JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Sbírka příkladů ze zájmové matematiky

The Collection of Mathematics Examples from Practice

Diplomová práce

Diploma thesis

Autor: Lucie Muková
Studijní program: M7504 Učitelství pro střední školy
Studijní obory: Učitelství matematiky
Učitelství tělesné výchovy
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2010

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a v seznamu literatury jsem uvedla všechny použité zdroje.

Nemám žádný závažný důvod proti zpřístupňování této závěrečné práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb. o právu autorském a o právech souvisejících s právem autorským.

V Českých Budějovicích dne ……………........ ……..……………………………….

podpis

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych touto cestou poděkovala všem, kteří se jakýmkoliv způsobem podíleli na mé diplomové práci; jmenovitě:

panu profesorovi RNDr. Pavlu Tlustému CSc. za jeho cenné rady, Danielu Beterovi za anglický překlad a korekturu českého jazyka, Karlu Mukovi za dva příspěvky ze své strojírenské praxe a také všem autorům knih, ze kterých jsem čerpala, a které mi byly během mé práce podnětnou inspirací.

ABSTRAKT

Tato diplomová práce si klade za cíl zpestřit studentům a učitelům výuku matematiky na základních a středních školách a v případě, že bude vydána do knihy, je možné ji použít ke standardním učebnicím.

Diplomová práce je rozdělena do 12 kapitol, jež se zabývají stručným výkladem téměř všech základních matematických okruhů a co je podstatné, je to, že ke každé kapitole jsou uvedeny zábavné a přitom poučné příklady ze života. Na konci diplomové práce je uveden klíč, který obsahuje výsledky, případně řešení daných příkladů.

Tato práce by měla či spíše si přeje zaujmout nejen mé kolegy, učitele matematiky, ale zejména také ty studenty, kteří k matematice doposud nenašli ten správný přístup a bez něhož je velmi obtížné se jakýkoliv předmět opravdu kvalitně naučit a používat jej i nadále během svého života.

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis is to make the education of mathematics more interesting and various not only for primary and secondary students but for their teachers too. If it is released as the book, it can be used as the workbook.

This thesis is divided into 12 chapters which include nearly all possible basic mathematics themes and what is even more important is that all the chapters are accompanied with entertaining but educative mathematics examples from practice or life. At the end of this thesis there is a key with the right results or solutions in some cases.

This thesis should or rather would like to attract all the teachers of mathematics but also mainly those students who are still searching for the right attitude to this science or subject. Without this attitude it is very difficult to learn and to understand any subject and to use it in practice in the future.

OBSAH

ÚVOD

Co je to matematika? Zjednodušeně můžeme matematiku nazvat vědou o číslech a geometrických útvarech nebo přesněji vědou o vztazích reálného světa z hlediska množství a prostoru. Matematika je vědou, která pronikla do všech oblastí lidské činnosti. Nebo snad dovedete jmenovat obor vědy, techniky, kultury nebo jiné oblasti lidské činnosti, kde bychom se nesetkali s otázkou počtu předmětů, jejich tvarů a rozměrů či s nejrůznějšími matematickými pojmy a vzorci?

Matematika se stala jedním ze základních pilířů veškerého technického pokroku. Především nám umožnila dosáhnout tak významných úspěchů, jako je ovládnutí jaderné energie, uskutečňování meziplanetárních letů, konstruování stále dokonalejších počítačů a využívání mnoha dalších vymožeností vědy a techniky. Matematika se uplatňuje nejen ve fyzice, astronomii, chemii a v jiných vysloveně technických vědách, ale ve stále větší míře i v netechnických přírodních vědách, jako je biologie a ve společenských vědách, jako je sociologie, lingvistika a další.

Hlavním důvodem, proč jsem se rozhodla napsat diplomovou práci právě s tímto tématem, tedy Sbírka příkladů ze zájmové matematiky, je fakt, že spousta žáků či studentů na základních a středních školách nemá matematiku jako takovou v oblibě.

Pomocí této diplomové práce, kterou chci z části využít i při mé budoucí výuce na střední škole, bych ráda všechny studenty přesvědčila, že matematika nejsou jen „nudná“ čísla či písmena napsaná na papíře. Naopak, chci jim vysvětlit a názorně ukázat, že matematika je vědou nejen exaktní, ale především také velmi zajímavou.

K tomu, aby studenti objevili celou svou hloubku a krásu matematiky, je nezbytně nutné, abychom jim správným způsobem pomohli právě my, jejich učitelé. Je zapotřebí žákům neustále vysvětlovat a názorně předvádět, proč matematika není jen strohá teorie plná nicneříkajících příkladů, ale sdělit jim, že je tomu přesně naopak.

Je tedy důležité, aby učitel nepoužíval jen ty knihy, které mu byly školou předány, a aby se striktně a za každou cenu nedržel předem stanovených osnov, ale aby se také občas snažil výuku zpestřit i svými zkušenostmi a příklady ze života. Tímto způsobem je velmi reálné zvednout zájem i těch žáků, pro které není matematika koníček, ale pouze a jen povinný předmět.

Nedávno jsem byla nakupovat potraviny v samoobsluze a právě ve chvíli, když jsem měla za vybrané zboží zaplatit, se přihodila tato událost; prodavačce přestala fungovat kasa a když chtěla použít rezervní kalkulačku, zjistila, že jí zrovna používá její kolegyně, a že bude muset tedy nákup spočítat bez pomoci přístrojů. Nejprve mi sdělila, že zpaměti to není schopna spočítat a na můj návrh, ať si to tedy napíše pod sebe na papír, mi sdělila, že tento systém již dávno zapomněla, protože ve škole prý zásadně používají na všechno kalkulačku – dle jejích slov bylo prodavačce 18 let a zde v obchodě byla na brigádě a ještě ji čekal jeden rok střední školy. Za mé skromné pomoci to nakonec zvládla na tom papíru spočítat, přičemž někteří zákazníci ve frontě byli z čekání nevrlí, ostatní se této situaci pro změnu usmívali a čekali dále. Nákup stál tehdy 390 Kč, z toho 300 Kč jsem chtěla zaplatit v hotovosti a zbytek jsem chtěla pokrýt dvěma stravenkami – každá byla v hodnotě 70 Kč. A to byl další kámen úrazu – slečna prodavačka nevěděla, co s tím, a že to je prý moc složité a chtěla si to znovu rozepsat na papír. Vzhledem ke zvětšující se frontě jsem jí sdělila, že nyní už to není třeba, a že stačí si sečíst hodnotu peněz, které jí chci dát (tedy 300 + 140 stravenky) a z toho odečíst cenu nákupu (tedy 390). A že mi má tedy vrátit 50 Kč. Po mém vysvětlení se jí rozzářily oči a poděkovala mi za pomoc, protože prý byla bez kalkulačky zcela v koncích.

Když jsem studentům při mé praxi tento příběh sdělila, tak mi odkývali, že matematika je opravdu věcí ze života a slíbili mi, že u jednodušších výpočtů se budou alespoň občas snažit kalkulačku nepoužívat.

Závěrem bych si přála, aby tato diplomová práce ukázala (prostřednictvím mých kolegů učitelů) co největšímu počtu studentů, že matematika nemusí být jen dřina a učení, ale že je to i věda velice zábavná. Pokud se mé přání vyplní, splní tato práce svůj účel.

1. Matematická logika

Symboly: umožňuje stručné vyjadřování matematických poznatků ve formě symbolických zápisů, vzorců apod.

<u>2 druhy:</u> a) konstanta = symbol označující určitý (jediný) objekt z dané množiny objektů.
Např.: 4, *Л*…reálná čísla, *A*[1; 2]…pevný bod roviny

b) proměnná = symbol označující kterýkoli objekt z dané množiny objektů.
Např.: často je to písmeno *x, y* apod. (*x*, *y*…proměnná reálná čísla, *P*[*x; y*]…proměnný bod roviny)

Výroky = jazykové výrazy (sdělení), o nichž má po obsahové stránce smysl tvrdit, že jsou buď pravdivé (výrok pravdivý), anebo nepravdivé (výrok nepravdivý).

<u>Hypotézy</u> = výroky, o nichž nelze jednoznačně rozhodnout, zda jsou pravdivé či nikoli, ale principiálně jedna z těchto možností musí nastat.

<u>Označení výroků</u>: obvykle pomocí malých písmen *p, q* aj.

<u>Pravdivostní hodnota:</u> a) 1 (pravda), je-li výrok pravdivý
b) 0 (nepravda), je-li výrok nepravdivý

Základní logické spojky:

$\neg$ (není pravda, že), $\wedge$ (a zároveň), $\vee$ (nebo), $\Rightarrow$ (jestliže…, pak…), $\Leftrightarrow$ (právě když…)

Složené výroky:

<u>Negace výroku *p*</u>: (výrok popírající to, co tvrdí výrok *p*) $\neg \boldsymbol{p}$

<u>Konjunkce výroků *p*, *q*</u>: (je pravdivá jen tehdy, jsou-li pravdivé oba výroky *p* i *q*) $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

<u>Disjunkce výroků *p*, *q*</u>: (je nepravdivá jen tehdy, jsou-li oba výroky *p* i *q* nepravdivé) $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

<u>Implikace výroku *q* výrokem *p*</u>: (je nepravdivá jen tehdy, má-li z pravdivého výroku vyplynout nepravdivý) $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$

<u>Ekvivalence výroků *p*, *q*</u>: (je pravdivá jen tehdy, mají-li oba výroky současně stejnou pravdivostní hodnotu) $\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$

<u>Obměna implikace</u>: (implikace a její obměna mají vždy stejnou pravdivostní hodnotu)
$\neg \boldsymbol{q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{p}$

<u>Obrácení implikace</u>: (může, ale nemusí mít stejnou pravdivostní hodnotu jako původní implikace) $\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p}$

<u>Tautologie</u>: (složený výrok, který je vždy pravdivý bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků, ze kterých je složen)

<u>Kontradikce</u>: (složený výrok, který je vždy nepravdivý bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků, ze kterých je složen)

Pravdivostní tabulka složených výroků:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1

Výrokové formule: obecně symboly *p*, *q* apod. mohou představovat určité výroky, ale i výrokové proměnné (zastupující výroky). Výrazy vytvořené z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek a popř. závorek se nazývají výrokové formule. Vyjadřují sled logických operací.
Např.: $p, \neg p, p \Rightarrow q, (p \wedge q) \vee r$

Výroková forma (predikátová formule) = jazykové výrazy (sdělení) obsahující jednu či více proměnných a takové, které po dosazení přípustných hodnot proměnných se stávají výroky. Výroková forma o jedné proměnné $V(x)$, výroková forma o *n* proměnných $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
Např.: a) přirozené číslo *x* je dělitelné pěti
b) $x \in R : -2 \leq x \leq 2$
c) $x, y, z \in R : x + y = z$

Kvantifikátory:

Název kvantifikátoru	**Označení**	**Čtení**
Obecný	$\forall$	„Pro každé“, „pro všechna“
Existenční	$\exists$	„Existuje (alespoň jedno)“
Jednoznačné existence	$\exists!$	„Existuje právě jedno“

Negování výroků:

Negace jednoduchých kvantifikovaných výroků

Jednoduchý kvantifikovaný výrok	**Jeho negace**
Každý… je… Každý z *n* … je… $(n \in N, n > 1)$	Alespoň jeden … není… Alespoň jeden z *n*… není…
Alespoň jeden… je… Alespoň *n*… je… $(n \in N, n > 1)$	Žádný… není… Nejvýše *n* - 1… je…
Nejvýše *n*… je… $(n \in N, n \geq 1)$	Alespoň *n* + 1… je…
Právě jeden… je… Právě *n*… je… $(n \in N, n > 1)$	Žádný… není… nebo alespoň dva … jsou… Nejvýše *n* - 1… je… nebo alespoň *n* + 1… je…

Negace výroků s jediným z kvantifikátorů $\forall, \exists$

Kvantifikovaný výrok	**Negace výroku**
$\forall x \in D : V(x)$	$\exists x \in D : \neg V(x)$
$\exists x \in D : V(x)$	$\forall x \in D : \neg V(x)$ Čteme: „Pro žádné *x* z *D* neplatí *V*(*x*).”

Negace složených výroků

Složený výrok	**Jeho negace**
$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
$p \vee q$	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$
$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Při úpravách složených výroků se často používají následující tautologie

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	De Morganova pravidla
$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	Komutativnost konjunkce a disjunkce
$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Zákon negace negace
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	Ekvivalence implikace a její obměny
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$	
$[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$ $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$	Asociativnost konjunkce a disjunkce
$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	Distributivní zákony

PŘÍKLADY:

Příklad 1. 1 Problém trenéra

Při střídání hráčů v hokejovém utkání se měl trenér rozhodnout, koho z hráčů *A*, *B*, *C*, *D*, *E* má vyslat na led, jestliže si byl vědom, že a) *B* by měl hrát, když bude hrát *A*, b) když bude hrát *E*, měli by hrát i hráči *A* a *D*, c) *B* a *C* by neměli hrát společně, protože nejsou sehraní, d) *C* a *D* by měli společně hrát, nebo společně zůstat na střídačce, e) měl by hrát *D*, nebo *E*. Které hráče měl trenér vyslat na led? Poraďte mu!

Příklad 1. 2 Inzerát

Představte si, že byl zveřejněn inzerát: „Přijme se pracovnice, která má středoškolské vzdělání nebo 5 let praxe a ovládá těsnopis.“ Přihlásila se uchazečka, která neměla středoškolské vzdělání, ale měla 8 let praxe a výborně ovládala těsnopis. Dále uchazečka, která měla středoškolské vzdělání, 8 let praxe, ale neovládala těsnopis, a třetí uchazečka, která měla jen středoškolské vzdělání, ale neměla žádnou praxi a neovládala těsnopis. Můžete rozhodnout, která uchazečka byla přijata?

Příklad 1. 3 Autonehoda

Vyšetřováním bylo zjištěno, že a) nehodu zavinil řidič *B* nebo *C*, b) jestliže nehodu zavinil řidič *C*, zavinil ji i řidič *A*, c) nehodu zavinil řidič *B*, jestliže ji zavinil řidič *A*, d) jestliže nehodu zavinil řidič *B*, pak ji řidič *C* nezavinil. Podaří se vám rozhodnout, kdo nehodu zavinil?

Příklad 1. 4 Tři mudrcové

Vypráví se, že před mnoha lety v jedné zemi chtěl král zvolit za svého rádce toho ze tří mudrců, který bude nejchytřejší. A tak jim ukázal 3 černé a 2 bílé klobouky, potom každému z nich nasadil v naprosté tmě jeden klobouk, ostatní schoval, a když rozsvítil, pravil: „ Dobře se na sebe podívejte. Kdo první z vás správně odpoví, jakou barvu má jeho klobouk, stane se mým rádcem.“ Po chvíli mudrc *A* prohlásil, že má černý klobouk. Jak na to přišel?

2. Matematické důkazy

Důkazem matematické věty nazýváme logický proces, kterým ověřujeme její platnost pomocí axiómů, definic a dříve dokázaných vět na základě logických zákonů.

Typy základních důkazů:

1) Přímý důkaz: implikace $A \Rightarrow B$ vychází z platného axiómu (nebo už dokázané věty) A a řetězcem pravdivých implikací prokážeme platnost B:
$A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, ..., A_n \Rightarrow B.$

2)Nepřímý důkaz: implikace $A \Rightarrow B$ spočívá v přímém důkazu její obměny $\neg B \Rightarrow \neg A$, která je s ní ekvivalentní.

3) Důkaz sporem: I) Vyslovíme negaci výroku A, tj. výrok $\neg A$
II) Z $\neg A$ odvodíme logický úsudek C (sestavíme řetězec pravdivých implikací $\neg A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, ..., A_n \Rightarrow C$ čili $\neg A \Rightarrow A_1 \Rightarrow ... \Rightarrow C$), kde výrok C neplatí (dospěli jsme ke **sporu**).
III) Z druhého kroku vyplývá, že neplatí $\neg A$, tedy platí výrok A.

4) Důkaz matematickou indukcí: užívá se pro obecné věty typu $\forall n \in N, n \geq n_0 : V(n)$ a spočívá ve dvou krocích:
I) Dokážeme, že $V(n)$ platí pro $n = n_0$, tj. platí $V(n_0)$
II) Pro každé $k \geq n_0$, kde $k \in N$, dokážeme: jestliže platí $V(k)$, pak platí i $V(k+1)$, tj. platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$

PŘÍKLADY:

Příklad 2. 1 Tři přátelé:

Tři přátelé si spolu dali jídlo v restauraci. Účet činil 300 korun a oni zaplatili v hotovosti. Číšník si však uvědomil, že udělal chybu, a že jim měl účtovat jen 250 korun. Vzal tedy z pokladny 50 korun, aby jim je vrátil. Mezitím se však rozhodl ponechat si 20 korun jako spropitné, protože 50 nelze dělit třemi. Každému z hostů tedy vrátil 10 korun, každý z nich nakonec zaplatil 90 korun a číšník si nechal 20 korun, což je dohromady 290 korun. Kam zmizelo oněch 10 korun?

Příklad 2. 2 Všimněte si níže uvedené úvahy a najděte chybu:

$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$; $2\log_{10}\frac{1}{2} > 3\log_{10}\frac{1}{2}$. Pro každé dvě reálná čísla $x_1, x_2 > 0$ platí: Je-li $x_1 > x_2$, pak $\log_{10} x_1 > \log_{10} x_2$. Po krácení číslem $\log_{10}\frac{1}{2}$ dostaneme $2 > 3$.

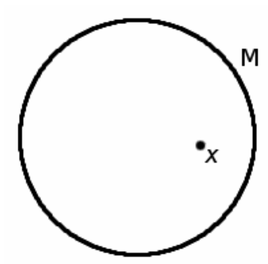
3. Množiny

Množina je soubor libovolných navzájem různých objektů, jež je chápán jako jeden celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoli.

Prvek množiny: každý objekt, který patří do množiny.

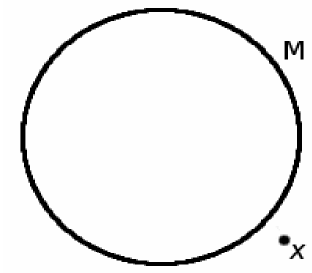
Označování množin: velká písmena *A, B, M* apod.
Označování prvků množiny: malá písmena *a, b, x* apod.

$x \in M$ **:** <u>x je prvkem</u> (elementem) množiny *M*



Obr. 3. 1 *x* náleží množině *M*

$x \notin M$ **:** <u>x není prvkem</u> (elementem) množiny *M*

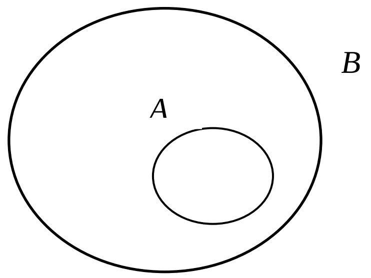


Obr. 3. 2 *x* nenáleží množině *M*

<u>Neprázdná množina</u> (množina obsahující alespoň jeden prvek): $M \neq \emptyset$
<u>Prázdná množina</u> (množina, která neobsahuje žádný prvek): $M = \emptyset$
<u>Konečná množina:</u> množina, která má konečný počet prvků, tj. buď je prázdná, anebo počet jejích prvků je dán přirozeným číslem. Počet prvků konečné množiny *M* označujeme symbolem $|M|$.
<u>Nekonečná množina:</u> každá množina, která není konečná.

Způsoby zadání množin: a) <u>výčtem prvků</u> $M = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
b) <u>charakteristickou vlastností</u> (takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky dané množiny) $M = \{x \in U;\ V(x)\}$
c) <u>grafickým znázorněním</u> (např.: interval)

Základní typy vztahů mezi množinami *A, B* (prvků z *U*):
1) <u>Inkluze množin *A, B*:</u> Symbolický zápis $A \subset B$ (*A* je podmnožinou *B*)
Množina *A* je podmnožinou množiny *B* právě, když každý prvek množiny *A* je zároveň prvkem množiny *B*.



Obr. 3. 3 Množina *A* je vlastní částí množiny *B*

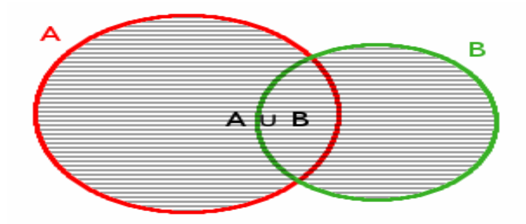
2) Rovnost množin *A*, *B*: Symbolický zápis $A = B$ (*A* je rovno *B*)
Množiny *A*, *B* jsou si rovny, právě když $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$, tj. všechny prvky množin *A*, *B* jsou tytéž. Rovnost množin je relace reflexivní ($A = A$), symetrická ($A = B \Leftrightarrow B = A$) a tranzitivní ($[A = B \wedge B = C] \Rightarrow A = C$).
Tedy: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ čili
$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

3) Ostrá inkluze množin *A*, *B*: Symbolický zápis $A \underset{\neq}{\subset} B$ (*A* je vlastní podmnožinou *B*)
Množina *A* je vlastní podmnožinou množiny *B*, právě když $A \subset B$, avšak zároveň $A \neq B$.
Tedy: $A \underset{\neq}{\subset} B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B$

Pozn.: Množina *A* není podmnožinou množiny *B*: $A \not\subset B$
Množiny *A*, *B* si nejsou rovny: $A \neq B$

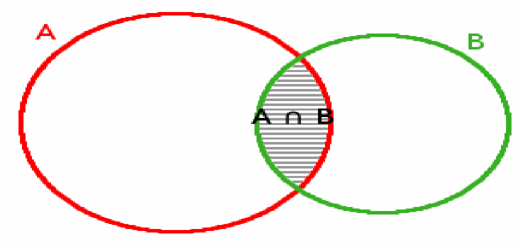
Základní operace s množinami:

1) Sjednocení množin: $A \cup B$
Sjednocení množin *A*, *B* je množina všech prvků ze základní množiny *U*, které patří alespoň do jedné z množin *A*, *B*.
Tedy: $A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$



Obr. 3. 4 Sjednocení množin

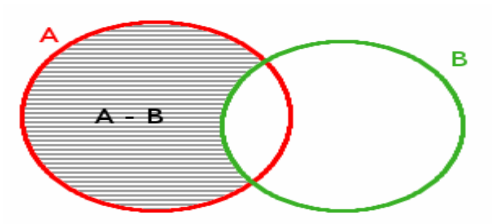
2) Průnik množin: $A \cap B$
Průnik množin *A*, *B* je množina všech prvků ze základní množiny *U*, které patří do množiny *A* a zároveň do množiny *B*.
Tedy: $A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$



Obr. 3. 5 Průnik množin

3) <u>Rozdíl množin:</u> $A - B$

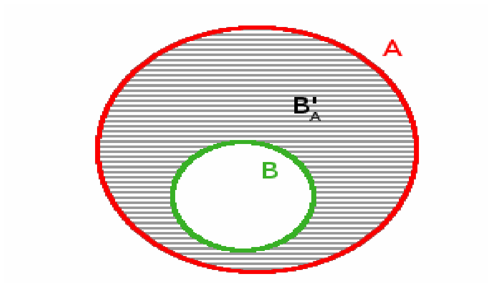
Rozdíl množin *A*, *B* je množina všech prvků ze základní množiny *U*, které patří do množiny *A* a zároveň nepatří do množiny *B*. Tedy: $A - B = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}$



Obr. 3. 6 Rozdíl množin

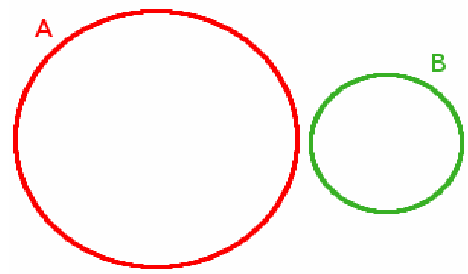
4) <u>Doplněk množiny:</u> B'_A

Doplněk množiny *B* v množině *A* ($B \subset A$) je rozdíl množin $A - B$. Tedy: $B'_A = A - B$



Obr. 3. 7 Doplněk množiny *B* v množině *A*

Disjunktní množiny: Říkáme, že množina *A* je disjunktní s množinou *B*, právě když množiny *A*, *B* mají prázdný průnik: $A \cap B = \emptyset$



Obr. 3. 8 Disjunktní množiny

Množinové rovnosti: 1) $B' \cap B = \emptyset$, $B' \cup B = U$, $\emptyset'_U = U$, $U'_U = \emptyset$, $(B')' = B$

2) $A - B = A \cap B'$

3) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

4) $B - A = A' \cap B$

5) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Počet prvků konečné množiny *A* označujeme $|A|$

Pro množiny *A*, *B* platí: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Pro podmnožiny *A*, *B*, *C* platí:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Uspořádanou dvojici prvků *a* a *b* označujeme $[a,b]$, kde *a* je první a *b* je druhý člen uspořádané dvojice.

Kartézským součinem *A* × *B* neprázdné množiny *A* a neprázdné množiny *B* nazýváme množinu právě těch uspořádaných dvojic $[a,b]$, kde $a \in A$, $b \in B$

Druhá (kartézská) mocnina množiny *A* je dána kartézským součinem $A \times A = A^2$.

Analogicky $A \times A \times A = A^3$

Př.: $A = \{1;2;3\}$, $B = \{2;4\}$ Pak

$A \times B = \{[1;2];[1;4];[2;2];[2;4];[3;2];[3;4]\}$

PŘÍKLADY:

Příklad 3. 1 Kdo je odkud?

Ve vlaku z Nitry do Bratislavy cestovalo v jednom oddělení šest cestujících. Jeden z nich bydlí v Nitře, jeden v Bratislavě, jeden v Komárně, jeden v Levicích, jeden v Hlohovci a jeden v Trenčíně. Jejich jména začínají písmeny *A*, *K*, *R*, *O*, *P* a *F*. Nevíme však, komu které jméno patří. Víme, že *A* a Nitřan jsou lékaři, *P* a Bratislavan jsou učitelé, Komárňan a *R* jsou inženýři, *K* a *F* náruživí sportovci, zatímco Komárňan nemá o sportu ani ponětí. Hlohovčan je starší než *A* a Trenčíňan je starší než *R*; *K* a Nitřan vystoupili v Leopoldově, *R* a Hlohovčan v Trnavě. Určete povolání každého z těchto šesti cestujících a zároveň jejich bydliště.

Příklad 3. 2 Jazyky

K cestě je připraveno sto osob. Deset z nich neumí ani francouzsky, ani německy. Sedmdesát pět osob umí německy, osmdesát tři osob umí francouzsky. Kolik turistů ovládá dva jazyky?

Příklad 3. 3 Propagace vysokých škol

V maturitních ročnících na gymnáziu se rozhodli propagovat významná povolání. Pozvali zástupce z vysoké školy hutní, hornické a dopravní, aby si pohovořili se skupinou studentů, kteří mají o tato povolání zájem. Nikdo se nehlásil na více než jednu školu. Když zástupce hutní školy odcházel z besedy, řekl: „Přihlásili se všichni, kromě tří.“ Za chvíli přišel zástupce hornické a dopravní školy a oba sdělili stejnou informaci o zájmu všech, kromě tří studentů. Kolik studentů se zúčastnilo besedy?

Příklad 3. 4 Laborant

V laboratoři zkoušeli tvrdost čtyř vzorků oceli, které označíme písmeny *A*, *B*, *C*, *D*. Laborant si zapamatoval jen toto: *B* byla měkčí než *A* nebo *D*; *C* byla tvrdší než B, nebo snad byla měkčí než *B*? Nevěděl však přesně, zda *B* byla tvrdší než *C* nebo než *D*. Při poslední zkoušce se zjistilo, že *A* (nebo *C*?) je měkčí než *B* (nebo *D*?). Uměli byste porovnat čtyři vzorky podle tvrdosti?

Příklad 3. 5 Rodiny

Jestliže z 15 rodin vlastní 6 rodin chatu, 10 rodin auto a jen 3 rodiny nevlastní ani auto, ani chatu, kolik rodin vlastní současně auto i chatu? Kontrolu si proveďte pomocí Vennových diagramů.

4. Funkce

4.1 <u>Základní pojmy:</u>

Reálná funkce *f* jedné reálné proměnné *x* je definována takto: Nechť *A*, *B* jsou neprázdné množiny reálných čísel ($A \subset R$, $B = R$). Přiřadíme-li každému číslu $x \in A$ právě jedno číslo $y = B$, dostaneme množinu *f* uspořádaných dvojic (*x*, *y*) reálných čísel, která se nazývá reálná funkce reálné proměnné *x*.

Definiční obor *D*(*f*) funkce *f* je množina všech hodnot proměnné *x*.

Funkční hodnota *f*(*x*) (hodnota funkce *f* v bodě *x*) je číslo *y* přiřazené číslu *x*, píšeme $y = f(x)$.

Obor hodnot *H*(*f*) funkce *f* je množina všech hodnot funkce *f*.

Graf funkce *f* je v kartézské soustavě souřadnic *Oxy* množina všech bodů roviny o souřadnicích $[x; f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

Způsoby zadání funkce: K zadání funkce je třeba stanovit:

1) definiční obor funkce $D(f)$
2) funkční předpis – pravidlo, podle kterého je ke každému číslu $x \in D(f)$ přiřazena jednoznačně funkční hodnota $y = f(x)$

<u>Dle funkčního předpisu rozlišujeme tyto základní způsoby zadání:</u>

a) analyticky - vzorcem, rovnicí tvaru $y = f(x)$; např. $f(x) = x - 2$.
b) grafem - funkční předpis je dán grafem funkce.
c) výčtem (zpravidla tabulkou) – všech uspořádaných dvojic $[x, f(x)]$, jen u funkcí s konečným definičním oborem.
d) Slovním předpisem – praktické návody

4.2. <u>Operace s funkcemi a vlastnosti funkcí:</u>

Nechť *f* je funkce s definičním oborem $D(f)$, *g* je funkce s definičním oborem $D(g)$ a platí $(A \subseteq D(f) \cap D(g)) \wedge (A \neq \emptyset)$. Pak na množině *A* zavádíme:

Rovnost funkcí $f = g$ $\Leftrightarrow D(f) = D(g)$ a $\forall x \in A: f(x) = g(x)$.

Součet funkcí $s = f + g$ $\Leftrightarrow \forall x \in A: s(x) = f(x) + g(x)$

Součin funkcí $m = f \cdot g$ $\Leftrightarrow \forall x \in A: m(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Podíl funkcí $p = f / g$ $\Leftrightarrow \forall x \in A \wedge g(x) \neq 0: p = f(x) / g(x)$.

Složená funkce:

Protože funkce jsou zobrazení, můžeme je skládat. Pro dvojici skládaných funkcí *g* a *f* musí být ovšem splněny tyto předpoklady: Nechť funkce g: $u = g(x)$ má definiční obor $D(g)$ a obor hodnot $H(g) \neq \emptyset$, a nechť funkce f: $y = f(u)$ má definiční obor $D(f)$ takový, že platí $H(g) \subset D(f)$. Z této podmínky plyne, že $\forall x \in D(g): u = g(x) \in D(f)$. Pak lze vytvořit funkci h: $y = h(x)$ s definičním oborem $D(h) = D(g)$, jejíž funkční předpis je :

$$h(x) = f(g(x)) \text{ pro každé } x \in D(h);$$

tuto funkci *h* nazýváme funkcí složenou z funkcí *g*, *f* (v uvedeném pořadí) a značíme ji $h = f \circ g$. Funkci *f* se říká vnější složka a funkci *g* vnitřní složka složené funkce *h*.

Funkce f definovaná na množině $A \subseteq D(f)$ se nazývá:
Rostoucí v *A* $\Leftrightarrow \forall x_1; x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Klesající v *A* $\Leftrightarrow \forall x_1; x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Nerostoucí v *A* $\Leftrightarrow \forall x_1; x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
Neklesající v *A* $\Leftrightarrow \forall x_1; x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
Pozn.: Funkce rostoucí a klesající v A se nazývají ryze monotónní, přičemž funkce nerostoucí a neklesající v A se nazývají monotónní.

Prostá v *A* $\Leftrightarrow \forall x_1; x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
f^{-1} **je inverzní funkce k funkci *f*** platí-li, že funkce $y = f(x)$ je prostá v celém $D(f)$ a jestliže pro všechna x, y platí $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$.

Periodická s periodou *p*, existuje-li $p > 0$, že pro každé $k \in Z$ platí:
1) Je-li $x \in D(f)$, pak $(x + kp) \in D(f)$.
2) Pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(x + kp)$.

Sudá $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): (-x) \in D(f) \wedge \forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$.
Lichá $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): (-x) \in D(f) \wedge \forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$.

Funkce f definovaná v množině $A \subseteq D(f)$ se nazývá:
Zdola omezená $\Leftrightarrow$ existuje-li takové $d \in R$, *že* $\forall x \in A: f(x) \geq d$.
Shora omezená $\Leftrightarrow$ existuje-li takové $h \in R$, *že* $\forall x \in A: f(x) \leq h$.
Omezená $\Leftrightarrow$ je-li omezená shora i zdola.

Nechť f je funkce, A podmnožina jejího definičního oboru $D(f)$, $a \in A$, $b \in A$, pak říkáme, že **funkce *f* má v bodě *a* minimum na množině *A*,** právě když pro všechna $x \in A$ je $f(x) \geq f(a)$. Píšeme pak $f(a) = \min_{x \in A} f(x)$.
funkce *f* má v bodě *b* maximum na množině *A*, právě když pro všechna $x \in A$ je $f(x) \leq f(b)$. Píšeme pak $f(b) = \max_{x \in A} f(x)$.
funkce *f* má na intervalu *I* absolutní extrém v bodě *c*∈ *A*, právě tehdy, když pro všechna $x \in I$ platí: $f(x) \leq f(c)$ pro globální maximum, $f(x) \geq f(c)$ pro globální minimum.

Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, je-li definována v intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ a právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x, pro která platí $|x - a| < \delta$, je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
<u>Věta:</u> Je-li funkce f spojitá v bodě a, pak $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Bod nespojitosti funkce je bod, v němž funkce f není spojitá.

4.3 Základní elementární funkce a jejich vlastnosti, které se podrobně probírají na SŠ:

Lineární funkce:

Každá funkce tvaru: f: $y = kx + q$
(kde číslo k je směrnice přímky, která je grafem lineární funkce).

Speciálně: Je-li $k \neq 0, q = 0$, pak lineární funkci se říká přímá úměrnost.
Je-li $k = 0$, jde o konstantní funkci (Vlastnosti: $D(f) = R$, $H(f) = \{q\}$, omezená, nerostoucí, neklesající, není prostá, v každém $x \in R$ má maximum i minimum.)

Grafem každé lineární funkce je přímka, která je různoběžná s osou y. Navíc: je-li $k = 0$ je to rovnoběžka s osou x. je-li $k \neq 0$ je to různoběžka s osou x.

Vlastnosti: $k > 0$: $D(f) = R$, $H(f) = R$, není omezená ani shora, ani zdola, rostoucí, prostá, nemá maximum, ani minimum.
$k < 0$: $D(f) = R$, $H(f) = R$, není omezená ani shora, ani zdola, klesající, prostá, nemá maximum, ani minimum.

Kvadratická funkce:

Každá funkce tvaru: f: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $D(f) = R$

Grafem každé kvadratické funkce je křivka zvaná parabola, která je souměrná dle osy o rovnoběžné s osou y.

Vrchol paraboly je průsečík osy o s parabolou.
Vrcholová tečna paraboly je přímka kolmá k ose o a procházející vrcholem paraboly.

Vlastnosti: $a > 0$: $D(f) = R$, $H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty \right)$, zdola omezená, shora není omezená,

rostoucí v $\left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$, klesající v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$, v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré minimum, $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$.

$a < 0$: $D(f) = R$, $H(f) = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$, shora omezená, zdola není omezená,

rostoucí v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$, klesající v $\left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$, v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré maximum, $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$.

Grafy kvadratické funkce:
a) f_1: $y = ax^2$, grafem je parabola s vrcholem v počátku O. Je-li $a > 0$, leží všechny ostatní body grafu nad osou x, je-li $a < 0$, leží pod osou x.
b) f_2: $y = ax^2 + c$, grafem je parabola, která vznikne z grafu funkce f_1 posunutím vrcholu z bodu [0; 0] do bodu [0; c].

c) f_3: $y = ax^2 + bx + c$, grafem je parabola, kterou lze získat z grafu funkce f_1. Nejprve kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ doplníme na čtverec:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

touto úpravou lze přepsat funkční předpis funkce f ve tvaru:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0,\ kde\ \ x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Z první a druhé varianty plyne, že graf kvadratické funkce f dostaneme tak, že graf funkce f_1 posuneme do nového vrcholu $[x_0, y_0] = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$, vrchol může ležet na ose x, pod ní či nad ní.

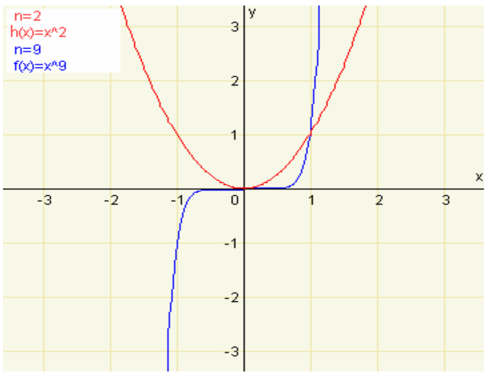
Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem:

Funkce tvaru: $f: y = x^n, n \in N, D(f) = R$

Speciálně: pro $n = 1$ je to lineární funkce, pro $n = 2$ je to základní kvadratická funkce, pro $n = 3$ je to základní kubická funkce atd.

Grafem této mocninné funkce je pro $n = 1$ přímka, pro $n > 1$ parabola n–tého stupně

Vlastnosti:



n liché: $D(f) = R$, $H(f) = R$, lichá, rostoucí, není shora, ani zdola omezená, nemá maximum ani minimum.

N sudé: $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0, +\infty)$, sudá, zdola omezená, shora není omezená, rostoucí v $\langle 0, +\infty)$, klesající v $(-\infty, 0\rangle$, nemá maximum, má ostré minimum v bodě 0.

Obr. 4. 1 grafy mocninných funkcí x^2 a x^9

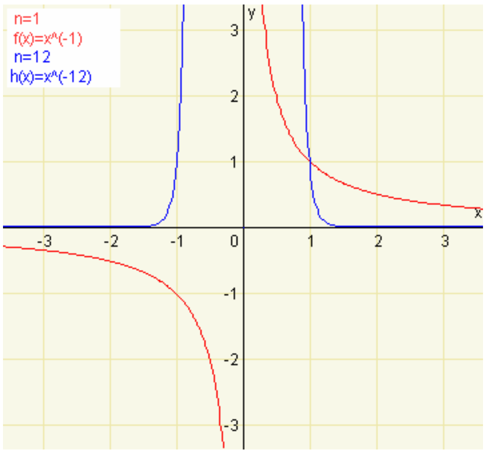
Mocninná funkce se záporným celým mocnitelem:

Funkce tvaru: $f: y = x^{-n}, n \in N, D(f) = R - \{0\}$

Grafem této funkce je hyperbola $n + 1$ stupně.

Pozn.: Lze definovat i mocninnou funkci s nulovým mocnitelem: $f: y = x^0, D(f) = R - \{0\}$, jejíž graf je graf konstantní funkce.

Vlastnosti:



n liché: $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{0\}$, lichá, není shora, ani zdola omezená, klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$, nemá maximum, ani minimum.

n sudé: $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = (0, +\infty)$, sudá, zdola omezená, shora není omezená, rostoucí v $(-\infty, 0)$, klesající v $(0, +\infty)$, nemá maximum, ani minimum.

Obr. 4. 2 grafy mocninných funkcí x^{-1} a x^{-12}

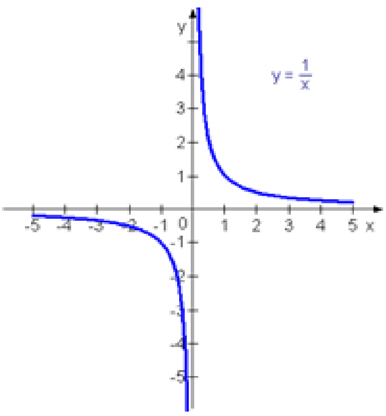
Nepřímá úměrnost:

Funkce tvaru: $f : y = \frac{k}{x}, k \neq 0, D(f) = R - \{0\}$

Speciálně: pro $k = 1$ je funkce $f : y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ mocninná funkce se záporným celým mocnitelem -1.

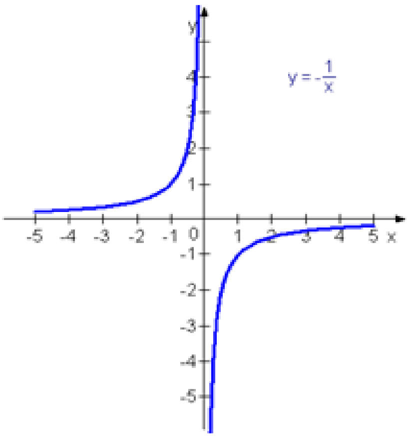
Grafem nepřímé úměrnosti je rovnoosá hyperbola (je souměrná podle os kvadrantů a podle počátku *O*. Osy souměrnosti se nazývají osy hyperboly a středu souměrnosti *O* se říká střed hyperboly. Hyperbola se neomezeně blíží k osám *x*, *y*, které se proto nazývají asymptoty hyperboly.

Vlastnosti:



$k > 0$: $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{0\}$, lichá, není shora ani zdola omezená, klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$, nemá maximum, ani minimum.

Obr. 4. 3 graf nepřímé úměrnosti pro $k > 0$



<u>$k < 0$:</u> $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{0\}$, lichá, není shora, ani zdola omezená, rostoucí v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$, nemá maximum, ani minimum.

Obr. 4. 4 graf nepřímé úměrnosti pro *k* < 0

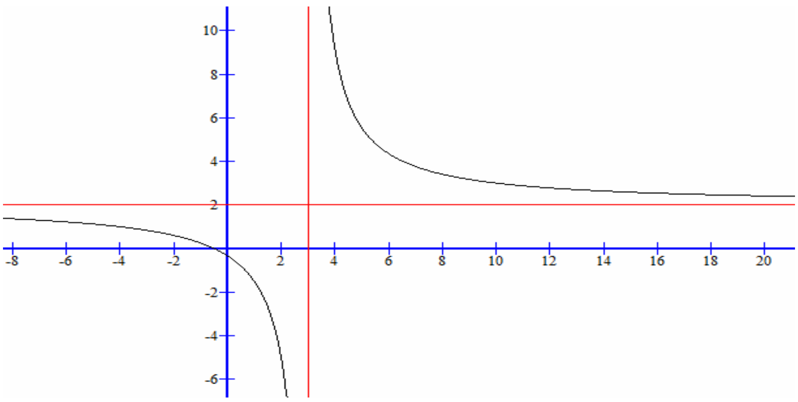
Lomená racionální funkce:

Každá funkce tvaru: $f : y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou nesoudělné polynomy a $Q(x) \neq 0$.

Lineární lomená funkce: zvláštní případ lomené racionální funkce

<u>Každá funkce tvaru:</u> $f : y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde $c \neq 0, bc - ad \neq 0, D(f) = R - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

<u>Grafem této funkce</u> je rovnoosá hyperbola, která má střed $S = \left[-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right]$ a jejíž asymptoty procházejí tímto středem tak, že jedna je rovnoběžná s osou x a druhá s osou y.



Obr. 4. 5 Graf lomené racionální funkce

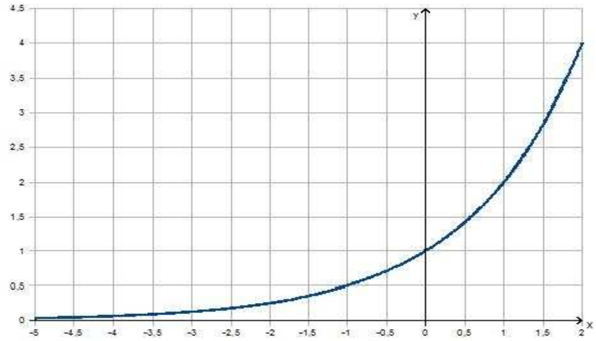
Exponenciální funkce o základu *a:*

Každá funkce tvaru: $f : y = a^x, a > 0, a \neq 1, D(f) = R.$

Exponenciální funkce o základu 10 se nazývá dekadická exponenciální funkce.
Exponenciální funkce, jejíž základ je Eulerovo číslo *e* (iracionální číslo jehož hodnota je rovna přibližně $e \doteq 2{,}718.$), se nazývá přirozená exponenciální funkce.
Exponenciální funkce je funkce inverzní k funkci logaritmické.

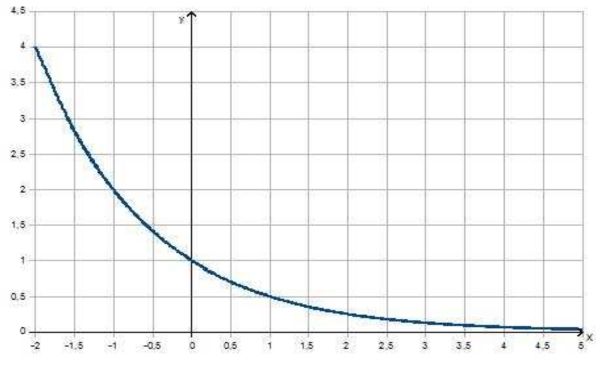
Grafem exponenciální funkce je exponenciální křivka. Graf každé exponenciální funkce prochází bodem [0;1]. Grafy funkcí $y = a^x$ a $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ jsou osově souměrné podle osy *y*.
Graf funkce $y = a^{(x-b)} + c$ je graf exponenciální funkce o základu *a*, posunutý o *b* na ose *x* a o *c* na ose *y*.

Vlastnosti:



$\underline{a > 1}$: $D(f) = R, H(f) = (0,+\infty),$ není sudá, ani lichá, omezená zdola, shora není omezená, spojitá v *R*, prostá, rostoucí, nemá maximum, ani minimum.

Obr. 4. 6 Graf exponenciální funkce o základu *a* > 0



$\underline{0 < a < 1}$: $D(f) = R, H(f) = (0,+\infty),$ není sudá, ani lichá, omezená zdola, shora není omezená, spojitá v *R*, prostá, klesající, nemá maximum, ani minimum.

Obr. 4. 7 Graf exponenciální funkce o základu 0 < *a* < 1

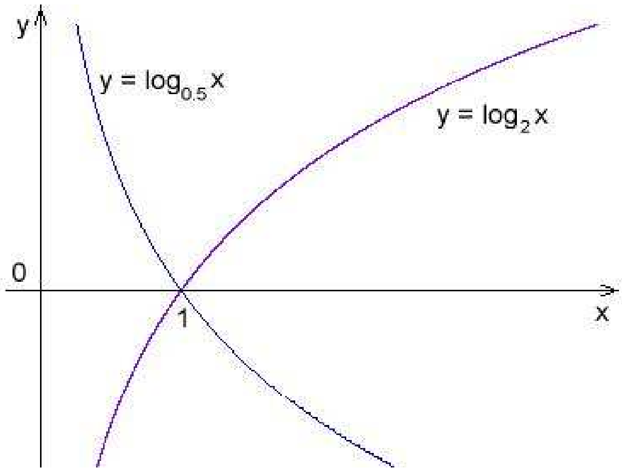
Logaritmická funkce se základem *a*:

Každá funkce tvaru: $f : y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, D(f) = (0,+\infty).$

Platí: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ pro každé $x \in (0,+\infty), y \in R, a > 0, a \neq 1.$
Logaritmická funkce je funkce inverzní k funkci exponenciální o témže základu.
Funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají logaritmy.

Logaritmická funkce o základu 10 se nazývá dekadická logaritmická funkce a její funkční hodnoty se nazývají dekadické logaritmy. Obvykle se označují jen log x (místo $\log_{10} x$) .
Logaritmická funkce o základu e se nazývá přirozená logaritmická funkce a její funkční hodnoty se nazývají přirozené logaritmy. Značí se ln x (místo $\log_e x$).

Grafem logaritmické funkce je logaritmická křivka. Všechny logaritmické křivky procházejí bodem [1; 0].



Obr. 4. 8 Graf logaritmické funkce

Vlastnosti: $D(f) = R^+$, $H(f) = R$, není omezená ani shora, ani zdola, je spojitá v R^+, nemá maximum, ani minimum, je prostá, $a > 1$ je rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající.

Věty o logaritmech:

a) $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a a = 1$

c) $\log_a a^x = x$

d) $a^{\log_a x} = x$

e) $\log_a x^k = k \log_a x$, pro $k \in R$

f) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

g) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

h) $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x$, pro $n \in N$

i) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

j) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Goniometrické funkce:
(řecké slovo goniometrie znamená měření úhlů)

Velikost úhlu udáváme v obloukové míře či ve stupňové míře. Jednotkový úhel obloukové míry se nazývá radián – úhel, který na jednotkové kružnici [s poloměrem = 1] se středem ve vrcholu úhlu vytíná oblouk jednotkové délky. Jednotkový úhel stupňové míry se nazývá stupeň = 1/90 pravého úhlu, užívá se i menších jednotek – minuta(´) a vteřina (´´):
$1° = 60' = 3600''$.

Vztahy mezi velikostmi úhlu v míře obloukové a v míře stupňové:

$$\alpha : x = 180° : \pi \qquad 1rad = \frac{180°}{\pi} \doteq 57°17'45'' \qquad 1° = \frac{\pi}{180} rad$$

Orientovaný úhel – uspořádaná dvojice polopřímek se společným počátkem (vrcholem orientovaného úhlu), záleží na tom, která z polopřímek se bere jako první (nazýváme ji počátečním ramenem), a která jako druhá (nazýváme ji koncovým ramenem).

Neorientované úhly – je-li dán libovolný orientovaný úhel *AVB*, pak polopřímky *VA* a *VB* rozdělují rovinu na dva neorientované úhly. Označíme-li jejich velikosti α, β, platí: $\alpha = 2\pi - \beta$, resp. $\alpha = 360° - \beta$.

Velikost orientovaného úhlu *AVB* nazýváme každé z reálných čísel $\alpha + 2k\pi$, resp. $\alpha + k \cdot 360°$, kde $k \in Z$ a α určíme takto:

a) je-li $VA = VB$, je $\alpha = 0$

b) je-li $VA \neq VB$ je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene *VA* do polohy koncového ramene *VB* v kladném smyslu (proti hodinovým ručičkám).

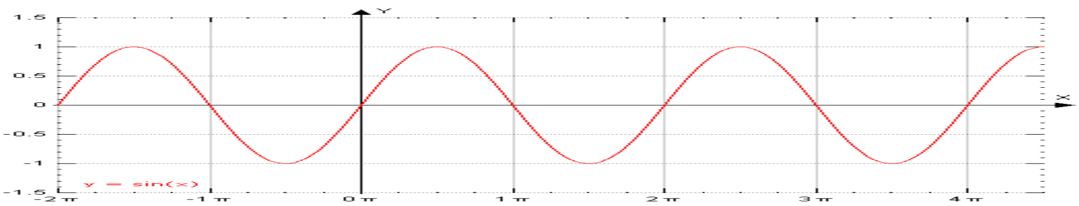
Základní velikost orientovaného úhlu je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0° \leq \alpha < 2\pi$.

Součet orientovaných úhlů *AVB* a *BVC* se rovná orientovanému úhlu *AVC*. Je-li velikost prvního $\alpha + 2k_1\pi$, velikost druhého $\beta + 2k_2\pi$, je velikost jejich součtu $\alpha + \beta + 2k\pi$, kde $k = k_1 + k_2 \in Z$.

Je-li úhel *AVC* součtem úhlů *AVB* a *BVC*, pak úhel *BVC* se nazývá rozdíl úhlů *AVC* a *AVB* (v daném pořadí). Je-li velikost prvního $\gamma + 2k_1\pi$, velikost druhého $\alpha + 2k_2\pi$, je velikost jejich rozdílu $\gamma - \alpha + 2k\pi$, kde $k = k_1 - k_2 \in Z$.

Funkce sinus:

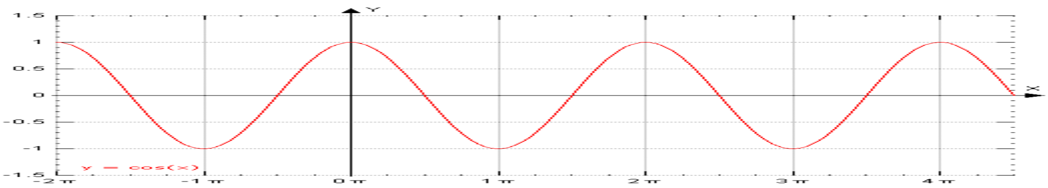
$y = \sin x$, $D(f) = R$, graf funkce sinus se nazývá sinusoida.



Obr. 4. 9 Graf funkce sinus

Funkce kosinus:

$y = \cos x$, $D(f) = R$, graf funkce kosinus se nazývá kosinusoida (kosinusoida je zřejmě posunutá sinusoida o $\frac{\pi}{2}$ ve směru záporné poloosy *x*).

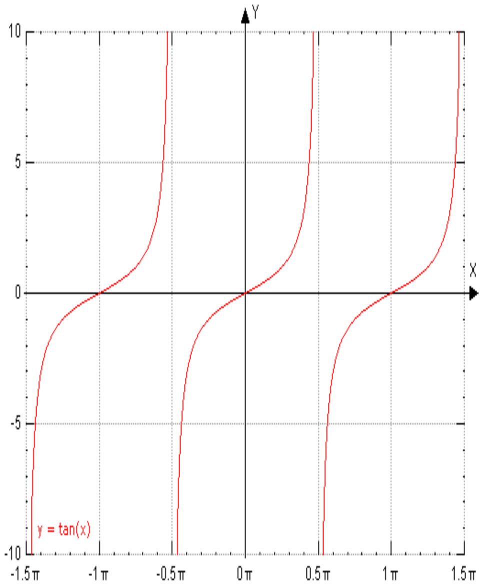


Obr. 4. 10 Graf funkce kosinus

Funkce tangens:: tg x = $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ pro každé $x \in R - \bigcup\limits_{k \in Z} \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right\}$

$D(f)$ = $R - \bigcup\limits_{k \in Z} \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right\} = \bigcup\limits_{k \in Z} \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right).$

Graf funkce tangens se nazývá tangentoida.

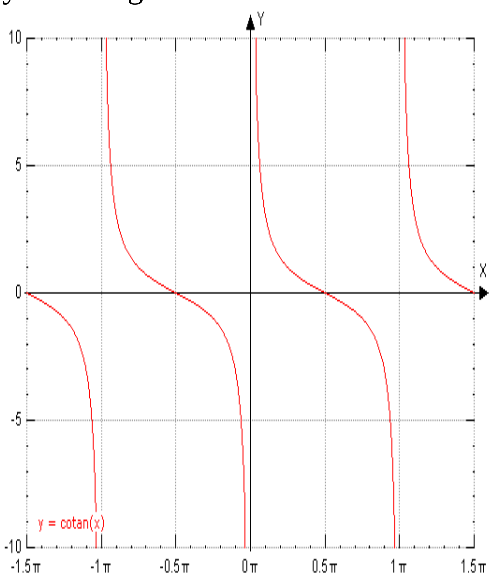


Obr. 4. 11 Graf funkce tangens

Funkce kotangens: cotg x = $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ pro každé $x \in R - \bigcup\limits_{k \in Z} \{k\pi\}$,

$D(f)$ = $R - \bigcup\limits_{k \in Z} \{k\pi\} = \bigcup\limits_{k \in Z} ((k-1)\pi, k\pi).$

Graf funkce kotangens se nazývá kotangentoida.



Obr. 4. 12 Graf funkce kotangens

Vlastnosti goniometrických funkcí

Vlastnosti funkce f:	y = sin x	y = cos x	y = tg x	y = cotg x
Definiční obor	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\left\{x\in R; x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\{x\in R; x\neq k\pi\}$
Obor hodnot	$\langle -1;1\rangle$	$\langle -1;1\rangle$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
Sudost, lichost	Lichá funkce sin(-x) = -sin x	Sudá funkce cos(-x) = cos x	Lichá funkce tg(-x) = -tg x	Lichá funkce cotg(-x) = -cotg x
Periodičnost	Periodická s periodou 2$k\pi$	Periodická s periodou 2$k\pi$	Periodická s periodou $k\pi$	Periodická s periodou $k\pi$
Omezenost (neomezenost)	Omezená funkce	Omezená funkce	Neomezená funkce	Neomezená funkce
Interval, ve kterém funkce roste	$\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$	$\langle -\pi+2k\pi,2k\pi\rangle$	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	Nerostoucí funkce
Interval, ve kterém funkce klesá	$\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$	$\langle 2k\pi,\pi+2k\pi\rangle$	Neklesající funkce	$(k\pi,\pi+k\pi)$
Maximum	y = 1 pro $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$	y = 1 pro x = 2$k\pi$	neexistuje	neexistuje
Minimum	y = -1 pro $x=(4k-1)\frac{\pi}{2}$	y = -1 pro x = (2k - 1)π	neexistuje	neexistuje
Body, v nichž jsou funkční hodnoty nulové (y = 0)	x = $k\pi$	$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$	x = $k\pi$	$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$
Intervaly kladných funkčních hodnot	$\langle 2k\pi,\pi+2k\pi\rangle$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$	$\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	$\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$
Intervaly záporných funkčních hodnot	$(\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right)$

Tabulka důležitých hodnot goniometrických funkcí

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
cotg x	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

Znaménka hodnot goniometrických funkcí

Kvadrant	I.	II.	III.	IV.
Interval argumentu x	$\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{1}{2}\pi,\pi\right)$	$\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$
sin x	+	+	-	-
cos x	+	-	-	+
tg x	+	-	+	-
cotg x	+	-	+	-

Vzorce pro goniometrické funkce

Základní vzorce

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ pro každé $\alpha\in R$

tedy: $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ pro každé $\alpha\in R$

$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ pro každé $\alpha\in R$

$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{cotg}\,\alpha = 1$ pro každé reálné $\alpha\neq k\frac{\pi}{2}, k\in Z$

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ pro každé reálné $\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$

$1+\mathrm{cotg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ pro každé reálné $\alpha\neq k\pi, k\in Z$

Součtové vzorce

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha\in R, \beta\in R$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha\in R, \beta\in R$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha\in R, \beta\in R$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha\in R, \beta\in R$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta}$, je-li $\alpha+\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z, tg\alpha.tg\beta\neq 1$

$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha.tg\beta}$, je-li $\alpha-\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z, tg\alpha.tg\beta\neq -1$

Vzorce pro součet

Pro každá dvě reálná čísla α, β platí:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Vzorce pro rozdíl
Pro každá dvě reálná čísla α, β platí: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Vzorce s argumenty *2α* a $\frac{\alpha}{2}$
Pro každé reálné číslo α platí: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\left\|\sin\frac{\alpha}{2}\right\| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\left\|\cos\frac{\alpha}{2}\right\| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ Pro každé reálné číslo $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$ platí: $tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ Pro každé reálné číslo $\alpha \neq (2k+1)\pi$ platí: $\left\|tg\frac{\alpha}{2}\right\| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ $\cot g\,2\alpha = \frac{\cot g^2\alpha}{2\cot g\alpha} \wedge x \in R - k\cdot\frac{\pi}{2}$ $\left\|\cot g\frac{\alpha}{2}\right\| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \wedge x \in R - 2k\pi$

PŘÍKLADY:

Příklad 4. 1

Jeden student, výborný matematik, napsal dopis svému děvčeti s touto rovnicí

$y = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2+|x|-6}{x^2+|x|+2} \pm \sqrt{36-x^2}\right]$ a poprosil ji, aby do pravoúhlé souřadnicové soustavy narýsovala křivku určenou touto rovnicí. Pokuste se zjistit, jakou tajnost skrývalo grafické znázornění uvedené rovnice.

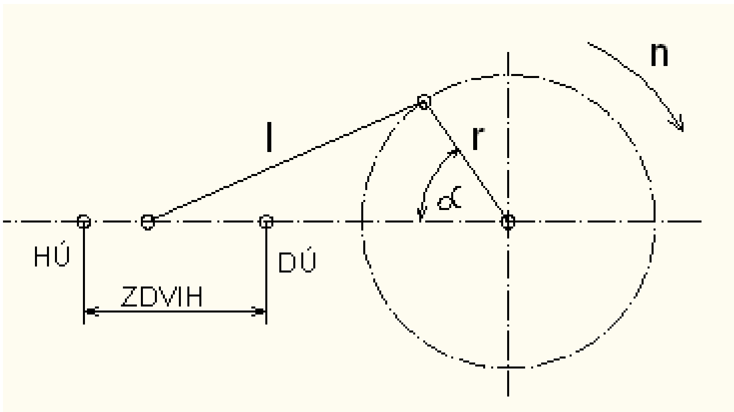
Příklad 4. 2

Víte, kolik cizojazyčných slovníků bychom potřebovali, abychom mohli překládat z jakéhokoli jazyka na světě do kteréhokoli jiného? Že nevíte? Tak to zkusíme od začátku. Vezmeme-li v úvahu 2 jazyky – český a slovenský, potřebujeme 2 slovníky česko-slovenský a slovensko-český. Pokud bychom měli 3 jazyky, potřebovali bychom 6 slovníků, u 4 jazyků 12 slovníků atd. Je zřejmé, že počet slovníků *y* závisí na počtu jazyků *x*. Pokuste se sestavit závislost počtu slovníků na počtu jazyků (rovnici). Řekněte, o jakou rovnici které funkce se jedná. A vypočítejte pomocí této rovnice, kolik by bylo třeba slovníků, kdybychom uvažovali, že na celém světě se používá 3000 jazyků.

Příklad 4. 3 Čím více telefonujeme, tím levněji

Za pronájem telefonu platíme stálý měsíční poplatek 50 Kč. Za každý telefonní hovor platíme poplatek 1 Kč. Když za měsíc uskutečníme jen jeden telefonní hovor, stojí nás 50 Kč + 1 Kč = 51 Kč. Když uskutečníme 2 hovory, stojí nás jeden hovor (50 Kč + 2 Kč) : 2 = 26 Kč. Kolik nás stojí jeden telefonní hovor při x telefonních hovorech? Sestavte si rovnici. Řekněte, o jakou funkci se jedná a co z toho vyplývá?

Příklad 4. 4



Obr. XX Schéma klikového mechanismu

Při návrhu klikového mechanismu spalovacího motoru je kvůli opotřebení mezi pístem a válcem důležitá rychlost pístu. Tato rychlost se mění od 0 m/s do svého maxima zhruba v polovině dráhy a opět do nuly v opačné úvrati pístu.

Rychlost pístu je popsaná vztahem: $\boldsymbol{v = r.\ \omega(\sin\alpha + 1/2\lambda\ .\ \sin 2\alpha)}$ [m/s]

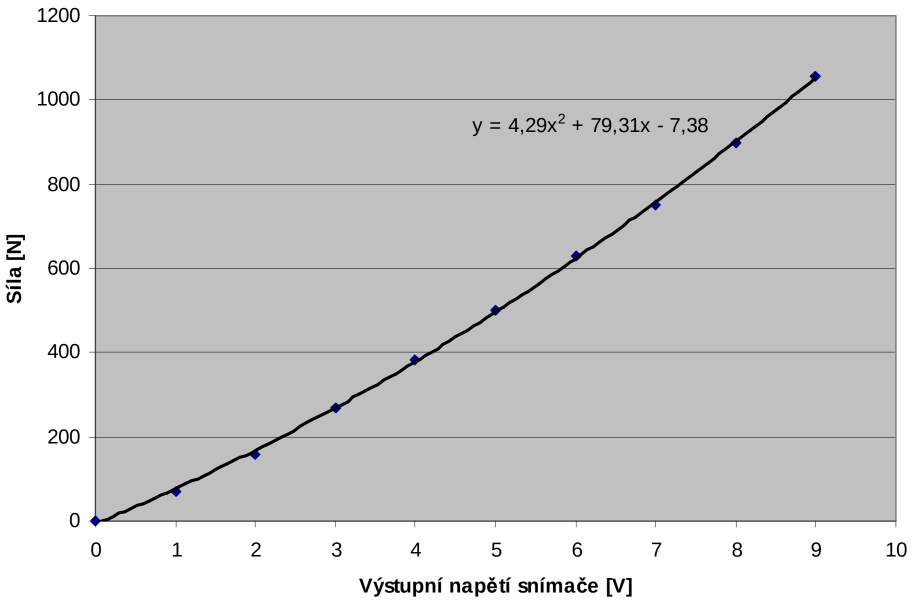
Body HÚ a DÚ na obrázku jsou úvratě.
úhlová rychlost $\omega = 2\pi n$ (n = otáčky/sec)
poměr délky ramene kliky a délky ojnice: $\lambda = r/l$

Vypočtěte maximální rychlost pístu u vysokootáčkového motocyklu Suzuki GSX600F:
Zdvih pístu: z = 42,5mm
Max. otáčky: n = 13 000 ot/min
Λ = 0,22
poloměr kliky r = 24,4mm

Příklad 4. 5

Obr. 1 Snímač síly

Při kalibraci siloměrného snímače byl odečítán jeho napěťový výstup. Pro příslušnou hodnotu zátěže etalonu byly vynášeny do grafu hodnoty napětí výstupu. Proložením bodů bylo zjištěno, že má exponenciální odezvu ve tvaru: $y = 4{,}29x^2 + 79{,}31x - 7{,}38$, kde na ose x je výstupní napětí a na ose y je síla.



Obr. 2 charakteristika siloměru

1) Vypočtěte hodnotu síly pro výstupní napětí 5,25V.
2) Po upravení převodní funkce snímače zjištěné z kalibrace siloměr pro hodnotu 600,0 N udal hodnotu 608,5 N. Vyhovuje snímač specifikaci výrobce, který udává maximální chybu 1% z rozsahu snímače, který je 1 kN?

5. Rovnice

Rovnice s jednou neznámou je úloha ve tvaru $L(x) = P(x)$, kde výraz $L(x)$ je levá strana rovnice s proměnnou x a výraz $P(x)$ je pravá strana rovnice s proměnnou x. Proměnná x v rovnici se nazývá neznámá. Speciálně může být jedna strana rovnice konstanta. Je-li jedna strana rovnice nula mluvíme anulovaném tvaru.

Řešením (kořenem) rovnice je číslo x_0, které po dosazení za x převede rovnici na pravdivou rovnost $L(x_0) = P(x_0)$.

Definiční obor rovnice *D* je podmnožina množiny M (číselný obor, ve kterém hledáme kořeny), v níž jsou definovány oba výrazy $L(x)$ a $P(x)$ neboli průnik definičních oborů těchto výrazů.

Množinu všech kořenů rovnice budeme značit K $\left(K \subset D \subset M\right)$

Rovnice s parametry je rovnice, která kromě neznámých obsahuje další proměnné, jimž se říká parametry (značíme je a, b, p apod.). Řešit parametrickou rovnici znamená určit její kořeny v závislosti na přípustných hodnotách parametrů.

Rovnici řešíme zpravidla numericky (užitím úprav vyhledáme kořeny), graficky (vyhledáním průsečíků grafů funkcí $L(x)$ a $P(x)$) popř. dalšími metodami (např. přibližnými metodami určení kořenů rovnic).

Klasifikace rovnic:

1) **Algebraická rovnice *n*-tého stupně** s neznámou $x \in C$ je každá rovnice tvaru:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \text{, kde } a_n \neq 0,\ n \in N$$

Lineární rovnice je každá rovnice tvaru $\boldsymbol{ax + b = 0}$, s jednou neznámou $\boldsymbol{x}$ a s libovolnými reálnými či komplexními čísly $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Pro její řešení v oboru R resp. C mohou nastat tyto případy:

a) Je-li $a \neq 0$, je ekvivalentní s rovnicí $ax = -b$, takže má právě jeden kořen $x = -\dfrac{b}{a}$ (pozn.: V tomto případě je lineární rovnice algebraickou rovnicí 1. stupně.)
b) Je-li $a = b = 0$, má nekonečně mnoho řešení
c) Je-li $a = 0$, $b \neq 0$, nemá žádné řešení

I) Lineární rovnice s parametry

II) Lineární rovnice s absolutními hodnotami

Každá rovnice (s neznámou $x \in R$) tvaru

$$|a_1 x + b_1| \pm |a_2 x + b_2| \pm \ldots \pm |a_n x + b_n| = a_0 x + b_0 \text{, kde } a_i, b_i$$

($i = 1, 2, \ldots, n$) jsou daná reálná čísla, $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Řeší se úpravou lineární rovnice bez absolutních hodnot v intervalech, na které je rozdělena množina

$R = (-\infty, +\infty)$ nulovými body dvojčlenů $a_i x + b_i$, tj. čísly $-\frac{b_i}{a_i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Této metodě řešení se říká **metoda intervalů**

Kvadratická rovnice je každá rovnice s neznámou x tvaru: $ax^2 + bx + c = 0$,
Kde a, b, c jsou libovolná reálná, resp. komplexní čísla, $a \neq 0$.
Je to stručný název pro algebraickou rovnici 2. stupně.
ax^2 je kvadratický člen, bx je lineární člen a c je absolutní člen.
Speciální případy: I) Je-li $b = 0$, rovnice má tvar $ax^2 + c = 0$ a nazývá se
Ryze kvadratická rovnice
II) Je-li $c = 0$, rovnice má tvar $ax^2 + bx = 0$ a nazývá se
Kvadratická rovnice bez absolutního členu
III) Je-li rovnice tvaru $x^2 + px + q = 0$, říká se, že
Kvadratická rovnice je v normovaném tvaru

Při řešení každé kvadratické rovnice v oboru R i v oboru C je důležité číslo $D = b^2 - 4ac$, což je diskriminant kvadratické rovnice.

$D > 0$ … rovnice má právě dva různé reálné kořeny

$$K = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \right\}$$

$D = 0$ … rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen

$$K = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$D < 0$ … nemá tato rovnice v oboru R žádný kořen, ale v oboru C má dva komplexně sdružené kořeny

$$K = \left\{ \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a} \right\}$$

Je-li $ax^2 + bx + c = 0$ libovolná kvadratické rovnice s reálnými koeficienty a, b, c, ($a \neq 0$) a diskriminantem $D \geq 0$. Pak reálné kořeny x_1, x_2 této rovnice jsou dány vzorcem $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Viètovy vzorce: vztahy mezi kořeny a koeficienty

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q$$

Rozklad kvadratického trojčlenu v součin lineárních dvojčlenů:
Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ kořeny x_1, x_2, pak lze kvadratický trojčlen rozložit v součin lineárních dvojčlenů takto: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, takže danou kvadratickou rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$

Iracionální rovnice s neznámou $x \in R$ jsou rovnice obsahující odmocniny z neznámé nebo z výrazů s neznámou nebo-li rovnice tvaru $f(x) = g(x)$, kde f nebo g jsou iracionální funkce. Oborem řešení iracionální rovnice je podmnožina množiny R.

Základní metody řešení: úprava se provádí zpravidla umocňováním obou stran rovnice. K těmto úpravám lze přistupovat dvojím způsobem:

I) Jako k důsledkovým úpravám – pak nutnou součástí řešení je zkouška. Tou ze všech kořenů algebraické rovnice získané umocněním dané iracionální rovnice určíme ty, jež jsou kořeny této iracionální rovnice.

II) Jako k ekvivalentním úpravám – stanovíme podmínky ekvivalence dané a upravené (umocněné) rovnice. Podmínky jsou doplňkovými nerovnicemi, jež je třeba řešit spolu s danou rovnicí. Tento postup je vhodný u jednodušších iracionálních rovnic.

Exponenciální rovnice je každá rovnice, ve které je neznámá $x \in R$ v exponentu nějaké mocniny.

Základní tvar exponenciální rovnice: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $a > 0$, $b > 0$.

Výrazy $f(x)$, $g(x)$ vyjadřují funkční hodnoty daných dvou funkcí f, g proměnné x, z nichž jedna může být speciálně konstanta.

Řešení rovnice:

a) Je-li $a = b \neq 1$, pak vzhledem k tomu, že exponenciální funkce $f_1 : y = a^x$ pro $a > 0, a \neq 1$ je prostá v R (rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$) plyne z exponenciální rovnice ekvivalentní rovnice $f(x) = g(x)$.

b) Je-li $a \neq b$, pak exponenciální rovnici převedeme logaritmováním na tvar $f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$.

c) složitější exponenciální rovnice se řeší převedením na uvedený základní tvar a eventuelně na algebraickou rovnici, přičemž se často používá substituce tvaru $a^x = y$, $(a > 0, a \neq 1)$.

Logaritmická rovnice: je každá rovnice, v níž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in R$.

Nejjednodušší tvar: $\log_a x = b$, $a > 0, a \neq 1, b \in R$, tato rovnice má (podle definice logaritmu) řešení $x = a^b$

Složitější logaritmickou rovnici obvykle řešíme tak, že ji upravíme na rovnici tvaru: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0, a \neq 1$.

Výrazy $f(x)$, $g(x)$ vyjadřují funkční hodnoty daných dvou funkcí f, g proměnné x, z nichž jedna může být speciálně konstanta.

Protože logaritmická funkce je prostá (rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$), z logaritmické rovnice $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ plyne rovnice $f(x) = g(x)$.

Rovnice $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ a $f(x) = g(x)$ jsou ekvivalentní jen při splnění podmínek: $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$. Pokud je nestanovíme předem, musí být nutnou součástí řešení zkouška.

Řešení složitějších logaritmických rovnic často usnadňuje vhodná substituce, např.: $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$), kterou se převede logaritmická rovnice na algebraickou rovnici.

Goniometrická rovnice je každá rovnice, v níž jsou goniometrické výrazy s neznámou $x \in R$.

Základní goniometrické rovnice jsou následujících typů:

1) Rovnice tvaru $\sin x = a$ nebo $\cos x = a$,
kde $a \in \langle -1;1 \rangle$ je dané číslo. Mají pro každé takové a nekonečně mnoho řešení (kořenů), jež určíme takto:

a) Je-li $a = 0$ nebo $a \neq \pm 1$, pak určení množiny všech kořenů rovnice provedeme užitím grafu funkce sinus či kosinus.

b) Je-li $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, nejprve zjistíme dvojici kořenů $x_1, x_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Užíváme k tomu znázornění na jednotkové kružnici, popř. graf funkce sinus či kosinus, … Všechny kořeny rovnice určíme pak ve tvaru $x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi, k \in Z$ (tyto funkce mají periodu $2k\pi$).

Pro $a \in R - \langle -1;1 \rangle$, tj. $|a| > 1$, rovnice uvedeného typu nemá řešení ($H(\sin x) = H(\cos x) = \langle -1;1 \rangle$).

2) Rovnice tvaru tg $x = a$ nebo cotg $x = a$,
kde $a \in R$ je dané číslo. Mají pro každé a nekonečně mnoho řešení (kořenů), jež určíme takto:

a) Je-li $a = 0$, pak určení množiny všech kořenů rovnice provedeme buď pomocí grafu funkce tangens či kotangens, nebo využitím ekvivalence
tg $x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ nebo
cotg $x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$

b) Je-li $a \neq 0$, pak nejprve zjistíme právě jeden kořen $x_1 \in \langle 0, \pi)$. Užíváme k tomu znázornění na jednotkové kružnici, popř. graf funkce tangens či kotangens, … Všechny kořeny rovnice jsou pak tvaru $x_1 + k\pi, k \in Z$ (tyto funkce mají periodu $k\pi$).

PŘÍKLADY:

Příklad 5. 1 Trik s číslem 1089

Otevřete jakoukoli knihu na straně 10, odpočítejte shora 8 řádků a vodorovně 9 slov. Napište deváté slovo na papír, poté papír vložte do obálky. Nyní řekněte kamarádovi, ať si myslí libovolné trojciferné číslo, ale první a poslední číslici nesmí mít stejnou. Požádejte kamaráda, aby toto číslo napsal na papír, poté ho obrátil a odečetl menší od většího. Např. 963 – 369 = 594. Pak obraťte číslice ve výsledku a obě čísla sečtěte (tedy 594 + 495 = 1089). Nyní kamaráda vybídněte, aby ve zmíněné knize nalistoval stránku odpovídající prvním dvěma číslicím z konečného výsledku. Podle třetí číslice ho nechte vyhledat řádek a podle poslední číslice slovo. Řekněte mu, ať ho přečte nahlas. Nakonec ho požádejte o rozlepení obálky. Na papíře je stejné slovo. To je neuvěřitelné!

Příklad 5. 2 Polovina: Kolik je 50 děleno polovinou?

Příklad 5. 3 a) Cihla: Cihla váží 1 kg a polovinu cihly. Kolik váží celá cihla v kg?

b) Zmrzlina: Obrovská nádoba plná zmrzliny váží 6 kg plus polovinu své hmotnosti. Jakou má nádoba se zmrzlinou hmotnost?

Příklad 5. 4

Myslete si libovolné číslo od 6 do 60. Dělte je třemi, potom čtyřmi a ještě pěti a řekněte zbytky všech tří dělení. Podle těchto zbytků je možno určit myšlené číslo.

Příklad 5. 5 Pět děvčat se bavilo takto:

Jedna šikovná dívka v matematice řekla ostatním: „Napište na kousek papíru jakékoliv číslo od 1 do 50 a papír schovejte. Pak ještě napište každá libovolné číslo větší než 50, ale menší než 100. Přičtěte k němu číslo 99 zmenšené o číslo, jež jste napsaly na kousek papíru, který jste schovaly. V součtu, který jste dostaly, přeškrtněte levou krajní číslici a k číslu, co takto dostanete, přičtěte číslo vyjádřené touto číslicí. Výsledek odečtěte od čísla, se kterým jste začaly počítat. Nyní porovnejte získaný výsledek s číslem, které jste si předtím napsaly na vámi schovaný papír.“ Děvčata poslechla a s úžasem zjistila, že obdržela výsledek, který se rovnal číslu napsanému na jejich schované papíry.

Příklad 5. 6 Kniha:

Kniha má 498 stran, které jsou v horním rohu očíslovány. Kolik číslic jsme k očíslování použili? Určete dále, kolikrát jsme použili nulu.

Příklad 5. 7 Rozdělení peněz

Karel, Jožka a Ferda šli na výlet. Karel koupil 9 obložených housek, Jožka 6. Ferda zatím vyřizoval jiné věci. Housky si rozdělili tak, že měl každý 5 housek. Ferda zaplatil 15 Kč. Jak se mají Karel s Jožkou o tyto peníze rozdělit?

Příklad 5. 8 Včely

Včely přeměňují nektar květů na med, přičemž z něho vylučují vodu. Nektar obsahuje přibližně 70% vody, získaný med jen 17%. Kolik nektaru musí včely nasbírat, aby získaly 1 kg medu?

Příklad 5. 9 Závěť

Ve starém Římě zemřel jeden muž a zanechal po sobě ženu, které se mělo narodit dítě. V závěti stanovil, že jestliže se narodí syn, má dostat 2/3 majetku a matka 1/3, jestliže se narodí dcera, má dostat 1/3 majetku a matka 2/3. Vdově se narodila dvojčata, chlapec a děvče. Jak rozdělit majetek, aby to co nejvíce vyhovovalo podmínkám závěti?

Příklad 5. 10

Kolik masa asi sní člověk za celý život, když předpokládáme, že sní průměrně denně 200 g masa a žije průměrně 60 let?

Příklad 5. 11

Kolik vody (tekutiny) člověk vypije za celý život, když předpokládáme, že žije průměrně 70 let a denně vypije zhruba jeden a půl litru?

Příklad 5. 12 Pštrosi

Na Madagaskaru žili kdysi obrovští pštrosi, kteří kladli vejce 28 cm dlouhá. Slepičí vejce má průměrnou délku 5 cm. Kolika slepičím vejcím odpovídá objem vejce madagaskarského pštrosa?

Příklad 5. 13

V létě snížili ceny doprodávané zimní obuvi o 15% a prodejna dostala z podnikového ředitelství dobropis na tři pětiny ztráty z původního zisku. Vypočítejte, kolik procent z původní ceny obuvi plánovala do svého zisku prodejna před snížením. Dejte pozor, otázka není tak jednoduchá, jak se zdá na první pohled.

Příklad 5. 14 Vlak

Trať 45 600 m ujede vlak za 0,86 hodiny, na zastávkách se zdrží 6 minut. Jakou průměrnou vteřinovou rychlostí se pohybuje?

Příklad 5. 15

Při hodině tělesné výchovy nastoupili žáci do velkého obdélníku. Na jedné straně stojí o 5 žáků více, než na druhé straně. Jestliže tito žáci nastoupí do čtyřstupu, chybí v poslední čtveřici jeden. Jaký je počet žáků?

Příklad 5. 16

V nářaďovně je celkem 38 disků nebo oštěpů. Oštěpů je o 6 více, než činí trojnásobek počtu disků. Kolik je v nářaďovně oštěpů a kolik disků?

Příklad 5. 17

Meteorologové zjistili, že v určitém měsíci bylo toto počasí: 95% dní chladno, 85% dní pršelo, 75% dní zamračeno a 65% dní bezvětří. Vypočítejte, kolik procent bylo dní, ve kterých bylo současně chladno, zamračeno, bezvětří a pršelo.

Příklad 5. 18

Které číslo je právě o tolik menší než 60, o kolik je větší než 50?

Příklad 5. 19

Za jeden den (24 hodin) se vaše hodinky předejdou o čtyři minuty. Jestliže v 7.30h ukazují o půl minuty více, o kolik se budou předcházet ve 12h téhož dne?

Příklad 5. 20

Jestliže ze 100 vězňů je 7 zločinců, kolik z 500 nejsou zločinci?

Příklad 5. 21

Spekulant na burze koupil 3 akcie, každou za 1000 Kč a prodal je dále po 600 Kč. Další akcie, které koupil po 500 Kč, prodal po 600 Kč. Jestliže přitom získal 800 Kč, kolik akcií po 500 Kč musel koupit?

Příklad 5. 22

Kolik hodin potřebuje letadlo, které letí rychlostí 600 km, aby uletělo 400 km?

Příklad 5. 23

Máme 154 kabátů, z nichž bílých je o 3 méně než červených, ale zároveň je bílých o 5 více než zelených. Kolekce obsahuje pouze červené, bílé a zelené kabáty. Kolik z nich je červených?

Příklad 5. 24

Součet $A+B = 116$. Číslo A je o 3 menší než C, ale o 4 větší než B. Jak velké je číslo C?

Příklad 5. 25 Půl chlapce?

Několik chlapců se vypravilo koupat. Polovina z nich a půl chlapce jelo na kole, polovina zbylých a půl chlapce jelo autobusem, polovina zbylých a půl chlapce šlo pěšky. Podaří-li se vám správně odpovědět kolik chlapců se vypravilo na koupání, přesvědčíte se, že žádný z chlapců se na půl nedělil.

6. Nerovnice s jednou neznámou

Nerovnice $L(x) < P(x)$, resp. $L(x) > P(x)$ (popř. $L(x) \leq P(x)$, resp. $L(x) \geq P(x)$) s neznámou $x \in M$ (kde M je daný číselný obor, $M \subset R$), což představuje zápis úlohy: Jsou dány výrazy $L(x)$ a $P(x)$ s proměnnou x a mají se určit všechny takové její hodnoty $x_k \in M$, pro něž platí $L(x) < P(x)$, resp. $L(x) > P(x)$ (popř. $L(x) \leq P(x)$, resp. $L(x) \geq P(x)$. Čísla x_k jsou kořeny (řešení) nerovnice a číselný obor M, v němž nerovnici řešíme, se nazývá obor řešení nerovnice. Množinu všech kořenů nerovnice značíme K $(K \subset M \subset R)$.

Ekvivalentní úpravy nerovnic:

1) Vzájemná výměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnosti v obrácený.
2) Nahrazení libovolné strany nerovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.
3) Přičtení téhož čísla nebo výrazu s neznámou, který je definován v celém oboru řešení, k oběma stranám nerovnice, znak nerovnosti se nemění.
4) Vynásobení obou stran nerovnice záporným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a záporný v celém oboru řešení, přitom znak nerovnosti se změní v obrácený.
5) Vynásobení obou stran nerovnice kladným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a kladný v celém oboru řešení, přitom znak nerovnosti se nemění.
6) Umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany nerovnice nezáporné v celém oboru řešení, přitom znak nerovnosti se nemění.
7) Odmocnění obou stran nerovnice přirozeným odmocnitelem, jestliže obě strany nerovnice jsou nezáporné v celém oboru řešení, přitom znak nerovnosti se nemění.
8) Zlogaritmování obou stran nerovnice při témž základu větším než 1, jsou-li obě strany nerovnice kladné v celém oboru řešení, přitom znak nerovnosti se nemění.

Pozn.: Postup řešení nerovnice se skládá z týchž základních částí jako řešení rovnice, tj. rozboru, závěru rozboru a zkoušky.

Parametrická nerovnice má parametry jen reálné a součástí závěru rozboru je diskuse řešení vzhledem k hodnotám parametrů.

Klasifikace nerovnic je stejná jako u rovnic.

PŘÍKLADY:

Příklad 6. 1 Šachový turnaj

Šachového turnaje se zúčastnilo 10 krát více chlapců než děvčat. Chlapci však získali jen 4,5 krát více bodů než děvčata. V turnaji hrál každý s každým právě jednou, za vítězství se získává jeden bod, za remízu půl bodu, za prohru žádný bod.

a) Kolik bodů získala děvčata?
b) Lze určit, zda turnaj vyhrál chlapec, nebo děvče?

Příklad 6. 2

Prospěchové stipendium může být každému studentu zvýšeno o 30 Kč, nebo o 5 %. Pro Jakuba by byla výhodnější druhá varianta. Co z toho plyne pro výši stipendia?

Příklad 6. 3

Spolužáci připravují občerstvení na kulturní akademii. Mimo jiné chtějí koupit větší množství dvoulitrových lahví limonády. V blízkém obchodě stojí jedna láhev 25,50 Kč, v sousedním městě prodávají stejnou limonádu za 21,90 Kč za láhev. Jedna cesta autobusem stojí 7 Kč. Kolik lahví limonády musí každý z chlapců unést, aby se jim vyplatilo dojet pro limonádu do sousedního města? Předpokládáme, že každý z chlapců se bude vracet „plně naložen“.

Příklad 6. 4

V místech A a B vzdálených od sebe d km se těží uhlí. Cena 1 tuny uhlí v místě A je q Kč, v místě B o p % více. V kterých bodech mezi A a B bude uhlí přivezené z B levnější než uhlí přivezené z A, stojí-li dovoz 1 tuny na vzdálenost 1 km n Kč?

Příklad 6. 5

Pracující důchodce si může podle zákona přivydělat k důchodu ročně nejvýše 22 000 Kč hrubého. Kolik měsíců v roce může pracovat důchodce, jehož hrubý měsíční příjem je 2 120 Kč?

Příklad 6. 6

Průměrné náklady na přepravu jistého zboží na 1 km závisí na délce přepravní vzdálenosti. Při železniční přepravě jsou výdaje dány vzorcem $k_1 = 10 + x$, při vodní přepravě vzorcem $k_2 = 59 + \frac{50}{x}$, kde x je délka přepravní vzdálenosti v km. Určete, pro které hodnoty x je levnější vodní přeprava.

7. Soustavy rovnic s více neznámými

<u>Poznámka:</u> Rovnici s jednou neznámou zobecníme na <u>rovnici s *n* neznámými</u> $x_1, x_2, ..., x_n$,
kde $n \in N$: $L(x_1, x_2, ..., x_n) = P(x_1, x_2, ..., x_n)$,
jejíž řešením je každá uspořádaná *n*-tice $[x_1, x_2, ..., x_n]$ z číselného oboru M, $M \subset R$ (resp. $M \subset C$), jež po dosazení do rovnice dostáváme rovnost.

Soustava rovnic: několik rovnic s více neznámými, které mají být splněny zároveň.
Řešením soustavy rovnic o *n* neznámých se rozumí každá uspořádaná *n*-tice čísel z daného číselného oboru $M \subset R$ (resp. $M \subset C$), která splňují zároveň všechny rovnice soustavy.

Druhy soustav:
1) <u>soustavy lineárních algebraických rovnic</u>
2) <u>soustavy algebraických rovnic vyšších řádů</u>
3) <u>soustavy nealgebraických rovnic</u> (obsahují např. exponenciální, logaritmické či goniometrické rovnice)

Početní řešení soustav rovnic užívají ekvivalentní úpravy:
1) Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní:
   a) K oběma stranám rovnice přičteme totéž číslo či výraz s neznámými, který je definován v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
   b) Obě strany rovnice násobíme týmž číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámými, který je definován a nenulový v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
2) Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.
3) Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

1) Soustavy lineárních rovnic

Základním typem metod řešení soustav lineárních algebraických rovnic jsou eliminační metody, které postupně vylučují neznámé z rovnic soustavy.

<u>Rozlišujeme tyto 3 metody řešení:</u>

a) Metoda sčítací – rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovnic jedna neznámá vyloučila.
b) Metoda dosazovací – vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do druhé rovnice, čímž se jedna neznámá z této rovnice vyloučí.
c) Metoda srovnávací – z obou rovnic vyjádříme touž neznámou, výsledky porovnáme a tím získáme rovnici, ve které je tato neznámá vyloučena.
d) Grafické řešení soustav lineárních rovnic – vycházíme z poznatku, že množinou všech bodů, jejichž kartézské souřadnice splňují lineární rovnici, je přímka. Sestrojíme-li přímky, které znázorňují dané lineární rovnice, pak body jejich průniku mají souřadnice, jež představují řešení soustavy těchto lineárních rovnic.
   <u>Mohou nastat tyto 3 situace:</u>
   I) právě jedno řešení – přímky jsou různoběžné
   II) žádné řešení – přímky jsou rovnoběžné různé
   III) nekonečně mnoho řešení – obě přímky splývají

2) Soustavy s kvadratickými rovnicemi

Tyto soustavy rovnic řešíme obvykle metodou dosazovací.

PŘÍKLADY:

Příklad 7. 1

Turista vyšel z hotelu a šel po turistických značkách až k zámku vzdáleného 9 km od hotelu. Po čtvrt hodině byl za ním z hotelu vyslán posel se vzkazem. Posel dohonil turistu a vrátil se zpět do hotelu v okamžiku, kdy turista dorazil k zámku. Určete rychlost pohybu turisty a dobu, za kterou posel turistu dohonil, víte-li, že se oba pohybovali stálou rychlostí a rychlost pohybu posla byla 5km/h. Přitom dobu potřebnou na předání vzkazu zanedbejte.

Příklad 7. 2

Dva sudy obsahují určité množství vína. Jestliže z prvního nalijeme do druhého právě tolik vína, kolik tam již je, potom z druhého do prvního právě tolik, kolik tam již je, a opět z prvního do druhého právě tolik, kolik tam již je, bude v každém sudu 160 litrů vína. Kolik litrů vína bylo v každém sudu na začátku?

Příklad 7. 3

Mám barvu ve dvojím balení. Vezmu-li pět velkých plechovek a dvě malé, vystačí mi barva na natření 105 m^2 plochy. Vezmu-li dvě velké a pět malých plechovek, vystačí barva na poloviční plochu. Kolik čtverečních metrů natřu barvou z velké a kolik z malé plechovky?

Příklad 7. 4

Pepík s dědečkem šli na houby. Oba už nějaké houby našli, když přišli na paseku. Na pasece našel dědeček tolik hub, kolik měl v té chvíli Pepík v košíku, jenže z nich musel dvě vyhodit, protože byly červivé. Pepík našel tolik hub, že své množství zdvojnásobil, jenže musel jednu houbu vyhodit. Zjistili, že mají stejně. Kdyby ovšem dědeček našel o sedm hub více a nemusel z nich žádnou vyhodit, měl by dvakrát tolik, co Pepík. Kolik hub donesli domů?

Příklad 7. 5

Budu-li topit pět dní v malém a čtyři dny ve velkém pokoji, spotřebuji o 60 kg uhlí méně, než když budu topit devět dní v malém a dva dny ve velkém pokoji. V malém pokoji spotřebuji za den o 3 kg uhlí méně než ve velkém. Kolik uhlí spotřebuji, když budu chtít topit 7 dní v obou pokojích současně?

8. Soustavy nerovnic s více neznámými

<u>Poznámka:</u> Též nerovnici s jednou neznámou lze zobecnit na <u>nerovnici s *n* neznámými</u> $x_1, x_2, ..., x_n$, ($n \in N$) v oboru *R*:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) > P(x_1, x_2, ..., x_n), \text{ resp. } L(x_1, x_2, ..., x_n) < P(x_1, x_2, ..., x_n)$$

(popř. se znaky $\leq$ *resp.* $\geq$)

(S obdobným významem symbolů a terminologie jako rovnice, oborem řešení nerovnic je vždy $M \subset R$), jejímž řešením je každá uspořádaná *n*-tice $[x_1, x_2, ..., x_n]$ reálných čísel, které splňují nerovnici. Množinu všech řešení nerovnice lze též znázornit graficky, grafickým znázorněním je množina všech bodů roviny, jejichž souřadnice vyhovují dané nerovnici.

Soustava nerovnic: několik nerovnic s více neznámými, které mají být splněny zároveň.

Řešením soustavy nerovnic o *n* neznámých se rozumí každá uspořádaná *n*-tice čísel z daného číselného oboru $M \subset R$, pro kterou platí zároveň všechny nerovnice soustavy.

Množina všech řešení soustavy nerovnic je průnikem množin všech řešení jednotlivých nerovnic soustavy.

<u>PŘÍKLADY:</u>

Příklad 8. 1

Profesor matematiky o sobě studentům prozradil: „Trojnásobek mého věku zvětšený o tři je dán trojciferným číslem. Trojciferný je také třiatřicetinásobek mého věku zmenšený o třikrát třicet tři.“ Kolik je mu let?

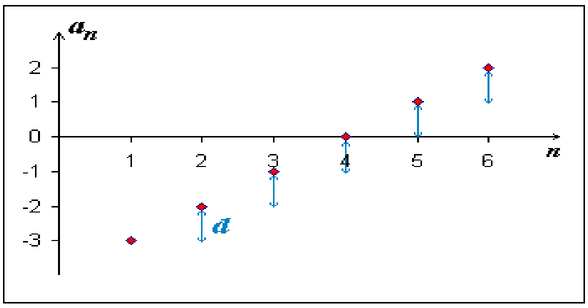
9. Posloupnosti a řady

9.1 Posloupnosti

Posloupnost je funkce definovaná v množině přirozených čísel *N*.
Funkční hodnoty posloupnosti přiřazené číslu *n* se nazývají členy posloupnosti a značí se např. a_n, b_n, …
Konečná *k* členná posloupnost je funkce definovaná na množině prvních *k* přirozených čísel.
Zapisujeme: $\{a_n\}_{n=1}^{k} = \{a_1; a_2; ... a_k\}$.
Nekonečná posloupnost je definována na množině všech přirozených čísel ***N***.
Zapisujeme: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, ...\}$.
Grafem posloupnosti je množina navzájem izolovaných bodů $[n; a_n]$ kde $n \in N$.
Zadání posloupnosti: - výčtem členů, popř. grafem (u konečných posloupností)
- rekurentně zadáním prvního členu posloupnosti či několika prvních členů a vzorcem, podle něhož lze určit postupně další členy.
- vztahem pro *n*-tý člen a_n (např. $a_n = 2n$ či $a_n = 2n + 1$ apod.).

Vlastnosti posloupností:
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:
Rostoucí $\Leftrightarrow n \in N : a_{n+1} > a_n$
Klesající $\Leftrightarrow n \in N : a_{n+1} < a_n$
Neklesající $\Leftrightarrow n \in N : a_{n+1} \geq a_n$
Nerostoucí $\Leftrightarrow n \in N : a_{n+1} \leq a_n$
Konstantní $\Leftrightarrow n \in N : a_{n+1} = a_n$
Omezená shora existuje takové $h \in R$, že pro každé $n \in N$ je $a_n \leq h$
Omezená zdola existuje takové $d \in R$, že pro každé $n \in N$ je $a_n \geq h$
Omezená $\Leftrightarrow$ posloupnost omezená shora a zároveň zdola
Prostá $\Leftrightarrow$ jestliže pro všechna přirozená navzájem různá čísla *m*, *n* je $a_m \neq a_n$.

9.1.1. Aritmetická posloupnost



Obr. 9. 1 Graf aritmetické posloupnosti

Každá posloupnost určená rekurentně vztahy $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, \forall n \in N$, kde *a*, *d* jsou daná čísla. Číslo *d* se nazývá diference.

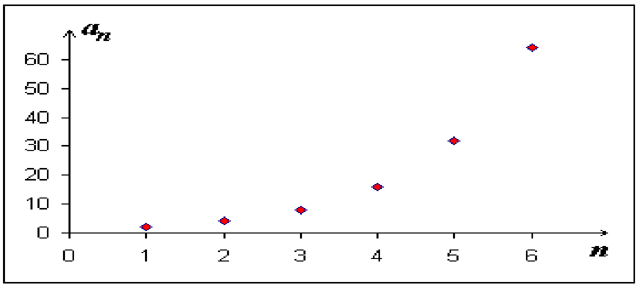
Určení *n*-tého členu: $a_n = a_1 + (n - 1)d$,
pro $n > 1$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (Každý člen kromě prvního je aritmetickým průměrem členů sousedních.)

Určení libovolného členu: $a_r = a_s + (r - s)d$.

Pro součet s_n prvních *n* členů aritmetické posloupnosti platí: $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Grafem aritmetické posloupnosti je množina izolovaných bodů ležících na přímce.

9.1.2. **Geometrická posloupnost:**



Každá posloupnost určená rekurentně vztahy $a_1 = a, a_{n+1} = a_n \cdot q, \forall n \in N$, kde *a*, *q* jsou daná čísla. Číslo *q* se nazývá kvocient. Protože pro $a = 0 \vee q = 0$ dostáváme posloupnost samých nul, v textu budeme předpokládat, že je $a \neq 0 \wedge q \neq 0$.

Obr. 9. 2 graf geometrické posloupnosti

Určení *n*-tého členu: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, pro *n* >1 *a* $a_n \geq 0$ je $a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$ (Každý nezáporný člen kromě prvního je geometrickým průměrem členů sousedních.)
Určení libovolného členu: $a_r = a_s \cdot q^{(r-s)}, (q \neq 0)$,
Pro součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti platí:
pro *q* = 1 je $s_n = n \cdot a_1$
pro $q \neq 1$ je $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$.
Grafem geometrické posloupnosti pro $q > 0 \wedge q \neq 1$ je množina izolovaných bodů ležících na exponenciální křivce.

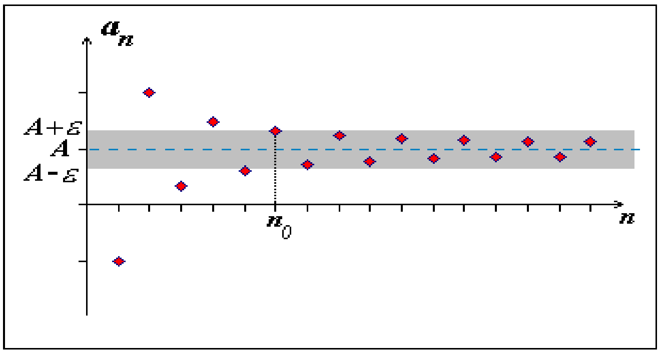
9.2 Limita posloupnosti:

Říkáme, že reálné číslo *a* je limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se členy $a_n \in R$, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ čili platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$.

a) Jestliže s rostoucím *n* se členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezeně blíží k určitému reálnému číslu *a*, říkáme o tomto čísle, že je (vlastní) limitou posloupnosti.
b) Jestliže s rostoucím *n* se členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezeně blíží k $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$.
c) Jestliže s rostoucím *n* se členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neblíží k žádnému číslu $a \in R$, ani k $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že posloupnost nemá vlastní, ani nevlastní limitu neboli je oscilující.

Skutečnost, že posloupnost má limitu, se vyjadřuje zápisem $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Konvergentní posloupnost je posloupnost, která má vlastní limitu.
Divergentní posloupnost je posloupnost, jež není konvergentní (divergují k $+\infty$ nebo $-\infty$ anebo jsou oscilující).
Pozn.: Každá shora neomezená posloupnost diverguje k $+\infty$. Každá zdola neomezená posloupnost diverguje k $-\infty$.



Geometrický význam limity: Má-li posloupnost limitu $a \in R$, pak ke každému (libovolně malému) $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo $n_0 \in R$, že pro všechna $n \geq n_0$ leží všechny body grafu posloupnosti v pásu, jehož hraniční přímky jsou rovnoběžky procházející body [0; $a + \varepsilon$], [0; $a - \varepsilon$] kolmo ke svislé ose grafu.

Obr. 9. 3 Geometrické znázornění limity posloupnosti

Věty o limitách posloupností:

Věta 1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2. Každá konvergentní posloupnost je omezená (obrácení této věty neplatí).

Věta 3. Každá monotónní omezená posloupnost je konvergentní.

Věta 4. Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a c libovolné reálné číslo, pak jsou konvergentní i posloupnosti $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, je konvergentní též posloupnost $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0\right)$

Věta 5. a) Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí $d = 0$, resp. geometrická posloupnost s kvocientem $q = 1$ a její první člen je $a_1 = a$. Pak tato posloupnost s konstantními členy a má limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

b) Žádná aritmetická posloupnost s diferencí $d \neq 0$ nemá vlastní limitu.

c) Každá geometrická posloupnost s kvocientem $|q| < 1$ má limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

d) Žádná geometrická posloupnost s kvocientem $q = -1$ nebo $|q| > 1$ nemá vlastní limitu.

Věta 6. a) Posloupnosti $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(-\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \left((-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ mají limity (pro $n\to\infty$) rovny nule.

b) Důsledek: $\forall k \in N$ posloupnosti $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(-\dfrac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty}, \left((-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty}$ mají limity (pro $n\to\infty$) rovny nule.

9.3 Nekonečná řada

Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, pak $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá nekonečná řada.
Čísla $a_1, a_2, a_3, ...$ se nazývají členy nekonečné řady.

<u>Součet nekonečné řady</u> je definován jen pro konečný počet sčítanců.

Lze však jej též definovat takto: Pro danou nekonečnou řadu vytvoříme posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, jejímiž členy jsou $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, ...$

Tato posloupnost se nazývá <u>posloupnost částečných součtů nekonečné řady</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Její *n*-tý člen s_n se nazývá <u>*n*-tý částečný součet nekonečné řady</u> $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Existuje-li pro posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ limita: $\lim_{n \to \infty} s_n = s \in R$, pak tuto limitu nazýváme <u>součtem nekonečné řady</u> a říkáme, že nekonečná řada je <u>konvergentní.</u> Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, říkáme, že nekonečná řada je <u>divergentní</u>.

<u>Nutná podmínka konvergence řady:</u> jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

<u>Druhy nekonečných řad:</u>

1. <u>aritmetická nekonečná řada</u> – tj. nekonečná řada tvaru:,
   $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + (n-1)d) = a_1 + (a_1 + d) + ... + (a_1 + (n-1)d) + ...$
   a_1 je první člen, *d* diference aritmetické řady.
   Každá aritmetická nekonečná řada je divergentní.

2. <u>geometrická nekonečná řada</u> – tj. nekonečná řada tvaru:
   $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-1} + ...$,
   a_1 je první člen, *q* kvocient geometrické řady.

   Geometrická nekonečná řada je a) konvergentní, je-li $|q| < 1$ a pro její součet platí:
   $$s = \frac{a_1}{1-q}$$
   b) divergentní, je-li $|q| \geq 1$.

3. <u>harmonická nekonečná řada</u> – tj. nekonečná řada tvaru:
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$
   Harmonická nekonečná řada je divergentní.

PŘÍKLADY:

Poznámka 9. 1 Nula:

Ačkoliv nulu znají všichni, tak mnohým lidem činí potíže si uvědomit její správný význam. Spousta lidí např. slavila příchod nového tisíciletí již na Silvestra 1999, ačkoliv měli slavit až o rok později, tedy 31. 12. 2000, protože rok nula nikdy neexistoval, a tudíž nové tisíciletí nám začalo až teprve 1. lednem 2001.

Zajímavostí je, že u Římanů se nula nepoužívala, avšak vzhledem k jejich nepraktické číselné soustavě by to stejně nefungovalo. Dnešní nulu vymysleli indičtí matematici a původně ji označovali mezerou či tečkou. Nám známý kroužek přišel na řadu tehdy, když začali počítat pomocí oblázků kladených do písku, v němž po odstranění jednotlivých kamínků zbyl obtisknutý kroužek.

Nula nemusí vždy znamenat nic, jak by se na první pohled mohlo zdát, záleží totiž na tom, jestli je umístěná osamoceně, anebo s nějakými čísly. Nula nám slouží i k tomu, abychom byli schopní rozlišit např. čísla 11 a 101. Pokud někomu nezkušenému zadáme příklad $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times0$, může se mu to zdát jako obtížný úkol s propočtem na delší dobu. Člověk matematiky znalý samozřejmě ví, že násobení nulou je snadné, protože výsledek je vždy nula, ovšem dělení nulou už tak primitivní není. Když to např. budeme zkoušet na kalkulačce, objeví se nám podivná odpověď „error“ nebo-li chyba. Tato odpověď je však správná, protože nulou skutečně dělit nelze, jelikož to nedává smysl. Stačí si uvědomit, že ptát se „kolikrát se nic nachází např. v čísle 8“ je nesmysl, a proto je dělení nulou nemožné.

U rovnic může vést dělení nulou taktéž k nesmyslným výsledkům,
např.: $1\times0 = 0$, když se vydělí obě strany nulou, dostaneme $1 = 0 : 0$;
a když začneme rovnicí $2\times0 = 0$ a uděláme stejný krok, obdržíme $2 = 0 : 0$
Z toho by vyplývalo, že číslo 1 se rovná číslu 2, a to je právě ten nesmysl.

Poznámka 9. 2 Nekonečno:

Pokud si položíme otázku, jaké je největší možné číslo, není možné odpovědět, že takové a takové, protože vždy si k jakémukoliv vyřčenému číslu budeme moc připočítat třeba jedničku. Z toho vyplývá, že neexistuje hranice, jak velké (nebo malé) může číslo být, a pro tuto neomezenost používají matematikové slovo nekonečno. V případě nekonečného času jej nazýváme věčností. Pro názornost si můžeme představit nádobu s nekonečným počtem bonbonů; ať z něj vyndáme jakýkoliv počet, třeba i polovinu, jejich množství zůstane stále stejné. Proto platí, že nekonečno mínus jedna se rovná znovu nekonečno. Stejně je tomu i u přičtení, ale i násobení, neboť nekonečno děleno dvěma je zase nekonečno. Dokonce i nekonečno krát nekonečno je znovu nekonečno. Matematikové označují nekonečno pomocí ležaté osmičky, přičemž je třeba dodat, že dokonce existují různé druhy nekonečna, a to počitatelné (celá čísla) a nepočitatelné (iracionální čísla). Dle odborníků je dokonce možné i porovnávat nekonečna, neboť prý to nepočitatelné je mnohem (přesněji nekonečněkrát) větší než to běžné.

Matematik David Hilbert se pokusil objasnit pojem nekonečno na fiktivním hotelu. Představte si hotel s nekonečným počtem pokojů, které jsou všechny plné. Přijde host a žádá pokoj. Majitel se zamyslí a pak požádá hosty, aby se přestěhovali o jeden pokoj dál. Takže osoba v pokoji č. 1se stěhuji do pokoje č. 2, osoba ve dvojce zase do trojky atd. Tím se uvolní pokoj pro nového hosta. Druhý den přijede dlouhý autobus s nekonečným počtem dalších hostů. Majitel se nyní musí důkladně zamyslet, ale i tento problém vyřeší. Požádá hosty, aby číslo svého pokoje zdvojnásobili a přestěhovali se do nového čísla. Hosté tudíž skončí v pokojích se sudými čísly, čímž se uvolní nekonečný počet pokojů s lichými čísly.

Poznámka 9. 3 Prvočíslo:

Pro matematiky jde sice o samozřejmou věc, ale přesto je dobré pro ty, kteří si to neuvědomují, sdělit následující zajímavost, a to, že číslo 2 je nejen nejmenším sudým prvočíslem, ale je to zároveň jediné sudé prvočíslo, které existuje, protože ostatní sudá čísla jsou tzv. čísla složená, protože jsou dělitelná dvěma.

Příklad 9. 1 Šachy:

Dle legendy vládl před 1600 léty indický vladař Scheram a vše dělal špatně. Mudrc Sísa vymyslel způsob, jak jej varovat a při tom měl před sebou obtížný úkol. Neuvalit na sebe jeho nepříčetný hněv. I předvedl mu hru v šachy, ve které sice král byl nejmocnější, ale sám neznamenal nic bez opory ostatních. Král to přijal jako životní ponaučení a chtěl moudrého Brahmána obdarovat. I udělil mudrc králi druhou lekci – ve skromnosti.

Souhlasil s darem a chtěl jediné zrnko pšenice na první pole šachovnice, na druhé dvě, na třetí čtyři – a tak dále, stále dvojnásobek. Král se mu vysmál, že chce tak málo, nakonec byl rád, že ještě tak lacino „nakoupil“ tak vzácnou hru. Když ze sýpek začali přivážet obilí, zděsili se. Sýpka byla rázem vyprázdněná a chybělo ještě naplnit obrovskou řadu šachovnicových polí. Na šedesát čtyři polí by se muselo umístit 18 446 744 073 709 551 615 zrn, to je celkem 18 triliónů + 446 biliard + 744 biliónů + 73 miliard + 709 miliónů + 551 tisíc + 615 zrn. Je až neuvěřitelné, že tohle mohl někdo před tolika staletími vědět! I kdyby byla oseta plocha celé zeměkoule včetně moří a oceánů, tak by úroda nestačila! Před 50 lety J. I. Perelman vypočítal ve své knize „Živá matematika“, že pro tolik obilí by musela být postavena sýpka deset metrů široká, čtyři metry vysoká a její délka by byla dvakrát delší než je vzdálenost Země – Slunce.

Příklad 9. 2

Které číslo následuje v této číselné řadě? 1, 2, 6, ?

Příklad 9. 3

Přátelé si vyprávěli o svých rodinách. Krátkému se vysmívali, že se chová jako jedináček, ale on jim na to odpověděl: „Mýlíte se, já jsem nejstarší z patnácti dětí. A kolik je jim let? Jsem právě osmkrát starší než můj nejmladší bratr. Každý další bratr se narodil půl druhého roku po svém předchůdci.“ Přátelé měli o zábavu postaráno při počítání let jednotlivých sourozenců. Pomozte jim zjistit věk všech sourozenců.

Příklad 9. 4

Železné roury jsou uloženy na sobě v šesti vrstvách. Ve spodní vrstvě je 8 rour a v každé další vždy o jednu rouru méně. Kolik je všech rour?

Příklad 9. 5

Představte si, že do čtverce *ABCD* o délce strany 1m sestrojíme nekonečný počet čtverců vepsaných jeden do druhého tak, že vrcholy menšího čtverce jsou středy stran předcházejícího většího čtverce. Jaký je součet obsahů všech takto sestrojených čtverců?

Příklad 9. 6 Dovedli byste si představit těleso s nekonečným povrchem, ale konečným objemem?

Takové těleso, i když je to nevěřitelné, jen v matematickém slova smyslu existuje. Je složeno z kvádrů vysokých 1 metr a jejich podstava je tvaru čtverce. Podstavná hrana nejspodnějšího kvádru má délku 1metr, podstavná hrana na něm postaveného kvádru $\frac{1}{2}$ metru, podstavná hrana dalšího kvádru $\frac{1}{3}$ metru, dalšího $\frac{1}{4}$ metru atd. až do nekonečna. Pokuste se vypočítat objem a obsah všech kvádrů.

10. Kombinatorika

10.1 Základní kombinatorická pravidla

Kombinatorické pravidlo součtu: Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků, …, množina A_k má n_k prvků a jestliže každé dvě z množin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou disjunktní (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$), pak počet všech prvků sjednocení množin $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ je roven součtu $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Kombinatorické pravidlo součinu: Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků, …, množina A_k má n_k prvků, pak počet všech možných uspořádaných k-tic $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$, jejichž první složkou je libovolný prvek množiny A_1, druhou složkou libovolný prvek z A_2, …, k-tou složkou je libovolný prvek z A_k, je roven součinu $n_1.n_2\ldots n_k$.

10.2 Variace a permutace bez opakování

k-členná variace z n prvků $(k, n \in N, k \leq n)$ je uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že všechny prvky v ní jsou různé (neopakují se).

Počet všech takových variací: $V(k,n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ neboli

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Permutace (pořadí) n prvků je každá uspořádaná n-tice (n-členná variace) sestavená z daných n prvků. Prvky se neopakují.

Počet všech takových permutací: $P(n) = V(n,n) = n.(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

***n*-faktoriál definujeme:** $\boldsymbol{n!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$\mathbf{0!} = 1$

10.3 Variace a permutace s opakováním

k-členná variace s opakováním z n prvků $(k, n \in N)$ je uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (mohou se opakovat).

Počet všech takových variací: $V'(k,n) = n^k$.

Permutace (pořadí) k prvků s opakováním z n prvků $(k, n \in N, k > n)$ je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že se v ní některé ze zvolených prvků mohou opakovat (1. prvek se opakuje k_1 krát, 2. prvek k_2 krát, atd.).

Počet všech takových permutací: $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \dfrac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$.

10.4 Kombinace

<u>Kombinace bez opakování:</u>
k-členná kombinace z *n* prvků $(k, n \in N_0, k \le n)$ je každá množina *k* prvků vybraných z *n* daných prvků. V množině se žádné prvky neopakují.

Počet všech takových kombinací: $K(k,n) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$ neboli

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Pozn.: Počet všech 0-členných kombinací z *n* prvků je $K(0,n) = 1$ (Každá množina má právě 1 prázdnou množinu.).

<u>Kombinace s opakováním:</u>
k-členná kombinace s opakováním z *n* prvků $(k, n \in N)$ je každá neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto *n* prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (mohou se opakovat).

Počet všech takových kombinací: $K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$

10.5 Kombinační čísla, Pascalův trojúhelník, Binomická věta

<u>Kombinační čísla:</u>
Čísla vyjadřující počet všech *K*(*k, n*) *k*-členných kombinací z *n* prvků $(k, n \in N_0, k \le n)$.

Označujeme symbolem $\binom{n}{k}$ a čteme *n* nad *k.*

Základní vlastnosti: $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, n \ge k$$

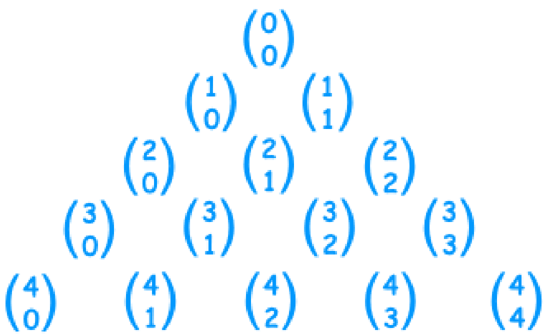
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, n \ge k+1$$

Pascalův trojúhelník:

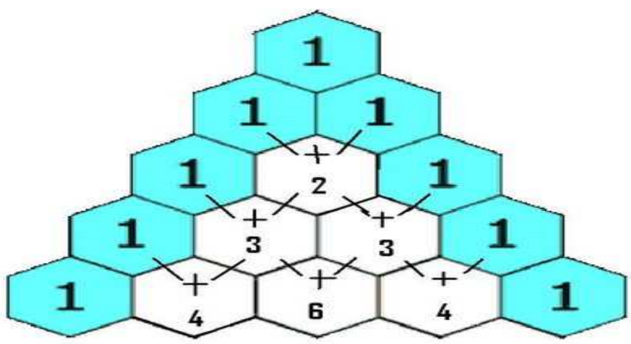
Trojúhelníkové schéma kombinačních čísel $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$

Základní vlastnosti Pascalova trojúhelníku:

1) Každý řádek začíná a končí číslem 1.
2) V každém jeho řádku čísla stejně vzdálená od začátku i konce jsou si rovna.
3) Libovolné číslo uvnitř Pascalova trojúhelníku získáme sečtením dvou čísel ležících bezprostředně nad ním.
4) Součet kombinačních čísel v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku je $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.



Obr. 10. 1 Pascalův trojúhelník s kombinačními čísly



Obr. 10. 2 Pascalův trojúhelník s přirozenými čísly

Binomická věta:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

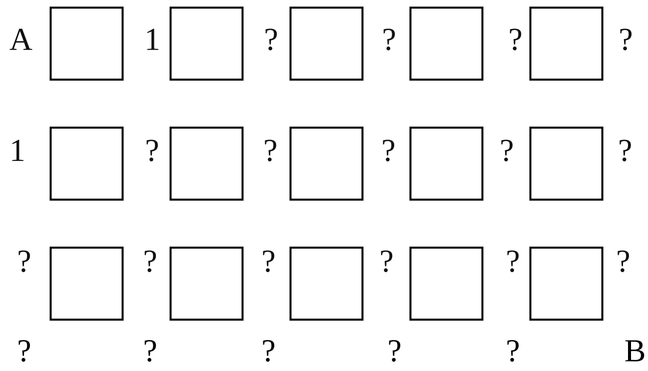
neboli

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

PŘÍKLADY:

Příklad 10. 1 Cesta:

Pod textem je hlavolam, který můžete vyřešit pomocí Pascalova trojúhelníku. Představte si sami sebe jako řidiče taxíku, který se chystá jet z bodu *A* do bodu *B*. Kolika cestami můžete jet? Nápověda: počítejte cesty k nejbližším křižovatkám a doplňte čísla.



Příklad 10. 2 Auta:

Kolik aut bychom logicky napočítali, kdybychom měli tři druhy velikostí (malá, střední a velká), pouze jednu značku (např. Škoda), dvě barvy a dva typy (např. Felicia a Fabia). Načrtněte si obrázek a vyzkoušejte si na něm všechny možnosti. Samozřejmě je možné to spočítat i bez obrázku.

Příklad 10. 3 Parádnice

Děvče mělo 4 různé sukně, 4 různé blůzky a 5 různých svetrů. Na kolik dní jí tato zásoba šatů vystačila, aby se žádná kombinace neopakovala?

Příklad 10. 4 Hra v kostky

Tři chlapci si hráli s dvěma kostkami, které mají na stěnách postupně 1 až 6 bodů. Na kostce jsou body umístěny tak, že součet bodů na protilehlých stěnách je vždy 7 (6+1, 5+2, 4+3). První hodil kostkami a prohlásil, že součet jeho bodů je právě takový jako součet bodů na opačných stěnách, které leží na stole. Druhý měl po hodu součet o 4 větší než součet bodů na opačných stranách. Třetí dosáhl tolika bodů, kolik je právě třetina všech možných kombinací, které můžeme dvěma kostkami dosáhnout. Kolik měl který bodů?

Příklad 10. 5 MS v ledním hokeji

Na mistrovství světa v ledním hokeji bylo vysláno 22 hráčů, z toho 12 útočníků, 8 obránců a 2 brankáři. Nepřihlížíme k tomu, že např. obránce může hrát na pravé nebo levé straně obrany. Kolik různých sestav může trenér z těchto hráčů vytvořit?

11. Geometrie - Planimetrie

11.1 Základní pojmy

Bod – základní geometrický útvar bez šířky, délky i hloubky. Značíme ho zpravidla velkými písmeny latinské abecedy

Přímka – nekonečná množina bodů mající délku, pro kterou platí věta:
Dvěma různými body *A*, *B* prochází právě jedna přímka *p* (zapisujeme $p = \leftrightarrow AB$). Značíme je malými písmeny latinské abecedy.

Rovina – nekonečná množina bodů mající šířku i délku. Značíme malými písmeny řecké abecedy.

Vztah incidence – bod je incidentní s přímkou (rovinou) = bod leží na přímce (v rovině)
- další možnosti: přímka prochází bodem či leží v rovině
rovina prochází přímkou (bodem)
v těchto i v opačných případech se užívá zápisů:
$A \in p, A \in \varphi, p \subset \varphi, A \notin p, A \notin \varphi, p \not\subset \varphi.$

Různoběžky – různé přímky ležící v téže rovině a mající právě jeden společný bod.

Rovnoběžky – různé přímky ležící v téže rovině a nemající žádný společný bod či mající všechny body společné (totožné přímky).

Polopřímka – část přímky, kterou rozděluje jeden zvolený bod na této přímce. Tento bod se nazývá počáteční bod. Polopřímka se značí $\mapsto AB$.
Opačné polopřímky – jsou takové, které mají stejný počáteční bod, ale opačný směr.

Úsečka – část přímky, která je ohraničená dvěma body. Tyto body se nazývají krajní.

Polorovina – část roviny, která je ohraničena přímkou (hraniční přímkou).
Značí se $\mapsto pX$ (kde *p* je hraniční přímka a *X* je vnitřní bod poloroviny) či $\mapsto PQX$ (kde $p = PQ$ a *X* vnitřní bod poloroviny).

Rovinný pás - část roviny, která je ohraničena dvěma různými rovnoběžkami (průnik dvou polorovin).

Shodné útvary – pokud lze dva libovolné útvary v dané rovině přemístit tak, že splynou, říkáme, že útvary jsou shodné a značí se: $U_1 \cong U_2$

11.2 Úhly

Názvy úhlů podle velikosti:

Konvexní = průnik polorovin *VAB* a *VBA*. $(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$

Nulový = $(\alpha = 0^\circ)$

Pravý = $(\alpha = 90^\circ)$

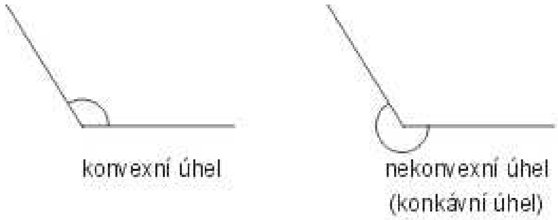
Přímý = $(\alpha = 180^\circ)$

Kosý: a) ostrý $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$

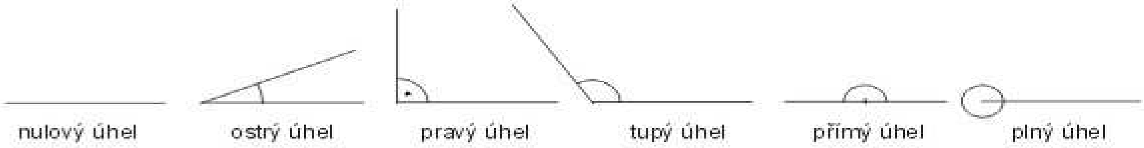
b) tupý $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$

Nekonvexní = sjednocení polorovin opačných k polorovinám *VAB* a *VBA*.
$(180^\circ < \alpha \le 360^\circ)$

Plný = $(\alpha = 360^\circ)$



Obr. 11. 1 Konvexní a nekonvexní úhel



Obr. 11. 2 Klasifikace úhlů dle velikosti

Názvy úhlů podle polohy:

Styčné = konvexní úhly *AVB*, *BVC*, které leží v rovině tak, že jejich průnikem je právě jen rameno *VB*.

Vedlejší = styčným úhlům *AVB*, *BVC*, jejichž grafickým součtem je přímý úhel *AVC*.

Doplňkové = libovolné dva ostré úhly, jejichž součet velikostí je 90°

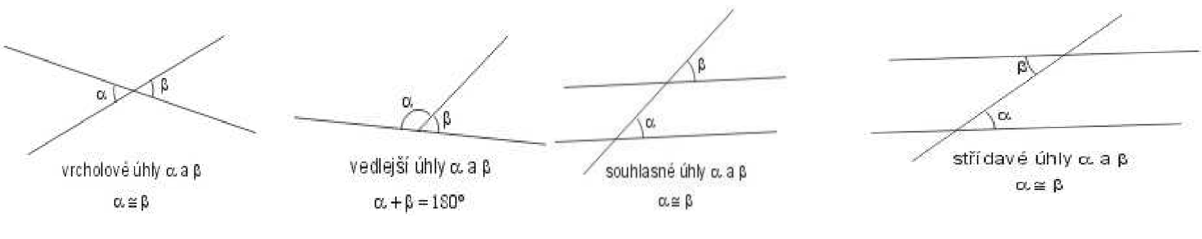
Výplňkové = libovolný ostrý úhel a tupý úhel, jejichž součet velikostí je 180°

Vrcholové = dvojice shodných konvexních úhlů, které jsou sevřeny dvěma různoběžkami. Mají společný vrchol.

Přilehlé = dva úhly, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou *VU*, kde rameno jednoho je polopřímka *VU* a rameno druhého je polopřímka opačná k *UV*.

Souhlasné = dva úhly ležící v téže polorovině s hraniční přímkou *UV*, kde rameno jednoho je polopřímka *VU* a rameno druhého je polopřímka opačná k polopřímce *UV*.

Střídavé = dva úhly, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou *VU*, kde rameno jednoho je polopřímka *VU* a rameno druhého je polopřímka *UV*.



Obr. 11. 3 Klasifikace úhlů dle polohy

Další pojmy:

Střed úsečky ***AB*** = její vnitřní bod *S*, který je stejně vzdálený od krajních bodů *A*, *B*.

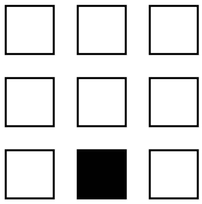
Osa úsečky ***AB*** = přímka *o*, která prochází středem *S* úsečky *AB* a je k ní kolmá.

Osa úhlu ***AVB*** = polopřímka *o*, která prochází vrcholem *V* úhlu a rozděluje ho na dvě shodné části.

PŘÍKLADY:

Příklad 11. 1 Garáž pro kropící auto

Město zakoupilo kropicí auto. Předseda města požádal inženýra Koudelku, aby na předloženém plánu města vyznačil nejvhodnější místo pro garážování auta. Požadavek byl, aby auto z místa garážování projelo všemi ulicemi nejkratší cestou až zase zpět do garáže. Koudelka umístil garáž u svého domu, viz obrázek. Bylo řešení správné?



Příklad 11. 2 Síť silnic

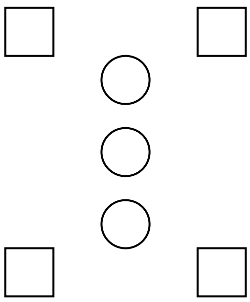
Záludný příklad vypadající nevinně: Jak propojit několik měst sítí silnic tak, aby jejich délka byla co nejkratší? Zvolíme si jen 4 města *A, B, C, D*, která navíc šťastnou náhodou leží ve vrcholech čtverce o straně 1. Jediným požadavkem je, aby se obyvatelé kteréhokoli ze 4 měst mohli dostat do libovolného jiného města.

Příklad 11. 3 Kovboj **(1089 a další parádní čísla)**

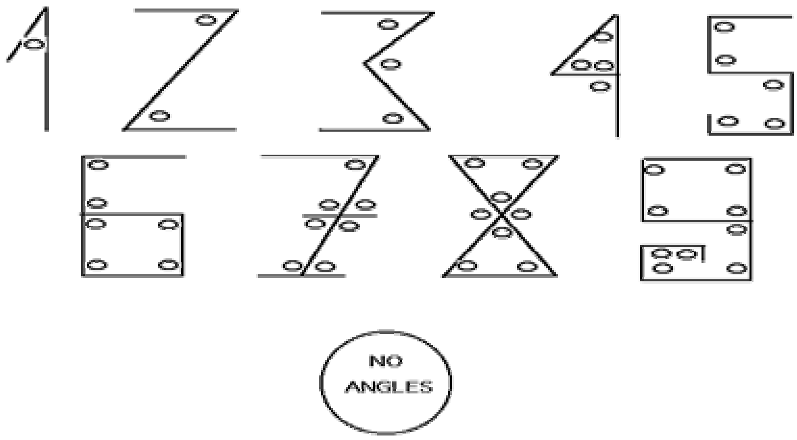
Kovboj se vrací po dlouhém dni domů na ranč, ale chce ještě zajet s koněm k řece, aby se kůň mohl napít. Jak to má zařídit, aby celkově urazil co nejkratší vzdálenost (ke kterému místu na břehu řeky má zamířit)?

Příklad 11. 4 Cihelna

V cihelně jsou tři výrobní střediska a čtyři sklady. Od každého střediska má vést úzkokolejná dráha ke každému skladišti. Na obrázku jsou skladiště znázorněna čtverečky a výrobní střediska kroužky. Navrhněte plán železniční sítě, aby bylo co nejméně křižovatek.

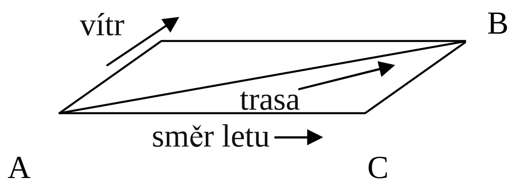


Příklad 11. 5 Názvy číslic podle počtu úhlů



Příklad 11. 6   Letadlo:

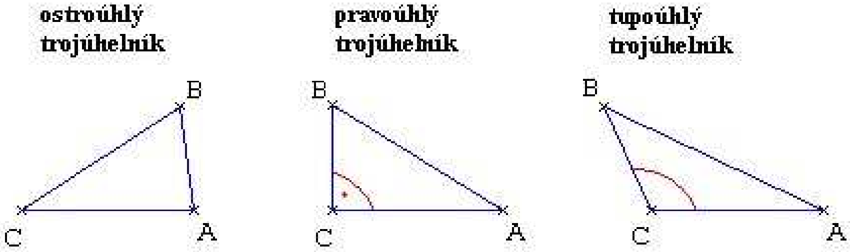
letadlo potřebuje překonat vzdálenost 140 km z bodu *A* do bodu *B*. Fouká však severovýchodní vítr o rychlosti 50 km/h. Aby pilot vyrovnal účinky větru, nasměruje letadlo do bodu *C* vzdáleného 100 km. Když míří do bodu *C* rychlostí 200km/h, kdy doletí do bodu *B*?



11.3 Trojúhelník

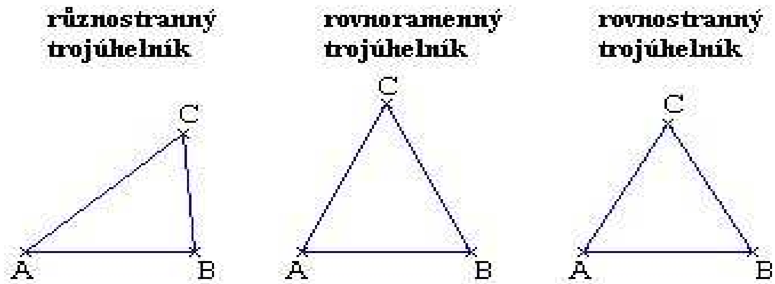
Máme-li dány tři různé body *A, B, C,* které neleží v jedné přímce, pak průnikem polorovin *ABC, BCA, CAB*, vznikne trojúhelník *ABC*. Značíme jej: ΔABC.

<u>Druhy trojúhelníků dle velikosti vnitřních úhlů:</u>
Ostroúhlé = všechny úhly ostré
Pravoúhlé = jeden úhel pravý (platí u něj: $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, tg\alpha = \frac{a}{b}, \cot g\alpha = \frac{b}{a}$)
Tupoúhlé = jeden úhel tupý



Obr. 11. 4 Klasifikace trojúhelníků dle velikosti vnitřních úhlů

<u>Druhy trojúhelníků dle vzájemných poměrů délek stran:</u>
Obecné = nemají specifické vlastnosti
Rovnoramenné = dvě strany mají stejnou velikost
Rovnostranné = všechny strany mají stejnou délku



Obr. 11. 5 Klasifikace trojúhelníků dle vzájemných poměrů délek stran

<u>V každém trojúhelníku platí:</u>

Součet velikostí vnitřních úhlů je 180°. Proti delší straně leží větší úhel a naopak. Trojúhelníková nerovnost: $|a-b| < c < a+b$. Součet velikostí vnějších úhlů je 360°. Velikost vnějšího úhlu je rovna součtu velikostí vnitřních úhlů u zbývajících vrcholů trojúhelníka (např.: $\alpha' = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$).

<u>Obvod trojúhelníku:</u> $O = a + b + c$

<u>Obsah trojúhelníku:</u> $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}; S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$

$$S = \frac{abc}{4r}; S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$(s = \frac{O}{2} = \frac{a+b+c}{2})$$

Věta sinová: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2r$

Věta kosinová: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

Věta tangentová: $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cot g\,\dfrac{\gamma}{2}}$

Výška v trojúhelníku: Přímka procházející vrcholem trojúhelníku kolmo na protilehlou stranu. Společný průsečík výšek trojúhelníka je ortocentrum ***V***. Platí: $v_a:v_b:v_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$

$v_a=b\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\beta.$

Těžnice trojúhelníku: Spojnice vrcholu se středem protější strany. Průsečík těžnic je těžiště ***T***.

Osy stran: průsečík os stran je středem *O* kružnice opsané s poloměrem *r*.

Osy vnitřních úhlů: protínají se vždy uvnitř trojúhelníku, v bodě ***S***, který je středem kružnice vepsané s poloměrem *ρ*.

Poloměr kružnice opsané: $r=\dfrac{a}{2\sin\alpha};r=\dfrac{bc}{2v_a};r=\dfrac{abc}{4S};r=\dfrac{2S^2}{v_a\cdot v_b\cdot v_c}.$

Poloměr kružnice vepsané:

$$\rho=\frac{S}{s};\rho=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};\rho=4r\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2};\rho=(s-a)\cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

Eulerova přímka: přímka, která je určena body ***S***, ***V***, ***T***, pokud tyto body nesplývají.

Feuerbachova kružnice: Je-li *ABC* obecný trojúhelník, *P, Q, R* paty jeho výšek, *K, L, M*, středy jeho stran, *V* průsečík výšek, *X, Y, Z* postupně středy úseček *AV*, *BV*, *CV*. Pak body *P, Q, R, K, L, M, X, Y, Z* leží na jediné kružnici.

Pythagorova věta: Trojúhelník *ABC* se stranami *a, b, c* $(c>a,\ c>b)$ je pravoúhlý, platí-li $c^2=a^2+b^2$. Zvláštní případ kosinové věty.

Euklidova věta o výšce: $v_c^2=c_a\cdot c_b$

Euklidova věta o odvěsně: $a^2=c\cdot c_a, b^2=c\cdot c_b$

Věty o určenosti trojúhelníku:

usu – je dána délka strany a velikost dvou k ní přilehlých úhlů.

sus – jsou dány délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného.

sss – jsou dány délky tří stran, pro něž platí $|a-b|<c<a+b.$

Ssu – jsou dány délky dvou stran a velikost úhlu protilehlého k delší straně.

11.4 Mnohoúhelníky

Úhlopříčka *n*-úhelníku: úsečka, jejíž krajní body jsou libovolné dva nesousední vrcholy.

n-úhelník má: *n* vrcholů, *n* stran a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.

Konkávní mnohoúhelník: má jeden vnitřní úhel konkávní (větší než 180°)

Konvexní mnohoúhelník: má všechny vnitřní úhly konvexní (menší než 180°)

Tětivový mnohoúhelník: konvexní mnohoúhelník, k němuž lze sestrojit opsanou kružnici.

Tečnový mnohoúhelník: konvexní mnohoúhelník, k němuž lze sestrojit vepsanou kružnici.

Pravidelný mnohoúhelník: konvexní mnohoúhelník, jehož všechny strany a všechny vnitřní i vnější úhly jsou shodné. Každý pravidelný n-úhelník je tětivový i tečnový, opsaná i vepsaná kružnice mají společný střed. Velikost vnitřního úhlu je $\alpha = \frac{360^\circ}{k}$.

Součet všech vnitřních úhlů: $(n-2)\frac{180^\circ}{n}$.

Počet úhlopříček: $u = \frac{n(n-3)}{2}$. $O = n \cdot a, S = n \cdot \frac{a}{2} \cdot \rho$.

Ptolemaiova věta: V libovolném čtyřúhelníku platí, že součin velikostí jeho úhlopříček je menší, nebo roven součtu součinů velikostí protilehlých stran: $|AC| \cdot |BD| \le |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$.

Druhy konvexních čtyřúhelníků:

Různoběžník: čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou různoběžné.

Deltoid – tečnový čtyřúhelník osově souměrný podle jedné z úhlopříček (e, f).

$$AC \perp BD,\ a = d,\ c = b,\ O = 2(a + b),\ S = \frac{e \cdot f}{2}, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

Rovnoběžník: čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné. Střední příčka rovnoběžníku - úsečka, jejíž krajní body jsou středy jeho dvou protějších stran. Výška rovnoběžníku – vzdálenost protějších stran.

Platí: $AB \| CD \wedge AD \| BC \wedge |AB| = |CD| \wedge |AD| = |BC|, S = a \cdot v, O = 2(a+b)$.

Obdélník – rovnoběžník, který má všechny vnitřní úhly pravé a vzájemně protilehlé strany mají stejnou délku. $O = 2\,(a + b)$, $S = a \cdot b$. Úhlopříčky obdélníku jsou shodné.

Čtverec - rovnoběžník, který má všechny vnitřní úhly pravé a všechny strany shodné. Je to pravidelný čtyřúhelník. $O = 4a$, $S = a^2$. Úhlopříčky čtverce jsou shodné, navzájem kolmé a půlí jeho vnitřní úhly.

Kosodélník - čtyřúhelník, jehož žádný vnitřní úhel není pravý a vzájemně protilehlé strany mají stejnou délku. Není ani tečnový ani tětivový čtyřúhelník.

Kosočtverec - čtyřúhelník, jehož žádný vnitřní úhel není pravý a jehož všechny strany jsou shodné. Úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé a půlí jeho vnitřní úhly.

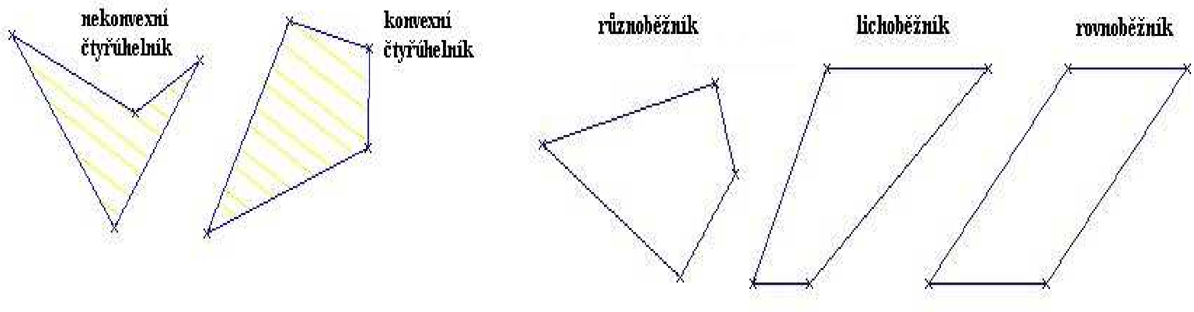
POZN.: čtverec a obdélník se též nazývají pravoúhelník. Dvoustředový čtyřúhelník má současně kružnici vepsanou i opsanou (např. čtverec).

Lichoběžník: čtyřúhelník, jehož dvě protější strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě jsou různoběžné. Rovnoběžné strany se nazývají základny a různoběžné ramena. Střední příčka lichoběžníku - úsečka, jejíž krajní body jsou středy ramen. Výška lichoběžníku – vzdálenost základen. Lichoběžník je tětivový právě když je rovnoramenný. Lichoběžník je tečnový, právě když součet délek jeho základen je roven součtu délek jeho ramen.

$$O = a + b + c + d,\ S = \frac{a+c}{2} \cdot v, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^{\circ}.$$

Rovnoramenný lichoběžník – jeho ramena jsou shodné úsečky. Je souměrný dle osy spojující středy obou základen. Vnitřní úhly přilehlé k téže základně jsou shodné.

Pravoúhlý lichoběžník – právě jedno jeho rameno je kolmé k oběma jeho základnám.

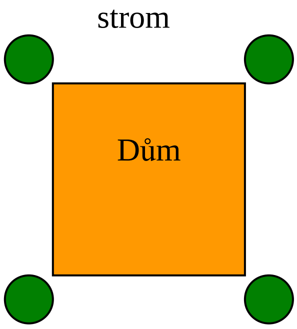


Obr. 11. 6 Klasifikace čtyřúhelníků

PŘÍKLADY:

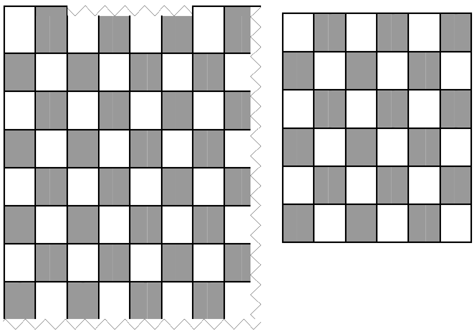
Příklad 11. 7 Majitel domu

Majitel domu se čtvercovým půdorysem chce zdvojnásobit velikost svého bytu, ale zachovat jeho čtvercový tvar. Blízko rohů domu stojí čtyři stromy a majitel je nemůže přemístit. Nechce však budovat další patro ani suterén. Jak to udělá?



Příklad 11. 8 Šachovnicový šátek

Jedno děvče mělo dva čtvercové kusy látky se šachovnicovým vzorkem. Jeden kus obsahoval 64 čtverečků a druhý 36 stejných čtverečků. Děvče z nich chtělo udělat jeden kus tak, aby se zachovalo pravidelné střídání bílých a černých čtverců. Bylo to o to složitější, že dvě celé strany a polovina třetího okraje na větším kusu látky byly již obšité. Děvče rozdělilo oba kusy látky tak, že na šátku, který vytvořilo, bylo všech sto čtverců a přitom obšité okraje zůstaly tak, jak byly. Jak to děvče udělalo?



Příklad 11. 9 Laťky na měření

Laťka na měření je 6 dm dlouhá. I když má jen dvě rysky, můžeme s ní měřit všechny délky od 1 dm do 6 dm odstupňované po 1 dm. Např. délku 2 dm odměříme mezi ryskou 4 a koncem laťky apod. Vymyslete takovou laťku délky 9 dm, aby se s ní dalo měřit po 1 dm, a aby měla co nejméně rysek.

Poznámka 11. 1 Znají včely geometrii?

Jestliže jste někdy viděli včelí plást, určitě vás upoutala jeho pravidelnost, s jakou je vybudován. V kolmém řezu tvoří stěny buňky pravidelný šestiúhelník a buňky jsou seskupeny k sobě tak, že pokrývají celou rovinu plástu. Proč si vlastně včely vybraly pravidelný šestiúhelník a ne třeba jiný mnohoúhelník, popřípadě i nepravidelný? Ze všech čtyřúhelníků má při daném obvodu největší obsah pravidelný čtyřúhelník nebo-li čtverec. Tento poznatek platí obecně - ze všech mnohoúhelníků má při daném obsahu největší obsah vždy příslušný pravidelný mnohoúhelník. Proto včela staví buňky z pravidelných mnohoúhelníků. Spotřebuje méně vosku, než kdyby stavěla plást z nepravidelných mnohoúhelníků. A proč právě šestiúhelník? Na to odpoví otázka: „Které shodné pravidelné mnohoúhelníky pokryjí bez překrývání a bez mezer celou rovinu a zároveň mají největší obsah?“ Má-li být okolí bodu *A* pokryto pravidelnými *n*-úhelníky bez překrývání a mezer, musí být součet velikostí vnitřních úhlů těchto pravidelných *n*-úhelníků roven 360°. Jelikož to jsou shodné pravidelné *n*-úhelníky, jsou jeho všechny vnitřní úhly stejně velké a velikost každého z nich je (I.) $\alpha = \frac{360^\circ}{k}$, kde *k* je počet pravidelných *n*-úhelníků se společným vrcholem *A*. Součet vnitřních úhlů pravidelného *n*-úhelníka je (II.) $(n-2)\frac{180^\circ}{n}$. Vztahy (I.) a (II.) vyjadřují oba velikost vnitřních úhlů pravidelných *n*-úhelníků pokrývajících okolí bodu *A*, proto pak platí rovnost $\frac{360^\circ}{k} = (n-2)\frac{180^\circ}{n}$ a po úpravách dostaneme (III.) $k = 2 + \frac{4}{n-2}$, kde *k* a *n* jsou přirozená čísla, $n \geq 3$, protože neexistuje menší *n*-úhelník s menším počtem vrcholů než *n* = 3. Když do vztahu (III.) dosazujeme postupně *n* = 3, 4, 5, 6, …, zjistíme, že *k* je přirozené číslo jen pro *n* = 3, 4 a 6. Pro *n* = 5 je $k = \frac{10}{3}$ a při *n* > 6 je jmenovatel *n* – 2 vždy větší než čitatel 4 a *k* pak nemůže být přirozené číslo. Tedy mohou to být jen pravidelné trojúhelníky, šestiúhelníky či čtverce. A nyní k obsahům. Obsah rovnostranného trojúhelníka je $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Obsah čtverce je $S = a^2$. A obsah pravidelného šestiúhelníka (tvořeného ze šesti rovnostranných trojúhelníků) je $S = \frac{n \cdot a \cdot \rho}{2} = \frac{6 \cdot a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

A nyní porovnáme výsledky a zjistíme, že: $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} < a^2 < \frac{a \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2}$. Z toho vidíme, že největší obsah má pravidelný šestiúhelník. Pro názornost si uvedeme příklad. Když si zvolíme například obvod = 24 cm, pak obsah rovnostranného trojúhelníka o straně *a* = 8 je

$S=\frac{a\cdot v}{2}\doteq\frac{8\cdot 6{,}9}{2}\doteq 27{,}6.$ Obsah čtverce o straně $a = 6$ je $S = a^2 = 36$ a obsah pravidelného šestiúhelníka o straně $a = 4$ je $S=\frac{n\cdot a\cdot\rho}{2}\doteq\frac{6\cdot 4\cdot 3{,}464}{2}\doteq 41{,}57.$ Že by se včely řídily geometrickými výpočty? To samozřejmě ne, ale vypěstovaly si zkušenosti statisíců generací jejich předků. Nezasluhuje příroda právem obdiv?

11.5 Kružnice, kruh

<u>Kružnice:</u> množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu *S* (středu kružnice) této roviny danou vzdálenost *r*. Značí se *k*(*S*,*r*).
$O = 2\pi r = \pi d$ (Ludolfovo číslo $\pi \doteq 3{,}141592654$)

<u>Poloměr:</u> úsečka, jejímž jedním krajním bodem je střed kružnice a druhým, libovolný bod kružnice.

<u>Tětiva:</u> úsečka, jejímiž krajními body jsou dva různé body kružnice.

<u>Průměr:</u> tětiva procházející středem kružnice.

<u>Tečna:</u> přímka t, která má s kružnicí právě jeden společný bod.

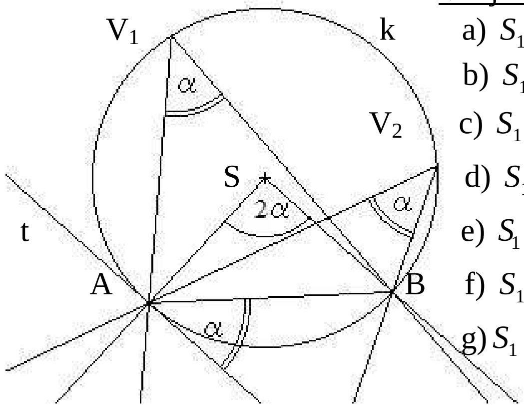
<u>Sečna:</u> přímka s, která má s kružnicí právě dva společné body.

<u>Vnější přímka kružnice:</u> přímka, která nemá s kružnicí žádný společný bod.

<u>Obvodový úhel:</u> libovolná sečna *p* rozdělí kružnici *k* průsečíky *A*, *B* na dvě části zvané oblouky kružnice s krajními body *A*, *B*. Pak úhel *AVB*, jehož vrcholem je libovolný bod kružnice *k*, který nenáleží danému oblouku *AB*, se nazývá obvodový. Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku jsou shodné, jejich velikost je rovna polovině velikosti středového úhlu téhož oblouku. Thaletova věta:všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

<u>Středový úhel:</u> úhel *ASB*, jehož vrcholem je střed *S* kružnice *k*, rameny jsou polopřímky *SA*, *SB* a v němž leží celý oblouk *AB*.

<u>Úsekový úhel:</u> úhel, který svírá tětiva *AB* s tečnou *t*, jenž prochází jedním z krajních bodů tětivy. Úsekový úhel je shodný s obvodovým úhlem téhož oblouku (polovina středového úhlu).



Obr. 11. 7 Obvodový, středový a úsekový úhel

<u>Vzájemná poloha dvou kružnic:</u>

a) $S_1 = S_2 \wedge r_1 = r_2$ - totožné kružnice

b) $S_1 = S_2 \wedge r_1 > r_2$ - soustředné kružnice

c) $S_1 \neq S_2 \wedge r_1 + r_2 < |S_1S_2|, k_1 \cap k_2 = \emptyset$ - 4 spol. tečny

d) $S_1 \neq S_2 \wedge r_1 + r_2 = |S_1S_2|$ - vnější dotyk, 3 spol. tečny

e) $S_1 \neq S_2 \wedge r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$ - 2 spol. body, 2 spol. tečny

f) $S_1 \neq S_2 \wedge r_1 - r_2 = |S_1S_2|$ - vnitřní dotyk, 1 spol. tečna

g) $S_1 \neq S_2 \wedge r_1 - r_2 > |S_1S_2|, k_1 \cap k_2 = \emptyset$ - není spol. tečna

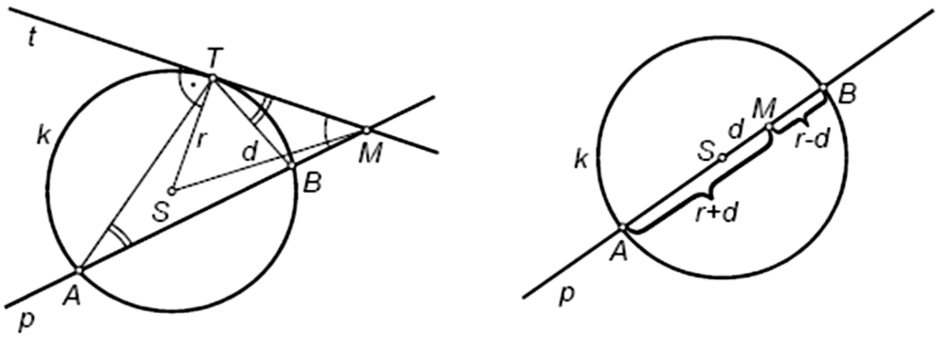
(Vysvětlení: spol. znamená společné)

Mocnost bodu ke kružnici:

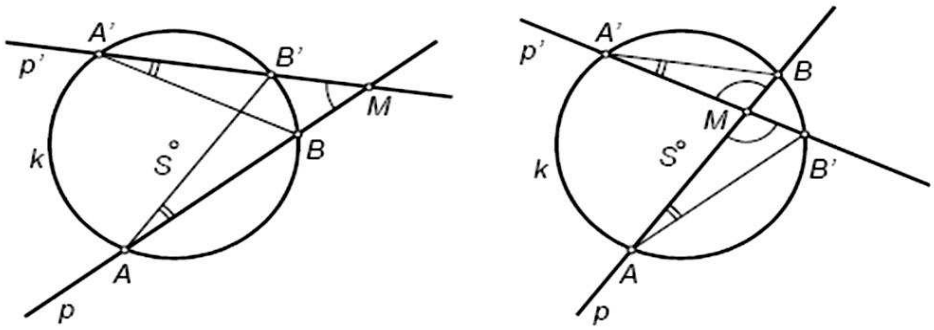
$|MT|^2 = |MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| = d^2 - r^2$ pro vnější bod M kružnice $k(S, r)$.

$|MT|^2 = |MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| = r^2 - d^2$ pro vnitřní bod M kružnice $k(S, r)$.

Pomocí mocnosti bodu ke kružnici lze získat tečny vedené z bodu M ke kružnici k.



Obr. 11. 8 Mocnost bodu ke kružnici pomocí tečny a sečny



Obr. 11. 9 Mocnost bodu ke kružnici pomocí dvou sečen

Kruh: množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S (středu kruhu) této roviny vzdálenost menší nebo rovnou danému kladnému číslu r (poloměr kruhu).

Obsah kruhu: $S = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Kruhová výseč: průnik kruhu $K(S, r)$ a daného středového úhlu ASB.

Obsah kruhové výseče: $S_\nabla = \dfrac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ (α – středový úhel ve stupních),

$S_\nabla = \dfrac{r^2}{2} \cdot x$ (x – středový úhel v radiánech)

Kruhová úseč: průnik kruhu $K(S, r)$ a poloroviny s hraniční přímkou AB, kde A, B jsou dva různé body hranice kruhu. Obsah kruhové úseče: $S = \dfrac{r^2}{2}(x - \sin x)$ (x – středový úhel v radiánech).

Délka kruhového oblouku: $l = \dfrac{2\pi r}{360^\circ} \cdot \alpha$ (α – středový úhel ve stupních),

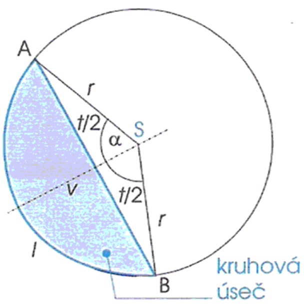
$l = r \cdot x$ (x – středový úhel v radiánech).

Mezikruží se středem S a poloměry r_1, r_2 ($r_1 < r_2$) je množina všech bodů roviny, které mají od bodu S této roviny vzdálenosti r vymezené nerovnostmi $r_1 \leq r \leq r_2$. Jsou to body kruhu $K_2(S, r_2)$, které nejsou vnitřními body kruhu $K_1(S, r_1)$.

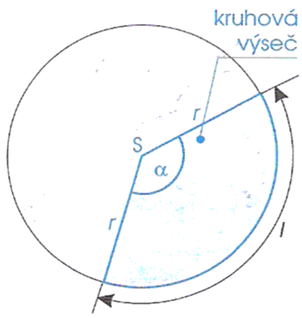
$$S = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \pi\left(r_1 + r_2\right)\cdot\left(r_1 - r_2\right) = \frac{\pi}{4}\left(d_1^2 - d_2^2\right).$$

Výseč mezikruží: průnik mezikruží a středového úhlu jeho hraničních kružnic.

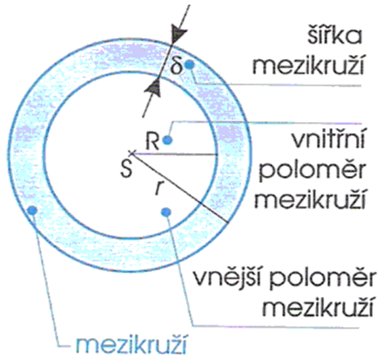
$$S = \frac{\pi}{360^\circ}\left(r_1^2 - r_2^2\right)\cdot \alpha = \frac{1}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right)\cdot x.$$



Obr. 11. 10 Kruhová úseč



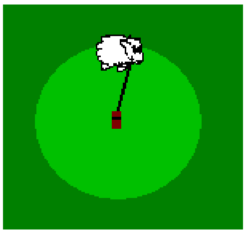
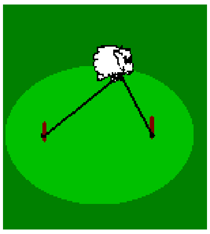
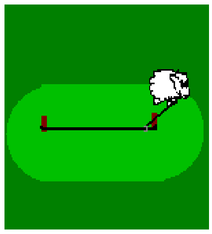
Obr. 11. 11 Kruhová výseč



Obr. 11. 12 Mezikruží

PŘÍKLADY:

Příklad 11. 10 Ovce

Když přivážeme ovci k jednomu kolíku provazem, tak vyžere z trávy kruh (kolík je střed kruhu). Pokud protáhneme kroužkem u krku provaz, jehož konce přivážeme ke dvěma kolíkům, vyžere nám elipsu (kolíky nám značí ohniska elipsy).
Budeme-li chtít ovál, tak napneme provaz mezi dva kolíky, na něj navlečeme kroužek a na ten přivážeme provaz, na jehož druhém konci je ovce.

Příklad 11. 11 Letadlo s křídly tvaru elipsa

Příklad 11. 12 Johannes Kepler

Počátkem sedmnáctého století učinil mimořádný objev. Dokázal pečlivou analýzou svých pozorování, že planety se pohybují kolem slunce po drahách tvaru elipsy a Slunce se nachází přesně v jejich společném ohnisku. Dále zjistil, že každá planeta zrychluje svůj pohyb po oběžné dráze, když se blíží ke Slunci, a naopak zpomaluje, když se od Slunce vzdaluje. Odhalil navíc jednoduché pravidlo, jímž se ono zrychlování a zpomalování řídí. Představíme-li si pomyslnou čáru spojující Slunce a planetu, pak mají dle Keplera výseče vymezené pohybem této čáry za stejnou jednotku času stejnou plochu. Proč se planety takto pohybují kolem slunce vysvětlil až Isaac Newton, když objevil „gravitační“ přitažlivou sílu.

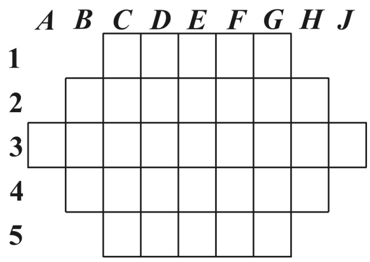
Příklad 11. 13 Pohyb Země kolem slunce

Země obíhá kolem Slunce přibližně po kruhové dráze s průměrem 300 milionů km a potřebuje na jeden oběh zhruba 366 dní. Jakou vteřinovou rychlostí se pohybuje Země za zjednodušujícího předpokladu, že oběžná dráha je kružnice?

Příklad 11. 14 Jakou tajnost skrývá počtářská křížovka, kterou je třeba vyplnit svisle správnými číslicemi:

A. Čtverec šťastného čísla. ***B.*** Největší dvojciferné prvočíslo; jediné sudé prvočíslo. ***C.*** Počet zubů zdravého dospělého člověka; počet řemesel (a desátá je bída); počet prázdninových dní v červenci a srpnu zvětšený o jednu. ***D.*** Nejmenší přirozené číslo; sudé číslo dělitelné 317; „nejšťastnější“ číslo. ***E.*** Počet úhlopříček dvanáctiúhelníku (obráceně); počet očí člověka; román V. Huga (obráceně). ***F.*** Počet hradů v Bratislavě; tisícinásobek čísla 0,333; nejhorší známka na středních školách. ***G.*** Součet čísel 1 až 10; součet druhého a třetího prvočísla; atomové číslo rtuti. ***H.*** Počet dní v týdnu krát počet měsíců v roce; počet vrcholů rovnostranného trojúhelníku. ***J.*** Nejmenší dokonalé číslo.

Vodorovně potom čtěte: 1. První část tajenky. **2.** Druhá část tajenky. **3.** Třetí část tajenky. **4.** Čtvrtá část tajenky. **5.** Pátá část tajenky. Jakmile křížovku vyluštíte, dostanete číslo, které v geometrii používáme dost často (za první číslicí je třeba napsat desetinnou čárku).



12. Kouzla, vtipy, ostatní

Příklad 12. 1 Úžasná kalkulačka

Podejte komukoliv kalkulačku a požádejte ho, aby do ní naťukal dvě stejná libovolná trojciferná čísla, tedy jedno šesticiferné číslo. Oznamte dotyčnému, že šance, že náhodné číslo bude dělitelné beze zbytku 7, je 1:7. Vybídněte ho, ať to zkusí. Nějaký zbytek? Ne? Tak to bylo štěstí. Řekněte mu, ať vydělí číslo na displeji 11. Šance jsou 1:11. Nějaký zbytek? Ne? No to je úžasné! Teď zkuste číslo vydělit 13. Zbylo něco? Nic? Neuvěřitelné!! Nakonec se dotyčného zeptejte, jaký je výsledek. Sdělí vám původní trojciferné číslo!!! Jak je to možné?

Příklad 12. 2 Datum narození „zázrakem" objevené na kalkulačce

Podejte komukoliv kalkulačku a požádejte ho, aby naťukal číslo měsíce, v němž se narodil a pak vynásobil 4, přičetl 13, vynásobil 25, odečetl 200, přičetl den, kdy se narodil, vynásobil 2, odečetl 40, vynásobil 50, přičetl poslední dvě číslice roku, v němž se narodil a odečetl 10500. Poté ho požádejte, ať vám ukáže výsledek na kalkulačce a přečtěte mu jeho datum narození. První jedna nebo dvě číslice udávají měsíc narození, další dvě číslice den a poslední dvě číslice rok narození.

Příklad 12. 3 Tajné šestky

Tuto hru je možné si zahrát s kýmkoliv a pokaždé zvítězíte. Požádejte dotyčného, aby vám řekl číslo od 1 do 5. Pak si takové číslo vyberte i vy a obě sečtěte. Tímto způsobem pokračujte, dokud jeden z vás nedosáhne 50 a nevyhraje. Pokud chcete vždy vyhrát, snažte se co nejdříve dosáhnout následujících součtů: 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44. Pokud tedy náš protivník začne např. s číslem 3, přičtěte 5, abyste dostal 8. Ať už si pak zvolí jakékoliv další číslo, vždy jej doplňte do 6, aby nový součet vyšel 14, potom 20, dále 26 atd. To vám zaručí, že vždy dosáhnete čísla 50 jako první v pořadí, a tedy jako vítěz.

Příklad 12. 4 Dosáhněte čísla 100 jako první

Hrají dva lidé. První hráč řekne libovolné přirozené číslo ne větší než 10. Druhý hráč přičte k tomuto číslu další přirozené číslo od 1 do 10 a oznámí součet. První hráč opět přičte libovolné přirozené číslo ne větší než 10 a oznámí výsledek a tak pokračují, dokud poslední součet nedosáhne čísla 100. Vyhraje ten, kdo první tohoto čísla dosáhne. Jak je možné zvítězit?

Příklad 12. 5 Magické domino

Požádejte kohokoliv, aby si z dominové sady vybral libovolnou kostku, ale neukazoval vám čísla. Pak mu řekněte, aby jedno z čísel vynásobil 5, přičetl k němu 7, vynásobil je číslem 2 a nakonec přičetl druhé číslo na kostce. Nyní se ho zeptejte se na výsledek. Z něj totiž dokážete uhodnout obě čísla na kostce. Stačí jen odečíst 14 a výsledné dvojciferné číslo tvoří právě čísla na kostce.

Příklad 12. 6 Trik s rukama – násobky devíti

Ruce se hodí nejen k počítání, ale i k násobení. Následující trik vám pomůže rychle spočítat násobky devíti. Obraťte ruce dlaněmi k sobě a zleva si pomyslně označte prsty čísly od 1 do 10. Nyní jednoduše ohněte ten prst, který označuje číslo, jehož násobek chcete spočítat. Když například potřebujete vědět, kolik je 7×9, ohněte sedmý prst. Nalevo od něj máte teď 6 prstů a napravo 3, takže výsledek je 63.

Příklad 12. 7 Násobení na prstech

Jistě umíte sčítat pomocí prstů levé a pravé ruky, ale dovedete na prstech násobit? Násobky devíti jsme se naučili v předchozím příkladě. Násobení čísel větších než pět a menších než deset je o trochu složitější. Vysvětlíme si to na příkladě: $6 \cdot 8 = 48$. Když na prstech vyjadřujeme číslo 6, stačí nám vztyčit jeden prst (protože od činitelů odečítáme vždy 5) a už víme, že se jedná o šestku. Když na prstech vyjadřujeme číslo 8, stačí nám vztyčit tři prsty a už víme, že se jedná o osmičku. Na levé ruce proto vztyčíme 1 prst pro vyjádření čísla šest, zbylé čtyři prsty necháme ohnuté. Na pravé ruce vztyčíme tři prsty, pro vyjádření čísla osm, a zbylé dva prsty necháme ohnuté. Vztyčené prsty sečteme, znamenají pro nás počet desítek. V našem případě: $1 + 3 = 4$, tedy máme 40. Počet ohnutých prstů na levé ruce vynásobíme počtem ohnutých prstů na pravé ruce, to je pro nás počet jednotek. Tedy: $4 \cdot 2 = 8$. Nyní naše výsledky sečteme: $40 + 8 = 48$. Vyzkoušejte si například součin $7 \cdot 8$, zda-li vám vyjde 56.

Příklad 12. 8 Magický čtverec

V magickém čtverci dávají čísla v každé řadě a v každém sloupci stejnou sumu – tzv. magický součet. Podívejte se na čtverec a zkuste tento magický součet zjistit. Je stejný pro každou řadu a každý sloupec? A nyní sečtěte: a) čísla v obou úhlopříčkách; b) po 4 číslech v každém rohu; c) 4 čísla v jednotlivých rozích; d) 4 čísla uprostřed. Celkem lze na tomto obrazci najít 86 různých čtveřic, jejichž součet činí 34. Byl to první magický čtverec, který se v Evropě objevil a je možné jej najít na obraze A. Dürera z roku 1514. Malíři se dokonce podařilo tento letopočet do čtverce vkomponovat.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Příklad 12. 9 Jak chytře chybovat

Matematikové jsou často velmi obezřetní lidé, jak nám dokazuje i tato historka: astronom, fyzik a matematik se vydali vlakem do Skotska a náhle spatřili oknem venku na poli černou ovci. „Zajímavé“, povídá astronom, „skotské ovce jsou černé!“ Fyzik, poněkud udiven, opáčí: „Chtěl jste snad říci, že některé skotské ovce jsou černé?“ Ale matematikovi se i tento výrok zdá poněkud ukvapený: „Myslím, že vy oba jste chtěli říci, že existuje nejméně jedna skotská ovce, která je alespoň z jedné strany černá.“

Příklad 12. 10 Sázka

Chcete svého kamaráda či známého překvapit nevšedními schopnostmi? Uzavřete s ním sázku, že když napíše libovolné trojmístné číslo, tak vy před toto číslo nebo za toto číslo připíšete jiné trojmístné číslo, přičemž vyhraje on v případě, že takto vzniklé šestimístné číslo nebude beze zbytku dělitelné číslem 37, anebo naopak vyhrajete vy, pokud toto šestimístné číslo dělitelné 37 bude. Možná se vám na první pohled zdá, že s jistotou prohrajete, ale pravý opak je pravdou. Jak tedy na výhru? Poté, co vám dotyčný sdělí své trojčíslí, tak vždy připište to své tak, aby součet vašeho a jeho trojčíslí byl roven číslům 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 nebo 999. Máte tedy na výběr. Když např. dotyčný napíše číslo 425, vy můžete zvolit číslo 241, protože 425 + 241 = 666 nebo můžete připsat i 352, protože 425 + 352 = 777 apod. Na ostatní možnosti jistě už sami přijdete.

Příklad 12. 11 Egyptská čísla

Egyptská čísla se hodila ke sčítání a odečítání, ale násobit se s nimi nedalo.
Z toho důvodu Egypťané vymysleli geniální způsob násobení. Jakmile se tento trik naučíte, můžete jej také používat: chceme např. vědět, kolik je 13×23. K tomu je třeba si vytvořit dva sloupce čísel. Do levého napište 1, 2, 4 atd. (vždy dvojnásobek předchozího čísla), ale nepřesáhněte námi v příkladu požadovaný násobek 13. Pravý sloupec začněte druhým číslem (v tomto případě 23) a postupně jej násobte dvěma, dokud v obou sloupcích nebude stejný počet čísel. Vlevo dostanete součet 13 pouze jedním způsobem (8 + 4 + 1); ostatní čísla škrtněte. Poté přeškrtněte také protější číslo v pravém sloupci a zbylá sečtěte.

Ukázka:	13	× 23	
	1	23	
	~~2~~	~~46~~	(právě tato dvě čísla jsou škrtnutá)
	4	92	
	8	184	
výsledek:	13	**299**	

Příklad 12. 12 Římská čísla

Římská čísla byla používána Evropany po celých 2000 let, přičemž i dnes je možné je vidět např. na ciferních hodinách, ve jménech panovníků či na titulcích jako roky vzniku filmů zejména do období 80. let 20. století a na některých domech (rok stavby).
Malý tahák pro případ, že neznáte římské číslice: I = 1, II = 2, III = 3, IV = 4, V = 5, VI = 6, VII = 7, VIII = 8, IX = 9, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.
Velkým problémem římských čísel však bylo jejich násobení. Zde je ukázka toho, jak bylo složité vynásobit např. 123×165:

```
                                                                                            CXXIII
                                                                                              CLXV
                                              ------------------------------------------------------
                                                          D                     LL              VVV
                                               M                 CC                    XXX
                                          MMMMM           DD                   LLL
                              MMMMMMMMMMMMM                     CCC
     ---------------------------------------------------------------------------------------------
MMMMMMMMMMMMMMMMMMM                       DDD   CCCCC        LLLLL    XXX        VVV
                                                 CCCCCCC            L  XXXX       V
                                          DDDD
      MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM
      --------------------------------------------------------------------------------------
      MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMCCLXXXXV                      (výsledek je tedy 20 295)
```

Příklad 12. 13   Zápalky 1

Ze zápalek si sestavte tyto nesprávné rovnosti a přemístěním jedné zápalky vytvořte správný výraz (C sestavte ze tří zápalek 2 vodorovně a jednu svisle):
a) X + V = IV
b) L + L = L
c) XII + IX = II
d) X = VII – III
e) VI – VI = XI
f) XXII – IV = XXV
g) IX – IX = V
h) XV + XV = I
i) XIV – V = XX
j) VIII + IV = XVII

Příklad 12. 14   Zápalky 2

a) Složte ze 7 zápalek dle obrázku rovnost, která neplatí. Přemístěním jedné zápalky z ní udělejte rovnost.

VII = I

b) Ze sedmi zápalek vytvořte zlomek $\frac{1}{7}$. Přemístěním jedné zápalky vytvořte zlomek $\frac{1}{3}$.

$$\frac{I}{VII}$$

c) Přemístěním pouhých 3 zápalek vznikne rovnice naprosto správná. (Čísla si složte ze zápalek stejně jak se zobrazují na kalkulačce.)

$$\frac{332}{274} = \frac{972}{824}$$

d) Vytvořte se zápalek číslo dle obrázku a přemístěním dvou zápalek ho změňte na 2000.

I 4 I 4

Příklad 12. 15 Park

Muž bydlí nedaleko kruhového parku. Obejít ho ve směru hodinových ručiček mu trvá 1 hodinu a 20 minut, ale opačným směrem pouhých 80 minut. Proč?

Příklad 12. 16 Ruce

Obraťte pravou ruku dlaní vzhůru a sevřete ji v pěst tak, abyste neměli ani jeden prst vztyčený. Tato pozice ruky bude znamenat číslo nula. Nyní vztyčte palec, který bude znamenat číslo 1. Palec zastrčte a vztyčte místo něj ukazovák. Hodnota tohoto prstu nebude pro tentokrát jedna, ale 2, protože je druhý v pořadí. Pokud schováte ukazováček zpět a vytrčíte prostředníček, tak to nebude znamenat na první pohled logickou trojku, protože číslo 3 nám je schopen vytvořit vytrčený palec s ukazováčkem dohromady (1 + 2 = 3).
Nový prst tedy použijeme pouze tehdy, když to bude nezbytně nutné. Pokud tedy budeme chtít znázornit prsty číslo 4, v tomto případě už nám palec s ukazovákem stačit nebude, a proto teprve nyní potřebujeme další prst. Pro číslo 4 musíme tedy vytrčit palec a prostředníček (1 + 3 = 4). Proč je tento neobvyklý způsob počítání čísel na prstech lepší, než nám známý, tedy že jeden prst se rovná stále číslo 1? Protože při tomto neobvyklém, avšak logickém způsobu je možné spočítat pomocí všech deseti prstů na obou rukách mnohem vyšší hodnotu čísel, než při běžné úvaze, že jeden prst se rovná číslo jedna.
Nyní máte za úkol ukázat pomocí prstů čísla 11, 12, 13, 14, 15, a 16.

Příklad 12. 17

Je možno za 5 vteřin vynásobit číslo 105 263 157 894 736 842 dvěma? A je možné číslo 1 034 482 758 620 689 655 172 413 793 vynásobit třemi? Jak je to možné zvládnout?

Příklad 12. 18

Postavte si na šachovnici jezdce (koně) a řekněte, respektive spočítejte, kolik různých tahů může udělat. Poté udělejte totéž s dámou.

Příklad 12. 19

Josef se snaží přemístit šachového koně z levého dolního rohu šachovnice a1 do pravého horního rohu h8 tak, aby kůň při přemisťování prošel každým polem šachovnice právě jednou. Zatím se mu to nedaří. Rozeberte úlohu teoreticky a vysvětlete mu, jak to je.

Příklad 12. 20

a) Existuje celkem 4 860 různých možností, jak na šachovnici rozestavit 5 královen tak, aby ovládaly všechna pole. Najděte aspoň 2 možnosti.
b) Pokuste se rozestavit na šachovnici osm královen tak, aby se navzájem neohrožovaly (tak, aby každá stála na jiném sloupci, jiném řádku a jiné úhlopříčce).

Příklad 12. 21

Násobíme-li číslo 15 873 násobky čísla 7 menšími než 70, (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63) dostaneme součiny složené vždy ze stejných číslic. Např. 15 873 · 35 = 555 555. Vysvětlete proč tomu tak je.

Příklad 12. 22 Objem broků

Po probrání učiva o kouli přinesl učitel do třídy v půllitrovém kalibrovaném poháru lovecké broky. Dal úlohu vypočítat objem destičky, kterou je možno z těchto broků ulít. Pilnější žáci si přáli ihned se pustit do práce, přičemž chtěli odměřit průměr každé kuličky, aby mohli vypočítat objem. Neměli však k tomu vhodné měřicí zařízení. Někteří navrhovali kuličky zvážit a jejich váhu dělit měrnou hmotností olova, neboť kuličky byly právě z olova. Neměli však ani váhu, ani neznali měrnou hmotnost olova. Našel se však mezi nimi žák, který navrhl, jak je možné bez vah a bez měření průměru kuliček rychle a přesně určit objem všech kuliček. Co tento žák navrhoval?

Příklad 12. 23 Kuličky

Do krabičky dejte 8 žlutých, 6 modrých a 5 červených kuliček, které promíchejte a vytáhněte 2 z nich. Jakou barvu budou mít? Stoprocentně to vědět nemůžeme, ale co je nejpravděpodobnější? Že by žlutá? Nebo snad modrá, či dokonce červená? Napište si svůj tip, která kulička se objeví nejpravděpodobněji, která bude na druhém, a která bude na třetím místě ve stupnici pravděpodobnosti. Poté proveďte 100 pokusů s promícháváním a vytahováním dvou kuliček a zapisujte si průběžné výsledky. Samozřejmě nezapomeňte vždy obě vytažené kuličky vrátit zpět, protože výpočet pravděpodobnosti musí vycházet vždy ze stejného počtu kuliček. Místo kuliček je možné zvolit si jiný, pro vás eventuálně dostupnější předmět - představivosti se meze nekladou. Nakonec si s kolegy sdělte, jak se váš tip o pravděpodobnosti té které vytažené barvy shodoval s realitou.

Příklad 12. 24 Ruleta

Je možné, aby při dvou pokusech roztočení rulety bylo stejně sudých i lichých výsledků? A je jisté, že při dvou roztočeních bude stejně sudých i lichých výsledků? A třetí otázka zní, zda-li je jisté, nebo nemožné, aby bylo stejně lichých i sudých výsledků, když roztočíte ruletu 3×, 4× a 5×. Pokud máte možnost, vyzkoušejte si to přímo, v opačném případě prodiskutujte možnosti se svými kamarády či známými.

Příklad 12. 25 Peníze

Dejte dohromady 10 mincí, např. jednokorunových a vyhoďte je do vzduchu tak, aby spadly blízko u vás. Poté se podívejte, kolik z korun je obrácených číslicí nahoru a kolik z nich naopak znakem nahoru. Spadly dvě na jednu stranu a osm na druhou? Nebo leží čtyři na jedné a šest na druhé straně? Či dopadly zcela jinak? Zapište si váš výsledek a zkuste odhadnout, zda-li je při větším počtu hodů vyšší pravděpodobnost to, že spadne 6× znak a 4× číslice (či naopak, na tom nyní nezáleží), anebo zda-li je pravděpodobnější, že spadne 5× znak a 5× číslice. Po vašem tipu si vyzkoušejte hodit mincemi např. 20× a poté si porovnejte reálný výsledek s vaším odhadem. Je třeba být trpělivý, protože čím méně hodů je, tím odlišnější výsledek může nastat, než v případě, že vytrváte a hodíte mincemi alespoň 20×. Výsledek je možný pokročilejšími studenty i spočítat, a to pomocí *teorie pravděpodobnosti*. I v tomto případě platí, že čím menší bude počet hodů, tím více se bude lišit vypočtený výsledek od reálného, a čím bude hodů naopak více, tím podobnější bude tento výsledek s naším výpočtem.

Po provedeném úkolu s penězi, u kterého zjistíte, že případ 5 + 5 je více pravděpodobný, než případ 6 + 4 nebo případ 4 + 6 (ovšem bráno každý zvlášť!), avšak případ, že od jednoho druhu, ať už znaku nebo číslice padne 6 a od druhého 4, už je pravděpodobnější než případ

5 + 5. A nyní – co myslíte, bude tomu tak i tehdy, vyhodíte-li mince postupně jednu po druhé a ne jako předtím všechny najednou. Výsledek si zjistěte sami provedením tohoto nového úkolu.

Příklad 12. 26 Narozený

zeptejte se kohokoliv, kolikátým narozeným dítětem v rodině byl. Co myslíte, je pravděpodobnější, že výsledek jeho sdělení bude sudý, nebo lichý? Ano správně, záleží na počtu jeho sourozenců; pokud bude v rodině např. jedno, tři nebo pět dětí, bude větší pravděpodobnost lichého výsledku, avšak v případě dvou či čtyř dětí v rodině bude pravděpodobnost sudého a lichého výsledku stejná.

Příklad 12. 27 V první třídě

Na základní škole...Přijde takhle učitelka do první třídy a ptá se: "Tak, děti, už jste nějakou tu hodinu matematiky měly, tak mi povězte, kolikpak je 2 + 1" ... ticho, nikdo se nehlásí... "Ale děti, nedělejte mi ostudu" ... jedna holčička se tedy přihlásí a povídá: "No, já teda nevím, kolik to je, ale určitě vím, že je to to samé jako 1 + 2, protože sčítání je komutativní operace na tělese reálných čísel..."

Příklad 12. 28 Derivace

Jednou takhle vtrhne naštvaná zuřivá derivace do hospody, kam chodívaj funkce... Polynomy rychle vypadnou, ostatní funkce taky dostanou strach a kliděj se jí z cesty, jen e^x tam zůstane sedět...Derivace se rozčíli, a zařve: „A co ty, ty se mě nebojíš?“ No, a e^x v klidu prohlásí: „Já jsem přece e^x, samozřejmě ze se tě nebojím.“ A ta derivace prohlásí: "No jo, jenomže já jsem dneska nasraná, a derivuju podle *y* !!!

Příklad 12. 29 Zamilovaní matfyzáci

Dva zamilovaní matfyzáci leží na koleji v postýlce a skoro usínají. Dívka začne svého drahého hladit po tvářičce a něžně zašeptá: "Miláčku, myslíš na to, na co myslím já?"
"Ano, zlatíčko." nakloní se jí k uchu chlapec.
"A kolik ti to vyšlo?"

Příklad 12. 30 Průvodce vyčerpaného matfyzáka hláškami přednášejících

Co si myslí, když říkají:
"Je to jasné" - nechce se mi psát tu hroznou spoustu mezikroků
"Je to triviální" - kdybych vám měl ukazovat, jak jsem k tomu došel, tak byste to nepochopili
"Je to zřejmé" - důkaz má alespoň tři stránky
"Doma si jistě snadno dopočítáte..." - jak se to vlastně dělá?
"Tohle si ověřte sami..." - tahle část důkazu je tak dlouhá a nudná, že je na to mého času škoda
"Mám pro vás malou nápovědu" - je několik způsobů, jak to dokázat. Tohle je začátek toho nejsložitějšího
"je to podobné, jako v minulém případě" - alespoň jeden řádek důkazu je stejný jako v minulém důkazu
"až na pár maličkostí je váš důkaz v pořádku" - na vašem důkazu nemůžu najít nic špatného, vyjma toho, že by to nefungovalo, kdyby x byl jeden z měsíců Jupitera (populární hlavně

v aplikované matematice)
"probereme to jen stručně" - je to složité, ale už jsem v časovém skluzu, takže jim to ukážu všechno, ale budu prostě mluvit a psát rychleji.

Příklad 12. 31

Přijde nekonečný počet matematiků do baru.
První matematik: „Dám si pivo.“
Druhý matematik: „Dám si půl piva“
Třetí matematik: „Dám si čtvrt piva.“
Barman to nevydrží: „Vy jste ale banda blbců.“ A natočí jim dvě piva.

Příklad 12. 32

Přijde matfyzák do fotolabu a zadává zakázku.
Prodavač se ho zeptá: „***devět krát třináct?***“
Matfyzák odpoví: „***117, proč se ptáte?***“

Příklad 12. 33 Matematik, právník a doktor se baví, zda je lepší mít manželku nebo milenku.

Právník
říká, že lepší je milenka, protože rozvod dá práci.

Doktor
říká, že lepší je manželka, protože pomáhá snižovat stres.

Matematik
říká, že lepší je mít manželku i milenku,
protože manželka si bude myslet, že je u milenky,
milenka si bude myslet, že je u manželky, ...
a on si bude moci v klidu dělat nějakou matematiku :-)

Příklad 12. 34 Odpovědi na otázku, kolik je 2·2 ?

(student 1. ročníku): 4, bez přemýšlení

(student 2. ročníku): 4, přesně, po chvilce přemýšlení

(student 3. ročníku): vezme kalkulačku, zmáčkne pár tlačítek a odpoví 4

(student 4. ročníku): napíše program se sto řádky, odladí jej, spustí a odpoví 4.0*e*+00

(student 5. ročníku): navrhne nový programovací jazyk, který je jako stvořený na takové úlohy, implementuje jej, napíše program, spustí jej a odpoví : 4 , ale pochybuju, že jsem včera v noci odladil všechny chyby ...

(student před státnicemi): pláče : "Proč si myslíte, že musím znát všechny ty zavšivené konstanty zpaměti!"

13. Řešení některých příkladů

Př. 1.1 Jednoduché výroky „*A* bude hrát", „*B* bude hrát", … označíme písmeny ***A***, ***B***, … A slovní text převedeme do jazyka výrokové logiky. Dospějeme k závěru, že řešením je nalezení všech uspořádaných pětic pravdivostních hodnot jednotlivých výroků ***A, B, C, D, E,*** pro které jsou pravdivé výrokové formule $(A \Rightarrow B), [E \Rightarrow (A \wedge B)], (B \wedge C)', (C \Leftrightarrow D), (D \vee E)$. Nyní sestrojíme tabulku, v jejíž levé části napíšeme všech 32 (2^5) uspořádaných pětic výroků ***A, B, C, D, E***. Do záhlaví sloupců napíšeme výrokové formule a pak tabulku vyplníme.

A	***B***	***C***	***D***	***E***	$(A \wedge B)$	$(B \wedge C)$	$(A \Rightarrow B)$	$[E \Rightarrow (A \wedge B)]$	$(B \wedge C)'$	$(C \Leftrightarrow D)$	$(D \vee E)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	Dále nevyplňujeme	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	Dále nevyplňujeme		
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0

Výrokové formule jsou všechny současně pravdivé jen při uspořádané pětici pravdivostních hodnot (0, 0, 1, 1, 0) výroků (***A, B, C, D, E***), vyplývá z toho, že výroky ***A, D, E*** jsou nepravdivé a výroky ***C, D*** jsou pravdivé, neboli na led by měl trenér vyslat hráče ***C*** a ***D***.

Př. 1.2 O tom, která z uchazeček byla přijata, nelze rozhodnout. Text inzerátu není jednoznačný. Připouští dvojí výklad vyjádřený výrokovými formulemi $(A \vee B) \wedge C$ *a* $A \vee (B \wedge C)$, kde výrok *A* = „má středoškolské vzdělání", výrok *B* = „má 5 let praxi", výrok *C* = „ovládá těsnopis", tedy podle tabulky splňují podmínky inzerátu všechny tři uchazečky.

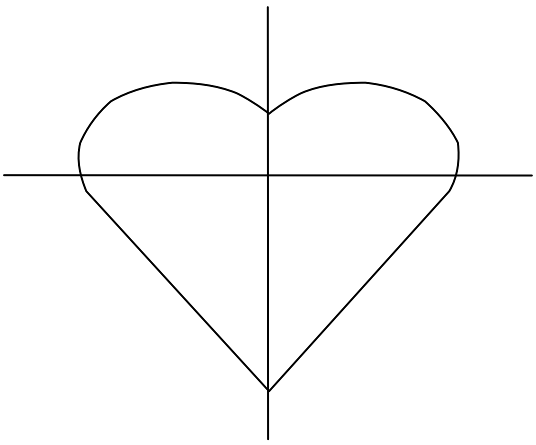
A	B	C	$(A \vee B) \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
0	1	1	1 **1** 1	0 **1** 1
1	1	0	1 **0** 0	1 **1** 0
1	0	0	1 **0** 0	1 **1** 0

Př. 1.3 Označení výroků: ***A*** = „*A* nehodu zavinil", ***B*** = „*B* nehodu zavinil", ***C*** = „*C* nehodu zavinil" a výrokové formule: a) $(B \vee C)$, b) $(C \Rightarrow A)$, c) $(A \Rightarrow B)$, d) $(B \Rightarrow C')$.

A	B	C	C´	$(B \vee C)$	$(C \Rightarrow A)$	$(A \Rightarrow B)$	$(B \Rightarrow C')$
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

Řešení nalezneme v řádcích, kde mají všechny výrokové formule a) – d) pravdivostní hodnotu 1. Platí tedy: ***A*** = 1, ***B*** = 1, ***C*** = 0 a dále ***A*** = 0, ***B*** = 1, ***C*** = 0. Tak tedy nehodu zavinil řidič *B* buď sám nebo s řidičem *A*.

Př. 1.4 a) Kdyby *A* viděl na hlavách *B*, *C* bílé klobouky, okamžitě by mohl prohlásit, že má černý klobouk, protože bílé klobouky byly jen dva. Ale protože, jak je uvedeno v textu, chvíli uvažoval, *A* dva bílé klobouky u *B*, *C* neviděl. **b)** Uvažujme možnost, že *A* viděl u *B* černý klobouk a u C bílý klobouk. V tomto případě uvažoval *A* takto:“Kdyby měl bílý klobouk, pak by b viděl dva klobouky bílé a mohl by okamžitě prohlásit, že má černý klobouk. Protože *B* mlčí, bílý klobouk nemám, a proto mám černý. **c)** Uvažujme možnost, že *A* viděl u *B* i *C* černé klobouky. V tomto případě uvažoval *A* takto: „Kdybych měl bílý klobouk, pak by *B* nebo *C* mohl usuzovat stejně jako já v předchozí úvaze, ale protože oba mlčí, bílý klobouk nemám a mám černý klobouk.“ Úvaha mudrce *A*, že má černý klobouk byla správná.
Př. 2.1 10 korun nikam nezmizelo, protože je třeba postupovat následovně: 300 Kč (původní cena) – 30 Kč (vrácený přeplatek) = 270 Kč (dohromady zaplatili) a jelikož měli platit jen 250 Kč a ne 270 Kč, proto těch 20 Kč (spropitné) odečteme a získáme tu cenu, kterou měli doopravdy platit, tedy 250 Kč. Zadání je tedy špatné proto, že je potřeba oněch 20 Kč odečíst a ne přičíst, jak je tomu nesprávně v zadání.
Př. 2.2 Chyba je v tom, že při dělení číslem jsme nezměnili znak nerovnosti, ačkoli je záporné číslo. Víme, že násobíme-li nebo dělíme-li nerovnost záporným číslem, musí se znak nerovnosti změnit na opačný, tedy 2 < 3.
Př. 2.3 Dle předpokladu je výraz (x – 2) roven nule, proto jím nelze dělit.
Př. 3.1 Sestavte si tabulku dle zadaných informací – nahoře písmena, zleva města – a označujte si nejen zadané, ale i z nich vyplývající údaje; a proto *A* je z Trenčína, *K* z Bratislavy, *R* z Levice, *O* je z Komárna, *P* je z Hlohovce a *F* je z Nitry; z toho vyplývá, že *A* a *F* jsou lékaři, *P* a *K* jsou učitelé, *R* a *O* jsou inženýři.
Př. 3.2 Z 90 lidí, kteří uměli německy, francouzsky, nebo německy i francouzsky, umělo 75 lidí německy; proto 15 neovládalo tento jazyk a 7 osob tedy neumělo francouzsky; 15 + 7 = 22, 90 – 22 = 68. Dva jazyky ovládalo 68 lidí.
Př. 3.3 4, přičemž každý zástupce získal jednoho studenta; jeden student se nepřihlásí nikam.



Př.3.4 od nejvyšší tvrdosti: *A*, *B*, *C*, *D*.
Př.3.5 4 (15-3=12; 10+6=16; 16-12=4)
Př.4.1 viz obr. srdce,
Př.4.2 Hledaná rovnice je $y = x\,(x - 1) = x^2 - x$. Jedná se o kvadratickou funkci. $y = 3\,000^2 - 3000$, $y = 9\,000\,000 - 3\,000$, $y = 8\,997\,000$ slovníků.
Př.4.3 $y = \dfrac{50+x}{x} = \dfrac{50}{x} + 1$ Kč. Jedná se o lineární lomenou funkci (nepřímá závislost). Z daného vztahu vyplývá, že čím více telefonních hovorů uskutečníme, tím méně za jednotlivé hovory zaplatíme.

Př. 4. 4
Rychlost je maximální zhruba v polovině zdvihu pro $\alpha = 90^o$
Maximální úhlová rychlost

$$\omega = 2.\pi.n$$

$$\omega = 2.\pi.13000/60$$

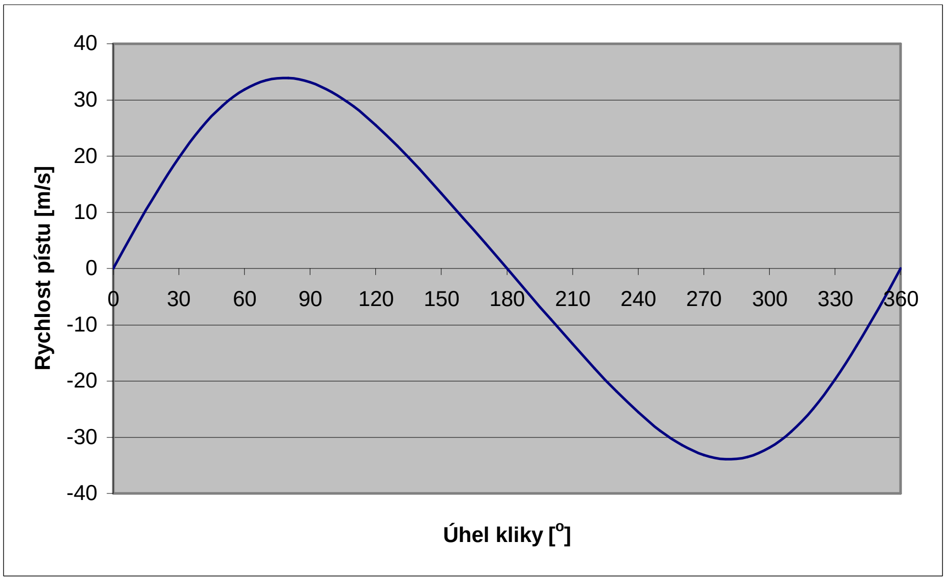
$$\omega = 1361 rad/s$$

Maximální rychlost pístu

$$v = r.\omega(\sin\alpha + 1/2\lambda.\sin 2\alpha)$$

$$v = 0{,}0244.1361\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.0{,}22.\sin 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{v = 33{,}2 m/s}}$$



Př. 4. 5

1)

$$y = 4{,}29x^2 + 79{,}31x - 7{,}38$$

$$y = 4{,}29.5{,}25^2 + 79{,}31.5{,}25 - 7{,}38$$

$$\underline{\underline{y = 527{,}24N}}$$

2) Maximální chyba snímače dle výrobce je $1\%.1000N = 10N$. Odchylka zobrazené hodnoty od etalonové zátěže je 8,5N, což je méně než maximální udávaná chyba. Snímač vyhovuje specifikaci.

Př. 5.1 DK: 1. krok: Řekněme, že větší z obou čísel má desítkový zápis *a, b, c*. Pak je toto číslo rovno výrazu 100*a* + 10*b* + *c* a po převrácení a odečtení obdržíme 100*a* + 10*b* + *c* – (100*c* + 10*b* + *a*), což je 100*a* + 10*b* + *c* – 100*c* - 10*b* – *a* = 99*a* - 99*c* = 99 (*a* - *c*). Protože *a* a *c* jsou celá čísla, vyplývá odtud, že po prvním kroku dostaneme vždy nějaký násobek čísla 99.

2. krok: Trojciferné násobky čísla 99 jsou 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, a 891. Na první pohled vidíme, že součtem prvního a třetího desetinného čísla je vždy 9. Takže když k výslednému číslu přičteme číslo převrácené, dostaneme devět stovek z prvních číslic, devět jednotek ze třetích číslic a dvakrát devadesát z prostředních číslic, což dohromady dává 900 + 9 + 180 = 1089

Př. 5.2 100.

Př. 5.3 a) 2, **b)** 12.

Př. 5.4 Myšlené číslo = *x*; podíly, které vzniknou dělením čísla *x* čísly 3, 4, 5 označme písmeny *a*, *b*, *c* a zbytky jako r_1, r_2, r_3; platí, že $x = 3a + r_1$, $x = 4b + r_2$, $x = 5c + r_3$; Z toho $r_1 = x - 3a$; $r_2 = x - 4b$; $r_3 = x - 5c$. Dosadíme: $S = 40\, r_1 + 45r_2 + 36\, r_3 = 40(x - 3a) + 45(x - 4b) + 36(x - 5c) = 121x - 120a - 180b - 180c$. Činitele 40, 45, 36 jsme vybrali tak, aby všichni sčítanci algebraického součtu byli beze zbytku dělitelní 60, kromě 121*x*. Pokud tento člen dělíme 60, dostaneme zbytek, který se rovná myšlenému číslu x. Např.: když je myšlené číslo 14; první zbytek je 2, druhé též 2 a třetí 4. ($r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 4$). $S = 40\cdot2 + 45\cdot2 + 36\cdot4 = 314$; 314 : 60 = 5 a zbytek je 14.

Př. 5.5 První číslo je x, druhé y; tedy $y + 99 - x$; protože x není větší než 50 a y leží mezi 51 a 99 není číslo $y + 99 – x$ menší než 100, ale není ani větší než 199. Je to tudíž vždy trojmístné číslo a jeho první číslice je 1. Přeškrtnutím jedničky se také číslo zmenší o 100; proto druhý výkon vede k číslu $y + 99 – 100 + 1 = y - x$; z toho $y - (y - x) = x$ dává výsledek x.

Př. 5.6 Bylo použito 9 jednociferných čísel (9 číslic), 90 dvojciferných (tj. 180 číslic) a 399 trojciferných (tj. 1197 číslic); celkem se použilo 9 + 180 + 1197 = 1386 číslic; číslice nula při zápisu jednociferných čísel se nevyskytuje, ale byla třeba u 9 dvojciferných čísel, u trojciferných vezmeme nejdříve čísla menší než 110 = 11 nul, dále větší než 109 a menší než 200 = dalších 9 nul. K napsání všech trojciferných čísel menších než 500 je třeba $4\cdot(11 + 9) = 80$ nul. Celkový počet hledaných nul je tedy 9 + 80 = 89.

Př. 5.7 Karel dal Ferdovi 4 housky a Jožka 1 housku => 15Kč : 5 = 3Kč; 4 × 3 = 12Kč; 1× 3 = 3 Kč.

Př. 5.8 Včely musí na 1 kg medu nasbírat 2,77 kg nektaru.

Př. 5.9 Jestliže za podstatnou část poslední vůle pokládáme poměr mezi matčiným podílem m a synovým podílem s a dále mezi matčiným podílem a dceřiným podílem d, vyplývá z toho, že dcera má dostat dvakrát menší podíl než matka, syn zase dvakrát větší než matka. Dědictví je třeba rozdělit na 7 dílů, z nichž 2 díly připadnou matce, 4 díly synovi a 1 díl dceři. Jiné stanovisko: manžel chtěl nechat ženě alespoň 1/3 majetku, zatímco podle předchozího výkladu dostala jen 2/7. Syn a dcera si mají rozdělit 2/3 z celého majetku v poměru 4 : 1. Syn tedy dostane $(2/15)\cdot4 = 8/15$ a dcera $(2/15)\cdot1 = 2/15$ celého majetku. Závěť nebyla formulována dostatečně jasně díky těmto dvěma variantám.

Př. 5.10 4,5 tuny, což je váha asi 9 býků po půl tuně.

Př. 5.11 40 000 l tekutin, což je asi 3 500 věder o 12 l.

Př. 5.12 28/5 × 28/5 × 28/5 se rovná asi 175, proto jedno pštrosí vejce se rovná téměř dvěma stům slepičích; jedním takovým 8-9 kilovým vejcem by se nasytilo téměř 100 lidí.

Př. 5.13 Cena obuvi se skládá z výrobní ceny a zisku; snížení ceny znamená snížení zisku; když 15 % ceny představuje 3/5 zisku, byl původní zisk 25 % ceny.

Př. 5.14 0,86 h = 51,6 min = 3096s; 3096s – 360s čekání = 2736 s; průměrnou rychlost tedy spočítáme vydělením dráhy časem 45600m : 2376s = 16 a 2/3 m/s.

Př. 5.15 Neurčitá rovnice: $(x + 5)x = 4y – 1$, pravá strana je pro každé y číslo liché, levá strana je však pro každé x číslo sudé. Úloha tady nemůže mít řešení.

Př. 5.16 30 oštěpů a 8 disků.

Př. 5.17 5% dní nebylo chladno, 15% dní nepršelo, 25% dní nebylo zamračeno a 35% dní bylo větrno; tedy 5+15+25+35 = 80 %, a proto vidíme, že zůstává jen 20% dní, kdy bylo současně chladno, zamračeno, bezvětří a pršelo.

Př. 5.18 55.

Př. 5.19 75 sekund.

Př. 5.20 465.

Př. 5.21 20.

Př. 5.22 dvě třetiny.

Př. 5.23 55.

Př. 5.24 63.

Př. 5.25 7 chlapců.

Př. 6.1 a) Označme počet dívek n, $n \in N$. Pak počet chlapců je $10n$. Dále označme počet bodů získaných dívkami v partiích s chlapci x, kde $x \geq 0$. Počet bodů získaných chlapci v partiích s dívkami je tedy $10n \,.\, n – x = 10n^2 – x$. Počet všech uspořádaných dvojic vytvořených z n dívek je vyjádřen součinem $n(n – 1)$. Protože v partiích nezáleží na pořadí dívek, je počet všech partií sehraných mezi n dívkami $\frac{n(n-1)}{2}$. Toto číslo je zároveň počet bodů získaných ve vzájemných partiích dívek mezi sebou. Podobně počet bodů, které získali chlapci ve vzájemných partiích mezi sebou, se rovná počtu partií mezi chlapci, tj. $\frac{10n(10n-1)}{2}$. Dle zadání platí $\frac{10n(10n-1)}{2}+10n^2-x=4{,}5\cdot\left[\frac{n(n-1)}{2}+x\right]$. Rovnici vynásobíme dvěma a dostaneme $120n^2 - 10n - 2x = 4{,}5n^2 - 4{,}5n + 9x$; $115{,}5n^2 - 5{,}5n = 11x$; $10{,}5n^2 - 0{,}5n = x$; $\frac{1}{2}(21n^2-n)=x.$ Současně platí, že počet bodů získaných chlapci v partiích s dívkami je nezáporné číslo $10n^2 - x \geq 0$, odtud $x \leq 10n^2$. Dosazením za x z předchozího výpočtu získáme nerovnici: $\frac{1}{2}(21n^2-n)\leq 10n^2$, odtud $\frac{1}{2}n^2 \leq \frac{1}{2}n \rightarrow n^2 \leq n,$ tj. $n\in\langle 0;1\rangle$. Vzhledem k tomu, že $n\in N$, vyhovuje podmínce $n\in\langle 0;1\rangle$ jen $n = 1$ a z $\frac{1}{2}(21n^2-n)=x$ pro $n = 1$ dostaneme $x = 10$. Zkouška: Pokud bylo na turnaji jen 1 děvče, všech deset bodů mohlo získat jen v partiích s chlapci. Chlapců bylo desetkrát více, tj. 10. Tzn., že děvče porazilo všechny chlapce a že chlapci získali body jen ze vzájemných partiích mezi sebou, kterých bylo $\frac{10\cdot 9}{2}=45.$ Chlapci získali doopravdy 4,5krát více bodů než děvčata. Odpověď: Turnaje se zúčastnilo 1 děvče a získalo 10 bodů. **b)** Víme, že děvče porazilo všechny chlapce, tj. všechny zbývající účastníky turnaje. Je tedy vítězem turnaje.

Př. 6.2 Je vyšší než 600 Kč.

Př. 6.3 Alespoň 4

Př. 6.4 $x > 50$

Př. 6.5 nejvýše 10 měsíců

Př. 6.6 vzdálenost x uvažovaného místa od místa B vyhovuje podmínce $0\leq x<\frac{100dn-pq}{200n}$ (km).

Př. 7.1 Rychlost turisty $v = x$ km · h^{-1} ; doba, za kterou posel dohonil turistu $t = y$ h. Do okamžiku setkání urazil turista, který vyšel o čtvrt hodiny dříve než posel, dráhu $\frac{1}{4}x+xy$. Jestliže posel dohonil turistu, musel za dobu $t = y$ h urazit stejnou dráhu. Při rychlosti 5km · h^{-1} urazil dráhu $5y$. Porovnáním uvedených číselných hodnot drah dostaneme rovnici $\frac{1}{4}x+xy=5y.$ Při zpáteční cestě musel posel urazit stejnou dráhu, tj. dráhu délky $5y$ v km. Při stejné rychlosti 5km · h^{-1} k tomu potřeboval zase dobu $t = y$ h. Turista za tuto dobu ušel zbytek dráhy k zámku. Počet km této dráhy je xy. Součet obou drah je zřejmě 9 km. Pro číselné hodnoty tak získáme druhou rovnici: $5y + xy = 9$. Máme řešit soustavu rovnic

$\frac{1}{4}x+xy=5y$ (I.)

$5y + xy = 9$ (II.) s neznámými $x,y\in R^+$. Ze (II.) vyjádříme y, (III.) $y=\frac{9}{5+x}$, a dosadíme ji do (I.): $\frac{1}{4}x+\frac{9x}{5+x}=\frac{45}{5+x}$. Po úpravě získáme rovnici $x^2 + 41x - 180 = 0$ s kořeny $x_1 = 4$, $x_2 = -45$. Jelikož $-45 \notin R^+$, kořen x_2 nevyhovuje zadání úlohy. Pro $x = 4$ vychází z (III.) $y = 1$. Zkouška: Za $1\frac{1}{4}$ h urazí turista při rychlosti 4km · h^{-1} dráhu 5 km. To odpovídá dráze , kterou posel urazil za 1 hodinu při rychlosti $5km \cdot h^{-1}$. Posel se vrátil zpět do hotelu (urazil zase 5 km za 1 hodinu). Za tutéž dobu urazil turista dráhu 4 km, dostal se tedy k zámku. Odpověď: Turista šel rychlostí $4km \cdot h^{-1}$ a posel ho dohonil za 1 hodinu.

Př. 7.2 Označme původní počet litrů vína v prvním sudu x a v druhém sudu y, $x, y \in R^+$.

Tabulka:

Stav vína v litrech	v 1. sudu	v 2. sudu
Počáteční	x	y
Po 1. přelití	$x - y$	$2y$
Po 2. přelití	$2(x - y)$	$2y - (x - y)$
Po 3. přelití	$2(x - y) - [2y - (x - y)]$	$2[2y - (x - y)]$

Po 3. přelití je v sudech po 160 l vína, platí tedy:

$2(x - y) - [2y - (x - y)] = 160$ (I.) $\rightarrow$ $3x - 5y = 160$

$2[2y - (x - y)] = 160$ (II.), po úpravě $\rightarrow$ $-2x + 6y = 160$

První rovnici násobíme 2, druhou 3 a sečtením rovnic dostaneme $8y = 800$, odtud $y = 100$. Dosadíme y = 100 do rovnice $3x - 5y = 160$ a vypočteme, že $x = 220$. Ověříme, zda vypočtené údaje vyhovují podmínkám úlohy (dosadíme do tabulky) – vyhovují. Odpověď: Na počátku bylo v prvním sudu 220 litrů a v druhém sudu 100 litrů vína.

Př. 7.3 1) rovnice: $5x + 2y = 105$ 2) rovnice $2x + 5y = 52{,}5$; řešíme soustavu rovnic: 1) vynásobíme mínus dvěma, 2) vynásobíme pěti =>1) $-10x - 4y = -210$ a 2) $10x + 25y = 262{,}5$;

$21y = 52{,}5 \Rightarrow y = 2{,}5$; $x = (105 - 2y)/5 = (105 - 5)/5 = 20$. Tedy barva z velké plechovky stačí na 20 m^2 plochy a barva z malé plechovky stačí na 2,5 m^2.

Př. 7.4 Pepík má v košíku x hub, dědeček má v košíku y hub. Dědeček nalezne na pasece $x - 2$ hub, Pepík nalezne $x - 1$ hub. =>(I) $x + x - 1 = y + x - 2$ => (II) $x - 1 = y - 2$; Dále víme, že kdyby dědeček nalezl (III) $x - 2 + 7$ hub $= 2x$ (dvojnásobek hub co měl Pepík v košíku) => $x = 5$ => vrátíme se k (II) a dosadíme za x pětku: $5 - 1 = y - 2 \Rightarrow y = 6$. Nyní vypočteme, kolik má každý v košíku, dosadíme do (I): $5 + 5 - 1 = 6 + 5 - 2 \Rightarrow 9 = 9$. Každý donesl domů 9 hub, tedy celkem jich domů donesli 18.

Př. 7.5 (I) $5x + 4y = 9x + 2y - 60$, (II) $x = y - 3$. Dosadíme do (I): $5(y - 3) + 4y = 9(y - 3) + 2y - 60 \Rightarrow 9y - 15 = 11y - 27 - 60 \Rightarrow 2y = 72 \Rightarrow y = 36$; (II) $x = 36 - 3 = 33$.V malém pokoji tedy protopím za den 33 kg uhlí a va velkém 36 kg uhlí. Když budu topit v obou pokojích 7 dní, protopím: 7 krát 33 kg + 7 krát 36 kg uhlí = 231 + 252 = 483 kg uhlí.

Př. 8.1 33

Př. 9.2 $24=1\times2\times3\times4$.

Př. 9.3 Jde o aritmetickou posloupnost, jejíž první člen je $a_1 = x$ a diference $d = 1{,}5$. Potom předpis pro n-tý člen je $a_n = x + (n - 1)1{,}5$. Nás zajímá patnáctý člen, který je $x + 14 \cdot 1{,}5 = x + 21$.Víme, že patnáctý člen je osmi násobkem prvního. Můžeme tedy sestavit rovnici: $x + 21 = 8x$; $21 = 7x$; $x = 3$. Stáří sourozenců tedy je: 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15; 16,5; 18; 19,5; 21; 22,5; 24 let.

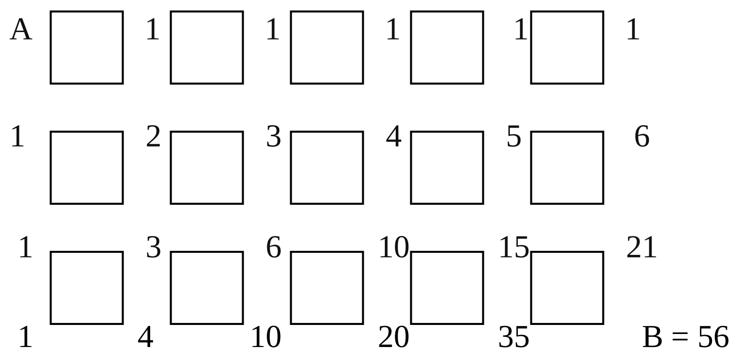
Př. 9.4 Jedná se o aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 8$ a diferencí $d = -1$. Pak v poslední řadě $n = 6$ jsou celkem $a_6 = a_1 + 5d = 8 + 5(-1) = 3$ roury a počet všech rour je

$s_6 = a_1 + a_2 + \dots + a_6 = \frac{n}{2}(a_1 + a_6) = \frac{6}{2}(8+3) = 33.$

Př. 9.5 Musíme si uvědomit, že obsah největšího čtverce je $1m^2$, menšího čtverce je $\frac{1}{2}m^2$, dalšího čtverce $\frac{1}{4}m^2$ atd., a že tyto číselné hodnoty tvoří nekonečnou geometrickou řadu $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...,$ o níž víme, že má konečný součet $s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Př. 9.6 Objem kvádru je $V = abc$, pak objem nejspodnějšího kvádru je $V_1 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$, objem kvádru nad ním je $V_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4}$, dále $V_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{9}$ atd. a celkový objem tělesa je tedy roven součtu $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$, což je nekonečná řada, jejíž součet je $s=\frac{\pi^2}{6}\doteq 1{,}64.$ z toho plyne, že těleso má konečný objem = 1,64. Povrch kvádru je $P = 2(ab + ac + bc)$. Výpočet by však byl zdlouhavý, ale k důkazu, že je povrh nekonečný stačí, když se budeme zabývat jen plochami jedné stěny z každého kvádru. Vyjde nám součet $(1\cdot 1)+\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot 1\right)+...+\left(\frac{1}{n}\cdot 1\right)+...$, což je nekonečná harmonická řada $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...,$ o níž víme, že její součet je nekonečný. Dokázali jsme tedy, že takto popsané těleso má nekonečný povrch, i když má konečný objem.

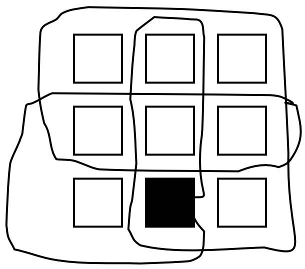
Př. 10.1



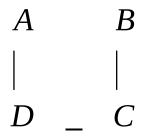
Př. 10.2 Pokud vám vyjde tucet, počítali jste správně.
Př. 10.3 80 = 4·4·5.
Př. 10.4 První hodil 6 a 1 (nebo 5 a 2, nebo 4 a 3, dole 1 a 6, 2 a 5, nebo 3 a 4), druhý 6 a 3 (dole 1 a 4), třetí 6 a 1 (nebo 5 a 2, nebo 4 a 3), jelikož počet všech možných kombinací je 21. Tak první docílil 7 bodů, druhý 9 a třetí 7 bodů.
Př. 10.5 Jelikož obranná dvojice 1 – 2 je stejná jako obranná dvojice 2 – 1, jde o kombinace bez opakování. Dle vzorce $K(k,n)=\frac{V(k,n)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$ tedy mohl trenér sestavit $\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!(12-3)!}=220$ útočných trojic, $\binom{8}{2}=28$ obranných dvojic a do brány postavit prvního či druhého brankáře. Každou útočnou řadu mohl navíc kombinovat s každou

obrannou řadou a k těmto možnostem přiřadit jednoho z brankářů. Tak celkový počet p všech různých sestav vypočteme násobením: $p = \binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{2}{1} = 220 \cdot 28 \cdot 2 = 12320.$

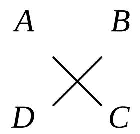
Př. 11.1 Ano, protože nezáleželo na tom, kde Koudelka bydlí; délka nejkratší objížďky je o 16,7% delší než délka všech ulic.



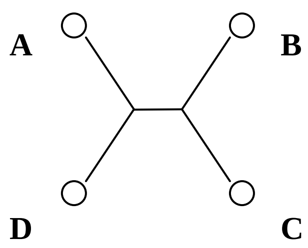
Př. 11.2 Možné varianty: Naše síť se může skládat např. ze 3 úseček. Ale tato síť sestávající ze 3 délkových jednotek rozhodně není nejkratší.



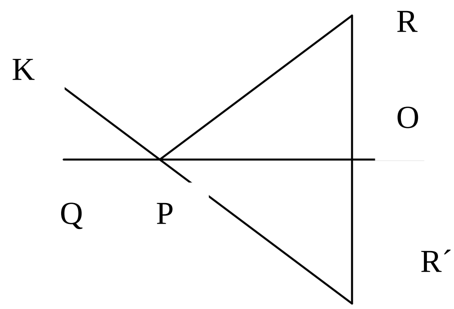
Když zkoušíme dále přijdeme totiž na kratší variantu: dvě úhlopříčky, protínající se ve středu čtverce, tvoří kratší síť. Jelikož podle Pythagorovy věty každá z úhlopříček měří $\sqrt{2}$ délkových jednotek, takže celková délka sítě je $2\sqrt{2} = 2{,}83$, což je méně než 3



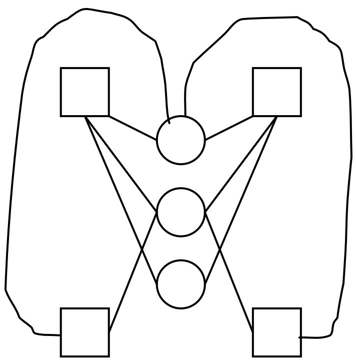
Pochopitelně se ihned nabízí otázka, zda existuje jiná ještě o něco kratší síť, kdyby bylo více průsečíků. Zkusíme tedy podvádět a využijeme mýdlových bublin. Vezmeme dvě desky z průhledného plexiskla propojené čtyřmi kolíky umístěnými do vrcholů čtverce. Ponoříme-li toto zařízení do mísy s mýdlovou vodou a zase je vytáhneme, dostaneme tenkou mýdlovou blánu s povrchem menším, než by měl jakýkoli jiný tvar (zabírá totiž nejmenší možný povrch). Toto je opravdu hledané řešení, i když důkaz nepatří k nejsnazším. Pět úseček se dvěma průsečíky, tři z nich pod úhlem 120°. Celková délka této sítě činí $1 + \sqrt{3} = 2{,}73$ jednotek, a žádná kratší síť neexistuje.



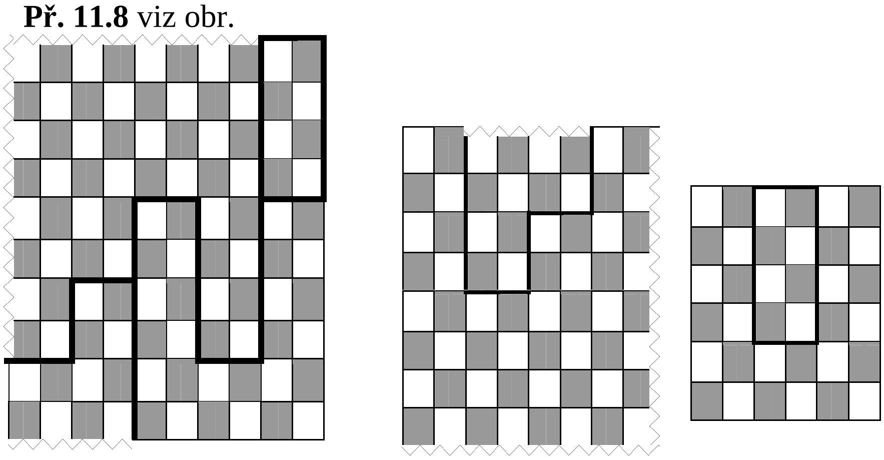
Př. 11.3 Musí jet na takové místo na břehu řeky, aby cesta k němu i od něj svíraly stejný úhel s řekou. Důkaz: Představíme si, že ranč *R* se nachází stejně daleko od břehu, ale na protější straně řeky, tedy v bodě *R´*. Protože pak, ať se kovboj *K* zastaví na jakémkoli místě řeky *P*, budou vzdálenosti *PR* a *PR´* stejné. Takže *KP* + *PR* je ekvivalentní s *KP* + *PR´*. Vybereme tedy *P* tak, aby body *KPR´* ležely v přímce. V takovém případě budou úhly *OPR´* a *QPK* stejné. Úhly *OPR´* a *OPR* budou stejné vždy, bez ohledu na polohu *P*.



Př. 11.4 Optimální řešení jsou dvě křižovatky.



Př. 11.6 Let potrvá stejně dlouho, jako kdyby stroj letěl do bodu C za bezvětří. Tedy 30 minut.
Př. 11.7 Dům přestaví na kosočtverec, jehož rohy budou nasměrovány mezi stromy.
Př. 11.8 viz obr.



Př. 11.9 Např. laťka 9 dm dlouhá s třemi ryskami a) v 1dm, ve 2dm a v 6 dm. b) v 1 dm, ve 4 dm a v 7 dm. c) ve 2 dm, v 5 dm a v 8 dm. d) ve 3 dm, v 7 dm a v 8 dm.
Př. 11.13 Rok má po zaokrouhlení 32 000 000 vteřin a průměr zemské dráhy je asi 300 milionů kilometrů. Proto je dráha země asi 940 000 000 km, přičemž Země se po ní pohybuje rychlostí téměř 30 km/s; je-li Slunce blíže, rychleji a naopak.
Př. 11.14 Tajenka nám skrývá Ludolfovo číslo na 32 desetinných míst, tedy 3,14159265358979323846264338327950
Př. 13.4 Zvítězí ten, kdo řekne první číslo 89, a proto musíte před spoluhráčem jako první vyslovit číslo o 11 menší, tedy 78; při pokračování tohoto systému nám vyjde posloupnost 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, díky které se staneme vítězi.

Př. 13.13 a) X – VI = IV či IX – V = IV; b) C – L = L či I + L = LI či L + I = LI; c) XII – IX = III; d) X – VII = III; e) VI + V = XI či V + VI = XI; f) XXI + IV = XXV; g) IX – IV = V; h) XV – XIV = I; i) XV +V = XX; j) VIII + IX = XVII či XIII + IV = XVII.

Př. 13.14 a) $\sqrt{I} = I$; **b)** $\frac{II}{VI}$; **c)** $\frac{822}{274} = \frac{972}{324}$; **d)** MM

Př. 13.15 Protože časy se rovnají.
Př. 13.17 Stačí si dvojku z konce čísla přesunout na první místo a obdobně trojku z konce druhé čísla taktéž na první místo.
Př. 13.18 Do každého pole šachovnice napište číslo, které udává, kolik tahů z něho může daná figura udělat; hledaný počet tahů je součtem všech těchto čísel, tedy:
4×2+8×3+20×4+16×6+16×8=336 pro jezdce a logicky tedy 1456 pro dámu.
Př. 13.19 Šachový kůň se pohybuje tak, že přejde z černého pole na bílé, potom z bílého na černé atd. Šachovnice má 64 polí. Má-li se kůň dostat na pole h8 tak, že přejde jednou všechna pole šachovnice, musí udělat 63 tahů. V počátečním postavení stojí kůň na černém poli a podle podmínek se musí dostat opět na černé pole. To však není možné, protože 63. tah je lichý a kůň, který stál na začátku na černém poli, se každým lichým tahem dostane na bílé pole.
Př. 13.20 a) stejný tvar a barva značí 1 variantu b) stejný tvar a barva značí 1 variantu

			X	D			
			D	X			
X							D
	X					D	
		X			D		

		*	X				
					X	*	
	*						X
	X						*
					*	X	
X			*				
*		X					
				*X			

Př. 13.21 Vysvětlení je prosté. Protože 15 873 · 7 = 111 111, potom platí např.
15 873 · 21 = 15 873 · 7 · 3 = 111 111 · 3 = 333 333.
Př. 13.22 Zalít kuličky v poháru vodou tak, aby byly všechny zcela ponořeny; objem nalité vody a ponořených kuliček bylo možno zjistit na stupnici kalibrované nádoby; když naměřený objem nalité vody odečteme od celkového objemu, dostaneme objem všech použitých kuliček.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] NOVOVESKÝ, Š. – KRIŽALKOVIČ, K. – LEČKO, I.: Zábavná matematika. 2. vydání. SPN Praha, 1974

[2] BALL, J.: Mysli si číslo. 1. vydání. SLOVART Praha, 2006

[3] VARGA, T.: Hrajeme si s matematikou. 1. vydání. ALBATROS Praha, 1988

[4] ACHERSON, D.: 1089 a další parádní čísla. DOKOŘÁN Praha, 2006

[5] TŮMA, J.: Matematické hlavolamy a základy teorie grup. 1. vydání. MLADÁ FRONTA Praha, 1988

[6] LOUKOTA, J.: Veselá matematika aneb kouzla, hříčky, hádanky, rébusy a lamohlavy. VOTOBIA Olomouc, 1998

[7] BRAGDON, A. D. – FELLOWS, L.: Trénink obou polovin mozku. PORTÁL Praha, 2000

[8] MLODINOW, L.: Eukleidovo okno. SLOVART Praha, 2007

[9] OPAVA, Z.: Matematika kolem nás. 1. vydání. ALBATROS Praha, 1989

[10] POLÁK, J.: Přehled středoškolské matematiky. 6. vydání. Praha: PROMETHEUS Praha, 1995

[11] VOŠICKÝ, Z.: Matematika do dlaně pro střední školy. 1. vydání. FRAGMENT Havlíčkův Brod, 2001

[12] MOČALOV, L. P.: Hlavolamy. MLADÁ FRONTA Praha, 1987

[13] SEDLÁČEK, J.: Co víme o přirozených číslech. 3. vydání. MLADÁ FRONTA Praha, 1977

[14] ČECH, V.: Proč děláme důkazy v matematice. 1. vydání. SPN Praha, 1971

[15] DOBROVOLNÝ, B.: Nové matematické rekreace. 1. vydání. SNTL PRÁCE Praha, 1967

[16] CIPRA, B.: Chibičky. DOKOŘÁN Praha, 2002

[17] HEMME, H.: Kolumbovo vejce a jiné záludné hříčky. ALBATROS Praha, 2007

[18] WISE, B.: Matematické detektivky. PORTÁL Praha, 2003

[19] BUŠEK, I.: Řešené úlohy z matematiky. 3. přepracované vydání. PROMETHEUS Praha, 1999

[20] KRUPKA, P.: Sbírka úloh z matematiky, 1. díl. 3. vydání. PROMETHEUS Praha, 2006

[21] CHARVÁT, J., ZHOUF, J., BOČEK, L.: Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice. 3. vydání. PROMETHEUS Praha, 1999

[22] JANEČEK, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy. 4. vydání. PROMETHEUS Praha, 1995

Zdroje pro obrázky pokud není uvedeno jinak:

[23] http://astra.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/moravecdp/mnoziny.php

[24] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/kap5/javainstd/Mocnina.png&imgrefurl=http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/kap5/kap5.php%3Fsec%3Dall&usg=__6JJFLFsQOkPvOniPEVveu8I12u4=&h=338&w=360&sz=8&hl=cs&start=15&itbs=1&tbnid=SV_-MVpmODPUOM:&tbnh=114&tbnw=121&prev=/images%3Fq%3Dgrafy%2Bmocninn%25C3%25BDch%2Bfunkc%25C3%25AD%26hl%3Dcs%26sa%3DN%26gbv%3D2%26ndsp%3D21%26tbs%3Disch:1

[25] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://webvyukacontent.olportal.cz/w-funkce-060103/images/Grafika_030.gif&imgrefurl=http://webvyukacontent.olportal.cz/w-funkce-060103/Neprima_umernost.htm&usg=__t_2Jvj2gfxUTGKBjJ5iM6jQHCrA=&h=414&w=362&sz=3&hl=cs&start=2&itbs=1&tbnid=KFoXoMCGrntQBM:&tbnh=125&tbnw=109&prev=/images%3Fq%3Dgraf%2Bfunkce%2Bnep%25C5%2599%25C3%25ADm%25C3%25A1%2B%25C3%25BAm%25C4%259Brnost%26hl%3Dcs%26gbv%3D2%26tbs%3Disch:1

[26] http://forum.matweb.cz/upload/638-Graf_linearni_lomene_funkce.png

[27] http://lide.gymcheb.cz/~mibyna/oktava/exponencialni.html

[28] http://cs.wikipedia.org/wiki/Logaritmick%C3%A1_funkce

[29] http://www.aristoteles.cz/matematika/funkce/goniometricke/goniometricke-funkce.php

[30] http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/posloupnosti/specialni/obrazky/arit_graf_01.gif

[31] http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/posloupnosti/specialni/obrazky/geom_graf_01.gif

[32] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/posloupnosti/limita/obrazky/limita_graf_02.gif&imgrefurl=http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/posloupnosti/limita/limita.htm&usg=__1YyOHzhZSrZ0diI8WLoowrRCDG8=&h=235&w=358&sz=3&hl=cs&start=10&um=1&itbs=1&t

bnid=_8GHKWnfpae1kM:&tbnh=79&tbnw=121&prev=/images%3Fq%3Dlimita%2Bposloupnosti%26um%3D1%26hl%3Dcs%26rls%3Dcom.microsoft:cs%26tbs%3Disch:1

[33] Př.9.1 http://abeceda.sachu.sweb.cz/

[34] http://4.bp.blogspot.com/_sfkwpV8ufRs/Sh2b04DxV_I/AAAAAAAAACA/4tH2MnUj4aE/s400/pascals+triangle+thing.JPG

[35] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://www.mathsisfun.com/images/pascals-triangle-2.gif&imgrefurl=http://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html&usg=__1vjTJXO3MOAOFTDL9aoKoUzy7Qs=&h=286&w=318&sz=8&hl=cs&start=8&um=1&itbs=1&tbnid=Dr71AMghTpB8DM:&tbnh=106&tbnw=118&prev=/images%3Fq%3DPascal%25C5%25AFv%2Btroj%25C3%25BAheln%25C3%25ADk%26um%3D1%26hl%3Dcs%26sa%3DX%26rls%3Dcom.microsoft:cs%26tbs%3Disch:1-

[36] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/OsaUhlu.jpg&imgrefurl=http://anda21.blog.cz/1003/matematika-uhly&usg=__cv_Apry7lfTSkuf6b0sShtKzEUo=&h=305&w=329&sz=10&hl=cs&start=1&itbs=1&tbnid=kwSm2jwKiTmB7M:&tbnh=110&tbnw=119&prev=/images%3Fq%3D%25C3%25BAhly%26hl%3Dcs%26sa%3DG%26gbv%3D2%26tbs%3Disch:1

[37] http://cs.wikipedia.org/wiki/Obvodov%C3%BD_%C3%BAhel#.C3.9Ahly_p.C5.99.C3.ADslu.C5.A1n.C3.A9_k_obvodu_kru.C5.BEnice

[38] http://www.orthohelp.com/numbers.gif

[39] http://planimetrie.kvalitne.cz/obrazce_trojuhelnik_rozdeleni.html

[40] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://planimetrie.kvalitne.cz/obrazky/obrazce/spojeni_dvou_trojuhelniku.jpg&imgrefurl=http://planimetrie.kvalitne.cz/obrazce_ctyruhelnik.html&usg=__vVxLCu0cYx6mbbfnWrINplPeUu4=&h=160&w=480&sz=14&hl=cs&start=17&itbs=1&tbnid=JaNDEUlASBdm5M:&tbnh=43&tbnw=129&prev=/images%3Fq%3D%25C4%258Dty%25C5%2599%25C3%25BAheln%25C3%25ADky%26hl%3Dcs%26sa%3DG%26gbv%3D2%26tbs%3Disch:1

[41] http://cs.wikipedia.org/wiki/Obvodov%C3%BD_%C3%BAhel#.C3.9Ahly_p.C5.99.C3.ADslu.C5.A1n.C3.A9_k_obvodu_kru.C5.BEnice

[42] http://kmd.fp.tul.cz/lide/zackova/GE1/Mnoziny_bodu_danych_vlastnosti.pdf

[43] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://www.planimetrie.chytrak.cz/obr/kruhovausec.GIF&imgrefurl=http://www.planimetrie.chytrak.cz/kruznice.htm&usg=__Gx5Fgej6R2h3NY3V9ePvPO7xlOY=&h=412&w=422&sz=16&hl=cs&start=18&itbs=1&tbnid=Qgx0HP8_I6TriM:&tbnh=123&tbnw=126&prev=/images%3Fq%3Dkruhov%25C3%25A1%2Bv%25C3%25BDse%25C4%258D%26hl%3Dcs%26gbv%3D2%26tbs%3Disch:1

[44] http://www.google.cz/imgres?imgurl=http://hadanky.chytrak.cz/img/ovce-elipsa.png&imgrefurl=http://hadanky.chytrak.cz/%3Fh%3Dgraf&usg=__cpk0HjbMk74SvvPzkpXDRvET94A=&h=150&w=150&sz=1&hl=cs&start=112&zoom=1&um=1&itbs=1&tbnid=juWmn7IDkOwLlM:&tbnh=96&tbnw=96&prev=/images%3Fq%3Delipsa%26start%3D105%26um%3D1%26hl%3Dcs%26sa%3DN%26rls%3Dcom.microsoft:cs%26ndsp%3D21%26tbs%3Disch:1

[45] http://www.funis2cool.com/wp-content/uploads/2009/03/ellipse-wings-01.jpg

[46] http://www.gfxs.cz/matematika/index.php?option=com_content&task=view&id=37&Itemid=68

[47] http://fyzmatik.pise.cz/41956-fyzikalni-a-matematicke-vtipy.html

[48] http://www.e-matematika.cz/vtipy/

[49] http://www.x-minnie.estranky.cz/clanky/vtipy/matematicke-vtipy