 4.2.2).

Obecná pravidla pro nalezení některých pythagorejských trojic znal již Pythagoras a po něm i Platón (viz článek [1]). Pythagoras uváděl tato obecná pravidla $2p^2 + 2p,\ 2p + 1,\ 2p^2 + 2p + 1$. Platónova obecná pravidla byla $p^2 - 1,\ 2p,\ p^2 + 1,$ $p^2 - 1,$ kde *p* je proměnná, $p \in N$.

Věta 4.1. Řešení rovnice (4.1) je dáno vztahy

$$\left.\begin{aligned} a &= k(m^2 - n^2), \\ b &= 2kmn, \\ c &= k(m^2 + n^2), \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

za předpokladu, že $m > n$, *m, n* jsou nesoudělná, mají různou paritu, $m,\ n,\ k \in N$. Pro $k = 1$ dostáváme *primitivní pythagorejské trojúhelníky*.

Odvození:

Největším společným dělitelem čísel a, b, c je číslo k, $D(a,\ b,\ c)=k$. Z toho plyne, že čísla

$$a_1=\frac{a}{k},\ b_1=\frac{b}{k},\ c_1=\frac{c}{k},\ k\neq 0$$

jsou nesoudělná a platí

$$k^2c_1^2=k^2a_1^2+k^2b_1^2. \tag{4.3}$$

Po vydělení rovnice (4.3) číslem k^2 vyjde

$$c_1^2=a_1^2+b_1^2, \tag{4.4}$$

$$D(a_1,\ b_1,\ c_1)=1. \tag{4.5}$$

V dalším kroku ověříme, že čísla jsou po dvou nesoudělná. Mějme prvočíslo d, které dělí některá čísla a_1, b_1, c_1. Potom by z rovnice (4.4) vyšlo, že d dělí i zbývající číslo, což je spor se (4.5).

Čísla a_1, b_1 mají různou paritu, tzn. právě jedno z čísel je sudé. Toto tvrzení ověříme předpokladem, že obě čísla a_1, b_1 jsou lichá. Potom číslo c_1^2 i výraz $a_1^2+b_1^2$ dávají při dělení číslem osm stejný zbytek, kterým je číslo dva. Z toho plyne, že číslo c_1^2 je sudé číslo, které ale není dělitelné číslem čtyři, to ale není možné.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že sudým číslem bude b_1, $b_1=2u$, $u\in N$. Z rovnice (4.4) plyne

$$c_1^2-a_1^2=4u^2. \tag{4.6}$$

Úpravou získáme vztah

$$u^2=\frac{c_1+a_1}{2}\cdot\frac{c_1-a_1}{2}.$$

Zavedeme nové označení

$$v=\frac{1}{2}(c_1+a_1),\ w=\frac{1}{2}(c_1-a_1), \tag{4.7}$$

tím získáme $c_1 = v + w,\ a_1 = v - w.$ Čísla *v*, *w* jsou lichá a nesoudělná (plyne z faktu, že čísla a_1, c_1 jsou též lichá a nesoudělná), $w < v.$ Dosazením (4.7) do (4.6) obdržíme rovnici $u^2 = vw,$ ze které plyne existence čísel *m*, *n*, která jsou přirozená, nesoudělná a mají různou paritu, $n < m.$ Pro *m*, *n* platí $v = a^2,\ w = b^2.$

Získáme nové vztahy

$$\left.\begin{aligned} a &= ka_1 = k(u-w) = k(m^2 - n^2), \\ b &= kb_1 = 2ku = 2kmn, \\ c &= kc_1 = k(u+w) = k(m^2+n^2). \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Vztahy (4.8) vyhovují rovnici (4.1) pro libovolné $k \in N,$ libovolná nesoudělná čísla s opačnou paritou $m,\ n \in N,$ pro která platí $n < m.$

Věta 4.1 umožňuje nalézt všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky. Neprimitivní dostaneme jako jejich násobky. Následující věta zjednodušuje vztahy (4.2), avšak neumožňuje jasně rozlišit, které z trojúhelníků jsou primitivní.

Věta 4.2. Délky stran pythagorejských trojúhelníků můžeme vyjádřit vztahy

$$a = m^2 - n^2,$$

$$b = 2mn,$$

$$c = m^2 + n^2,$$

za předpokladu, že $m > n,\ m, n \in N.$

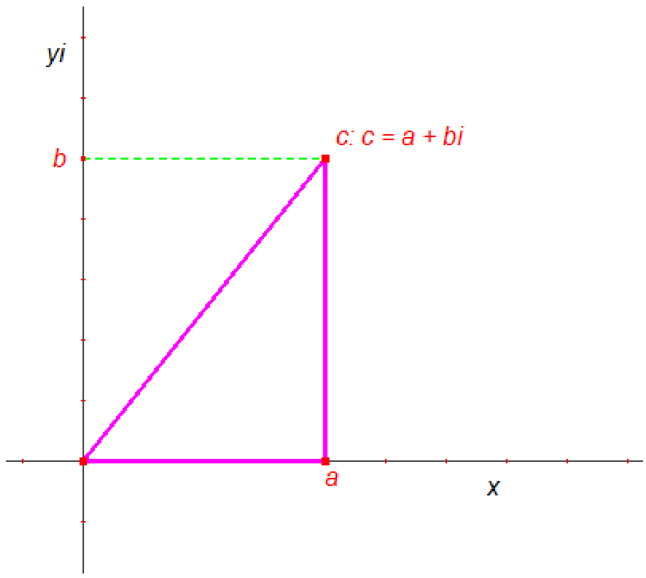
Odvození: K odvození využijeme *Gaussovu rovinu* (body Gaussovy roviny pokládáme za obrazy komplexních čísel). Toto řešení je určeno pro studenty, kteří již znají komplexní čísla.

Rovnici (4.1) převedeme do komplexní podoby

$$c^2 = (a + bi)(a - bi), \tag{4.9}$$

provedeme substituci $(a+bi)=z,\ (a-bi)=\bar{z}$ a dosadíme do (4.9)

$$c^2 = z\bar{z}.$$



Obrázek 4.1 - Trojúhelník v Gaussově rovině

Provedeme další krok

$$a+bi=(m+ni)^2,$$

$$a+bi=m^2+2mni-n^2, \tag{4.10}$$

kde $m,\ n\in N,\ m>n.$

Porovnáme reálné a imaginární složky vztahu (4.10)

$$a=m^2-n^2, \tag{4.11}$$

$$b=2mn. \tag{4.12}$$

Vztahy (4.11) a (4.12) dosadíme do vztahu (4.9)

$$c^2=\left(m^2-n^2+2mni\right)\left(m^2-n^2-2mni\right),$$

upravíme pravou stranu rovnice dle algebraických vzorců

$$c^2=(m+ni)^2(m-ni)^2,$$

což lze ještě upravit

$$c^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

po odmocnění

$$c = m^2 + n^2.$$

Věta 4.3. Délky stran pythagorejských trojúhelníků lze vyjádřit i vztahy

$$\left.\begin{aligned} a &= i(2n+i), \\ b &= 2n(n+i), \\ c &= 2n^2 + 2ni + i^2, \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

$i,\ n \in N$.

Důkaz: Protože jsou čísla *m* a *n* přirozená, nesoudělná, mají různou paritu a $m > n$, proto můžeme vyjádřit, že $m = n + i$, kde *i* je liché číslo takové, aby platilo $D(n,\ n+i) = 1$. Vyjádření dosadíme do vztahů (4.2) a obdržíme vztahy (4.13).

4.1 Vlastnosti pythagorejských trojúhelníků

Vlastnosti pythagorejských trojúhelníků uvádím jako úlohy, které jsou určené jako materiál pro samostatnou práci studentů. Řešení úloh je uvedeno v kapitole Výsledky.

Úloha 4.1. Jsou-li délky stran pythagorejského trojúhelníka dány vztahy (4.2), pak jeho obsah je $S = k^2 mn(m^2 - n^2)$. Dokažte.

Úloha 4.2. Poloviční obvod pythagorejského trojúhelníka je celé číslo a vypočítá se takto $s = km(m+n)$. Dokažte.

Úloha 4.3. Poloměr r kružnice opsané pythagorejskému trojúhelníku vypočítáme pomocí následujícího vzorce

$$r = \frac{1}{2}k(m^2 + n^2).$$

Dokažte.

Úloha 4.4. Poloměr *r* kružnice opsané pythagorejskému trojúhelníku je celé číslo, právě když parametr *k* je sudý. Dokažte.

Úloha 4.5. Poloměr ρ kružnice vepsané pythagorejskému trojúhelníku je vždy celé číslo a platí $\rho = kn(m-n).$ Dokažte.

Úloha 4.6. Výšky pythagorejského trojúhelníka lze vyjádřit následujícími vztahy

$$v_a = 2kmn,$$

$$v_b = k(m^2 - n^2),$$

$$v_c = \frac{2kmn(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}.$$

Dokažte.

Úloha 4.7. Výšky pythagorejského trojúhelníka jsou celočíselné, pokud

$$(m^2 + n^2) \mid 2kmn(m^2 - n^2), \tag{4.14}$$

tj. $c \mid ab.$ Dokažte.

Úloha 4.8. Pythagorejské trojúhelníky mají celočíselný obsah *S*, poloviční obvod *s*, všechny výšky, poloměr kružnice opsané *r* a vepsané ρ právě tehdy, když jsou délky stran vyjádřeny vztahy

$$a = 2d(m^4 - n^4),$$

$$b = 4dmn(m^2 + n^2),$$

$$c = 2d(m^2 + n^2)^2,$$

$k = 2d,$ *m*, *n* mají různou paritu. Dokažte.

4.2 Několik zajímavostí na závěr

4.2.1 Pythagorejská čísla

Pythagorejských trojic je nekonečně mnoho. Důkaz tohoto tvrzení vychází z Eukleidova zjištění (viz [16]), pokud od sebe odečteme druhé mocniny dvou po sobě jdoucích celých čísel, tak vždy vyjde číslo celé (viz tabulka 4.1).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
rozdíl sousedních čísel	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	

Tabulka 4.1 - Eukleidův důkaz

Lichých čísel je nekonečně mnoho. Vezmeme-li jakékoliv liché číslo, ke kterému přičteme druhou mocninu libovolného celého čísla, získáme druhou mocninu jiného přirozeného čísla (viz tabulka 4.1). Samozřejmě existují i lichá čísla, která jsou druhými mocninami jiných celých čísel. I tato čísla můžeme přičíst k druhé mocnině nějakého celého čísla a dostaneme druhou mocninu dalšího přirozeného čísla. Tím je patrné, že pythagorejských trojic je nekonečně mnoho.

4.2.2 Velká Fermatova věta

Pierre de Fermat, francouzský matematik 17. století a jeden z nejlepších matematiků všech dob, vyslovil tvrzení, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá pro $n > 2$ celočíselné řešení. Tento svůj výrok napsal jako poznámku na okraj Diofantovy *Aritmetiky* (vedle problému 8) takto (citováno z [16], str. 71): „*Je nemožné napsat třetí mocninu jako součet dvou třetích mocnin, nebo čtvrtou mocninu jako součet dvou čtvrtých mocnin, či obecně, žádné číslo, které samo je mocninou větší než druhou, nelze napsat jako součet dvou stejných mocnin.*“

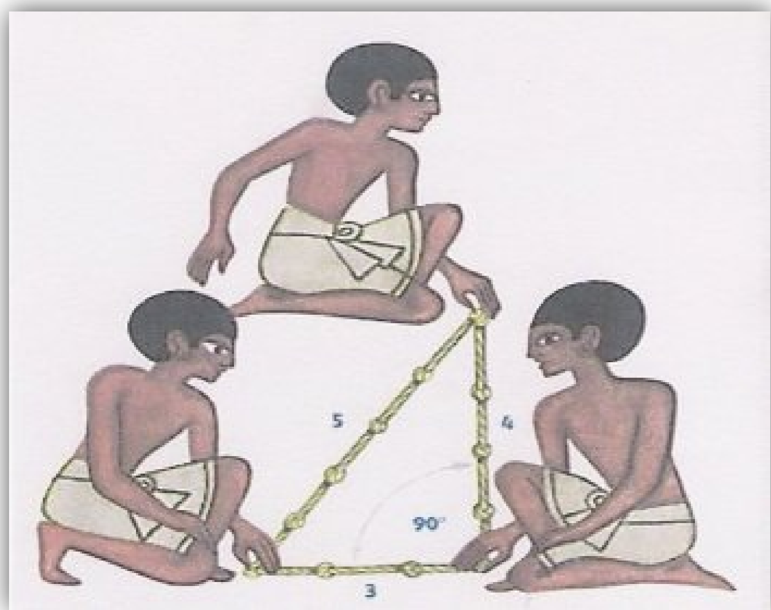
K této poznámce připsal poznámku ještě jednu (citováno z [16], str. 71): *„Mám skutečně nádherný důkaz tohoto tvrzení, avšak tento okraj je příliš úzký na to, abych jej zde uvedl.“* Důkaz Velké Fermatovy věty byl noční můrou všech matematiků po dobu téměř 350let. Dokonce matematik Erick Bell napsal v jedné z jeho knih domněnku, že je pravděpodobné, že naše civilizace skončí dřív, než bude Velká Fermatova věta dokázána. Naštěstí se mýlil!

Píše se 23. červen roku 1993 a pro matematický svět toto datum znamená historický okamžik. Na konferenci v Ústavu Isaaca Newtona v Cambridgi uskutečnil Andrew Wiles svou přednášku, kdy po sedmi letech ustavičné práce přednesl důkaz Velké Fermatovy věty. Bohužel důkaz, se kterým vystoupil na konferenci, obsahoval chybu. Dne 25. října 1994 byly zveřejněny dva rukopisy. Jeden z nich obsahoval již upravený a správný důkaz Velké Fermatovy věty, který byl založen na rukopisu druhém. Spisy vyšly v květnu roku 1995 jako dva články v časopise *Annals of Mathematics*.

Andrew Wiles dokázal Velkou Fermatovu větu pomocí matematických metod dvacátého století. Stále se však objevují hypotézy, že tuto větu lze odvodit postupy matematiky sedmnáctého století. Postupy, které unikly mnoha matematikům od Eulera přes Wilese.

4.2.3 Napínači lan a určování pravého úhlu

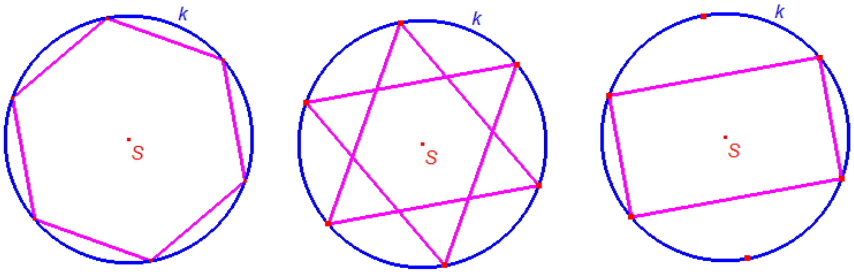
Ve starověkém Egyptě, ve třetím tisíciletí před naším letopočtem, byla skupina lidí, kteří se nazývali harpedonapté (napínači lan). Úkolem napínačů bylo vyměřování pravého úhlu při stavbách. Ke svému umění používali svázané lano, na kterém bylo třináct uzlů a dvanáct stejně dlouhých částí. Z lana vytvořili trojúhelník, jehož strany byly v poměru 3 : 4 : 5. Vrcholy trojúhelníka byly v prvním, čtvrtém a osmém uzlu. U čtvrtého uzlu byl hledaný pravý úhel. Tímto postupem vznikl pythagorejský trojúhelník o stranách $(3n,\ 4n,\ 5n)$, $n \in N$, kde n je délka úseku lana mezi dvěma uzly.



Obrázek 4.2 - Napínači lan (obrázek převzat ze článku viz [22])

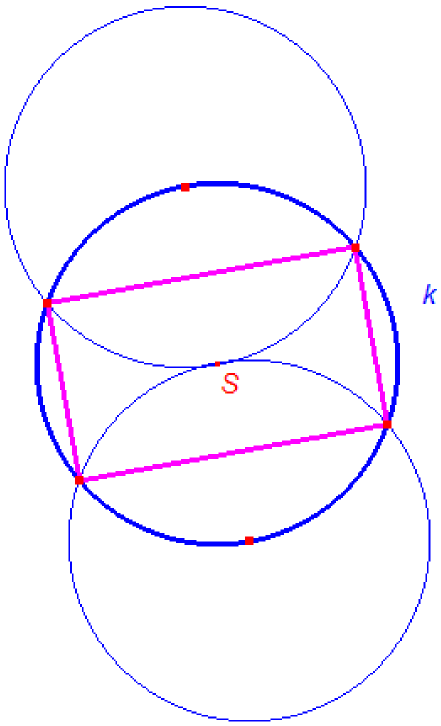
Pravý úhel sestrojený pomocí lana nebyl u velkých staveb příliš přesný, proto byl určován jiným a přesnějším způsobem. Pravý úhel starověcí stavitelé určovali za pomoci pravidelných šestiúhelníků a kružnic. Důkazem přesnosti této metody je Cheopsova pyramida, jejíž čtvercová základna o délce strany 230 metrů má největší odchylku ve stranách pouze 4 centimetry.

Nejjednodušším geometrickým tvarem je kružnice. Tento tvar přesně sestrojí úplně každý. Kružnici lze sestrojit pomocí dvou kolíků a provazu, kterým jsou kolíky spojeny – jeden kolík upevníme a druhým opisujeme kružnici. Když na kružnici naneseme šestkrát délku poloměru (délku provazu mezi kolíky), vznikne pravidelný šestiúhelník spojením všech šesti bodů, dva přes sebe přeložené rovnostranné trojúhelníky spojením bodů „ob jeden“ nebo přesný obdélník vynecháním dvou protilehlých vrcholů.



Obrázek 4.3 - Přesné obrazce pomocí kružnice

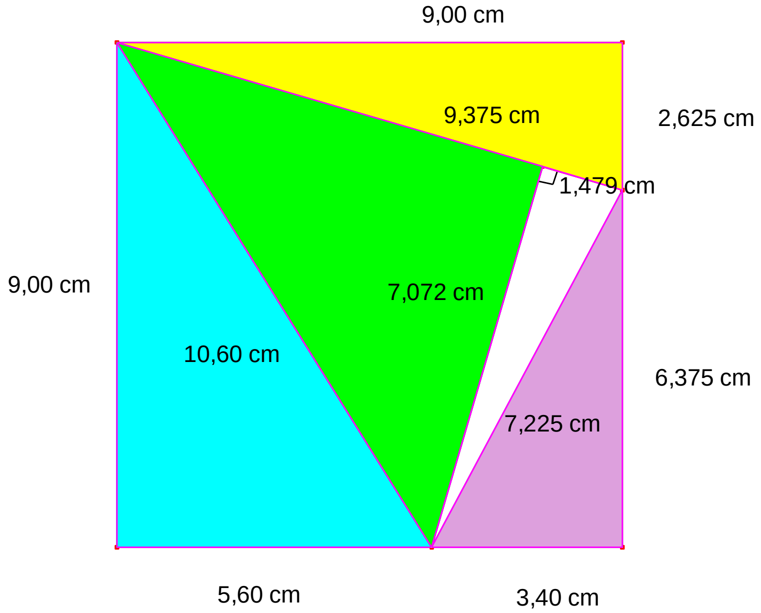
Postup, jak stavitelé sestrojovali pravý úhel, byl následující. Nejprve sestrojili kružnici. Na kružnici zvolili libovolný bod a k němu udělali bod protilehlý (středově souměrný). Z obou bodů udělali dvě kružnice o stejných poloměrech jako kružnice původní. Tyto dvě kružnice vyťaly na kružnici původní čtyři body, které byly vrcholy obdélníka. Se stranami obdélníka již mohly být vedeny rovnoběžky, tak vznikaly půdorysy chrámů.



Obrázek 4.4 - Sestrojení pravého úhlu

4.2.4 Pythagorejské trojúhelníky ve čtverci

Další zajímavostí pythagorejských trojúhelníků je, že lze z minimálně pěti různých pythagorejských trojúhelníků složit čtverec (viz obrázek 4.5). Na tento fakt poukázali Ch. Jepsen a R. Yang. S touto zajímavostí je spojen i problém, který se zabývá tím, zda lze čtverec složit z méně než pěti různých pythagorejských trojúhelníků. Tento problém je stále otevřen.



Obrázek 4.5 - Čtverec složený z pěti pythagorejských trojúhelníků (obrázek převzat ze článku viz [4])

4.2.5 Pythagorejské trojúhelníky a Fibonacciho posloupnost

Neexistuje žádný pythagorejský trojúhelník, jehož délky stran by tvořily Fibonacciho posloupnost, tj. neplatí, že $a < b < c \wedge c = a + b$ (což by navíc bylo v rozporu s trojúhelníkovou nerovností).

Fibonaccciho posloupnost je vytvořena následujícími kroky $F_0 = 0,\ F_1 = 1,$ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$ Prvních sedm členů této posloupnosti je $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8\}$, ale první čtyři členy nemohou být délkami stran pythagorejského trojúhelníka (vysvětlení viz věta 3.4). Nicméně existují dva pythagorejské trojúhelníky, jejichž dvě délky stran jsou Fibonacciho čísla. Těmito trojúhelníky jsou (3, 4, 5) a (5, 12, 13).

4.2.6 Další vlastnosti pythagorejských trojúhelníků

Při studiu pythagorejských trojúhelníků můžeme narazit na mnoho vlastností a problémů s nimi spojenými. V dalším textu je vypsáno několik zajímavých vlastností těchto trojúhelníků. Dokázala jsem pro ilustraci první tři vlastnosti, ověření zbylých vlastností může být náplní některé hodiny zájmové matematiky.

Vlastnosti:

a) je-li délka jedné z odvěsen *a*, *b* liché číslo, délka přepony *c* je též liché číslo;
Důkaz: Ze vztahů (4.2) můžeme vidět, že délka odvěsny *b* je sudé číslo.
Protože čísla *m*, *n* mají různou paritu, pak rozdíl i součet jejich druhých mocnin je číslo liché.

b) délka jedné z odvěsen *a*, *b* je dělitelná číslem tři;
Důkaz:
- $3 \mid m$ nebo $3 \mid n$, potom dle vztahů (4.2) $3 \mid b$,
- $3 \nmid m$ nebo $3 \nmid n$, potom $m = 3k + 1$, $n = 3l + 2$, $k, l \in N$. Odtud plyne, že m^2 i n^2 budou mít po dělení číslem tři zbytek jedna, tím je patrné, že $3 \mid a$.

c) délka jedné z odvěsen *a*, *b* je dělitelná číslem čtyři;
Důkaz:
- $2 \mid m$ nebo $2 \mid n$, potom dle vztahů (4.2) $4 \mid b$,
- $2 \nmid m$ nebo $2 \nmid n$, potom $m = 2k + 1$, $n = 2l + 3$, $k, l \in N$. Odtud plyne, že m^2 i n^2 mají po dělení číslem čtyři zbytek jedna, tím je patrné, že $4 \mid a$.

d) délka jedné ze stran pythagorejského trojúhelníka *a*, *b*, *c* je dělitelná číslem pět;

e) a, b, $(a+b)$ nebo $(b-a)$ je dělitelné číslem sedm;

f) $(a+c)$, $(b+c)$, $(c-a)$ nebo $(c-b)$ je dělitelné číslem osm;

g) $(a+c)$, $(b+c)$, $(c-a)$ nebo $(c-b)$ je dělitelné číslem devět;

h) a, b, $(2a+b)$, $(2a-b)$, $(2b+a)$ nebo $(2b-a)$ je dělitelné číslem jedenáct;

i) obsah pythagorejského trojúhelníka je vždy dělitelný číslem šest;
j) součin délek odvěsen a, b je dělitelný číslem dvanáct;
k) součin délek stran trojúhelníka a, b, c je dělitelný číslem šedesát.

4.3 Další úlohy k procvičení

V této podkapitole je několik úloh, které mohou sloužit k procvičení problematiky pythagorejských trojúhelníků. Výsledky naleznete na konci práce v kapitole Výsledky.

Úloha 4.9. Najděte pythagorejské trojúhelníky, které mají stejné rozdíly délek odvěsen a, b.

Úloha 4.10. Najděte pythagorejské trojúhelníky, které mají stejný rozdíl mezi přeponou c a delší odvěsnou.

Úloha 4.11. Najděte pythagorejské trojúhelníky, které mají stejný rozdíl mezi přeponou c a kratší odvěsnou.

Úloha 4.12. Najděte alespoň jeden pythagorejský trojúhelník, který má rozdíl délek stran a, b a b, c stejný.

Úloha 4.13. Najděte tři po sobě jdoucí čísla, která jsou přeponami třech pythagorejských trojúhelníků.

Úloha 4.14. Najděte čtyři po sobě jdoucí čísla, která jsou přeponami čtyř pythagorejských trojúhelníků.

Úloha 4.15. Odvoďte vztah mezi následujícími pythagorejskými trojúhelníky a najděte další pythagorejský trojúhelník, který odpovídá této řadě (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25).

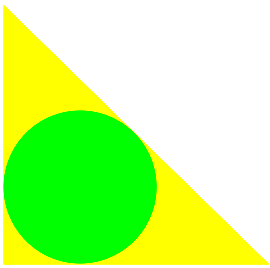
Úloha 4.16. Najděte všechny pythagorejské trojúhelníky, které mají obsah roven obvodu.

Úloha 4.17. Najděte alespoň jeden pythagorejský trojúhelník, který má obsah roven trojnásobku obvodu.

Úloha 4.18. Ověřte, zda pythagorejský trojúhelník *ABC* s délkami stran (130, 312, 338) má celočíselnou výšku, pokud $m = 3,\ n = 2$.

Úloha 4.19. Dva farmáři porovnávali úrodu obilí. Jeden povídá tomu druhému: „Z mého pole tvaru pravoúhlého trojúhelníka jsem měl úrodu 420 kg obilí.“ Druhý se udiví a odpovídá mu: „To není možné! Také jsem měl ze svého pole, které má tvar pravoúhlého trojúhelníka, úrodu 420 kg obilí. Jak je možné, že tvé pole o menším obvodu má stejný výnos obilí jako to mé?“
Otázka: Je možné, aby měli farmáři ze dvou polí tvaru pravoúhlého trojúhelníka s rozdílnými obvody stejné výnosy obilí? Pokud ano, určete celočíselné délky stran obou polí. Výnosnost obilí je u obou polí stejná – 0,5 kg/m^2.

Úloha 4.20. Karlík dostal za domácí úkol udělat z barevného papíru znak jeho třídy, který se skládá ze žlutého pravoúhlého trojúhelníka a zeleného kruhu, který leží v trojúhelníku a dotýká se jeho stran (viz obrázek 4.6). Ví, že na kruh bude potřebovat 50,24 cm^2 zeleného papíru, ale zapomněl si napsat, jaké rozměry má mít trojúhelník.
Úkol: Pomozte Karlíkovi nalézt všechny možné celočíselné délky stran všech takových trojúhelníků, které vyhovují úloze.



Obrázek 4.6 - Obrázek k úloze 4.20

5 Perfektní trojúhelníky

Definice 5.1. Perfektní trojúhelníky jsou všechny heronovské trojúhelníky, jejichž obsah je roven obvodu, tj. $S = o$.

Věta 5.1. Poloměr kružnice vepsané perfektnímu trojúhelníku je $\rho = 2$.

Důkaz: Obsah trojúhelníka *ABC* vypočítáme jako součet obsahů trojúhelníků *AOB*, *BOC* a *COA*, tj. vzorec (1.11). Obvod se rovná obsahu, z toho plyne

$$a + b + c = \frac{1}{2}\rho\ (a + b + c),$$

odtud plyne $\rho = 2$.

Důsledek věty 5.1. Obsah perfektního trojúhelníka můžeme zapsat následujícími vztahy

$$S = 2s = a + b + c = 2\left(x + y + z\right) = \sqrt{sxyz} = o, \tag{5.1}$$

$x,\ y,\ z \in N$.

Důkaz: Vztahy (1.7) dosadíme do Heronova vzorce (2.5) a obdržíme vzorec pro výpočet obsahu

$$S = \sqrt{sxyz}. \tag{5.2}$$

Věta 5.2. Existuje pouze pět perfektních trojúhelníků: (6, 8, 10); (5, 12, 13); (6, 25, 29); (7, 15, 20) a (9, 10, 17). Z toho první dva trojúhelníky jsou pythagorejské.

Důkaz: K důkazu využijeme vztahy (5.1) a vztah (5.2). Nejprve vztah (5.2) umocníme

$$S^2 = sxyz,$$

protože vztahy (5.1) implikují, že $S = 2s$ a obsahy se rovnají, pak

$$S^2 = sxyz = 4s^2,$$

$$sxyz = 4s^2,$$

po úpravě a dosazení za *s*

$$xyz = 4(x + y + z). \tag{5.3}$$

Ze vztahu (5.3) získáme

$$x = \frac{4(y + z)}{yz - 4},$$

$$y = \frac{4(x+z)}{xz-4},$$

$$z = \frac{4(x+y)}{xy-4}, \tag{5.4}$$

odtud

$$x \le y \le z\,. \tag{5.5}$$

K určení všech perfektních trojúhelníků využijeme vztah (5.4) a budeme hledat všechna čísla *x*, *y*, *z*, která tomuto vztahu vyhovují.

- $x = 1$

    Dosadíme za *x* do (5.4)

$$z = \frac{4(1+y)}{y-4} = \frac{4y-16+20}{y-4} = 4 + \frac{20}{y-4}\,.$$

Aby číslo *z* bylo přirozeným číslem, musí být výraz $(y-4)$ dělitelem čísla dvacet, tj.

$$(y-4) \in \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}\,.$$

x	***y***	***z***	***a***	***b***	***c***	***s***	***S = o***
1	5	24	6	25	29	30	60
1	6	14	7	15	20	21	42
1	8	9	9	10	17	18	36
1	9	8	Tato čísla dle (5.5) nevyhovují.				
1	14	6					
1	24	5					

Tabulka 5.1 - Perfektní trojúhelníky pro *x = 1*

- $x = 2$

    Dosadíme za *x* do (5.4)

$$z = \frac{4(2+y)}{2y-4} = \frac{2y-4+8}{y-2} = 2 + \frac{8}{y-2}.$$

Aby číslo z bylo přirozeným číslem, musí být výraz $(y-2)$ dělitelem čísla osm,

$$(y-2) \in \{1, 2, 4, 8\}.$$

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>z</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>s</th><th>S = o</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>10</td><td>5</td><td>12</td><td>13</td><td>15</td><td>30</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>24</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td colspan="5" rowspan="2">} Tato čísla dle (5.5) nevyhovují.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>3</td></tr>
</table>

Tabulka 5.2 - Perfektní trojúhelníky pro *x = 2*

- $x = 3$

Dosadíme za x do (5.4)

$$z = \frac{4(3+y)}{3y-4} = \frac{3y-4+y+16}{3y-4} = 1 + \frac{y+16}{3y-4}.$$

Aby číslo z bylo přirozeným číslem, musí být výraz $(3y-4)$ dělitelem výrazu $(y+16)$,

$$(3y-4) \in \{2, 10, \ldots\}.$$

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>z</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>s</th><th>S = o</th></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>9</td><td colspan="5" rowspan="2">} Tato čísla a ani žádná další nevyhovují dle (5.5).</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10</td><td>2</td></tr>
</table>

Tabulka 5.3 - Perfektní trojúhelníky pro *x = 3*

Žádná další čísla, která by odpovídala vztahům (5.4), (5.5) a byla přirozenými čísly, neexistují.

Poznámka 5.1. Whitworth a Biddle dokázali roku 1904 existenci pěti perfektních trojúhelníků.

5.1 Zajímavosti

Kromě perfektních trojúhelníků existuje skupina heronovských trojúhelníků, jejichž obsah je násobkem obvodu s nějakým přirozeným číslem $S = ko,\ k \in N$.

Těmito trojúhelníky se začal zabývat od roku 1980 John Goehl. V roce 1985 nalezl Goehl obecný způsob, jak tyto trojúhelníky odvodit. Způsob, jak nalézt všechny trojúhelníky, jejichž obsah je roven násobku obvodu přirozeným číslem, byl objeven o téměř dvacet let později od vyslovení tohoto problému Goehelem. V roce 2006 jej zveřejnil Lubomir Markov (podrobněji viz článek [10]).

Další zajímavou skupinou heronovských trojúhelníků jsou trojúhelníky, jejichž obsah je roven podílu obvodu a libovolného kladného reálného čísla

$$S = \frac{1}{k} o,\ k \in R^{+}.$$

Roku 1971 Matukumalli Venkata Subbarao dokázal, že neexistuje žádný heronovský trojúhelník, u kterého by platilo

$$S = \frac{1}{k} o ,$$

pro $k \in R^{+} \wedge k \geq 3$. Pro $k = 2$ tomuto vzorci vyhovuje např. pythagorejský trojúhelník $(3,\ 4,\ 5),\ \ \mathrm{S} = 6,\ \ \mathrm{o} = 12$.

6 Závěr

V diplomové práci jsem se zaměřila na heronovské trojúhelníky, kterým je v české literatuře věnováno málo pozornosti. Snažila jsem se získat co nejvíce materiálu o heronovských trojúhelnících vhodného pro použití na středních školách. Snahou bylo vytvořit přehled základních vlastností těchto trojúhelníků a jejich specifických druhů, kterými jsou např. trojúhelníky pythagorejské a perfektní. Práce obsahuje i řešené příklady a úlohy na procvičení.

Ke zpracování metodiky jsem využila veškerých dostupných zdrojů jak tištěných, tak internetových. Některé vlastnosti a důkazy jsem odvodila sama, některé jsem odvodila na základě použité literatury nebo je z ní převzala. Problematika herovnoských trojúhelníků vede na diofantovské rovnice, některé mají obtížnější řešení, proto jsem tyto postupy v práci neuváděla.

Tato práce může sloužit studentům při studiu heronovských trojúhelníků nebo může být přínosná jako příručka pro učitele k přípravě hodin zájmové matematiky na středních školách.

Výsledky

3. Kapitola

Úloha 3.1. Ano, trojúhelník lze sestrojit. Je to konsekutivní trojúhelník. Obsah je $84\ \mathrm{cm}^2$.

Úloha 3.2. Trojúhelník má strany délek 51 m, 52 m, 53 m a farmář bude potřebovat 156 metrů pletiva.

Úloha 3.3. Délky stran plakátu jsou 15 m, 26 m a 37 m.

Úloha 3.4. a) 13 cm, 13 cm, 10 cm; b) 3 cm, 25 cm, 26 cm.

Úloha 3.5. a) $A = [30,\ 16]$, $a = 35$, $b = 34$; b) $B = [15,\ 36]$, $a = 39$, $c = 25$.

Úloha 3.6.

a) $(12,\ 16,\ 20) \setminus (5,\ 12,\ 13) = (11,\ 13,\ 20)$;

b) $(9,\ 12,\ 15) \setminus (5,\ 12,\ 13) = (4,\ 13, 15)$.

Úloha 3.7. Trojúhelník je nerozložitelný.

Úloha 3.8. Obsah heronovského trojúhelníka, který vznikne rozdílem dvou pythagorejských trojúhelníků, je

$$S = \frac{1}{2} ce.$$

Výpočet je zřejmý z obrázku 3.6 a ze vzorce pro obsah trojúhelníka. Obsah vzniklého trojúhelníka lze vypočítat i jako rozdíl obsahů obou pythagorejských trojúhelníků, a protože obsah pythagorejského trojúhelníka je celé číslo, pak je celým číslem i obsah vzniklého heronovského trojúhelníka.

4. Kapitola

Úloha 4.1. Vzorec pro obsah pravoúhlého trojúhelníka je $S = ab/2$. Do tohoto vzorce dosadíme vztahy (4.2)

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{2kmnk(m^2 - n^2)}{2} = k^2 mn(m^2 - n^2),$$

tím jsme získali vzorec pro obsah pythagorejského trojúhelníka. Dle věty 4.1 jsou čísla *m*, *n*, *k* přirozená, $n < m,$ proto můžeme říci, že obsah *S* pythagorejského trojúhelníka je celočíselný.

Úloha 4.2. Vztahy (4.2) dosadíme do vzorce (1.5)

$$s = \frac{1}{2}\left(a+b+c\right) = \frac{1}{2}\left(km^2 - kn^2 + 2kmn + km^2 + kn^2\right) = \frac{1}{2}k\left(2m^2 + 2mn\right) = km(m+n).$$

Úloha 4.3. Poloměr kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku je roven polovině jeho přepony, proto $r = c/2 = k(m^2 + n^2)/2.$

Úloha 4.4. Parametr k přepíšeme jako $k = 2l,\ l \in N$. Dosadíme do vzorce pro výpočet poloměru *r* kružnice opsané $r = 2l(m^2 + n^2)/2 = l(m^2 + n^2)$ a vyjde celé číslo. Dokážeme i druhý směr důkazu. Čísla *m*, *n* mají různou paritu. Je-li *k* liché, pak je i číslo $k(m^2 + n^2)$ liché, a proto nemůže být $r = k(m^2 + n^2)/2$ celé číslo.

Úloha 4.5. Do vzorce (1.12) dosadíme vztahy (4.2), čímž získáme vzorec pro poloměr kružnice vepsané pythagorejskému trojúhelníku

$$\rho = \frac{S}{s} = \frac{k^2 mn(m^2 - n^2)}{k(m^2 + mn)} = \frac{kn\left(m+n\right)(m-n)}{m+n} = kn(m-n).$$

Úloha 4.6. U pravoúhlého trojúhelníka platí, že odvěsna *a* je výškou na odvěsnu *b* a obráceně, proto $v_a = b,\ v_b = a.$ Výška na přeponu *c* je $v_c = ab/c,$ dopočítá se např. pomocí vzorce pro obsah trojúhelníka ($S = ab/2 \wedge S = cv_c/2,$ proto $v_c = ab/c$).

Úloha 4.7. Vztah (4.14) platí, je-li největším společným dělitelem čísel *m*, *n* číslo 1, tj. $D(m,\ n)=1$, a čísla *m*, *n* mají různou paritu. Tím, že čísla *m*, *n* mají různou paritu, můžeme tvrdit, že $D\left(m^2+n^2,\ 2mn\left(m^2-n^2\right)\right)=1$, tj. výrazy $2mn\left(m^2-n^2\right)$ a m^2+n^2 jsou nesoudělné (pokud číslo *m* bude sudé, číslo *n* liché, pak výraz $2mn\left(m^2-n^2\right)$ je sudé číslo a výraz m^2+n^2 číslo liché, tím můžeme prohlásit, že největším společným dělitelem obou výrazů je číslo jedna). Pokud má platit vztah (4.14) a víme, že délky stran *c* a *ab* jsou nesoudělné, potom musí platit $m^2+n^2 \mid k$, tj. $k=l\left(m^2+n^2\right)$, $l\in N$.

Úloha 4.8. Důkaz přímo vyplývá z úlohy 4.4 a úlohy 4.7.

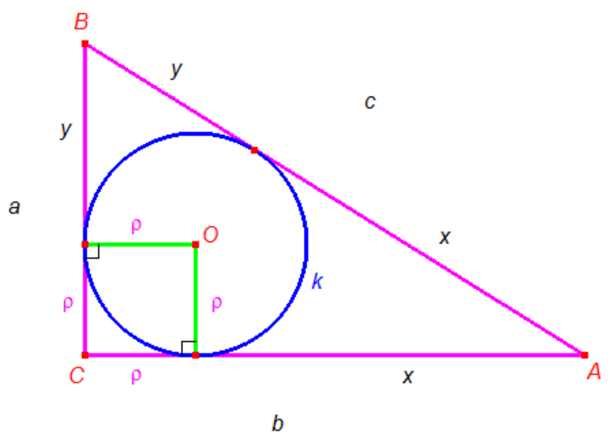
Úloha 4.9. Hledané trojúhelníky mohou být

- při rozdílu délek sedm – (5, 12, 13), (8, 15, 17), (21, 28, 35);
- při rozdílu délek čtrnáct – (14, 48, 50), (16, 30, 34).

Úloha 4.10. Hledaným řešením může být dvojice trojúhelníků (33, 56, 65), (27, 36, 45) s rozdílem délek devět.

Úloha 4.11. Hledaným řešením mohou být např. trojúhelníky (40, 42, 58) a (16, 30, 34) s rozdílem délek osmnáct.

Úloha 4.12. K řešení tohoto příkladu použijeme kružnici vepsanou.



Obrázek 4.7 - Kružnice vepsaná trojúhelníku *ABC*

Protože rozdíl délek stran *a*, *b* a *b*, *c* má být stejný, pak

$$b - a = c - b,$$

$$x - y = (x + y) - (x + \rho),$$

$$x - y = y - \rho,$$

$$x = 2y - \rho. \tag{4.15}$$

Dále použijeme vyjádření pro obsah trojúhelníka

$$S = s\rho = \frac{ab}{2},$$

$$2\rho(x + y + \rho) = (\rho + y)(\rho + x),$$

po dosazení vztahu (4.15)

$$2\rho(3y) = 3y(\rho + y),$$

úpravou obdržíme $y = 2\rho,$ po dosazení do (4.15) $x = 3\rho.$

Vyjádříme-li délky stran trojúhelníka *ABC* pomocí poloměru ρ kružnice vepsané, který je proměnnou a podle úlohy 4.5 je celým číslem, pak obdržíme pythagorejský trojúhelník s délkami stran $(3\rho,\ 4\rho,\ 5\rho)$.

Úloha 4.13. Čísla 39, 40, 41; trojúhelníky (15, 36, 39), (24, 32, 40), (9, 40, 41).

Úloha 4.14. Čísla 50, 51, 52, 53; trojúhelníky (14, 48, 50), (24, 45, 51), (20, 48, 52), (28, 45, 53).

Úloha 4.15. Nejmenší délky odvěsen trojúhelníků jsou čísla 3, 5, 7, tj. jsou to lichá čísla. Můžeme je tedy zapsat ve tvaru $2i+1,\ i \in N.$ Délky druhých odvěsen jsou čísla 4, 12, 24, tedy násobky čísla 4 čísly 1, 3, 6. Tento vztah můžeme zapsat takto $2i\left(i+1\right),\ i \in N.$ Délka přepony trojúhelníka je o jedničku větší než nejdelší odvěsna, proto $c = 2i\left(i+1\right)+1,\ i \in N.$ Nyní dokážeme, že takto definované trojúhelníky jsou pravoúhlé (vyjádření délek jednotlivých stran dosadíme do Pythagorovy věty)

$$\left(2i\left(i+1\right)+1\right)^2 = \left(2i+1\right)^2 + \left(2i\left(i+1\right)\right)^2,$$

$$4i^2\left(i+1\right)^2 + 4i^2 + 4i + 1 = 4i^2\left(i+1\right)^2 + 4i^2 + 4i + 1.$$

Levá i pravá strana rovnice se rovnají, tím dostáváme, že trojúhelníky jsou opravdu pravoúhlé. Dále ověříme, že obsahy všech takto definovaných trojúhelníků jsou celočíselné

$$S = \frac{(2i+1)(2i(i+1))}{2} = \frac{4i^3+6i^2+2i}{2} = 2i^3+3i^2+i,$$

protože číslo i je přirozené, tak obsah bude vždy celé číslo. Z toho plyne, že námi definované trojúhelníky jsou opravdu pythagorejské.

Úloha 4.16. Z úlohy 4.1 víme, že obsah pythagorejského trojúhelníka je $S = k^2mn(m^2-n^2).$ Vypočítáme obvod trojúhelníka, který je $o = 2km(m+n).$

Protože obvod má být roven obsahu, pak $k^2mn\left(m^2-n^2\right) = 2km(m+n),$

po úpravě

$$kn\left(m-n\right) = 2. \qquad (4.16)$$

Nyní hledáme čísla k, m, n, taková, která vyhovují vztahu (4.16). Stále musí platit, že $k,\ m,\ n \in N,\ m > n.$ Rovnici (4.16) splňují pouze čísla $m=3,\ n=2,\ k=1$ a $m=3,\ n=1,\ k=1.$ Pro první trojici čísel získáme trojúhelník (5, 12, 13) s $S = o = 30,$ pro druhou trojici (8, 6,10) s $S = o = 24.$ Jak můžeme vidět, tak existují pouze dva pythagorejské trojúhelníky, které mají obsah roven obvodu.

Úloha 4.17. Úloze vyhovuje např. trojúhelník (20, 21, 29), o = 70, S = 210 nebo trojúhelník (16, 30, 34), o = 80, S = 240.

Úloha 4.18. Nejprve vyjádříme parametr k ze vztahů 4.2. Vyjde $k = 26$, protože $312 = 2kmn = 6k.$ Z úlohy 4.7 plyne, že musí platit $m^2+n^2 \mid k,$ tedy $13 \mid 26,$ což platí, proto tento trojúhelník má celočíselnou výšku. Parametr k můžeme vyjádřit $k = l\left(m^2+n^2\right),\ l \in N,$ po dosazení vyjde $l = 2.$ Ze vztahu (4.14) vyjádříme výšku daného pythagorejského trojúhelníka $v_c = 120.$

Úloha 4.19. Ano, je to možné. Jeden farmář má pole o velikostech 40 m, 42 m a 58 m, druhý farmář má pole o velikostech 24 m, 70 m a 74 m. Obě pole mají výměru 840 m^2.

Úloha 4.20. Úloze vyhovují tři trojúhelníky. První má rozměry 12 cm, 16 cm a 20 cm, druhý má rozměry 10 cm, 24 cm a 26 cm a třetí 9 cm, 40 cm a 41 cm.

Literatura

[1] Bečvář, J.: *Hrdinský věk řecké matematiky*, Historie matematiky I, edice Dějiny matematiky, sv. č. 1, JČMF, Brno, 1994, str. 51.

[2] Frčka, L. *Diofantovské rovnice*: *bakalářská práce*. České Budějovice: Pedagogická fakulta JU, 2007. str. 42 – 43. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Pavel Leischner, Ph.D..

[3] Kadeřávek, F.: *Geometrie a umění v dobách minulých*. Praha: Půdorys, 1997. 87 s.. ISBN 80-900791-5-6.

[4] Knott, R.: *Pythagorean Triangles* [online]. University of Surrey, August 2009 [citováno 7. prosince 2009]. Dostupné z WWW: <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Pythag/pythag.html>.

[5] Křížová, D.: *Heron triangles and Heron´s Formula*. The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference. The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education. Brno, Czech Republic, September 2003, str. 158 – 161.

[6] Kukal, J.: *Inovativní myšlení po skotsku* [online]. Automatizace, ročník 50, číslo 9, září 2007 [citováno 11. října 2009]. Dostupné z WWW: <http://www.automatizace.cz/article.php?a=1870>.

[7] Kuřina, F. : *Heronův důkaz Heronova vzorce*. Učitel matematiky, roč. 6, číslo 4 (28), květen 1998, str. 234 – 237. Praha: JČMF, 1998.

[8] Kuřina, F.: *10 pohledů na geometrii*. Praha: ALBRA, 1996. str. 155 – 156. ISBN 80 – 85823 – 21 – 7.

[9] Luca, F.: *Fermatova čísla ve speciálních trojúhelnících*. Cahiers du CeFReS No. 28, Matematik Pierre de Fermat (2002), str. 107-122.

[10] Markov, L.: *Heronian Triangles Whose Areas Are Integer Multiples of Their Perimeters* [online]. Forum Geometricorum, Volume 7 (2007) 129 – 135 [citováno 23. ledna 2010]. ISSN 1534-1178. Dostupné z WWW: <http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200718.pdf>.

[11] McCrory: *A Geometric Proof of Heron´s Formula by Shannon Umberger* [online]. MATH 7200 : Foundatious of Geometry I. University of Georgia, Fall 2000 [citováno 1. prosince 2009]. Dostupné z WWW: <http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.2000/Umberger/MATH7200/HeronFormulaProject/GeometricProof/geoproof.html>.

[12] Mordell, L. E.: *Diophantine Equations*. Academic Press, London and New York, 1969.

[13] Račková, P.: *Historické extremální úlohy* [online]. Brno: Matematický workshop s mezinárodní účastí, 19. října 2006 [citováno 17. prosince 2009]. Dostupné z WWW: < http://math.fce.vutbr.cz/~pribyl/workshop_2006/prispevky/Rackova.pdf>.

[14] Richardson, W. H.: *Super-Heronian Triangles* [online]. Wichita State University, April 2007 [citováno 15. února 2010]. Dostupné z WWW: <http://www.math.wichita.edu/~richardson/heronian/heronian.html>.

[15] Sándor, J.: *Geometric Theorems, Diophantine Equations, and Aritmetic Funcions*. Rehoboth: American Research Press, 2002. 302 p.. ISBN: 1-931233-51-9.

[16] Singh, S.: *Velká Fermatova věta, Dramatická historie řešení největšího matematického problému*. Londýn: Fourth Estate Limited, 1997. 288 s.. ISBN 978 – 80 – 200 – 1483 – 2.

[17] Struik, D. J.: *Dějiny matematiky – Malá moderní encyklopedie*. Praha: Orbis, 1963. 256 s..

[18] Yiu, P.: *Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles*. 41st Meeting of Florida Section of Mathematical Association of America Florida Southern College, Lakeland, Florida, February 2008.

[19] Yiu, P.: *Heronian Triangles Are Lattice Triangles*. The Amarican Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 3. (Mar., 2001), p. 261 – 263.

[20] *Heron of Alexandria* [online]. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, April 1999 [citováno 11. října 2009]. Dostupné z WWW: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Heron.html>.

[21] *Highly Heronian Ellipses* [online]. [citováno 25. března 2010]. Dostupné z WWW: <http://www.mathpages.com/home/kmath474.htm >.

[22] *Pythagorova věta, Pythagorejský trojúhelník, Pythagorejská čísla pro ZŠ* [online]. Stránky ZŠ Dobřichovice, [citováno 25. března 2010]. Dostupné z WWW: <http://www.zsdobrichovice.cz/programy/matika/pyth_triangle.htm#troj>.

Přílohy

Příloha 1. Seznam všech základních heronovských trojúhelníků, jejichž délka nejdelší strany $a \leq 100$.

Příloha 2. Seznam základních heronovských trojúhelníků, jejichž délky stran tvoří aritmetickou posloupnost.

Příloha 3. Seznam pythagorejských trojúhelníků, pro které platí, že $c \leq 100$.

Příloha 1. Seznam všech základních heronovských trojúhelníků, jejichž délka nejdelší strany $a \leq 100$. V tabulce jsou uvedeny jednotlivé délky stran, obvod a obsah.

Délka strany *a*	**Délka strany *b***	**Délka strany *c***	**Obsah *S***	**Obvod *o***
5	4	3	6	12
6	5	5	12	16
8	5	5	12	18
15	13	4	24	32
13	12	5	30	30
17	10	9	36	36
26	25	3	36	54
20	15	7	42	42
13	13	10	60	36
17	15	8	60	40
24	13	13	60	50
29	25	6	60	60
20	13	11	66	44
30	29	5	72	64
15	14	13	84	42
21	17	10	84	48
25	24	7	84	56
35	29	8	84	72
25	17	12	90	54
53	51	4	90	108
37	20	19	114	76
17	17	16	120	50
30	17	17	120	64
39	25	16	120	80
21	20	13	126	54

Délka strany *a*	Délka strany *b*	Délka strany *c*	Obsah *S*	Obvod *o*
41	28	15	126	84
52	51	5	126	108
30	25	11	132	66
37	26	15	156	78
51	40	13	156	104
25	25	14	168	64
39	35	10	168	84
48	25	25	168	98
37	30	13	180	80
41	40	9	180	90
65	55	12	198	132
26	25	17	204	68
29	21	20	210	70
28	25	17	210	70
39	28	17	210	84
37	35	12	210	84
68	65	7	210	140
80	73	9	216	162
52	41	15	234	108
40	37	13	240	90
35	34	15	252	84
45	40	13	252	98
70	65	9	252	144
44	37	15	264	96
65	34	33	264	132
52	29	27	270	108
80	65	17	288	162
74	51	25	300	150
51	37	20	306	108

Délka strany *a*	**Délka strany *b***	**Délka strany *c***	**Obsah *S***	**Obvod *o***
44	39	17	330	100
52	33	25	330	110
61	60	11	330	132
41	40	17	336	98
53	35	24	336	112
61	52	15	336	128
36	29	25	360	90
41	41	18	360	100
80	41	41	360	162
75	68	13	390	156
87	55	34	396	176
97	90	11	396	198

Tabulka 1 - Heronovské trojúhelníky

Příloha 2. Seznam základních heronovských trojúhelníků, jejichž délky stran tvoří aritmetickou posloupnost. V tabulce jsou uvedeny všechny trojúhelníky, pro které $o \leq 1000$, jejich jednotlivé délky stran, obvod a obsah.

Délka strany *a*	**Délka strany *b***	**Délka strany *c***	**Obvod *o***	**Obsah *S***
3	4	5	12	6
13	14	15	42	84
15	26	37	78	156
15	28	41	84	126
17	28	39	84	210
25	38	51	114	456
51	52	53	156	1170
29	52	75	156	546
39	62	85	186	1116
61	74	87	222	2220
39	76	113	228	570
65	76	87	228	2394
75	86	97	258	3096
51	98	145	294	1176
85	122	159	366	5124
111	124	137	372	6510
65	124	183	372	2046
73	134	195	402	3216
123	146	169	438	8760
75	148	221	444	1554
101	148	195	444	7326
87	158	229	474	4740
111	172	233	516	9030
89	172	255	516	3354
145	182	219	546	13104

Délka strany *a*	**Délka strany *b***	**Délka strany *c***	**Obvod *o***	**Obsah *S***
123	182	241	546	10920
193	194	195	582	16296
173	196	219	588	16170
125	196	267	588	11466
109	206	303	618	6180
111	218	325	654	3924
197	244	291	732	23790
123	244	365	732	3294
181	254	327	762	22860
157	266	375	798	17556
183	266	349	798	23940
159	268	377	804	18090
255	268	281	804	30954
267	278	289	834	33360
195	292	389	876	27594
149	292	435	876	7446
159	302	445	906	12684
255	314	373	942	39564
305	316	327	948	43134
185	316	447	948	2417
195	326	457	978	27384

Tabulka 2 - Heronovské trojúhelníky, jejichž délky stran tvoří aritmetickou posloupnost

Příloha 3. Seznam pythagorejských trojúhelníků, pro které platí, že $c \leq 100$. V tabulce jsou uvedeny jednotlivé délky stran, obvod a obsah.

Délka strany *a*	**Délka strany *b***	**Délka strany *c***	**Poznámka**	**Obvod *o***	**Obsah *S***
3	4	5	primitivní	12	6
6	8	10	2 * (3, 4, 5)	24	24
5	12	13	primitivní	30	30
9	12	15	3 * (3, 4, 5)	36	54
8	15	17	primitivní	40	60
12	16	20	4 * (3, 4, 5)	48	96
15	20	25	5 * (3, 4, 5)	60	150
7	24	25	primitivní	56	84
10	24	26	2 * (5, 12, 13)	60	120
20	21	29	primitivní	70	210
18	24	30	6 * (3, 4, 5)	72	216
16	30	34	2 * (8, 15, 17)	80	240
21	28	35	7 * (3, 4, 5)	84	294
12	35	37	primitivní	84	210
15	36	39	3 * (5, 12, 13)	90	270
24	32	40	8 * (3, 4, 5)	96	384
9	40	41	primitivní	90	180
27	36	45	9 * (3, 4, 5)	108	486
30	40	50	10 * (3, 4, 5)	120	600
14	48	50	2 * (7, 24, 25)	112	336
24	45	51	3 * (8, 15, 17)	120	540
20	48	52	4 * (5, 12, 13)	120	480
28	45	53	primitivní	126	630
33	44	55	11 * (3, 4, 5)	132	726
40	42	58	2 * (20, 21, 29)	140	840
36	48	60	12 * (3, 4, 5)	144	864

Délka strany *a*	Délka strany *b*	Délka strany *c*	Poznámka	Obvod *o*	Obsah *S*
11	60	61	primitivní	132	330
39	52	65	13 * (3, 4, 5)	156	1014
25	60	65	5 * (5, 12, 13)	150	750
33	56	65	primitivní	154	924
16	63	65	primitivní	144	504
32	60	68	4 * (8, 15, 17)	160	960
42	56	70	14 * (3, 4, 5)	168	1176
48	55	73	primitivní	176	1320
24	70	74	2 * (12, 35, 37)	168	840
45	60	75	15 * (3, 4, 5)	180	1350
21	72	75	3 * (7, 24, 25)	168	756
30	72	78	6* (5, 12, 13)	180	1080
48	64	80	16 * (3, 4, 5)	192	1536
18	80	82	2 * (9, 40, 41)	180	720
51	68	85	17 * (3, 4, 5)	204	1734
40	75	85	5 * (8, 15, 17)	200	1500
36	77	85	primitivní	198	1386
13	84	85	primitivní	182	546
60	63	87	3 * (20, 21, 29)	210	1890
39	80	89	primitivní	208	1560
54	72	90	18 * (3, 4, 5)	216	1944
35	84	91	7 * (5, 12, 13)	210	1470
57	76	95	19 * (3, 4, 5)	228	2166
65	72	97	primitivní	234	2340
60	80	100	20 * (3, 4, 5)	240	2400
28	96	100	4 * (7, 24, 25)	224	1344

Tabulka 3 - Pythagorejské trojúhelníky