JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PEDAGOGICKÁ FAKULTA, KATEDRA MATEMATIKY

OBSAHY ROVINNÝCH ÚTVARŮ VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Veronika Koubová

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

České Budějovice 2011

Prohlašuji, že jsem na diplomové práci pracovala samostatně a použila jen pramenů, které uvádím v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

………………………………… .

V Českých Budějovicích, duben 2011

Anotace

Název:	Obsahy rovinných útvarů ve středoškolské matematice
Vypracovala:	Veronika Koubová
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.
Klíčová slova:	Didaktika matematiky, metodika výuky, obsahy rovinných útvarů, slovní úlohy

Tato diplomová práce je zaměřena na průzkum, do jaké míry žáci ZŠ a SŠ rozumějí pojmu obsahy rovinných útvarů a jaké strategie využívají při řešení těchto úloh.

Dále je v práci obsažena metodická část, která může sloužit jako podklad pro výuku tématu a sbírka úloh k procvičení a prohloubení znalostí.

Annotation

Title: Areas of the plane figures at basic and secondary school

Author: Veronika Koubová

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph. D.

Key words: Mathematics education, methodology of education, areas of the plane figures, word exercises

This diploma thesis focuses on Elementary and High School students´ understanding of areas of plane figures as well as on what strategies they use to solve these tasks.
The thesis is devided in two parts. The methodical part which can be used for teaching purposes. Task compilation for further practice and knowledge improvement.

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala vedoucímu své diplomové práce za trpělivost, cenné rady a náměty a za metodické vedení při psaní této diplomové práce.

OBSAH

1 ÚVOD

Cílem mé diplomové práce je průzkum znalostí a dovedností žáků základních a studentů středních škol při řešení úloh na téma obsahy rovinných útvarů, prohloubení zájmu o učivo a poskytnutí takového metodického materiálu, který by žáky provedl výukou a zanechal v nich co nejtrvalejší vědomosti.

Téma obsahy se ve výuce běžně objevuje a mohu-li si dovolit soudit, nepatří mezi opomíjené části matematiky. Obsahům se během hodin žáci věnují poměrně důkladně, především asi proto, že patří zcela neodmyslitelně do běžného života každého člověka. Avšak i přes to se po krátkém čase setkáváme u dětí s částečným nebo úplným zapomenutím vzorců a neschopností odvodit i ty nejsnazší z nich.

Proto tato práce obsahuje kromě průzkumu žákovských znalostí i metodickou část, která by měla celou výuku vystavět tak, aby si i po delší době každý uměl vybavit a použít získané znalosti. Pro tyto části práce se staly podkladem publikace [4], [7], [13].

Závěrečnou částí je sbírka úloh. Ta je rozdělena do několika částí, podle jednotlivých geometrických útvarů.

Slouží k procvičení výpočtů obsahů jednotlivých útvarů nejprve každého zvlášť a na závěr všech dohromady. Při tvorbě sbírky jsem využila učebnice pro ZŠ a SŠ [1], [2], [3], [5], [6], [8], [9], [10], [11], [12] a [14]. Některé úlohy jsem sestavila sama.

2 METODIKA VÝUKY

V této kapitole se budeme zabývat zavedením pojmu obsah do výuky a metodikou výkladu této látky.

2.1 Z historie

Geometrie jako jedna z nejstarších disciplín matematiky sahá svými počátky daleko do minulosti společně s historií lidstva. Již první lidé si dobře uvědomovali rozdílnost tvarů jednotlivých objektů - siluety člověka a zvířat, stromů, rostlin, měnící se tvar měsíce, tvar slunce.

Rozvoj geometrických představ, jakožto i matematických a vůbec společenských, probíhal především v souladu s aktuálními potřebami tehdejší kultury.
Zhruba od 8. tisíciletí př. n. l. se objevují první sídliště lidí obdělávajících půdu a s tím souvisí první ucelená představa o obsahu - bez znalosti jakýchkoliv vzorců či matematických vyčíslení si každý uvědomoval, kdo má větší a kdo menší políčko pro pěstování zemědělských plodin.
V souvislosti se zemědělstvím a se snahou předpovídat opakující se změny počasí se v období 5. až 4. tisíciletí př. n. l. objevovali první zavlažovací díla, při jejichž stavbě se začali používat zeměměřičské pomůcky. Zdokonalilo se i vyměřování pravidelně zaplavovaných ploch a základní poznatky geometrie a geometrické terminologie.

Jedny z prvních dochovaných děl, které nám odhalují matematickou historii, jsou papyry z 19. stl. př. n. l. - Moskevský, a zhruba o 200 let mladší Londýnský (Rhindův). Hlavně Londýnský obsahuje i úlohy týkající se obsahu polí. Příklady jsou řešeny pro konkrétní hodnoty a ještě se zde nesetkáme se zobecněním - vzorcem nebo metodou k výpočtu. Zato obsah kruhu se v Londýnském papyru udává jako $(d - \frac{d}{9})^2$, což vede k poměrně přesnému vyčíslení konstant $\pi = 3{,}1605$. Najdeme zde i několik vzorců pro výpočty objemů.

Výpočty obsahů ploch prováděli Egypťané pomocí rozložení na trojúhelníky, jejichž obsahy uměli zcela přesně vyčíslit podle dnes známého a používaného vzorce $S = \frac{a \cdot va}{2}$.

Společně s egyptskou matematikou se vyvíjela matematika i v Mezopotámii, jejímž dokladem jsou nalezené hliněné destičky s matematickými texty. V obou zemích se matematiky vyvíjela jako ryze praktická disciplína, pro usnadnění výpočtů kalendáře, organizaci městských staveb a vybírání daní.

Od 6. stl. př. n. l. se matematici nezabývali jen otázkami „jak spočítat?“, ale také „proč zrovna takhle?“ a matematika kromě návodů k řešení dostala do svého obsahu i zdůvodnění správnosti.

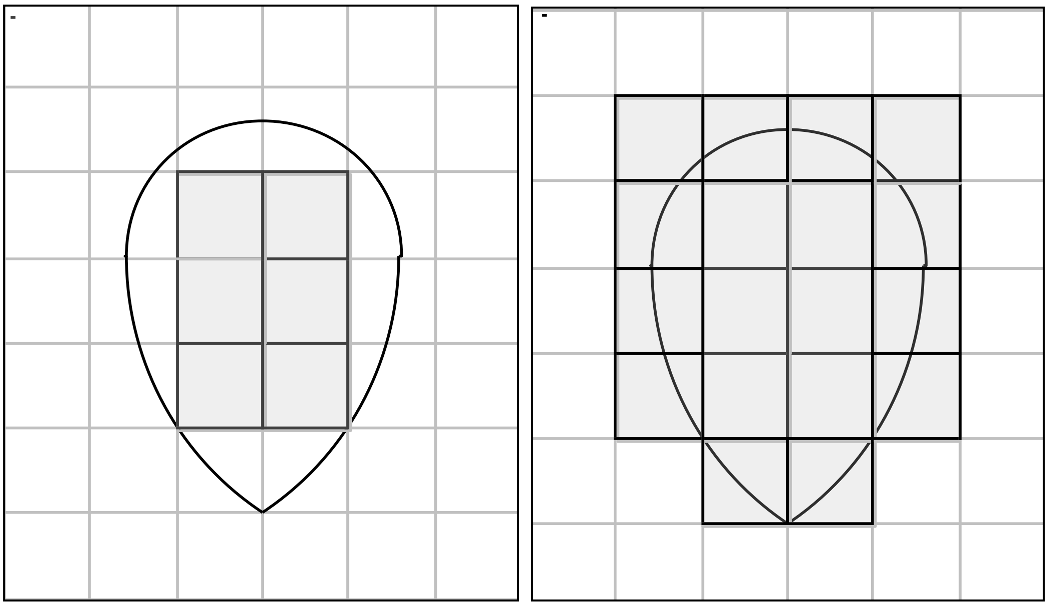
Nejstarším zachovaným dílem, obsahujícím všechny matematické poznatky tehdejší doby, jsou z Řecka Eukleidovy Základy. Z dalších velkých řeckých matematiků je pro nás zajímavý Eudoxos, který aproximoval obsah kruhu K obsahem pravidelného mnohoúhelníku P, vepsaného do kruhu. Tj. je-li dán kruh o obsahu K a číslo $\varepsilon > 0$, pak existuje pravidelný mnohoúhelník o obsahu P vepsaný do kruhu tak, že K - P < ε .
Starořeckou matematikou bylo vesměs dokončeno budování základů matematiky a dalšího rozvoje se matematika dočkala až o mnoho století později.

V 11. a 12. stl n. l. opět zavládla doba všeobecného rozvoje, obnovení obchodu s Východem a navazování vědeckých styků s Arábií. V 16. století pak evropská matematika překonává práh znalostí z Řecka a doba se ubírá od počítání s konkrétními veličinami k práci s proměnnými a symboly.

Zajímavými jmény té doby se staly Luca Valerio s kvadraturou paraboly, Kepler, Cavallieri a Torricelli s metodami výpočtu objemů těles, dnes známé jako Cavalieriho princip.

Dalším mezníkem pro výpočty obsahů těles se stal v 19. století průlom v počítání určitého integrálu a počátek teorie míry. Jména spojená s touto dobou patří nám všem známým matematikům - Bolzanovi, Cauchymu, Abelovi, Dirichletovi, později i Dedekindovi a Weierstrassovi.
Cauchy se snažil zachytit obsah křivky funkce f: [a,b]→R, vymezené shora grafem funkce, zleva přímkou x = a, zprava x = b a zdola osou x. Přes integrální součty se dostal k limitě, která se prohlásí integrálem $\int_a^b f(x)dx$.

Camille Jordan (1832 - 1922) užívá k výpočtu obsahů tohoto schématu:
Utvořme v rovině čtvercovou síť, kde jsou přímky sítě rovnoběžné s osami souřadnic a kde je obsah jednoho čtverce roven jedné čtvereční jednotce (= utvoření sítě nazveme tzv. dělením).
Určeme pak S_1 jako součet obsahů všech čtverečků sítě, které jsou ve vnitřku množiny M a S_2 jako součet těch obsahů čtverečků, které obsahují alespoň 1 bod hranice množiny M.
Pozn.: S_1, S_2 jsou součty čtverců příslušných dělení, číslo n nám udává počet dílů, na které dělíme úsek o délce 1 jednotka.



Obr. 2.1.1: Vnitřní ($S1$) a vnější (S_2) Jordanova - Peanova míra, obsah čtverečku $S_č$ = 1 jednotka čtvereční, n = 1.

Podle obrázku je tedy S_1 = 6 čtverečních jednotek,
S_2 = 18 čtverečních jednotek.

Obsahem S rozumíme kladné číslo, které vyjadřuje úměru mezi obsahem jednotkového čtverce a hledaným obsahem.

Pro toto číslo dále platí:

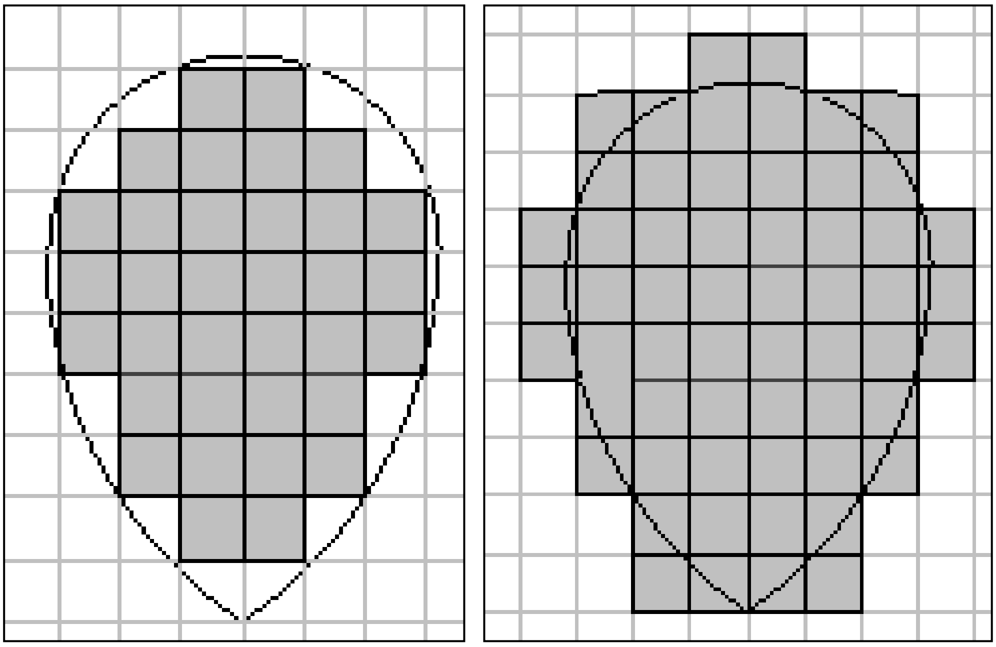
1) Obsah čtverce o délce strany 1 (mm, cm, dm, …) se rovná 1 (mm^2, cm^2, dm^2, …).

2) Skládá-li se obrazec z několika obrazců, jež se navzájem nepřekrývají, pak se jeho obsah rovná součtu jejich obsahů.

3) Shodné obrazce mají shodný obsah.

Budeme - li dále zmenšovat čtverečky sítě (= tzv. zjemňovat dělení), budou se nám hodnoty S_1 a S_2 stále přibližovat k hodnotám, jež pro S_1 nazýváme vnitřní a pro S_2 vnější Jordanovo - Peanovou mírou.

Pozn.: Zmenšování čtverečků sítě je přímo úměrné s růstem čísla n, pro čtverec s délkou strany 0,5 j je $n = 2$, pro čtverec o straně 0,25 j je $n = 4$ atd. Délka strany $a = \frac{1}{n}$.

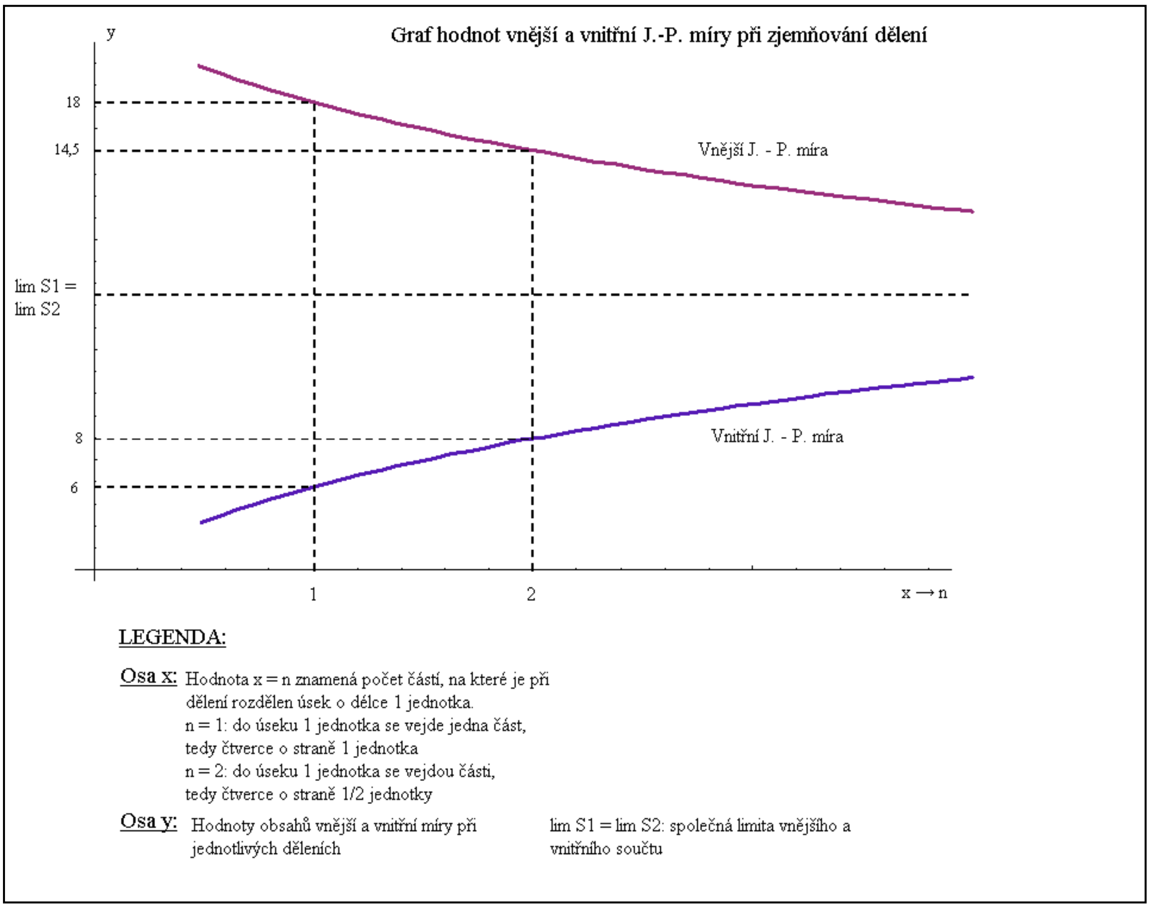


Obr. 2.1.2: Vnitřní ($S1$) a vnější (S_2) Jordanova - Peanova míra, obsah čtverečku $S_{č2} = \frac{1}{4}$ jednotky čtvereční $= \frac{1}{4} S_č$, $n = 2$.

$S_1 = 32 \cdot \frac{1}{4} = 8$ čtverečních jednotek,

$S_2 = 58 \cdot \frac{1}{4} = 14{,}5$ čtverečních jednotek.

Zanesme si do grafu hodnot vnější a vnitřní J. - P. míry pro dělení a zjemnění dělení:

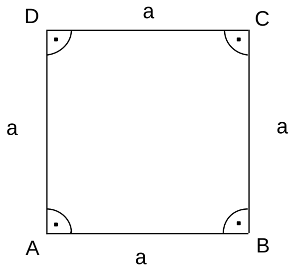


Obr. 2.1.3: Graf hodnot vnější a vnitřní J. - P. míry pro dělení a jeho zjemnění.

Pokud mají tyto dvě míry stejnou limitu *x*, je množina M měřitelná v Jordanově-Peanově smyslu a hodnota míry *x* se nazývá Jordanova - Peanova míra.

2.2 Obsah čtverce, kosočtverce

Výuka pojmu „obsah čtverce“ navazuje na žákovu znalost pojmu čtverec a jeho základních vlastností:

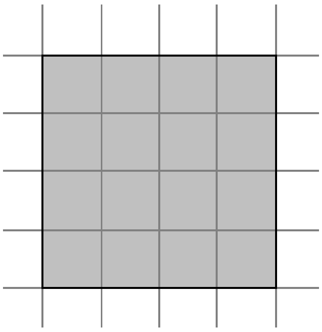


A, B, C, D …………..vrcholy čtverce

a, AB, BC, CD, D……strany čtverce

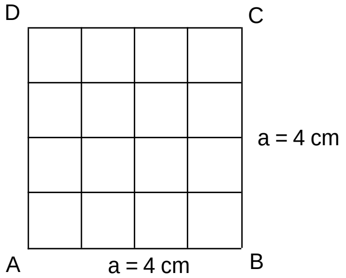
Úhly u vrcholů čtverce jsou pravé.

Při výuce pojmu „obsah čtverce“ nejprve naučíme žáky určovat obsahy čtverců s celočíselnými délkami stran. Vycházíme z porovnání s jednotkovými čtverci, tedy čtverci s celočíselnou délkou strany 1 jednotka a o obsahu 1 jednotka čtvereční.
Na následujícím obrázku vidíme čtverec s délkou strany v celých jednotkách, umístěný do čtvercové sítě tvořenou právě jednotkovými čtverci.



Čtverec má délku strany 4 jednotky, a je čtvercovou sítí rozdělen na 16 čtverců o délce strany 1 jednotka, má tedy obsah 16 jednotek čtverečních.

Užitím vzorce obsah čtverce spočítáme tak, že mezi sebou vynásobíme délky sousedních stran (u čtverce jsou tyto délky **shodné**!) :

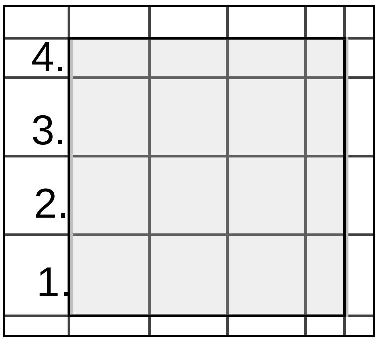


$S = a \cdot a$

$S = 4 \cdot 4$

$S = 16\ \text{cm}^2$

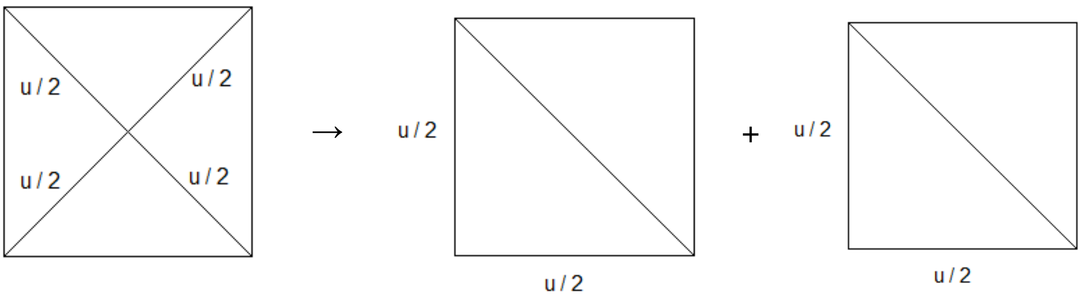
Pokud délka strany nebude celočíselná, nebude ani výsledný obsah vyjádřením počtu celých jednotkových čtverců, např.:



Tento čtverec má délku strany 3,5 jednotky a v první vodorovné řadě má tedy 3,5 jednotkových čtverců, v 2. a 3. řadě opět 3,5 j.č. a ve 4. řadě má 3 poloviny jednotkového čtverce plus jednu čtvrtinu. Dohromady má tedy tento čtverec 12 a $\frac{1}{4}$ jednotkových čtverců, tedy obsah 12,25 j^2.

Použijeme li tedy stejná vzorec jako u celočíselné délky strany, $S = a \cdot a$, dostaneme $S = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25\ j^2$.

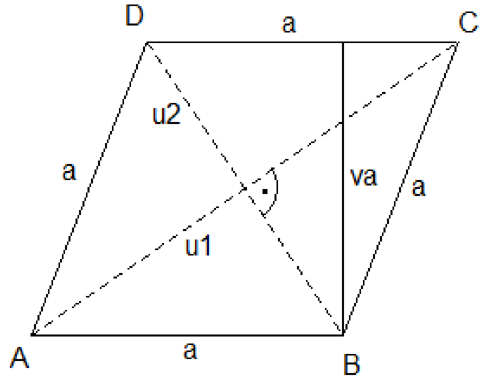
Dalším možným způsobem zjištění obsahu čtverce je vzorec vycházející z délky úhlopříčky čtverce:



Pravoúhlé trojúhelníky, na které nám čtverec rozdělily úhlopříčky, složíme tak, aby nám vznikly dva čtverce s délkou strany $\frac{u}{2}$.

Obsah je pak: $S = 2 \cdot (\frac{u}{2} \cdot \frac{u}{2}) = \frac{u^2}{2}$.

Zopakujeme s žáky základní pojmy kosočtverce:



A,B,C,D……………………...vrcholy

a, AB, BC, CD, DA………… strany

u_1, u_2 ……………………….. úhlopříčky

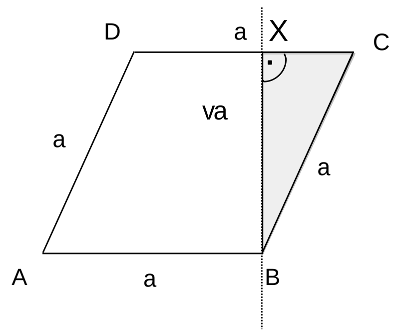
v_a……………………………..výška

Úhly u vrcholu nejsou pravé, dva sousední dávají vždy součet 180°.

Úhlopříčky svírají pravý úhel a navzájem se půlí.

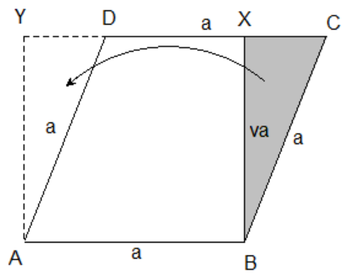
Abychom určili obsah kosočtverce, udělejme malou úpravu:

1.

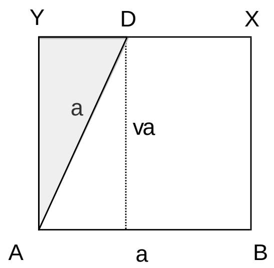


→

2.



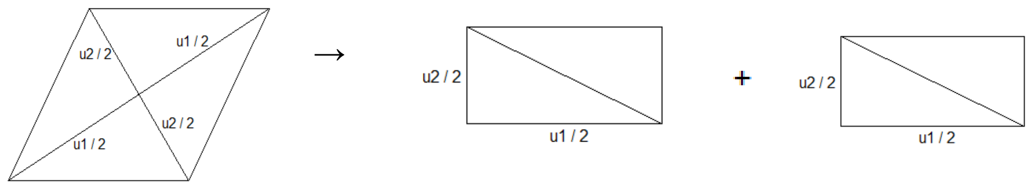
3.



Z obrázků je patrné, že obsah S se rovná součinu délky strany kosočtverce a příslušné výšky:

$S = a \cdot v_a$

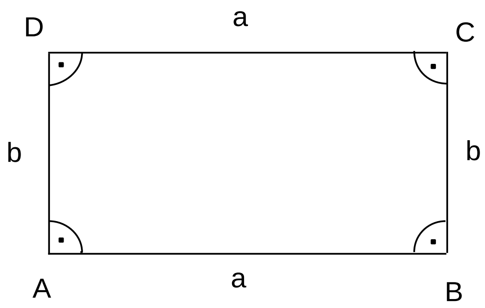
Obsah kosočtverce pomocí délek úhlopříček:



Podobně jako ve čtverci můžeme obsah kosočtverce vyjádřit jako polovinu součinu délek úhlopříček. Pozor ale musíme dát na to, že v kosočtverci jsou tyto dílky různé, tedy: $S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}$.

2.3 Obsah obdélníka , kosodélníka

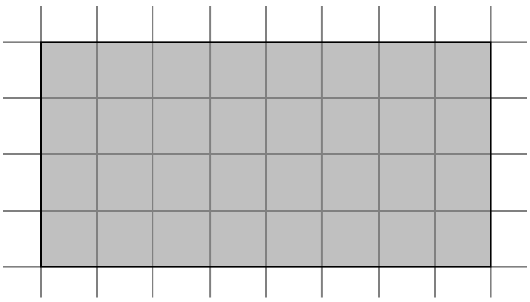
Čtverci nejbližší je obdélník, který už nemá obě strany stejně dlouhé. I zde je dobré na úvod zopakovat základní pojmy, které budeme při počítání používat:



A, B, C, D …………...vrcholy obdélníka

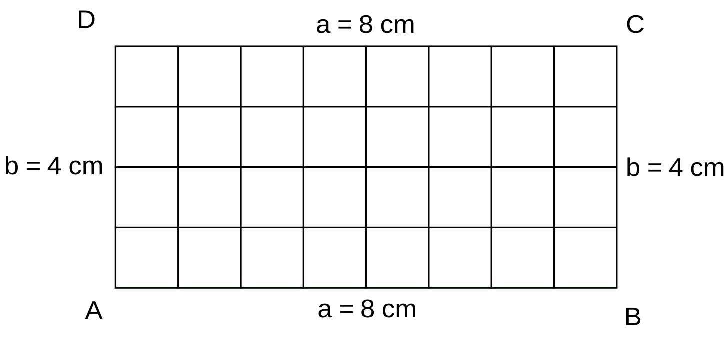
a,*b*, *AB, BC, CD, D*…strany obdélníka

Obsah vyjádříme umístěním obdélníku do čtvercové sítě. Délky stran jsou nejprve celočíselné:



Délky stran jsou 8 a 4 jednotky, čtvercová síť ho dělí na 32 jednotkových čtverců, obsah je tedy 32 jednotek čtverečních.

Jeho obsah spočítáme obdobně, jako obsah čtverce, jen s tím rozdílem, že musíme vést v patrnosti, že dvě sousední strany mají **různé** rozměry :



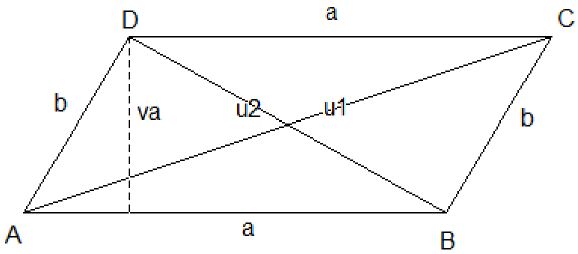
$S = a \cdot b$

$S = 8 \cdot 4$

$S = 32\ \text{cm}^2$

Obdobně jako u čtverce platí vzorec i pro délky stran, jež nejsou celočíselné.

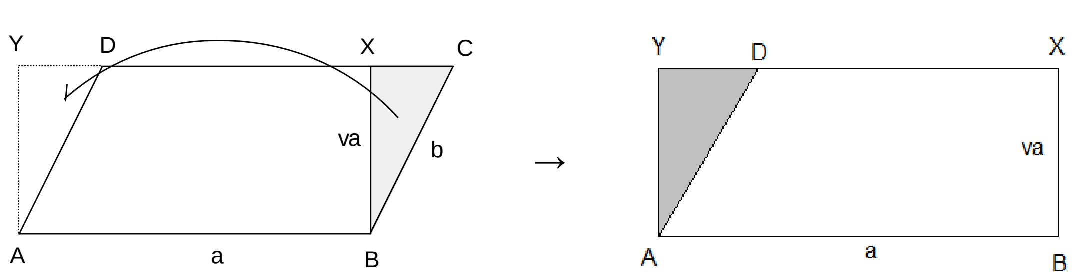
Obdobně jako u kosočtverce zopakujeme nejprve základní pojmy kosodélníku:



A, B, C, D……………….vrcholy
a, b, AB, BC, CD, DA……strany
u_1, u_2………………………úhlopříčky
v_a…………………………výška
Úhlopříčky se navzájem půlí.

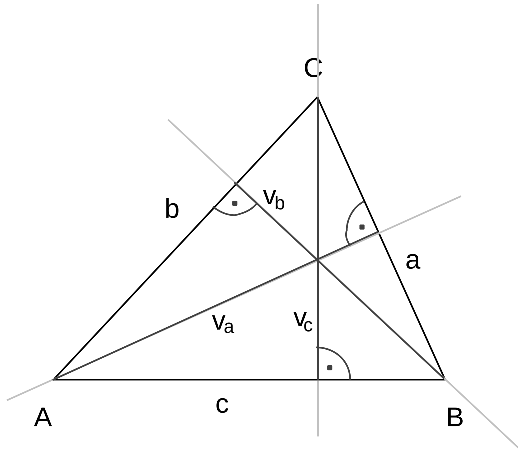
Následuje stejná úprava jako u kosočtverce:

1. 2.



Obsah S spočítáme opět jako součin délky strany a příslušné výšky: $S = a \cdot v_a$.

2.4 Obsah trojúhelníka



A, B, C ……………..vrcholy trojúhelníka

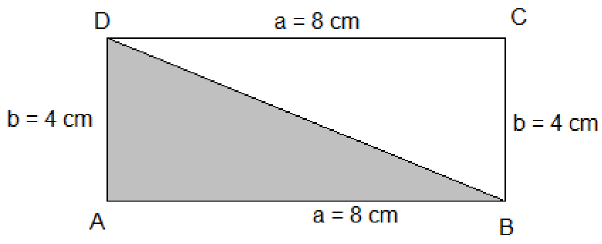
a, b, c, AB, BC, CA…strany trojúhelníka

v_a, v_b, v_c ……………..výšky trojúhelníka

(Pozn. výška trojúhelníka je vzdálenost mezi stranou a příslušným vrcholem, tj. mezi stranou *a* a vrcholem *A*, mezi stranou *b* a vrcholem *B*, nebo mezi stranou *c* a vrcholem *C*)

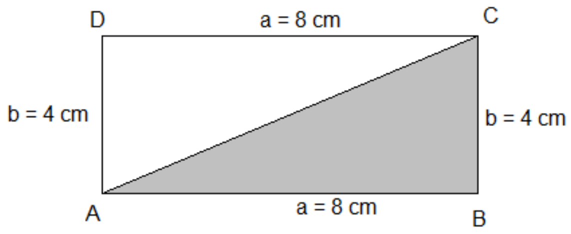
Při výuce tématu „obsah trojúhelníka“ budeme vycházet z již probraného tématu, „obsahy čtverce, obdélníka a rovnoběžníků“.

Ukažme si na obrázku, jak je možné velmi snadno, bez znalosti vzorce, obsah spočítat, máme-li vhodně navolenou úlohu.



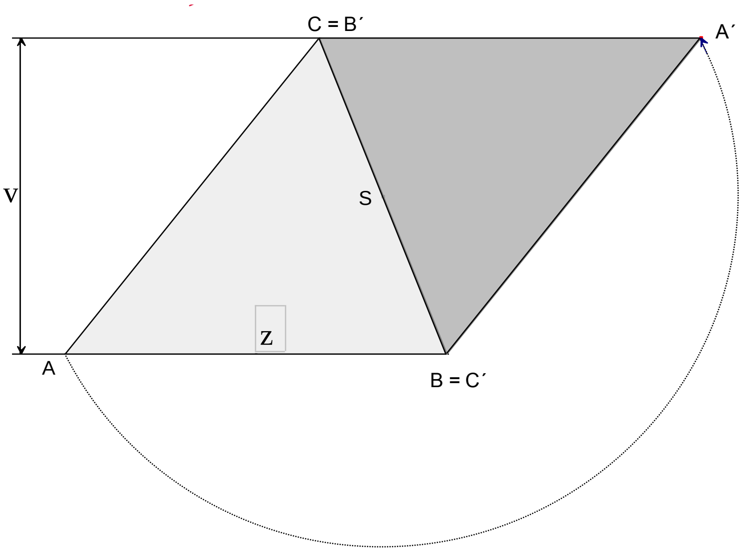
V obdélníku, jehož obsah máme spočítaný v předchozí kapitole je vyznačen trojúhelník *ABD*. Víme-li, že obsah obdélníka je 32 cm², pak snadno určíme obsah trojúhelníka *ABD* jako polovinu obsahu obdélníka, tj. 16 cm².

Ukažme si jiný obrázek :



I tento trojúhelník *ABC* má obsah roven polovině obsahu nám známého obdélníka, 16 cm².

Budeme li tento problém řešit pro obecný trojúhelník, opět si vezmeme na pomoc rovnoběžník, tentokrát už ale i ten bude v obecné poloze:



Podle bodu S jsme otočili trojúhelník *ABC* za vzniku rovnoběžníku *ABA´C*, jehož obsah umíme spočítat: $S = z \cdot v$.

Obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu rovnoběžníku: $S = \frac{z \cdot v}{2}$

Můžeme tedy tvrdit, že pokud trojúhelník, jehož obsah chceme určit, doplníme na rovnoběžník, pak je jeho obsah roven polovině obsahu tohoto rovnoběžníka.

Obsah trojúhelníka se dá vyjádřit vzorcem: $S = \frac{a \cdot va}{2}$, kde a a v_a jsou délka strany a výška doplněného rovnoběžníka a zároveň také délka strany a výška zadaného trojúhelníka.

Na základní škole se také uvádí vzorec, který nám může posloužit při určování obsahu trojúhelníka, známe - li délky všech jeho tří stran, ale neznáme - li velikosti jeho vnitřních úhlů.

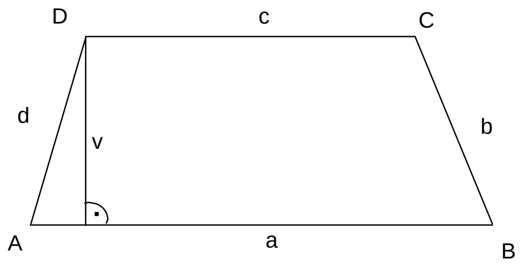
Jedná se o Heronův vzorec: $S = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$

kde *a, b, c* jsou délky stran a kde

$s = \frac{a+b+c}{2}$.

2.5 Obsah lichoběžníka

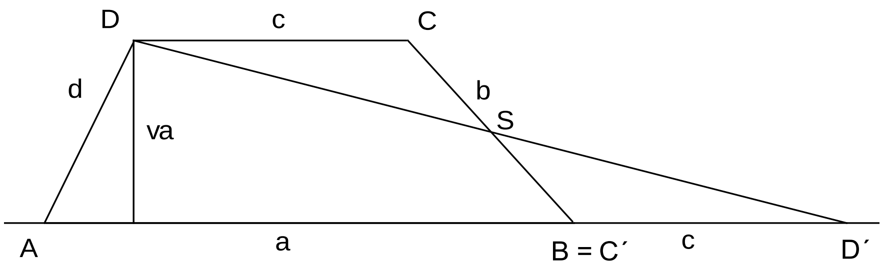
Při výuce obsahu lichoběžníka budeme vycházet z následujícího označení:



A, B, C, D ……………...……..vrcholy
a, b, c, d, AB, BC, CD, DA……strany
v…………………………..……výška
AB || *CD*……………………základny

Upravme si obrázek:

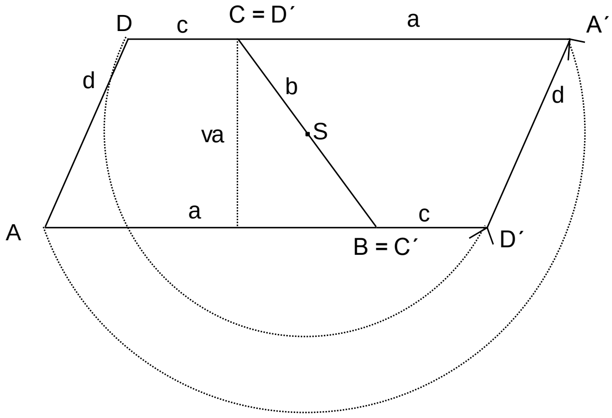
Bod *S* je středem úsečky *BC* a zároveň středem souměrnosti, ve které zobrazíme bod *D* na bod *D´*. Tím nám vznikne trojúhelník *BD´S* shodný s trojúhelníkem *SCD*.



Pokud pak budu chtít spočítat obsah útvaru *AD´D*, který má stejný obsah jako zadaný lichoběžník, použiju vzorec pro obsah trojúhelníka $S_t = \frac{a \cdot va}{2}$,

tedy $S_l = \frac{(a + c) \cdot va}{2}$.

Jiným možným odvozením je následující způsob:



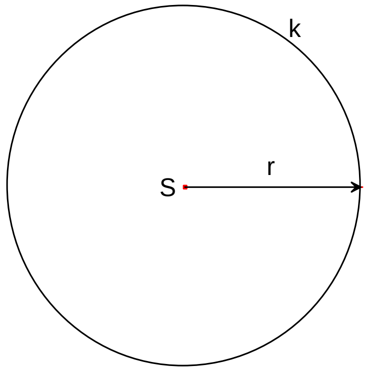
Otočíme zadaný lichoběžník *ABCD* v otočení se středem *S* o úhel 180°. Vznikne nám rovnoběžník *AD´A´D*, jehož obsah umíme spočítat podle vzorce pro obsah kosodélníka : $S = (a + c) \cdot v_a$

Obsah lichoběžníka je pak roven polovině obsahu rovnoběžníka, tedy:

$$S = \frac{(a+c) \cdot va}{2}$$

2.6 Obsah kruhu

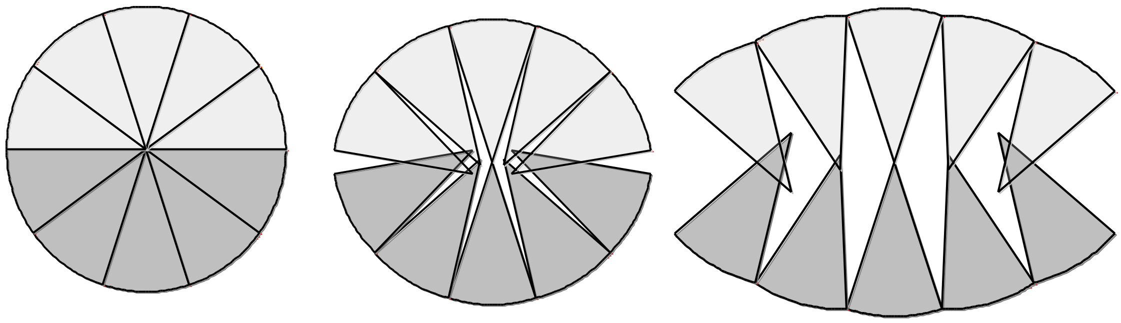
Kruh a jeho vlastnosti:



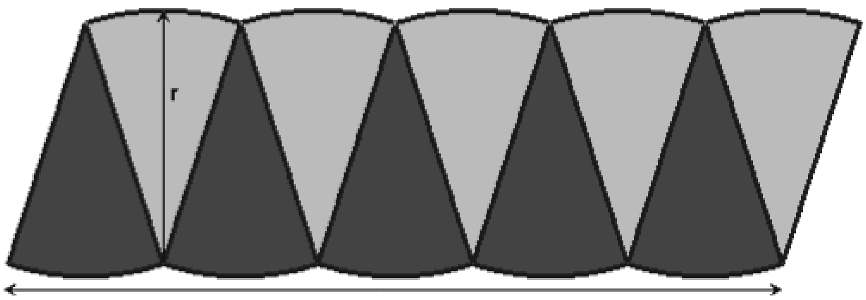
Kruh je dán svým středem S a poloměrem r.

Chceme li vyjádřit jeho obsah, užijme následujícího znázornění:

1. Rozdělme kruh na 10 shodných výsečí, (n = 10), a ty poskládejme podle naznačení



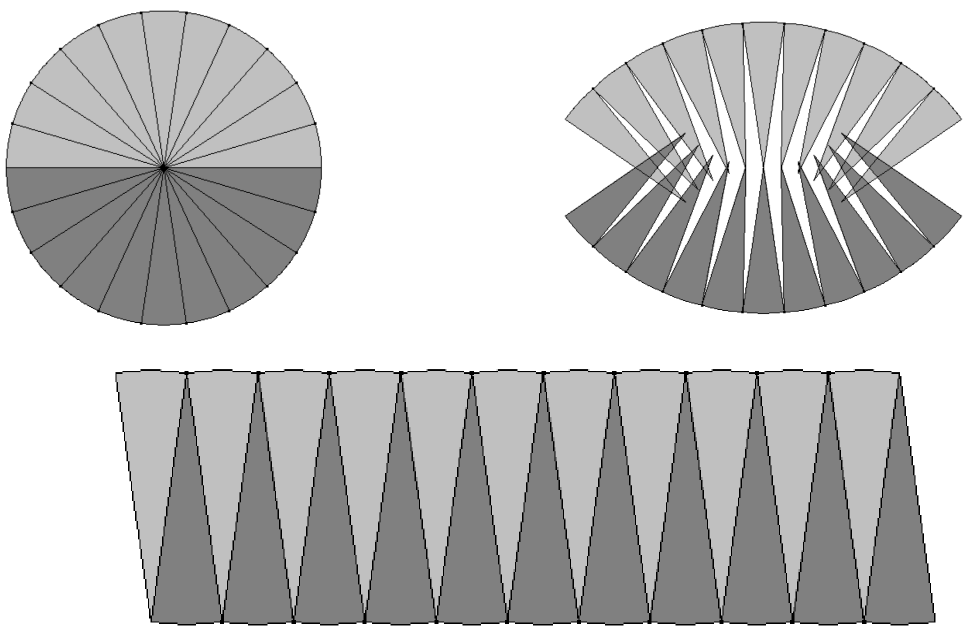
2. Vytvoříme tak tvar přibližného rovnoběžníka o rozměrech πr a r :



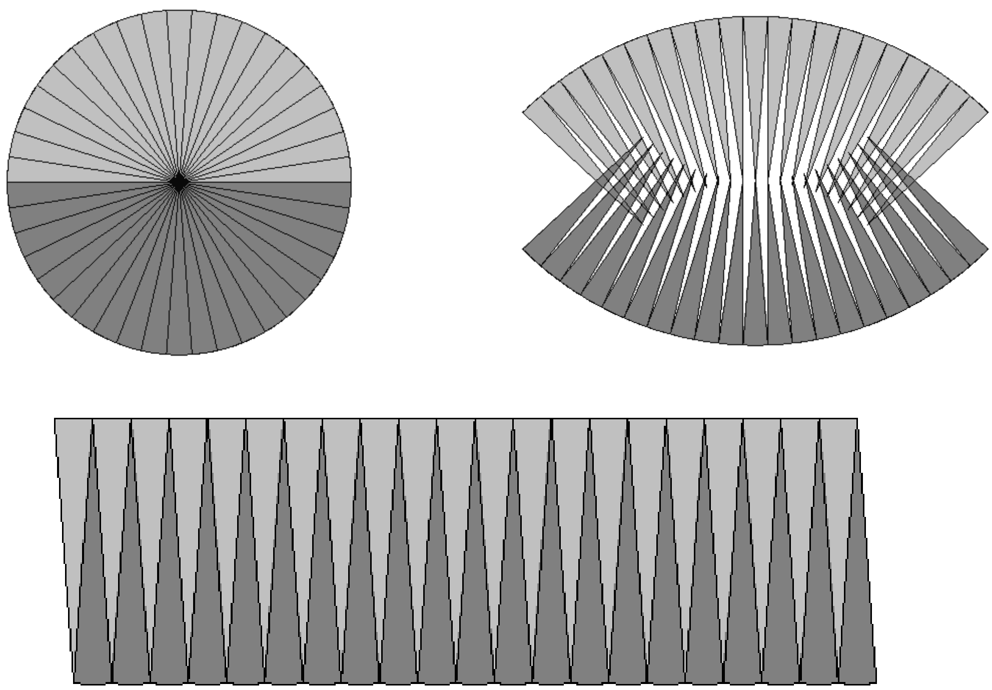
Jeho obsah je přibližně $S = r \cdot \pi r$.

Budeme - li při dělení na výseče zvyšovat jejich počet, bude se nám výsledný rovnoběžník stále více přibližovat obdélníku, až pro n = ∞ výsečí dostaneme přesný obdélník s délkami stran πr a r, $S = \pi r^2$.

n = 22:

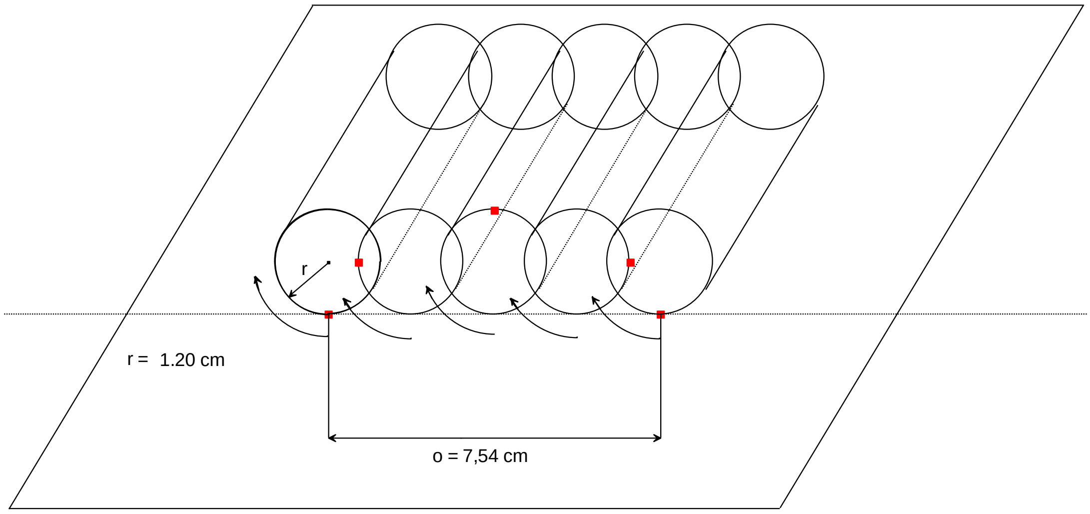


n = 42:



Zavedení konstanty π:

Při hledání délky kruhu se na ZŠ může užít následujícího pokusu:
Položme si na papír, jako na obrázku, váleček známého poloměru podstavy (r = 1,2 cm) a v místě, kde se podstava dotýká podložky si udělejme značku, jak na papír, tak na váleček. Pak válečkem otočme tak, aby se značka opět dotýkala papíru a udělejme znovu na papíře značku. Nyní změřme vzdálenost mezi značkami na papíře.
V našem případě, pro průměr 2,4 cm, vyšla vzdálenost 7,52 cm.



Zkusme pokus znovu, pro jiný průměr, např. 4 cm. Výsledná vzdálenost značek bude 12,57 cm.
Průměr *d* a obvod *o* kružnice jsou tedy vždy v poměru 1 : 3,14, kde číslo 3,14 vyjadřuje právě konstantu π.

Se staršími žáky vycházíme při odvozování konstanty π z podobnosti:
Každé dva kruhy jsou si podobné s koeficientem podobnosti *k*, pro který platí
$d_{k1} = k \cdot d_{k2}$, $o_{k1} = k \cdot o_{k2}$.
Pak zřejmě pro každé dvě kružnice také platí:
$\frac{dk1}{dk2} = \frac{ok1}{ok2}$, kde *d* je průměr kružnice.
Pro naše dvě kružnice platí:
$\frac{o1}{d1} = \frac{o2}{d2} = \frac{7{,}54}{2{,}4} = \frac{12{,}57}{4} \doteq 3{,}1425$ = konstanta π.

3 PRŮZKUM ZNALOSTÍ STUDENTŮ

Při zjišťování úrovně znalostí žáků byl sestaven test, který obsahoval 12 úloh k dané tématice. Příklady, které obsahoval, se dají rozdělit do několika charakteristických skupin:

Základní užití vzorce - č. 1, 2, 4

Prověření míry formality znalostí vzorců - č. 5, 6

Odhalení různých strategií řešení - č. 3, 7, 8, 9

Test byl zadán ve dvou paralelních třídách - 8. třídě na ZŠ Dobrá Voda u Č. Budějovic a ve 3.E (tercii) gymnázia J.V. Jirsíka v Českých Budějovicích v průběhu února 2011.

8. třída měla látku „Obsahy rovinných útvarů“ kompletně probranou již ze sedmé třídy, studenti tercie neměli z tohoto tématu ještě probranou kapitolu „Lichoběžník“.

Charakteristika tříd:

Do 8. třídy ZŠ Dobrá Voda chodí 17 žáků, 9 chlapců a 8 dívek. Při psaní testu však bylo přítomno jen 14 žáků.

Třída patří v matematice k podprůměrným třídám, jelikož většina nadaný žáků odešla po dokončení 5. třídy na gymnázia. Jak jsem se dozvěděla od paní učitelky Kardové, vyučující v této třídě matematiku, 3 žáci (chlapci) svými znalostmi a dovednostmi výrazně převyšují zbytek třídy. Bohužel jsme toto tvrzení nemohli potvrdit či vyvrátit u všech tří hochů, protože v době psaní testu 2 z nich chyběli. Třetí pak opravdu napsal nejlepší práci z celé třídy. Ani tak však nebyla kvalita odvedené práce nijak vysoká, protože zde chybí motivace. Hoch necítí potřebu lépe se na hodiny matematiky připravovat, když i bez toho bývá mezi nejlepšími.

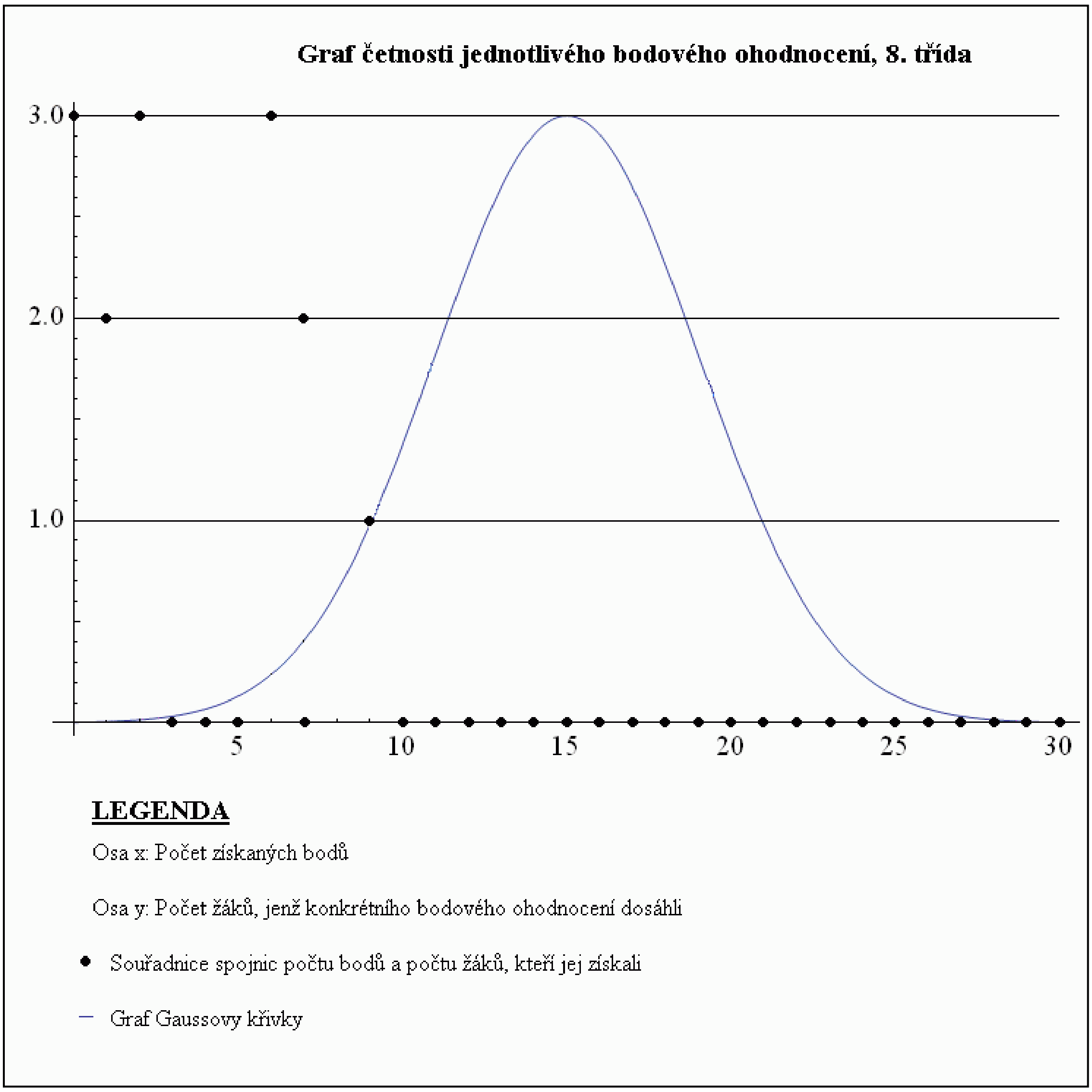
Opakem je dívka, jejíž práce obsahovala pouze podpis a ani nejsnazší úlohy se nepokusila vyřešit. V matematice patří k nejhorším žákům a o učivo nejeví zájem.

Celkově třída neprojevila větší snahu o dosažení dobrého výsledku a spolupráce s žáky byla spíše podprůměrná.

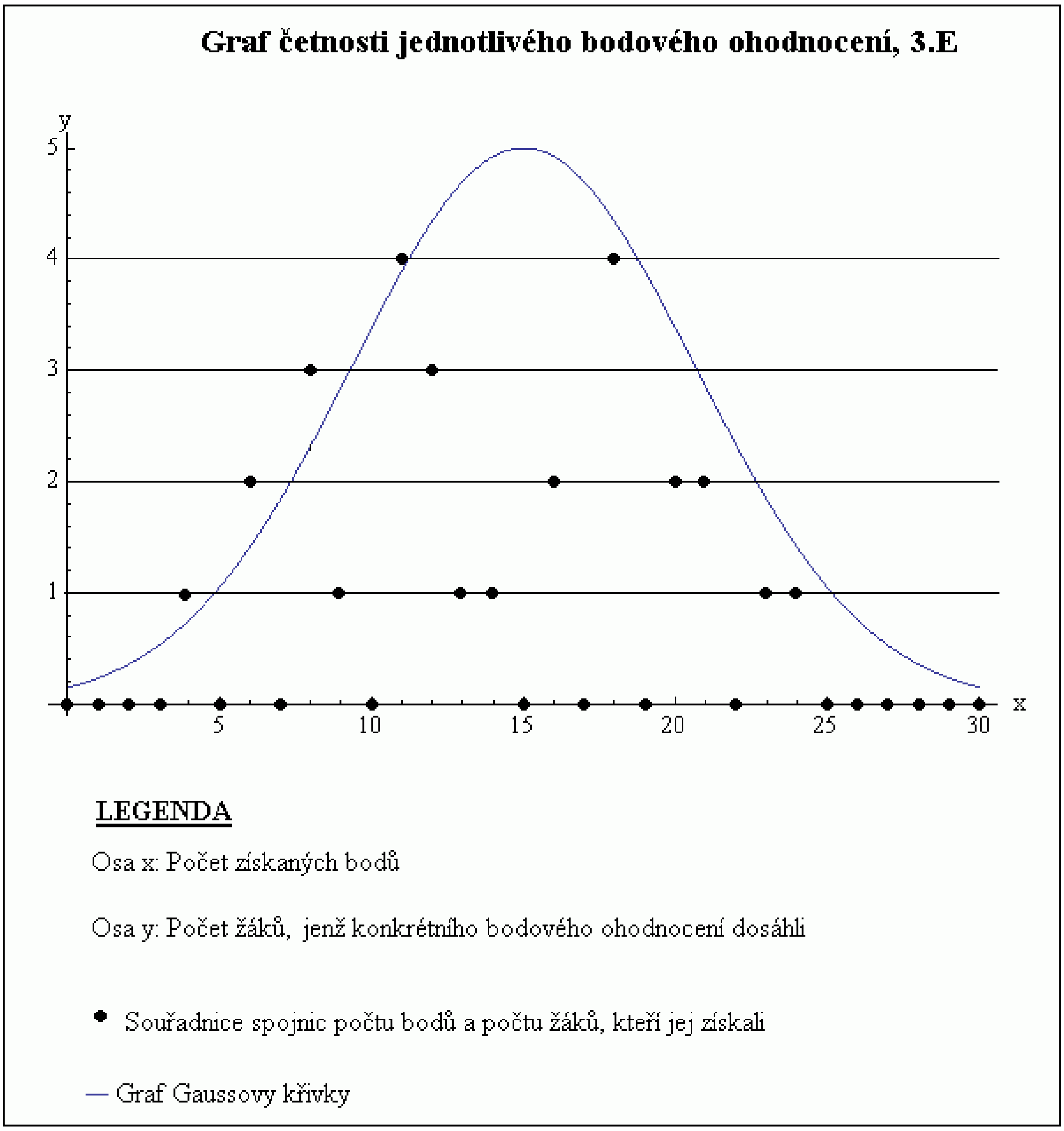
Bodové výsledky třídy jsou zaneseny v grafu na obr. 3.1 ve srovnání s Gaussovou křivkou.

Do tercie gymnázia J.V. Jirsíka chodí 31 studentů, z nichž jich bylo během psaní testu přítomno 28, 17 dívek a 11 chlapců.
Třída je svými výsledky v matematice, ve srovnání s ostatními třídami gymnázia, nadprůměrná.
Podle slov paní učitelky Kolářové, která učí tuto třídu celé tři roky na gymnáziu, není ve třídě nikdo, kdo by nad ostatními žáky výrazně přečníval, zároveň však také nikdo, kdo by se dal označit za nejhoršího studenta. Žáci si udržují svůj standard a nejsou zde výjimečné „extrémy".
Oproti žákům ZŠ pracovali studenti se zájmem, většinu úloh se alespoň pokusili vyřešit, i když se někdy k výsledku nedopracovali. Měli snahu vymyslet i jiné než klasické způsoby řešení a nebyli líní zdůvodňovat své odpovědi.

Jejich výkon víceméně odpovídal Gaussově křivce, podle grafu na obr. 3.2 .



Obr. 3.1: Graf četnosti dosažených bodů v 8. třídě.



Obr. 3.2: Graf četnosti dosažených bodů v tercii.

Vyhodnocení testu - všeobecné:

Test byl psán bez předchozího upozornění, takže se žáci neměli možnost dopředu připravovat a pracovali jen s těmi poznatky, které si zapamatovali z doby, kdy látku probírali. To se projevilo jako problematické zvláště v 8. třídě, kde bylo patrné, že si žáci vzorce nepamatují, neumí je odvodit, a tudíž nezvládají příklady vypočítat.

Ve výsledném hodnocení byl na první pohled rozdíl mezi oběma třídami. Oba výsledky však byly očekávány.

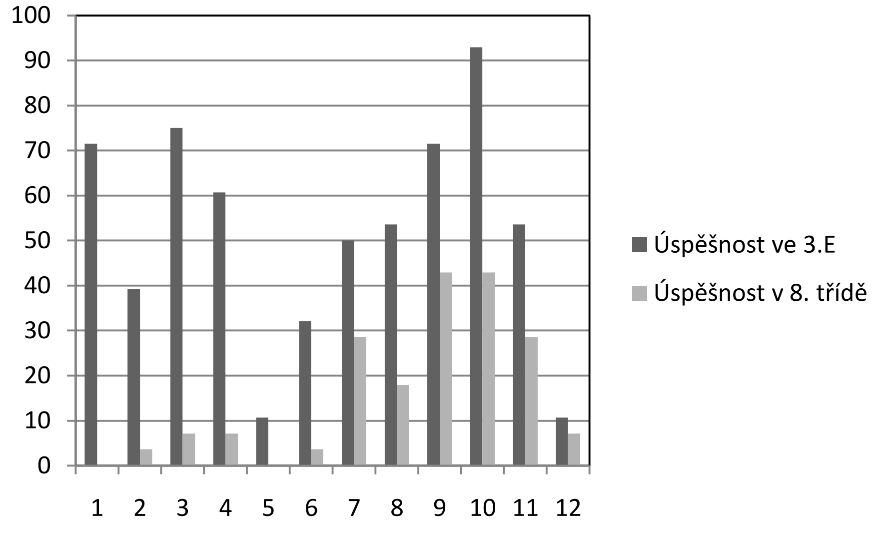
Úspěšnost ve třídě 3.E (tercie)		
Úloha č.	počet správných odpovědí	úspěšnost v %
1.	20	71,5
2.	11	39,3
3.	21	75
4.	17	60,7
5.	3	10,7
6.	9	32,1
7.	14	50
8.	15	53,6
9.	20	71,5
10.	26	92,9
11.	15	53,6
12.	3	10,7

Obr. 1: Tabulka úspěšnosti - počty správných odpovědí ve 3.E.

Úspěšnost v 8. třídě ZŠ		
Úloha č.	počet správných odpovědí	úspěšnost v %
1.	0	0
2.	0,5	3,6
3.	1	7,1
4.	1	7,1
5.	0	0
6.	0,5	3,6
7.	4	28,6
8.	2,5	17,9
9.	6	42,9
10.	6	42,9
11.	4	28,6
12.	1	7,1

Obr. 2: Tabulka úspěšnosti - počty správných odpovědí v 8. třídě.

Tabulky úspěšnosti udávají, kolik % žáků mělo správně všechny odpovědi, kolik jich vyřešilo jen 11, 10, 9, …. úloh správně nebo kolik % žáků nevyřešilo ani jednu úlohu.



Obr. 3: Graf úspěšnosti řešení jednotllivých příkladů (v %).

Úspěšnost žáků při řešení jednotlivých úloh je zachycena v grafu na obr. 3. Říká nám, kolik % žáků vyřešilo jednotlivé úlohy.

3.1 Úloha 1

Určete obsah trojúhelníka *ABC*, je-li $a = 60$ cm, $v_a = 40$ mm.

Komentář:

V této úloze by žáci měli projevit znalost základního vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka a zároveň by neměli opomenout převody jednotek. Úloha je velmi snadná, žáci se v ní nesetkají s žádnou záludností, a proto je volena na začátek testu, jako „zahřívací“ příklad.

Řešení této úlohy se skládá ze dvou kroků:

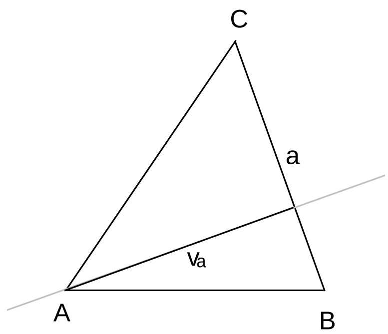
1) správný převod jednotek

$a = 60$ cm

$v_a = 40$ mm = 4 cm

2) dosazení do vzorce

$S_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{60 \cdot 4}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ cm}^2$



Rozbor nejčastějších chyb žáků:

Nejčastějším problémem, který se v řešení této úlohy vyskytoval, byla neznalost vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka. Neznalo jej 6 z 27 žáků třídy 3.E a celých 10 ze 14 žáků 8. třídy.

Dále se vyskytoval chybný nebo úplně chybějící převod jednotek. Tuto chybu udělali 2 studenti tercie.

V osmé třídě se navíc setkáváme s tím, že si tři žáci vzorec pro výpočet zběžně pamatují, vědí, že se násobí délka strany s výškou a výsledek se dělí dvěma, ale z jimi zapsaných vzorců je zřejmé, že nerozlišují, zda je výška ke straně příslušná, či nikoliv. Přes to, že měli zadanou jen jednu stranu a jednu výšku, úlohu žáci nedořešili.(obr. 5).

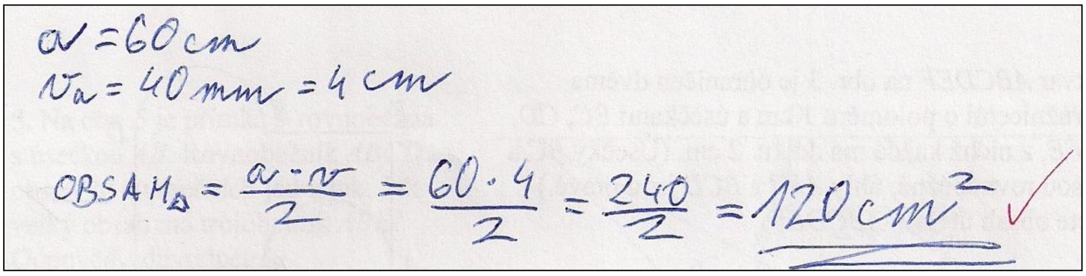
Poslední z chyb, s kterou se můžeme setkat je patrná z obr. 6, kde žák váhal, mezi násobením a dělením součinu délky strany a výšky.

Zbytek neúspěšných řešitelů se většinou dopustil numerické chyby.

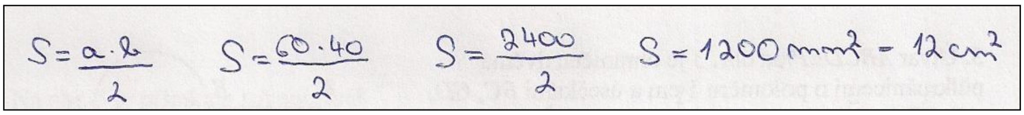
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	20 / 28	71,5	0 / 14	0
Neznalost vzorce	6	21,4	10	71,4
Chybný převod	2	7,1	0	0
Numerická chyba	2 (spolu s další chybou)	7,1	0	21,4
Formální znalost vzorce	-	-	4	28,6

Tab. 1.1: Tabulka úspěšnosti.

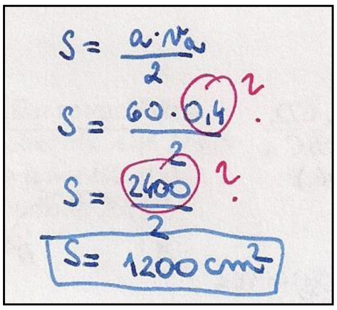
Ukázky z prací studentů:



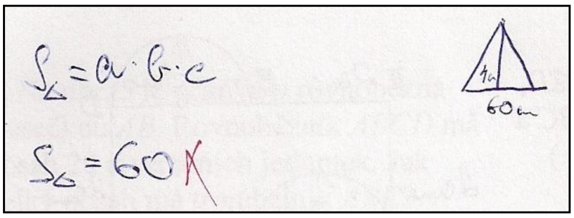
Obr. 1: Správně vyřešená úloha.



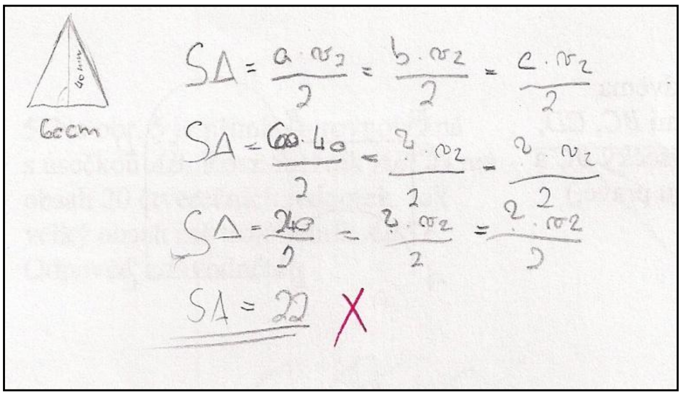
Obr. 2: Chyba v převodu: násobení hodnot s různými jednotkami.



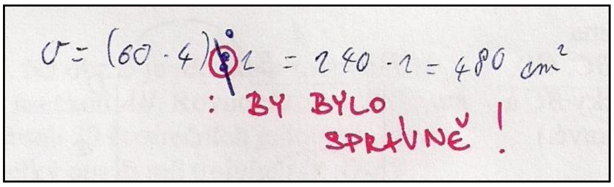
Obr. 3: Chybný převod jednotek a numerická chyba dohromady.



Obr. 4: Neznalost vzorce.



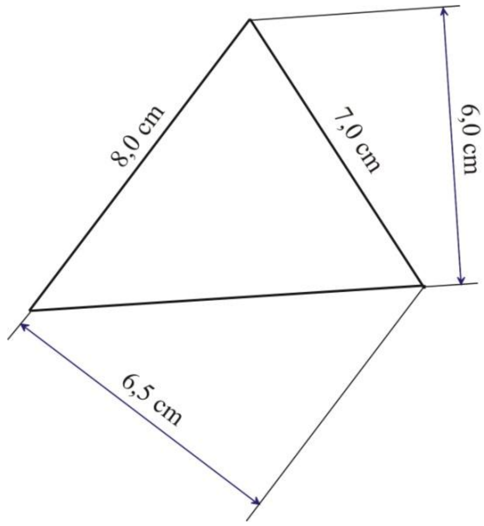
Obr. 5: Nepřesná znalost vzorce, všechny výšky trojúhelníka jsou označeny stejně, navíc ve výpočtu numerická chyba.



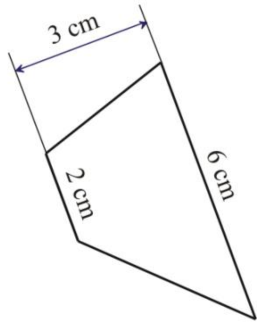
Obr. 6: Žák si pamatoval, že součin strany a výšky se „něco“ musí, nejprve správně dělil, pak se ale chybně opravil na násobení.

3.2 Úloha 2

Určete obsah S_1 trojúhelníka na obr. 2.1 a obsah S_2 lichoběžníka na obr. 2.2.



Obr. 2.1



Obr. 2.2

Komentář:

Úloha testuje, do jaké míry žáci neformálně rozumí vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníka a zda si ze zadání s větším počtem údajů dokážou vybrat pro ně potřebné hodnoty a spočítat tak obsah trojúhelníka (obr. 2.1). V druhé části je pak cílem odhalit znalost vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníka (obr. 2.2)

První část úlohy, určit obsah trojúhelníka, nutí žáka správně si vybrat sobě odpovídající údaje do vzorce, tedy vybrat stranu a jí příslušnou výšku. Délky stran máme zadány dvě, přičemž délce strany 7,0 cm neodpovídá ani jedna ze zadaných výšek, délce strany 8,0 cm odpovídá výška na tuto stranu o délce 6,5 cm. K výšce 6,0 cm naopak nemáme zadánu příslušnou délku strany.

Proto jediný možný výpočet obsahu vypadá takto:

a = 8,0 cm

v_a = 6,5 cm

$S_1 = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}5}{2} = \frac{52}{2} = 26\ \text{cm}^2$

Druhá část úlohy, obsah lichoběžníka, prověřuje znalost vzorce:

$z_1 = 6$ cm

$z_2 = 2$ cm

$v = 3$ cm

$$S_2 = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot 3 = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

Někteří žáci obešli vzorec pro obsah lichoběžníka a rozložili ho na jiné útvary:

1) trojúhelník + kosodélník

Tímto způsobem se úlohu pokusili vyřešit dva studenti, bohužel se ale vinou numerické chyby nedopracovali ke správnému výsledku.

- trojúhelník:

$a = 4$ cm

$v_a = 3$ cm

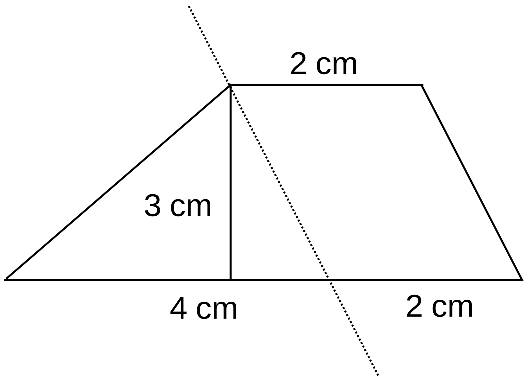
$$S_\Delta = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

- kosodélník:

$a = 2$ cm

$v = 3$ cm

$S_k = 2 \cdot 3 = 6$ cm^2



Obr. 2.3

Obsah lichoběžníka:

$S_2 = S_\Delta + S_k = 6 + 6 = 12$ cm^2

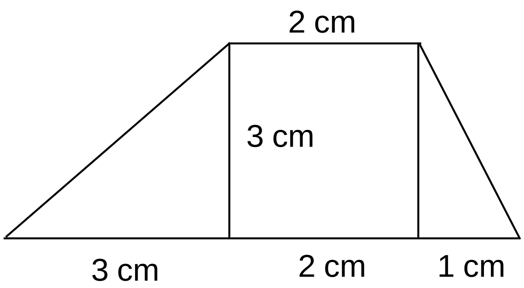
2) 2 trojúhelníky + obdélník

Tento postup si zvolili 4 studenti.

- obdélník:

$a = 2$ cm

$b = 3$ cm



$S_o = a \cdot b = 2 \cdot 3 = 6$ cm^2

Obr. 2.4

V tomto případě žáci nepostupovali matematicky zcela správně, neboť většinou odhadovali délky základen jednotlivých trojúhelníků. Možná při tom využili metodu poměrů, kdy si změřili pravítkem délku základny lichoběžníka a podle naměřených údajů pak určili délky základen trojúhelníků:

- trojúhelník 1:	- trojúhelník 2:
$a = 3$ cm	$a = 1$ cm
$v_a = 3$ cm	$b = 3$ cm
$S_{\Delta 1} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ cm}^2$	$S_{\Delta 2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5 \text{ cm}^2$

$S_2 = S_o + S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} = 6 + 4{,}5 + 1{,}5 = 12 \text{ cm}^2$

Rozbor nejčastějších chyb žáků:

V první části žáci nejvíce chybovali při výběru správných údajů z obrázku. Chybu udělalo 11 žáků tercie. Z 8. třídy měla tuto chybu jedna žákyně, ostatní žáci buď neznali vzorec, nebo se o vyřešení nepokusili vůbec.

V tercii se dále vyskytovaly chyby ve vzorci nebo numerické chyby. Správně tuto úlohu vyřešilo 7 žáků.

V druhé části, při výpočtu obsahu lichoběžníka, udělalo chybu 15 žáků z tercie - nejčastěji kvůli neznalosti vzorce, 11 žáků, a 3 žáci udělali chybu při postupu rozkládáním na obdélník a 2 trojúhelníky a 1 žák chyboval při výpočtu přes vzorec v násobení.

V 8. třídě vyřešila tento úkol jen jedna dívka, 2 žáci se pokusili vyřešit úlohu, ale užili špatný vzorec a zbytek třídy se o vyřešení ani nepokusil.

Obsah trojúhelníka	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	7 / 28	25	0	0
Neznalost vzorce	6 + 1[1]	25	13[2]	93
Chybný výběr	11	39,3	1	7
Numerická chyba	3	10,7	0	0

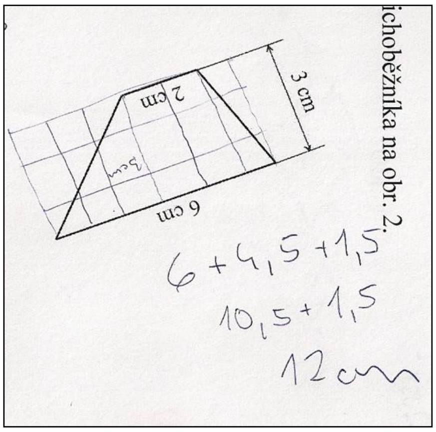
Tab. 2.1: Tabulka úspěšnosti.

Obsah lichoběžníka	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	13 / 28	46,4	1 / 14	7,1
Neznalost vzorce	11	39,3	13	92,9
Numerická chyba	4	14,3	0	0

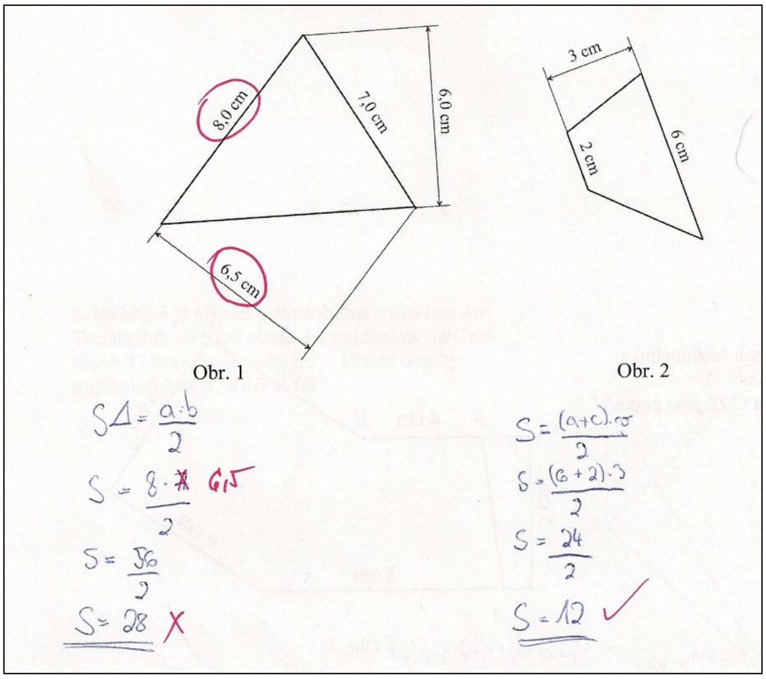
Tab. 2.2: Tabulka úspěšnosti.

[1] „výpočet“ je natolik záhadný, že ho šlo jen stěží zařadit, viz. *Ukázky z prací studentů*, Obr. 4
[2] žáci, kteří neznali vzorec nebo se o výpočet ani nepokusili

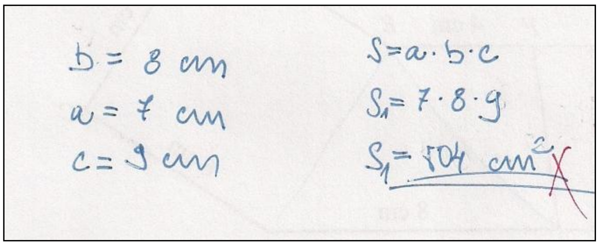
Ukázky z prací studentů:



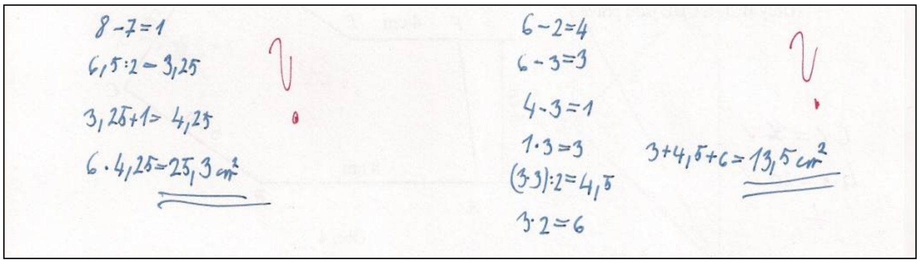
Obr. 1: Řešení - 2 trojúhelníky + obdélník, pěkná aplikace čtvercové sítě.



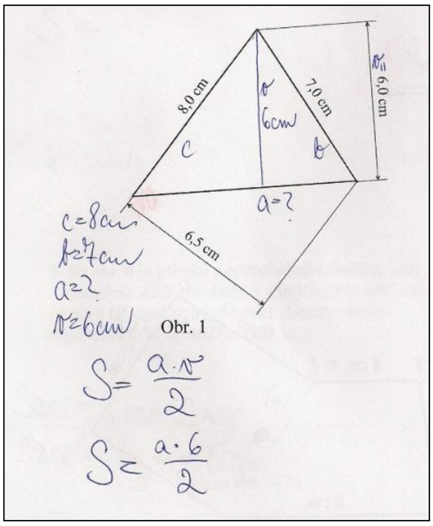
Obr. 2: Špatně vybrané údaje - první část, znalost vzorce, „zapadající“ údaje - druhá část.

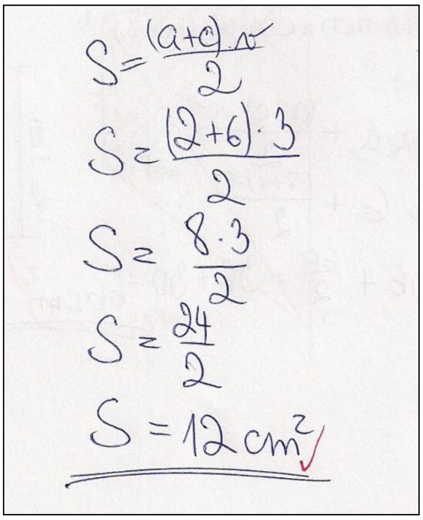


Obr. 3: Chybný vzorec.

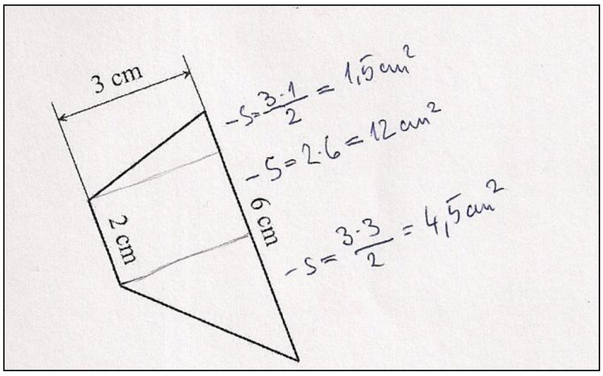


Obr. 4: Nevysvětlitelný postup.





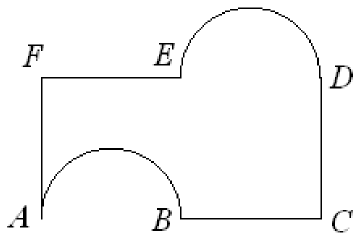
Obr. 5: Nesprávně vybraná strana a výška. Obr. 6: Správně spočítáno.



Obr. 7: Řešení - 2 trojúhelníky + obdélník: u obdélníka zapomněl žák odečíst od délky strany 6 cm základny trojúhelníků.

3.3 Úloha 3

Útvar *ABCDEF* na obr. 3.1 je ohraničen dvěma půlkružnicemi o poloměru 1 cm a úsečkami *BC*, *CD*, *AF*, *FE*, z nichž každá má délku 2 cm. (Úsečky *BC* a *EF* jsou rovnoběžné, úhly *AFE* a *BCD* jsou pravé.) Určete obsah útvaru *ABCDEF*.



Obr. 3.1

Komentář:

Tato úloha má prověřit logické myšlení žáků. Zajímalo nás, zda si žáci ulehčí práci a spočítají obsah útvaru jako obsah obdélníka, zda budou jednou přičítat a jednou odečítat obsah půlkruhu, nebo jestli obdélník rozdělí na dva čtverce, z nichž jeden bude zmenšený o obsah půlkruhu a jeden o obsah půlkruhu zvětšený.

Nejsnazším způsobem dohledání výsledku je ze zadaných údajů dopočítat délky stran *AC* a *CD* a na základě úvahy, že vykrojený půlkruh s průměrem *AB* vyplní vyklenutý půlkruh s průměrem *ED*. Pak spočítáme obsah útvaru jako obsah obdélníka se stranami *AC* a *CD*.

$|AC| = 4$ cm

$|CD| = 2$ cm

$S = |AC| \cdot |CD| = 4 \cdot 2 = 8$ cm^2

Dalším, ale podstatně a zbytečně náročnějším, možným řešením je odečtení a následné přičtení obsahu půlkruhu.

$S_o = 8$ cm^2

- půlkruh:

$S_p = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5708$ cm^2

$S = S_o - S_p + S_p = 8 - 1{,}5708 + 1{,}5708 = 8$ cm^2

Rozbor nejčastějších chyb žáků:

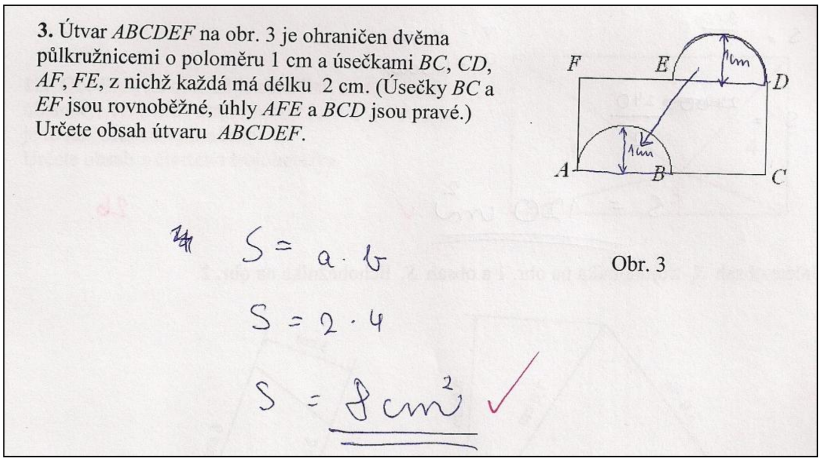
Při řešení této úlohy použila většina žáků 3.E metodu výpočtu obsahu obdélníka. Tito žáci, kteří si uvědomili skutečnost, že se oba půlkruhy navzájem vynulují, měli všichni úlohu správně spočítanou.
Jedna dívka od obsahu obdélníka nejprve odečetla obsah půlkruhu a následně ho opět přičetla, výsledek byl správný.
Žáci, kteří chybovali (3) , měli chybu ve vzorci pro obsah kruhu (viz. obr. 3) nebo si neuvědomili, co přičítají a co odečítají (obr. 3, obr. 4). Zbytek příklad nespočítal vůbec (4 žáci).

Z žáků 8. třídy vyřešil tuto úlohu jen jeden, který obsah spočítal jako obsah obdélníka. 2 žáci se pokusili o výpočet, který byl však jen pokusem cokoli zkombinovat ve snaze najít výsledek (obr. 5).

	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	21 / 28	75	1 / 14	7,1
Chyba ve vzorci, špatná úvaha	3	10,7	2	14,3
Žádné řešení	4	14,3	11	78,6

Tab. 3.1: Tabulka úspěšnosti.

Ukázky z prací studentů:

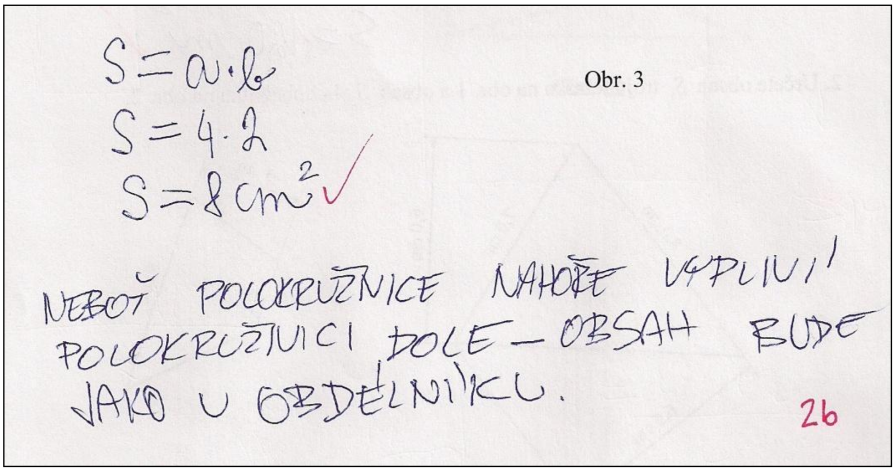

3. Útvar *ABCDEF* na obr. 3 je ohraničen dvěma půlkružnicemi o poloměru 1 cm a úsečkami *BC*, *CD*, *AF*, *FE*, z nichž každá má délku 2 cm. (Úsečky *BC* a *EF* jsou rovnoběžné, úhly *AFE* a *BCD* jsou pravé.) Určete obsah útvaru *ABCDEF*.

$S = a \cdot b$

$S = 2 \cdot 4$

$S = \underline{8\ cm^2}$

Obr. 1: Přesunutí půlkruhu, který vyčnívá, do půlkruhu, který obdélníku chybí.


Obr. 3

$S = a \cdot b$

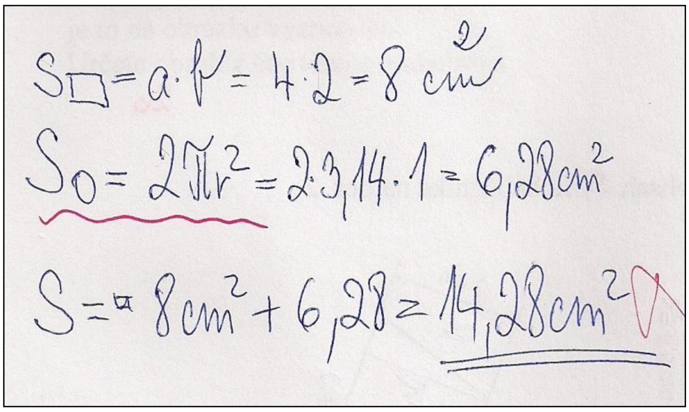
$S = 4 \cdot 2$

$S = 8\ cm^2$

NEBOŤ POLOKRUŽNICE NAHOŘE VYPLNÍ POLOKRUŽNICI DOLE – OBSAH BUDE JAKO U OBDÉLNÍKU.

2b

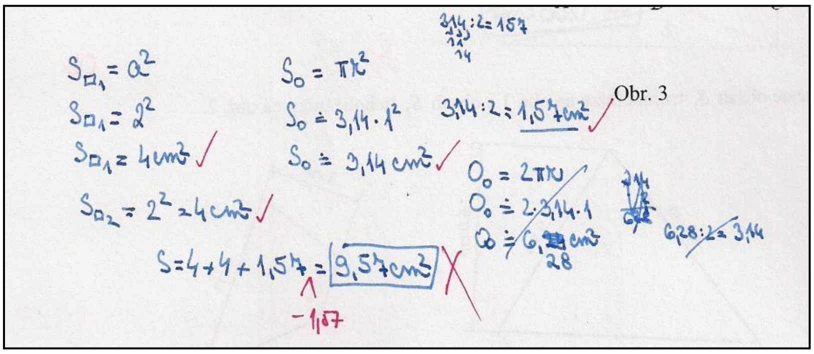
Obr. 2: Správný postup, ale nepřesná terminologie - polokružnice je čára, žák měl na mysli půlkruh.


$S_{\square} = a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8\ cm^2$

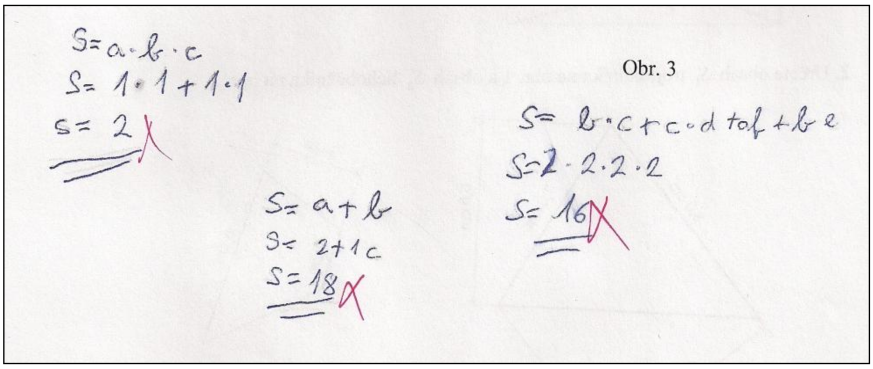
$S_{O} = 2\pi r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 = 6{,}28\ cm^2$

$S = 8\ cm^2 + 6{,}28 = \underline{14{,}28\ cm^2}$

Obr. 3: Špatný vzorec pro *S* kruhu, přičten celý kruh, místo poloviny a žádné odečtení.



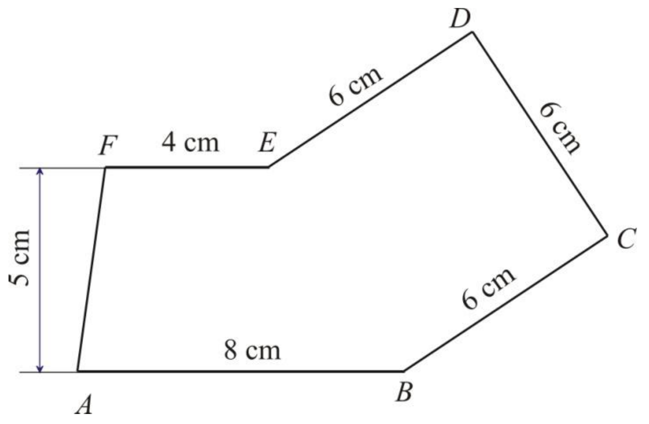
Obr. 4: Studentka správně přičetla obsah ohraničujícího půlkruhu *ED*, obsah půlkruhu *AB* už však neodečetla.



Obr. 5: Zcela nepochopitelný postup, žák nemá absolutní ponětí o tom, co počítá.

3.4 Úloha 4

Určete obsah šestiúhelníka *ABCDEF* na Obr. 4.1. (Úhly *BCD* a *CDE* jsou pravé.)



Obr. 4.1

Komentář:

Tato úloha má ukázat, jak jsou žáci schopni určit obsah útvaru, pro který neexistuje žádný pevný vzorec. Musí si zadaný útvar vhodně rozdělit tak, aby uměli spočítat obsah jednotlivých částí a z nich následně určit obsah celého šestiúhelníka.

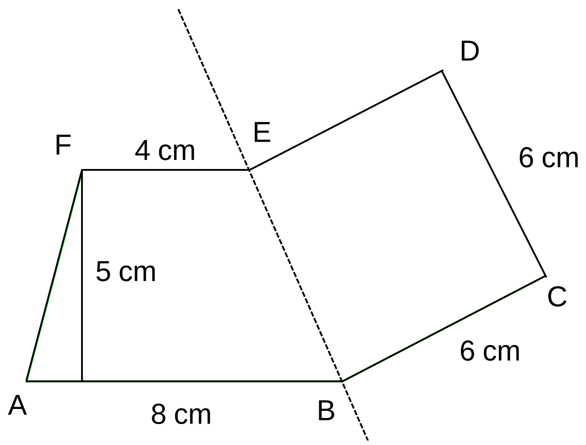
Nejsnazším řešením je rozdělit zadaný šestiúhelník přímkou, vedenou body *B* a *E,* na lichoběžník *ABEF* a čtverec *BCDE*. Obsah šestiúhelníka pak dostaneme, sečteme-li obsahy obou útvarů.

$S_l = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v \quad = \frac{8+4}{2} \cdot v =$

$= 30 \text{ cm}^2$

$S_č = a \cdot a = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$

$S = S_l + S_č = 30 + 36 = 66 \text{ cm}^2$



Dalším možným řešením je rozdělení na jiné útvary, např. čtverec, trojúhelník a rovnoběžník.

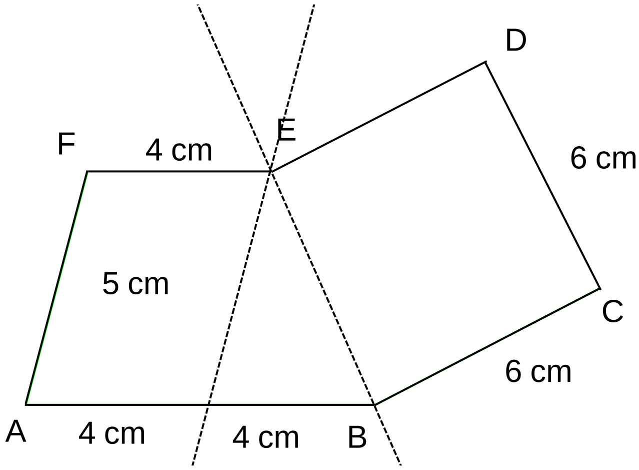
$S_{č} = a \cdot a = 6 \cdot 6 = 36\ \text{cm}^2$

$S_{\Delta} = \frac{a \cdot va}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10\ \text{cm}^2$

$S_r = a \cdot v = 4 \cdot 5 = 20\ \text{cm}^2$

$S = S_{č} + S_{\Delta} + S_r =$

$= 36 + 10 + 20 = 66\ \text{cm}^2$



Rozbor nejčastějších chyb žáků:

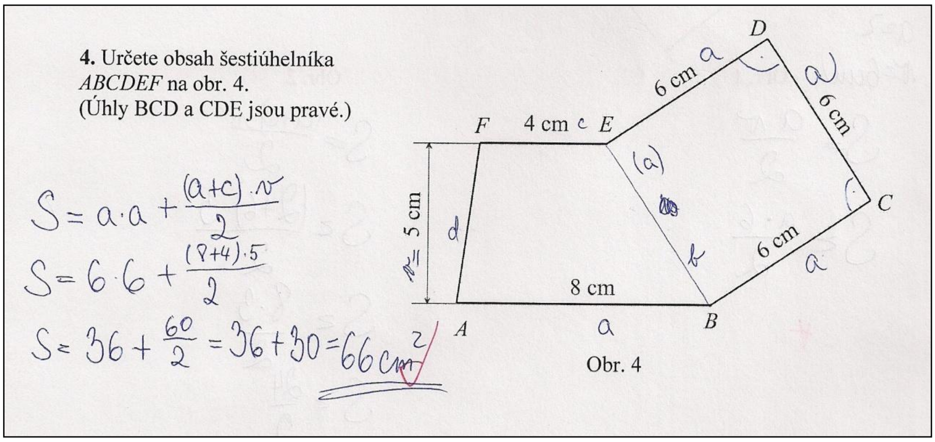
Většina žáků, kteří se pokusili o řešení, dokázala v šestiúhelníku správně určit část tvaru čtverce a vypočítat jeho obsah. Tam ovšem většina z neúspěšných řešitelů skončila. Při dopočítávání obsahu lichoběžníka hrála podstatnou roli neznalost vzorce a také se několikrát objevilo dosazení špatného údaje - délky strany čtverce místo délky základny (viz. obr. 3).

V 8. třídě vyřešil úlohu jeden žák, ostatní se o řešení nepokusili vůbec.

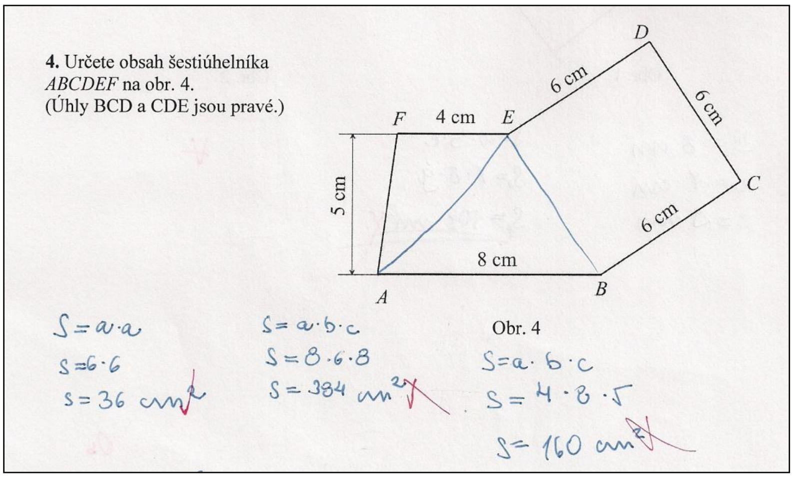
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	17 / 28	60,7	1 / 14	7,1
Chyba ve vzorci, špatná úvaha	6	21,4	0	0
Žádné řešení	5	17,9	13	92,9

Tab. 4.1: Tabulka úspěšnosti.

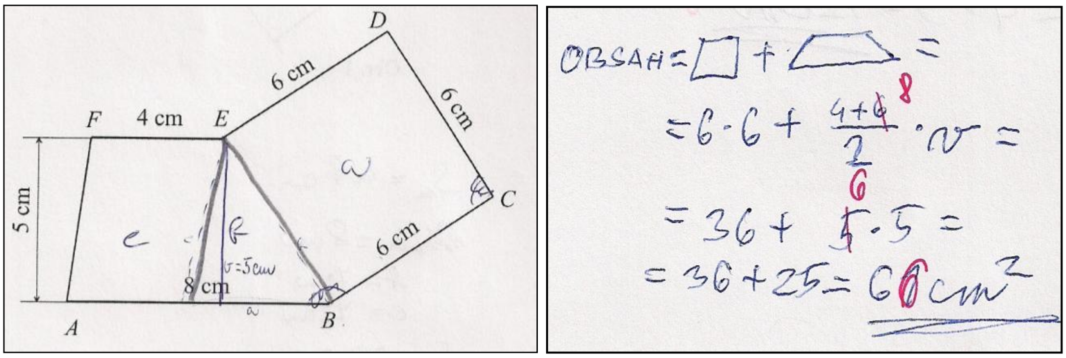
Ukázky z prací studentů:



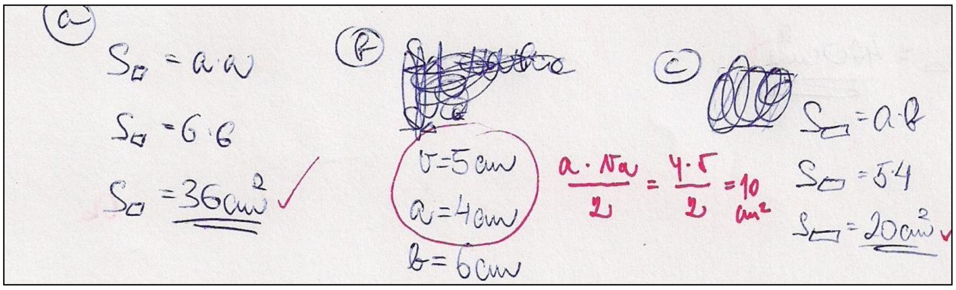
Obr. 1: Správné rozložení na čtverec a lichoběžník - pěkné, elegantní a rychlé řešení, pěkný zápis.



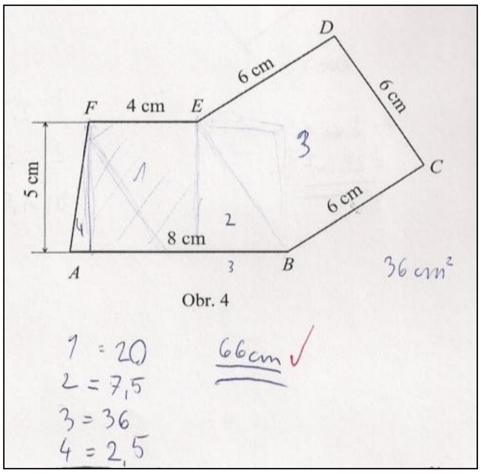
Obr. 2: Žák uměl spočítat obsah čtverce, vzorec pro obsah trojúhelníku však neznal.



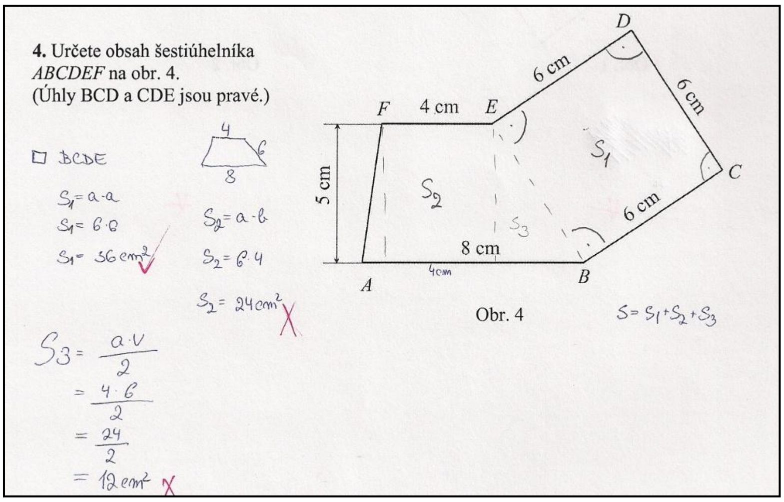
Obr. 3: Nejprve chtěl student počítat obsah jako součet obsahů čtverce a dvou trojúhelníků, nakonec však zvolil postup přes obsah lichoběžníka, kde špatně určil délku druhé základny.



Obr. 4 Studentka dělila útvar na čtverec, obdélník a trojúhelník vzniklý ze dvou menších trojúhelníků. Bohužel si nevzpomněla na vzorec pro obsah trojúhelníka



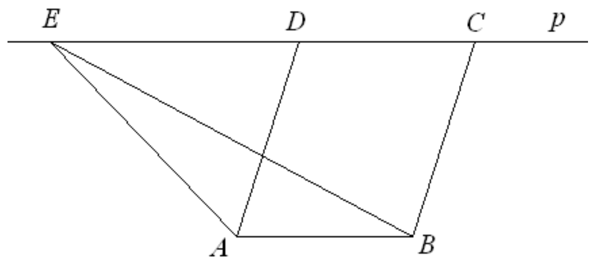
Obr. 5: Zde dokonce student určoval obsahy 2 trojúhelníků, obdélníku a čtverce, dle obrázku.



Obr. 6: Studentka patrně neznala vzorec pro obsah lichoběžníka a tak se snažila o vhodnější rozdělení, což se jí bohužel nepodařilo.

3.5 Úloha 5

Na obr. 5.1 je přímka *p* rovnoběžná s úsečkou *AB*. Rovnoběžník *ABCD* má obsah 20 cm^2. Jak velký obsah má trojúhelník *ABE*? Odpověď zdůvodněte!

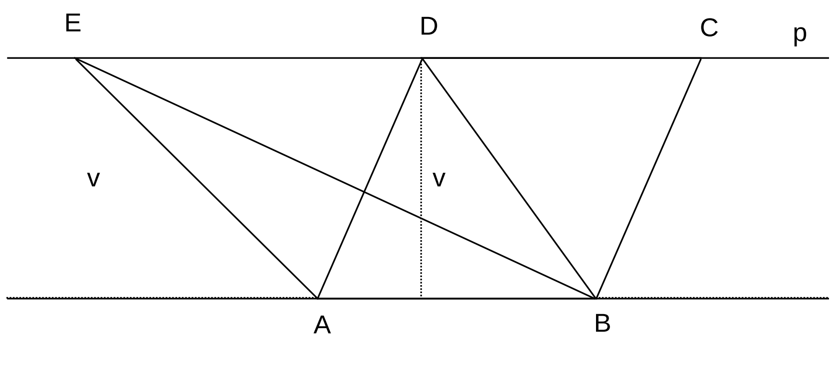


Obr. 5.1

Komentář:

Úloha má prověřit, jak dobře rozumí žáci vzorci pro obsah trojúhelníka. Zda je jejich znalost pouze formální, nebo zda porozuměli závislosti výsledku na výšce a délce základny.

V této úloze by žáci měli vycházet z obsahu trojúhelníka *ABD*, který tvoří polovinu obsahu rovnoběžníka *ABCD.* Pokud si žáci uvědomí podstatu vzorce pro obsah trojúhelníka, z něhož je patrné, že nezměním-li ani délku základny, ani příslušnou výšku na tuto základnu, výsledný obsah se nezmění. Proto, víme-li, že trojúhelníky *ABD* a *ADE* mají stejné základny a výšky, určíme obsah trojúhelníku *ADE* na 10 $cm^{2.}$



Rozbor nejčastějších chyb žáků:

Při řešení této úlohy uspěli jen 3 studenti tercie. Bohužel však byly jejich odpovědi buď jednořádkové, bez vysvětlení jejich úvahy. Jen jedna dívka se pokusila vysvětlit svůj postup, i když trochu zmatečně. To podstatné je však v zápise zachyceno, (obr. 2).

Nejčastější chybou bylo, že si žáci vůbec neuvědomili shodnost hledaného obsahu s obsahem trojúhelníku *ABD,* podle vzorce.

Žáci se pokoušeli podle známého obsahu nejprve určit délky stran rovnoběžníku. I zde však chybovali, protože obsah rovnoběžníku určovali podle vzorce $S = a \cdot b$ (obr. 3).

Jeden žák 8. třídy vymyslel, že obsah trojúhelníka *ABS* (*S* je mnou označený průsečík stran *AD* a *BE*) je roven $\frac{1}{3}$ obsahu rovnoběžníka, tedy 20 : 3 ≐ 6,7 a tento trojúhelníka se do trojúhelníka *ASE* vejde 1,5x, tedy výsledek:

$6{,}7 + 1{,}5 \cdot 6{,}7 = 16{,}75$ cm^2, (obr. 4).

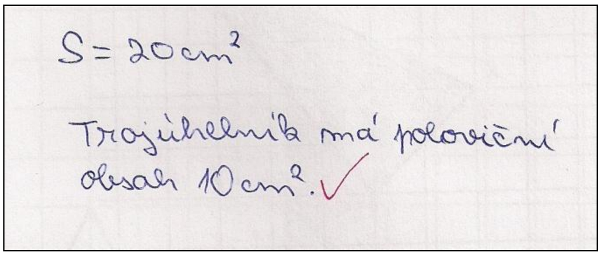
U řešení z obr. 5 byla chybou neznalost vzorce pro obsah rovnoběžníka. Namísto toho použil žák vzorec pro obvod.

S dalším ze špatných řešení jsem se setkala s odhadováním délek stran do vzorce pro obsah lichoběžníku, odkud se žák následně pokusil vyjádřit délku strany *AB* a výšku rovnoběžníka - shodnou s výškou trojúhelníka, jehož obsah měl žák určit, (obr. 6).

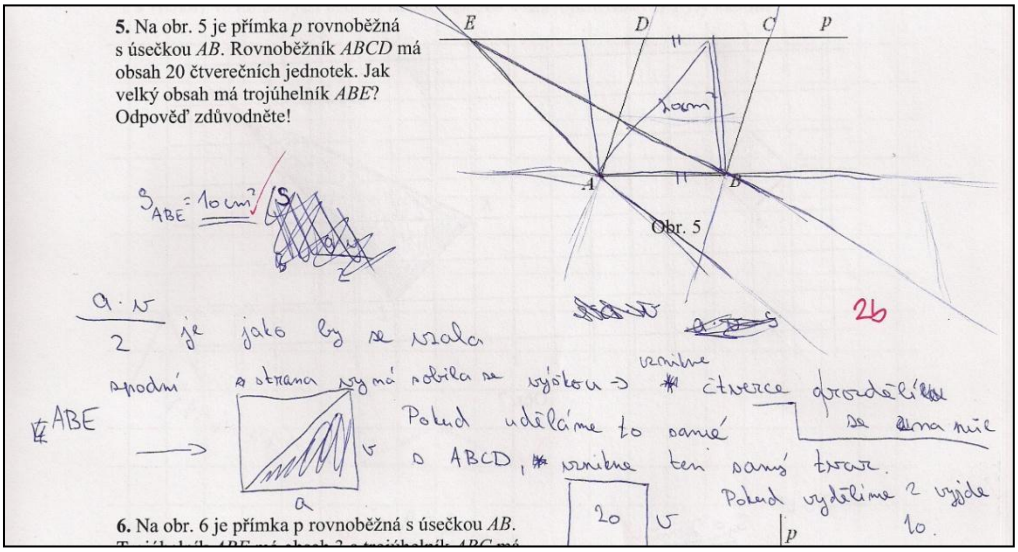
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	3 / 28	10,7	0 / 14	0
Neznalost vzorců	5	17,9	0	0
Špatný odhad	3	10,7	1	7,1
Žádná odpověď	17	60,7	13	92,9

Tab. 5.1: Tabulka úspěšnosti.

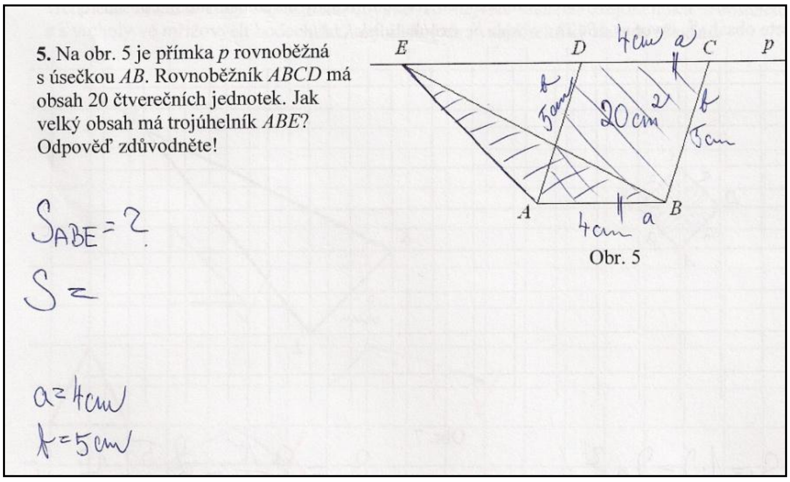
Ukázky z prací studentů:



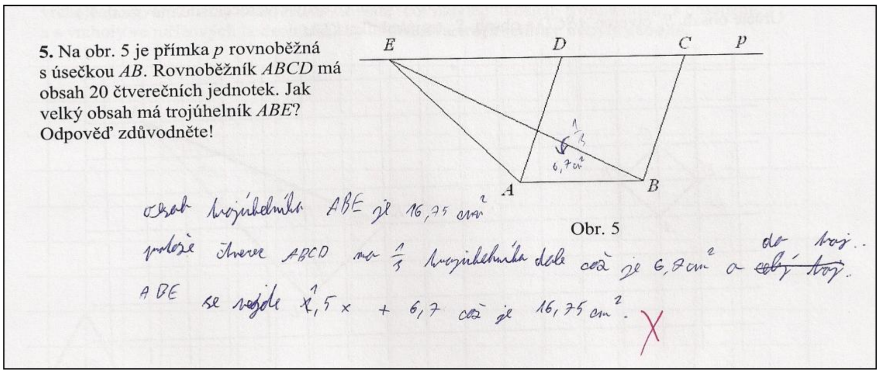
Obr. 1: Správná odpověď, bez postupu.



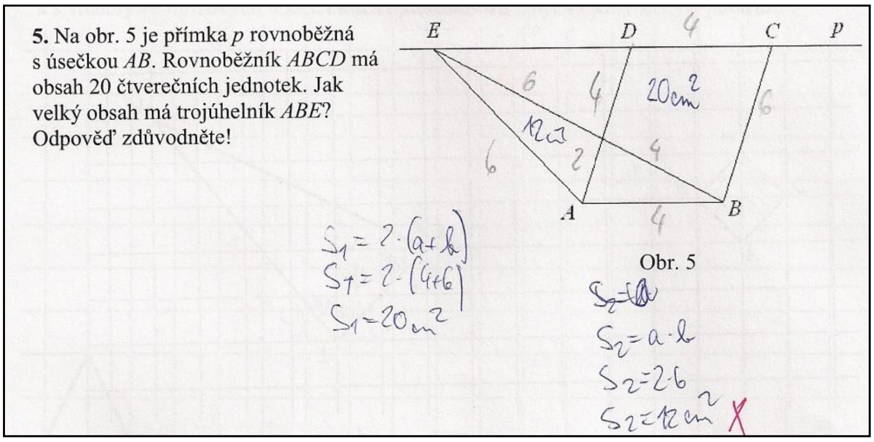
Obr. 2: Zachycení úvahy o řešení úlohy.



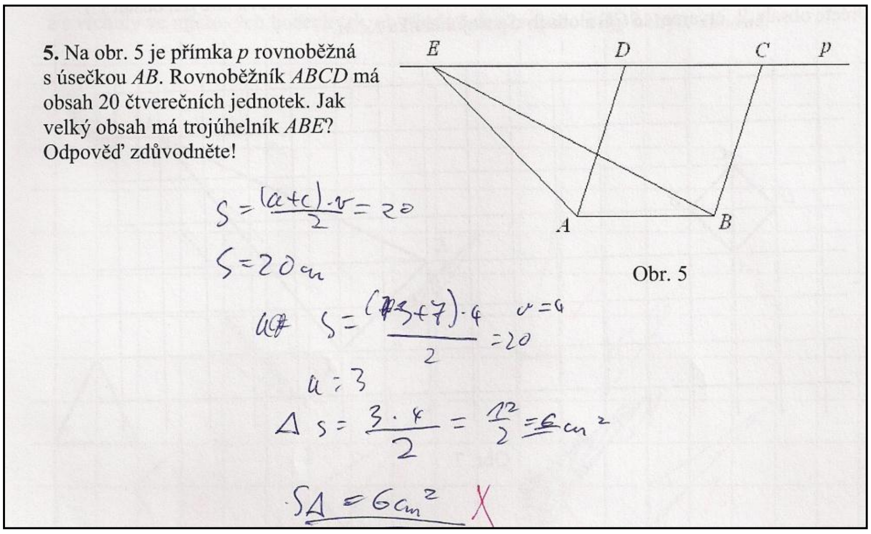
Obr. 3: Špatně zvolený vzorec pro obsah rovnoběžníka - studentka určila obsah jako součin délek stran, ten je však podle vzorce roven součinu délky strany a příslušné výšky.



Obr. 4: Chybná úvaha: „ Obsah trojúhelníka *ABS* je 1/3 obsahu rovnoběžníka *ABCD*.“



Obr. 5: Chybný vzorec pro obsah rovnoběžníka.

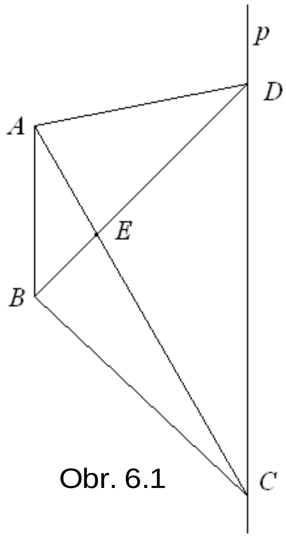


Obr. 6: Odhadování délek stran podle vzorce pro obsah lichoběžníka.

3.6 Úloha 6

Na obr. 6.1 je přímka p rovnoběžná s úsečkou *AB*. Trojúhelník *ABE* má obsah 3 cm² a trojúhelník *ABC* má obsah 8 cm².

Určete obsahy trojúhelníků *BCE, ABD* a *AED*.



Obr. 6.1

Komentář:

Tato úloha má prokázat schopnost nalézt vztahy mezi obsahy částí překrývajících se trojúhelníků. Dále má ukázat, zda si žáci uvědomují podstatu vzorce pro obsah trojúhelníka: zachováme-li délku základny i výšku, obsah se nezmění.

Obsah trojúhelníku *BCE* spočteme jako rozdíl obsahů trojúhelníka *ABC* a trojúhelníka *ABE*, jejichž oba obsahy známe, tedy:

$S_{BCE} = S_{ABC} - S_{ABE} = 8 - 3 = 5 \text{ cm}^2$

Pokud víme, že úsečka *AB* a přímka *p* jsou rovnoběžné, pak i snadno určíme výšky trojúhelníků *ABC* a *ABD* - ty totiž budou shodné, ozn. *v*. Strana *AB* je samozřejmě u obou trojúhelníků stejně dlouhá, proto i obsahy jsou si rovny:

$S_{ABC} = S_{ABD} = 8 \text{ cm}^2$

Odtud pak snadno, stejně jako při určování obsahu trojúhelníka *BCE* určíme obsah trojúhelníka *AED*:

$S_{AED} = S_{ABD} - S_{ABE} = 8 - 3 = 5 \text{ cm}^2$

Rozbor nejčastějších chyb žáků:

V 8. třídě tento příklad nevyřešil nikdo a kromě jednoho žáka se o to nikdo ani nepokusil.

Hoch, který se nad touto úlohou zamyslel, spočítal správně obsah trojúhelníka *BCE,* obsah trojúhelníka *ABD* a *AED* však určil vizuálním odhadem - špatně.

V tercii vyřešili celou úlohu (obsah všech tří trojúhelníků) 4 studenti, (obr. 1, 2).

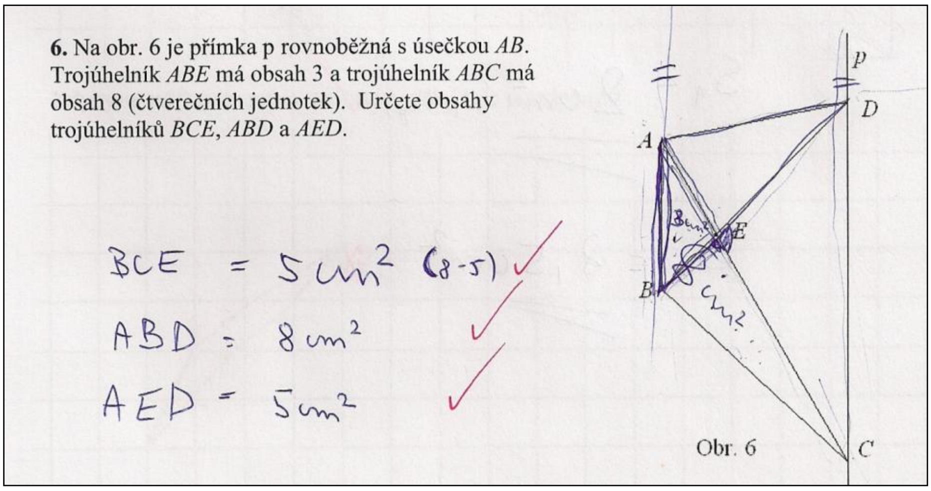
15 studentů určilo správně obsah jednoho trojúhelníka *BCE* a ti z nich, kteří se pokusili určit i obsahy zbylých dvou trojúhelníků, většinou odhadovali v porovnání s ostatními trojúhelníky (obr. 3). Zbytek třídy se o řešení nepokusil - 9 žáků.

	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení celé úlohy	4 / 28	14,3	0 / 14	0
Správný obsah trojúh. BCE[3]	15	53,6	1	7,1
Špatný odhad	6	21,4	1	7,1
Žádná odpověď	9	32,1	13	92,9

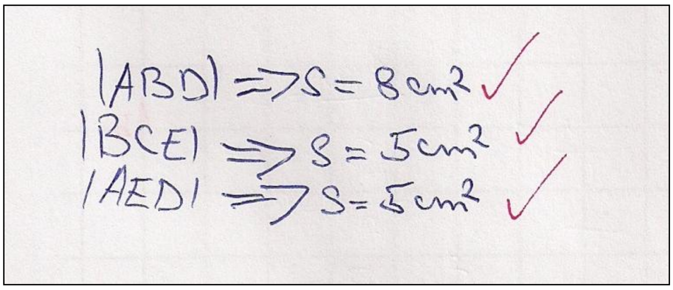
Tab. 6.1: Tabulka úspěšnosti.

[3] Tento počet zahrnuje i žáky, kteří další obsahy odhadovali (viz. Špatný odhad).

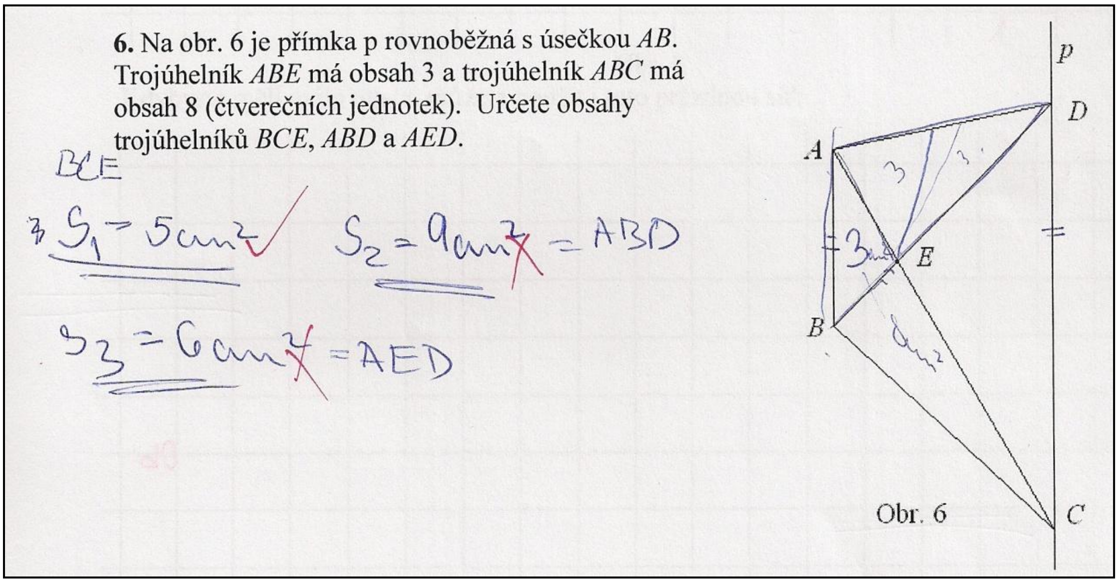
Ukázky z prací studentů:



Obr. 1: Jedno z kompletních řešení.



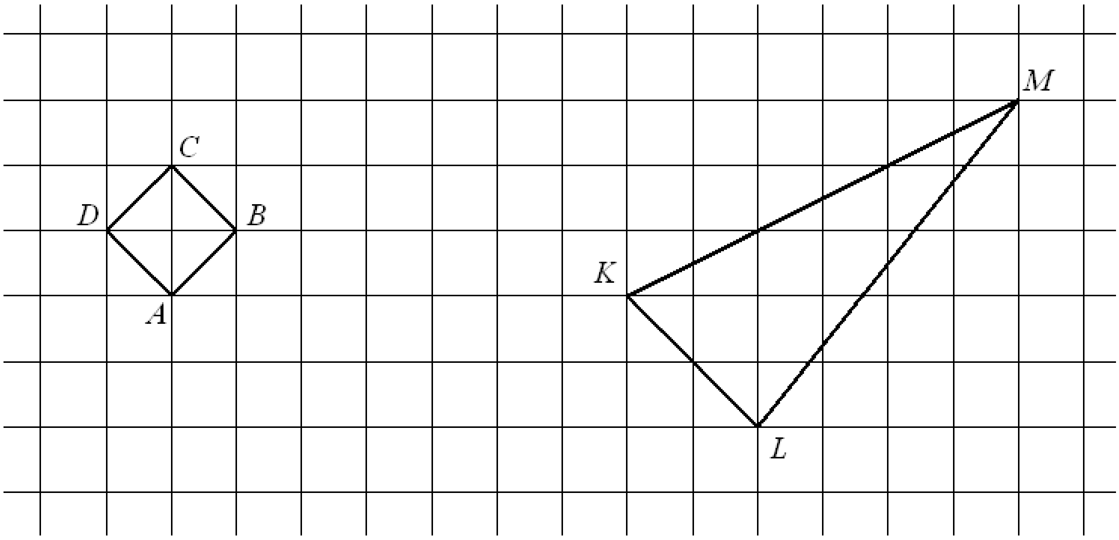
Obr. 2: Kompletní řešení 2.



Obr. 3: Odhadování obsahů.

3.7 Úloha 7

Přímky na obr. 7.1 vytvářejí síť jednotkových čtverců (každý čtvereček sítě má obsah 1 cm²). Určete obsah S_1 čtverce *ABCD* a obsah S_2 trojúhelníka *KLM*.



Obr. 7.1

Komentář:

Tato úloha má za úkol prověřit orientaci žáků ve čtvercové síti a jejich představivost. Pomocí sítě čtverců mají žáci určit obsah obrazců, tedy určit, kolik čtverců o obsahu 1 cm^2 se do obrazců vejde.

Čtverec *ABCD* na obr. 7.1 má stranu $a = \sqrt{2}$, protože délka úhlopříčky čtverce se stranou 1 cm se určí pomocí Pythagorovy věty:

$u^2 = a^2 + a^2$

$u^2 = 1^2 + 1^2$

$u^2 = 2$

$u = \sqrt{2}$

Obsah čtverce se pak spočítá :

$S = a^2 = \sqrt{2}\,^2 = 2$ cm^2

Geometricky se dá obsah čtverce *ABCD* určit tak, že každý z trojúhelníků *ABS, BCS, CDS, DAS,* kde *S* je střed čtverce *ABCD*, má obsah roven polovině obsahu jednotkového čtverce, tedy 0,5 cm^2. Obsah S_2 je pak roven součtu obsahů těchto trojúhelníků, tedy:

$S_{ABCD} = 4 \cdot 0{,}5 = 2\ cm^2$

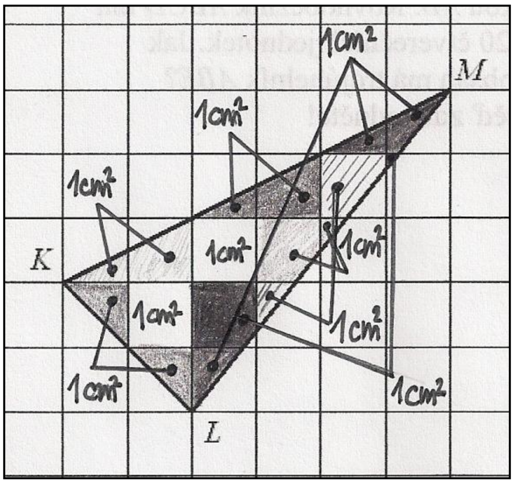
Trojúhelník *KLM* má délku základny rovnu dvojnásobku délky úhlopříčky jednotkového čtverce, tedy $2\sqrt{2}$ a výšku k základně délky $4{,}5\sqrt{2}$.

Obsah trojúhelníka je tedy:

$S_{KLM} = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4{,}5\sqrt{2}}{2} = 9\ cm^2$

I tento příklad lze řešit graficky, podle následujícího obrázku:

$S = 9\ cm^2$



Rozbor nejčastějších chyb žáků:

Celý příklad, tedy obsah čtverce i trojúhelníka, se podařilo určit jen šesti studentům tercie. Všech 6 řešení bylo grafických, (obr. 1).

První část této úlohy, obsah čtverce, vyřešilo v 8. třídě 8 žáků, v tercii 23 žáků. Jeden student dokonce uvedl dvě různá řešení, a to : 1) Vycházel z toho, že hledaný obsah tvoří polovinu obsahu čtverce o straně 2 cm, 2) Určil délku strany čtverce *ABCD* pomocí Pythagorovy věty (obr. 2).

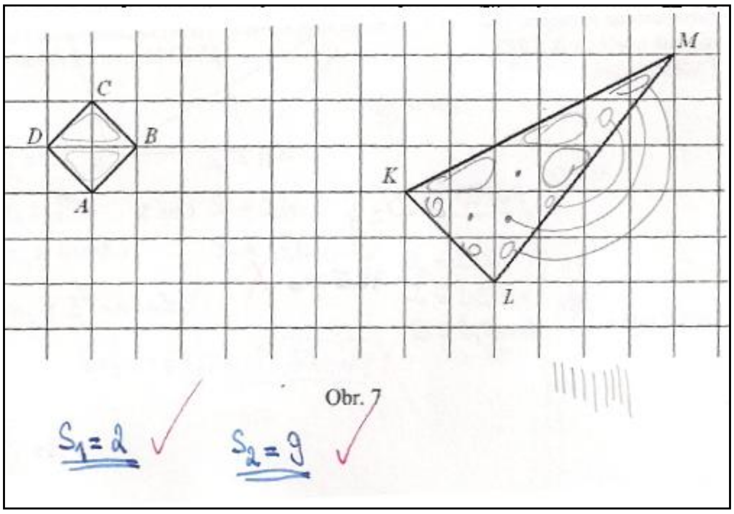
Chyby, které se vyskytovaly u neúspěšných řešitelů, vznikly ze špatného určení délky strany čtverce - dva žáci určili délku strany čtverce a = 1 cm, jeden a = 0,5 cm. Jeden žák počítal obsah čtverce podle vzorce $S = a \cdot b$, kde určil a = 1 cm, b = 2 cm a $S = 1 \cdot 2 = 3$ cm^2. Tři žáci počítali obsah čtverce jako obvod: $S = 4 \cdot a$.
U jedné studentky jsem se setkala s chybou vzniklou při zaokrouhlování : $\sqrt{2} \doteq 1{,}4$, $1{,}4^2 \doteq 1{,}9$. Příklad byl jinak však vyřešen správně. U čtyř žáků nebylo řešení žádné.

Druhá část úlohy, obsah trojúhelníka nebyla zdaleka tak úspěšná. Správně určilo obsah jen 7 studentů tercie, v 8. třídě se k výsledku nedopracoval nikdo.
Všechna správná řešení vznikla po grafickém řešení, kdy si žáci určovali části, které spolu tvoří celý jednotkový čtverec, (obr. 3).
Příjemným překvapením bylo řešení jedné dívky z 8. třídy, která jediná použila pro výpočet obsahu vzorec, ale chybovala při určování délek strany a výšky. Místo rozměrů $2\sqrt{2}$ a $4{,}5\sqrt{2}$ určila délky 2 a 4,5. Určila totiž délku úhlopříčky rovnu jedné. Její výsledek pak byl 4,5 cm^2, (obr. 4).

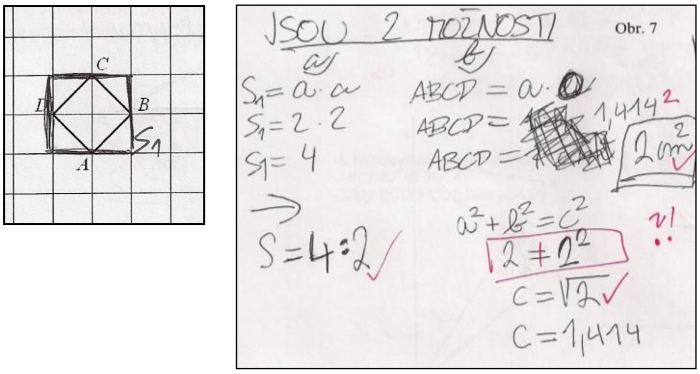
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení obou částí	6 / 28	21,4	0 / 14	0
Správné řešení obsahu čtverce	23	82,1	8	57,1
Špatně určená délka strany	4	14,3	0	0
Špatný vzorec	0	0	3	21,4
Správné řešení obsahu trojúhelníka	7	25	0	0
Žádná odpověď - čtverec	1	3,6	3	21,4
Špatný odhad				
Žádná odpověď - trojúhelník	6	21,4	4	28,6

Tab. 7.1: Tabulka úspěšnosti.

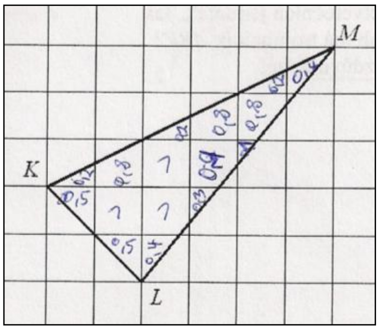
Ukázky z prací studentů:



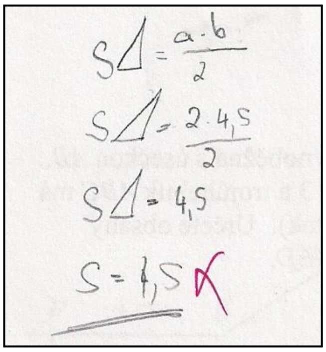
Obr. 1: Grafické řešení úlohy.



Obr. 2: 2 způsoby řešení.



Obr. 3: Spojování částí, tvořících společně celý čtvereček.

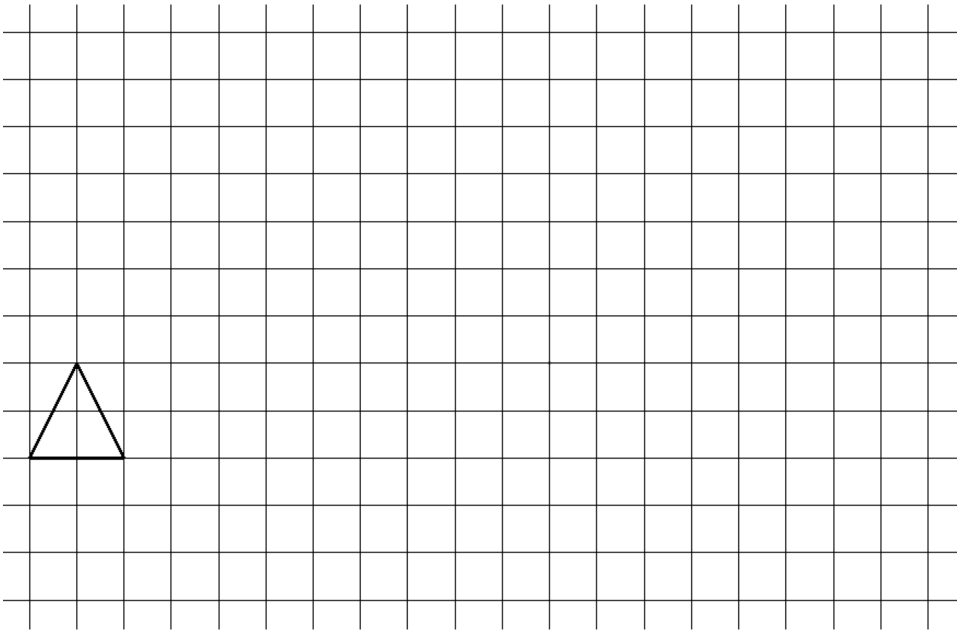


Obr. 4: Výpočet obsahu vzorcem, špatně určená délka úhlopříčky jednotkového čtverce.

3.8 Úloha 8

Přímky na obr. 8.1 vytvářejí síť jednotkových čtverců (každý čtvereček sítě má obsah 1 cm^2). Vyznačený trojúhelník má obsah 2 cm^2 a vrcholy v mřížových bodech (tzn. ve společných vrcholech čtverců sítě).

Nakreslete do sítě co nejvíce dalších trojúhelníků s obsahem 2 a s vrcholy ve mřížových bodech tak, aby žádné dva trojúhelníky nebyly shodné!



Obr. 8.1

Komentář:

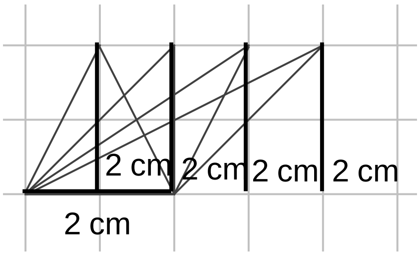
Tato úloha spolu s úlohou č. 9 má prokázat, jak dalece žáci pochopili probíranou látku a vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka, jak dokážou pracovat s informacemi, které nejsou v zadání úlohy striktně vypsány, jaké strategie využijí při řešení takovýchto typů úloh a jakou mají představivost.

Při vypracovávání tohoto příkladu se žáci mohou spolehnout buď na geometrickou představu, která by měla být podložená pochopením vzorce, a nebo na početní řešení, které danému obsahu trojúhelníka určí možné délky stran s příslušných výšek.

Geometrické řešení:

Pokud má zadaný trojúhelník obsah 2 cm^2, musíme vyjít z toho, že polovina součinu délek základny a výšky daného trojúhelníka je rovna dvěma. Pokud tedy zachovám délky, nezmění se ani obsah.

Vezmeme-li základnu s délkou 2 cm a výšku 2 cm (dle obrázku), pak každý další trojúhelník se stejnými rozměry má také obsah 2 cm^2.



Obr. 8.2: Trojúhelníky s délkou základny 2 cm a výškou 2 cm.

Tedy, pokud vezmeme stále stejnou základnu, pak trojúhelníky, s vrcholy v mřížových bodech na rovnoběžce, vzdálené od základny o příslovkou výšku, mají stále stejný obsah.

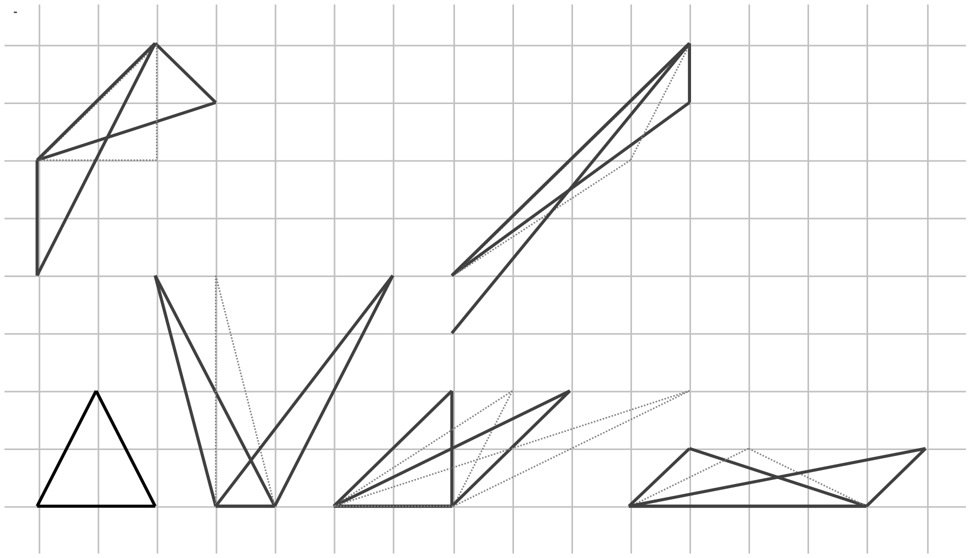
Početní řešení:

S = 2 cm^2 lze dostat, pokud jsou délka strany a příslušná výška:

1. a = 1 cm, v_a = 4 cm4. $a = \sqrt{2}$ cm, $v_a = 2\sqrt{2}$ cm
2. a = 2 cm, v_a = 2 cm5. $a = 2\sqrt{2}$ cm, $v_a = \sqrt{2}$ cm
3. a = 4 cm, v_a = 1 cm6. $a = 4\sqrt{2}$ cm, $v_a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

atd.

Pak sestrojíme všechny možné trojúhelníky odpovídajících rozměrů.



Obr. 8.3 Ukázka možných řešení

Rozbor nejčastějších chyb žáků:

Alespoň 3 různé trojúhelníky nakreslilo z tercie 7 studentů, 2 řešení vypracovalo 9 studentů, jeden trojúhelník nakreslilo 5 studentů a 7 jich nenakreslilo nic.

V 8. třídě měli 2 žáci 3 trojúhelníky a 3 žáci po jednom trojúhelníku, zbytek třídy neměl nic.

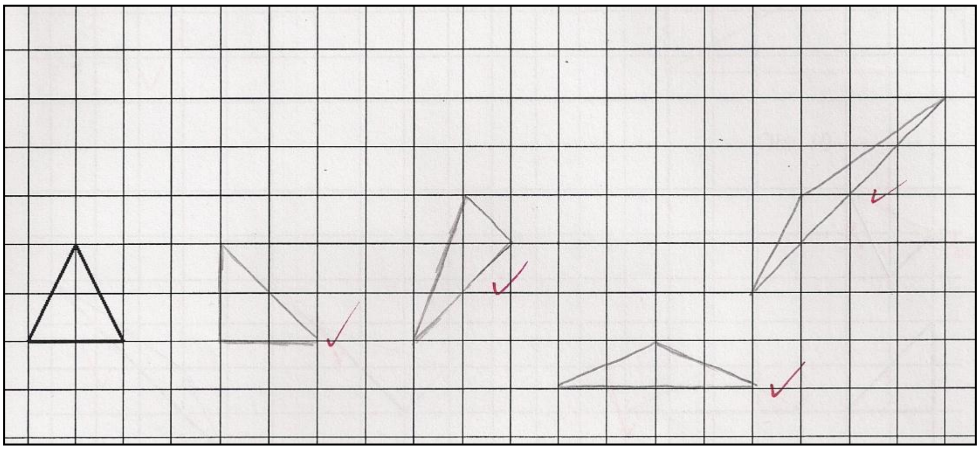
Studenti tercie většinou nechybovali, jen měli v úloze málo řešení, nebo příklad neřešili.

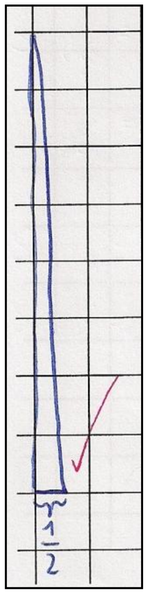
Osmáci často kreslili trojúhelníky shodné, jen různě otočené a s vrcholy mimo mřížové body.

	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
3 různé trojúhelníky	7	25	2	14,3
2 správné trojúhelníky	9	32,1	0	0
1 správný trojúhelník	5	17,9	3	21,4
Žádné řešení	7	25	9	64,3

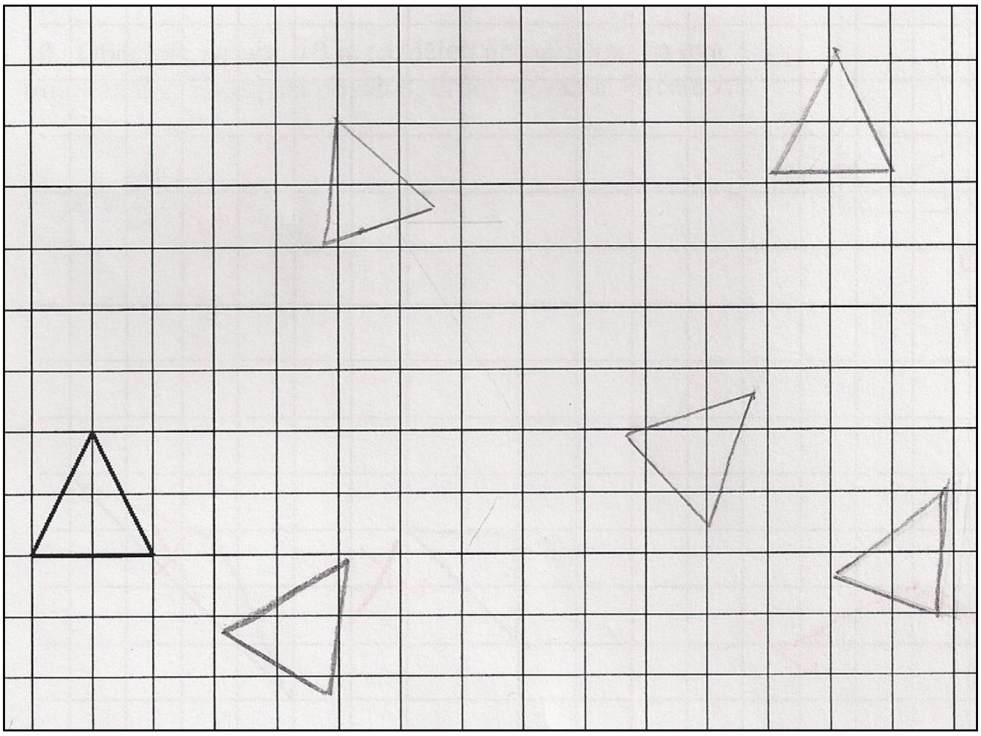
Tab. 8.1: Tabulka úspěšnosti.

Ukázky z prací studentů:





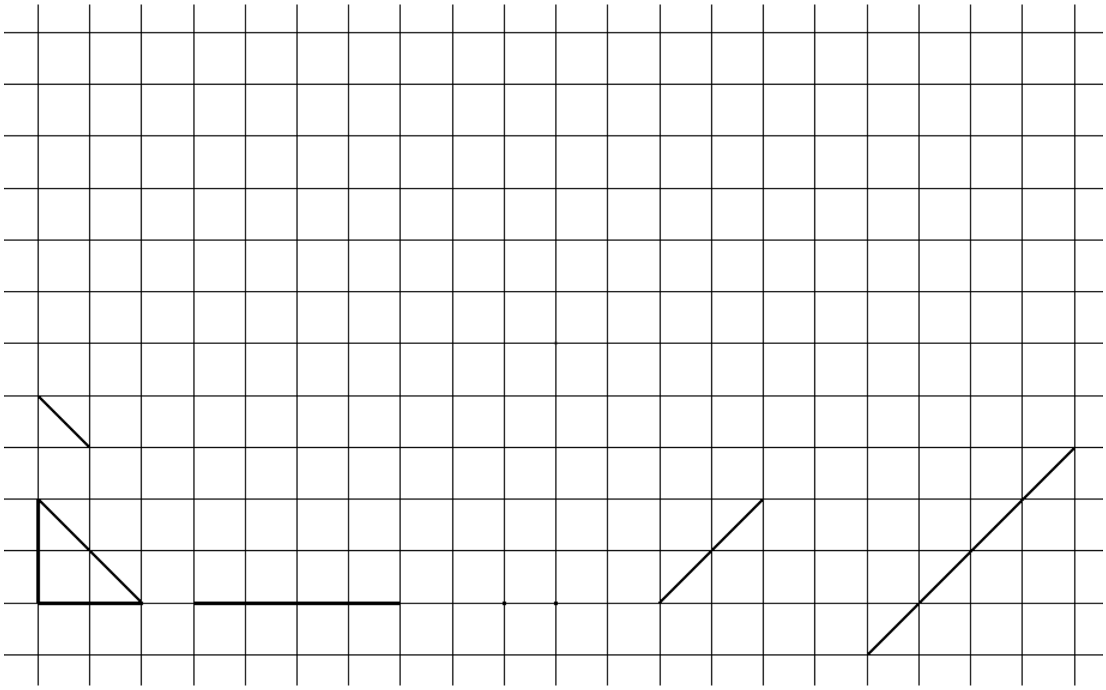
Obr. 1: Nahoře: Správná řešení. Vpravo: Jediné takovéto řešení, ale jeden z vrcholů neleží v mřížovém bodě!



Obr. 2: Pět shodných trojúhelníku v různém otočení, nazvané jako různé, jejich vrcholy navíc neleží v mřížových bodech.

3.9 Úloha 9

Na obr. 9.1 je v síti jednotkových čtverců umístěn v levém dolním rohu trojúhelník s obsahem 2 cm². Vyznačené úsečky mají být strany dalších trojúhelníků s obsahem 2 cm² a s vrcholy v mřížových bodech sítě. Dokreslete k úsečkám tyto trojúhelníky. Pokud vás napadnou i jiná řešení, zakreslete je do sítě zvlášť. Můžete použít i síť na dolním obrázku.

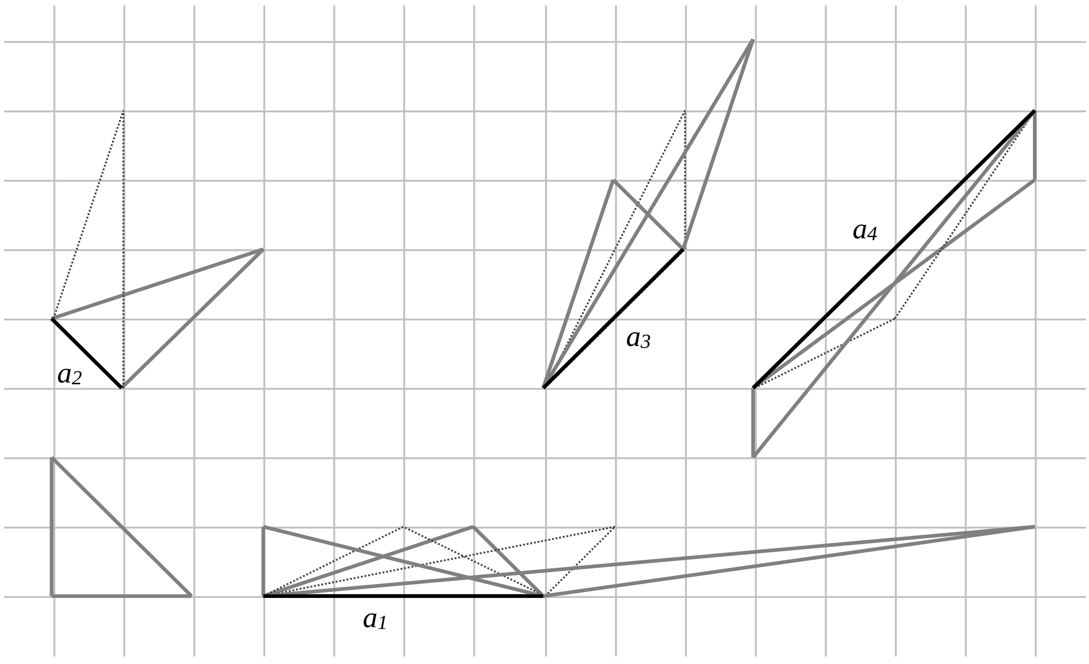


Obr. 9.1

Komentář:

Při řešení této úlohy žáci mohou postupovat buď početně, nebo úvahou.
Početní řešení by mělo obsahovat vyčíslení obsahu daného trojúhelníka (ze zadání):
$S = 2\ \text{cm}^2$
Následně pak žáci u každé zadané strany vyjádří její délku:
$a_1 = 4$ cm
$a_2 = \sqrt{2}$ cm
$a_3 = 2\sqrt{2}$ cm
$a_4 = 4\sqrt{2}$ cm

Z daného obsahu a určených délek stran pak určíme výšky trojúhelníku, příslušné daným stranám:
$v_1 = 1$ cm
$v_2 = 2\sqrt{2}$ cm
$v_3 = \sqrt{2}$ cm
$v_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm



Obr. 9.2: Vzorové řešení úlohy.

Rozbor nejčastějších chyb žáků:

Za splnění úlohy jsme považovali takový obrázek, kde ke každé zadané straně žáci dokázali dokreslit trojúhelník daného obsahu, nebo kde žáci místo jednoho z požadovaných trojúhelníků nakreslili trojúhelník jiný, s požadovaným obsahem.

Tercie: Celou úlohu splnili 4 studenti (obr. 1), 3 trojúhelníky nakreslilo 6 studentů, 2 správná řešení zvládlo 7 studentů, 1 řešení 7 studentů, a s žádným úspěchem skončili 4 studenti.

8. třída: 3 nejlepší řešitelé nakreslili správně 2 trojúhelníky, 3 žáci nakreslili alespoň jeden z trojúhelníků a zbytek třídy v řešení úlohy neuspěl vůbec.

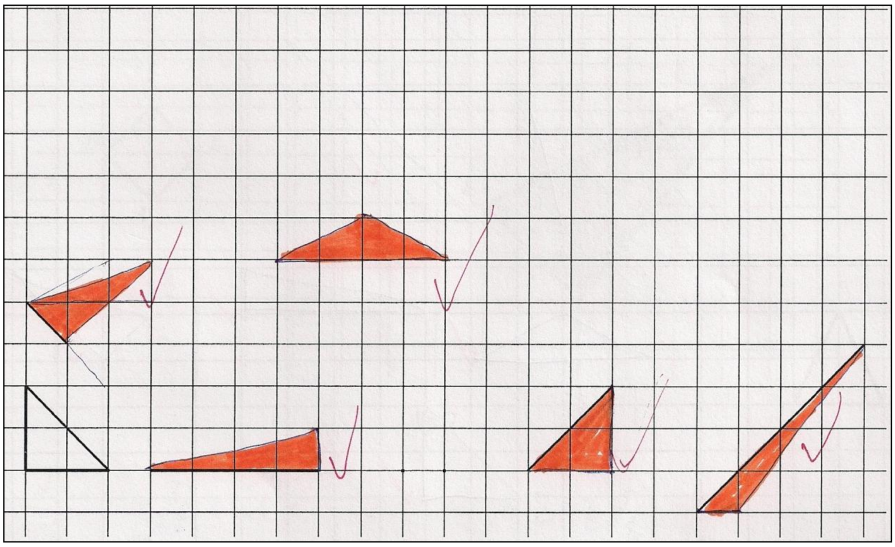
Často jsem se setkala s obrázky s několika shodnými řešeními, která žáci považovali za různá (obr. 2), nebo s takovými řešeními, která už od pohledu nemohla mít se zadaným trojúhelníkem shodný obsah, (obr. 3).

Při řešení úlohy si žáci také s oblibou upravovali zadané délky stran tak, aby byli schopni nakreslit trojúhelník podle zadání, (obr. 2, 3).

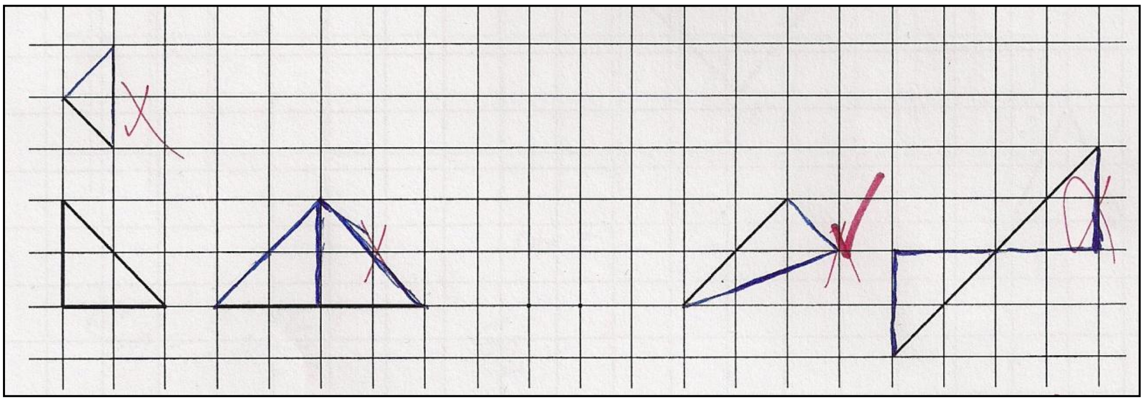
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení celé úlohy	4 / 28	14,3	0 / 14	0
3 správné trojúhelníky	6	21,4	0	0
2 správné trojúhelníky	7	25	2	14,3
1 správný trojúhelník	7	25	3	31,4
Žádné řešení	4	14,3	9	64,3

Tab. 9.1 Tabulka úspěšnosti.

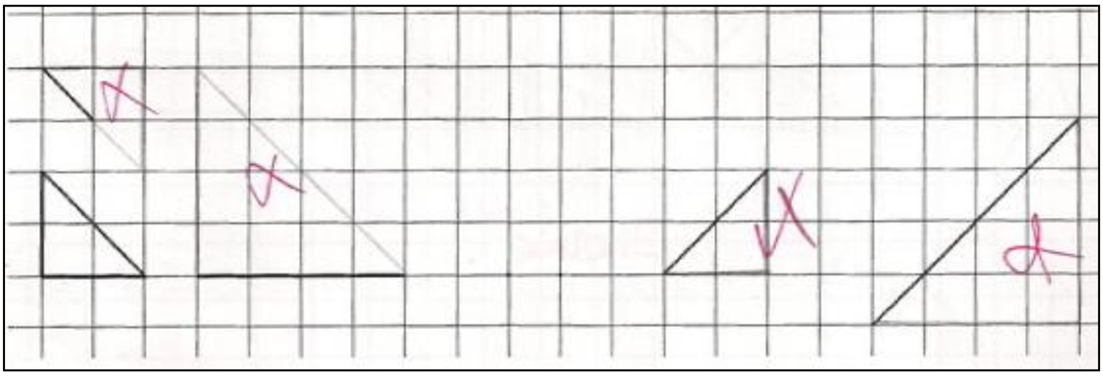
Ukázky z prací studentů:



Obr. 1: Správné řešení, jen trojúhelník se zadanou stranou $2\sqrt{2}$ je shodný s původním.



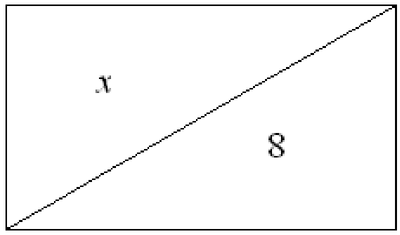
Obr. 2: Dělení zadaných strany a následné nakreslení 4 shodných trojúhelníků.



Obr. 3: Trojúhelníky se základnami dlouhými 4 cm a $4\sqrt{2}$ cm už od pohledu nemají obsah 2 cm^2. Strana dlouhá $\sqrt{2}$ je prodloužena na $2\sqrt{2}$.

3.10 Úloha 10

Obdélník na obr. 10.1 je rozdělen úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Jeden má obsah $8\ cm^2$, druhý obsah $x\ cm^2$. Určete x.



Obr. 10.1

Komentář:

Tento příklad je jakýmsi předstupněm pro následující dvě úlohy. Žáci by si měli uvědomit, že rozdělením obdélníku úhlopříčkou vznikly dva shodné trojúhelníky, shodující se v délce základny, výšce a tím i v obsahu. Díky tomu by pak měli bez problémů vyřešit i další úlohy.

Trojúhelník s obsahem x tvoří polovinu obsahu obdélníka, vyobrazeného na Obr. 10.1 a zároveň je shodný s trojúhelníkem o obsahu $8\ cm^2$. Shoduje se v délce základny i v délce výšky, proto je jeho obsah $x = 8\ cm^2$.

Rozbor nejčastějších chyb žáků:

Tato úloha měla u žáků největší úspěšnost. Celých 26 z 28 žáků tercie a 6 ze 14 žáků 8. třídy určili obsah trojúhelníka správně.

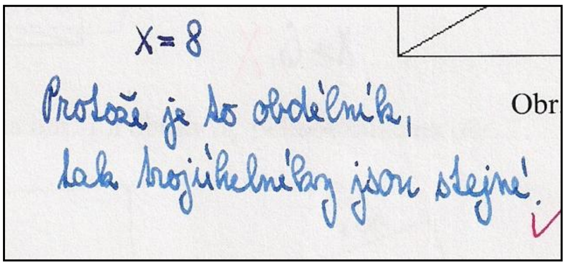
Chyba jedné ze studentek tercie vznikla ze špatného přečtení zadání, kdy dívka uvedla jako výsledek obsah celého obdélníka (správně), druhá studentka neuvedla řešení vůbec.

V 8. třídě špatně přečetli zadání dva žáci a jejich odpověď byla obsah celého obdélníku (oba výsledky správně) a 6 žáků nenapsalo žádnou odpověď.

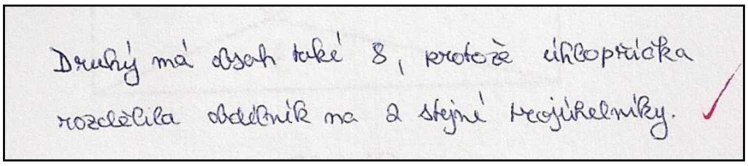
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	26 / 28	92,2	6 / 14	42,9
Špatné přečtení zadání	1	3,6	2	14,3
Žádná odpověď	1	3,6	6	42,9

Tab. 10.1: Tabulka úspěšnosti.

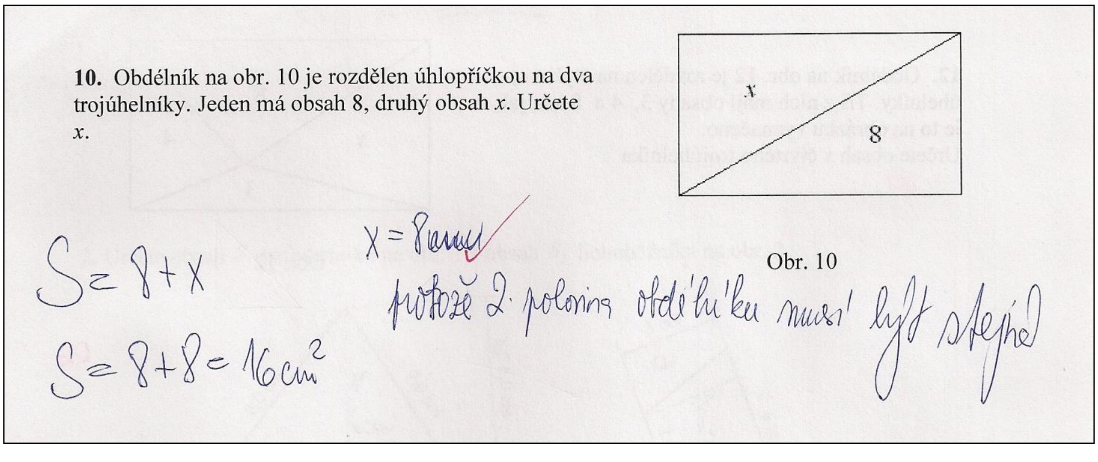
Ukázky z prací studentů:



Obr. 1: Žákyně tvrdí, že trojúhelníky vzniklé úhlopříčkou v obdélníku jsou shodné. Má sice pravdu, ale hodilo by se zdůvodnit proč.



Obr. 2: Stejný případ, jako na Obr. 1, tyto trojúhelníky jsou shodné podle věty *sss*.

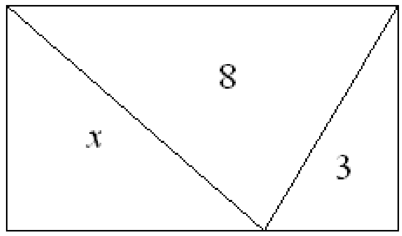


Obr. 3: I zde by bylo dobré uvést, proč je druhá část shodná.

3.11 Úloha 11

Obdélník na obr. 11.1 je rozdělen na tři trojúhelníky. Jeden má obsah S_1 = 3 cm² a druhý S_2 = 8 cm², jak je vyznačeno na obrázku.

Určete obsah x třetího trojúhelníka.



Obr. 11.1

Komentář:

Při řešení toho úkolu si mají žáci uvědomit, co vzniká rozřezáním obdélníku dle obrázku a jaké délky stran a výšek mají výsledné trojúhelníky.

Na základě toho pak snadno dojdou ke konkrétním hodnotám

V návaznosti na předchozí úlohu by si žáci měli uvědomit, že trojúhelník s obsahem S_2 tvoří polovinu obsahu obdélníka, stejně jako u příkladu č. 10.

Proč? Protože délka základny i výška tohoto trojúhelníka jsou shodné s trojúhelníkem v minulém úkolu.

Algebraický přístup:

Pokud je polovina obdélníka 8 cm^2, pak druhá polovina musí být také 8 cm^2 a zároveň se tato druhá polovina musí skládat z trojúhelníku o obsahu 3 cm^2 a z trojúhelníku neznámého obsahu x.

Vychází pak:

$S_2 = \frac{1}{2} S_o$, $S_1 + S_3 = \frac{1}{2} S_o$

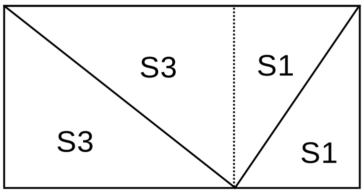
$S_2 = S_1 + S_3$

$8 = 3 + S_3$

$S_3 = x = 5$ cm^2

Geometrický přístup:

Pokud zobrazíme trojúhelník 1 s obsahem 3 cm^2 osovou souměrností (s osou, kterou tvoří společná strana trojúhelníků 1 a 2) do trojúhelníku 2 s obsahem 8 cm^2,pak jeho druhá část, kterou určí rozdíl původního trojúhelníku a obrazu trojúhelníku 1 (jež je obrazem trojúhelníku 3 v osové souměrnosti s o.s. tvořenou společnou stranou trojúhelníků 2 a 3) má obsah 5 cm^2, stejně jako trojúhelník 3.



$S_1 + S_3 = S_2$

$3 + S_3 = 8$

$S_3 = x = 8 - 3 = 5$ cm^2

Rozbor nejčastějších chyb žáků:

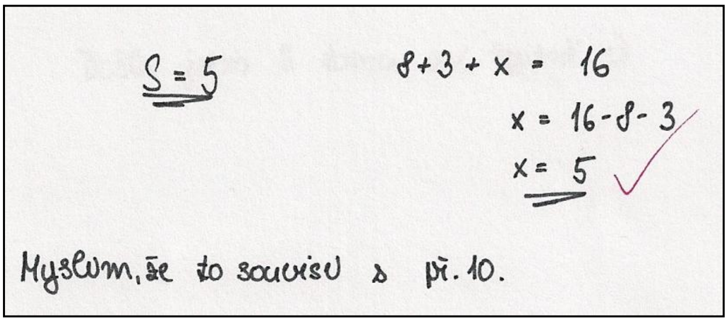
Tato úloha ve srovnání s ostatními patřila k těm s lepšími výsledky. Více než polovina žáků tercie určila výsledek správně, snad v návaznosti na úlohu č. 10.
V 8. třídě je skončili se správným výsledkem jen čtyři žáci, přesto se příklad zařadil jako druhý neúspěšnější.
Nejčastěji došli žáci ke správnému výsledku tak, že si správně určili,
že součet $x + 3 = 8$, tedy neznámý obsah trojúhelníka $x = 5$ cm^2, (obr. 1),
Pěkným řešením bylo užití osové souměrnosti (s jednou osou souměrnosti, kterou tvoří společná strana trojúhelníků 1 a 2, a s druhou osou souměrnosti, společnou stranou trojúhelníků 2 a 3) a tím zobrazením dvou menších trojúhelníků 1,3 do většího trojúhelníku 3 (obr. 2, 3, 4).

Chyby ve výsledcích vznikaly proto, že žáci výsledek tipovali po vizuálním porovnání známých obsahů, dále díky tomu, že se žáci snažili určit délky stran
(tznm. délku základny a výšku) trojúhelníka s neznámým obsahem (obr. 5).

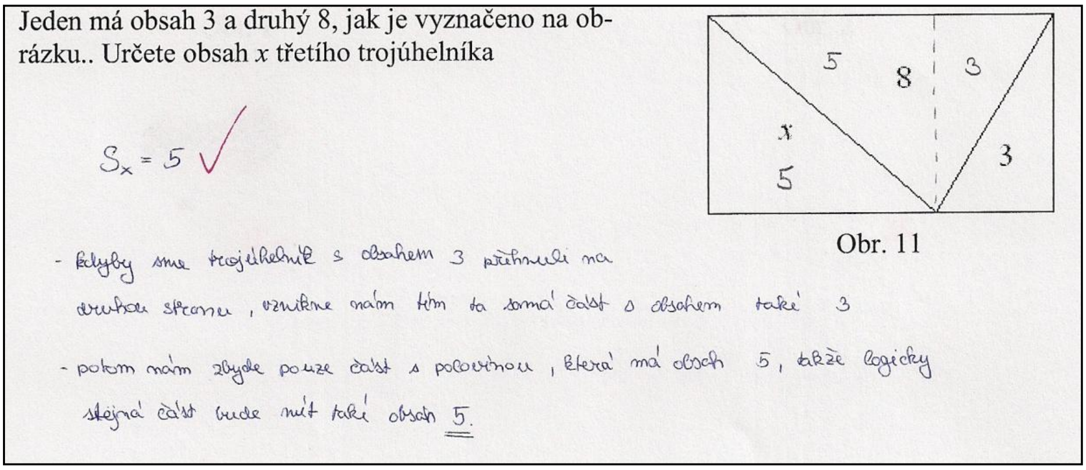
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	15 / 28	53,6	4 / 14	28,6
Chybné tipování výsledku	4	14,3	0	0
Určení délek základny a výšky	2	7,1	0	0
Bez odpovědi	7	25	10	71,4

Tab. 11.1: Tabulka úspěšnosti.

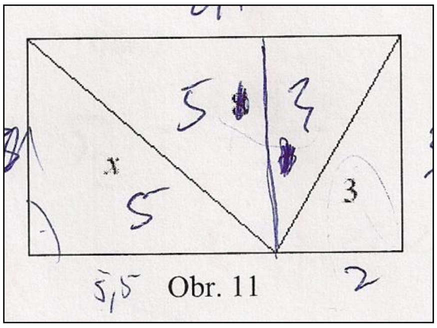
Ukázky z prací studentů:



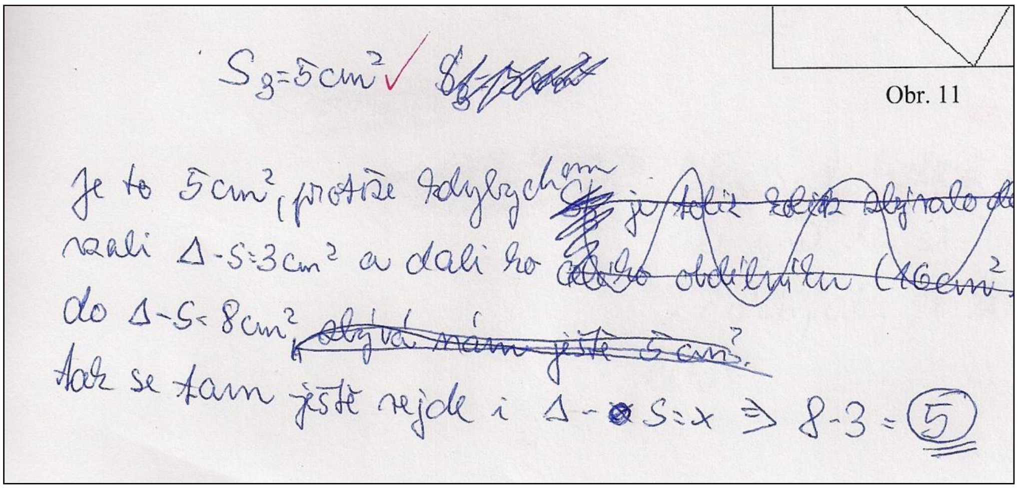
Obr. 1: Od obsahu obdélníka odečteny obsahy dvou trojúhelníků.



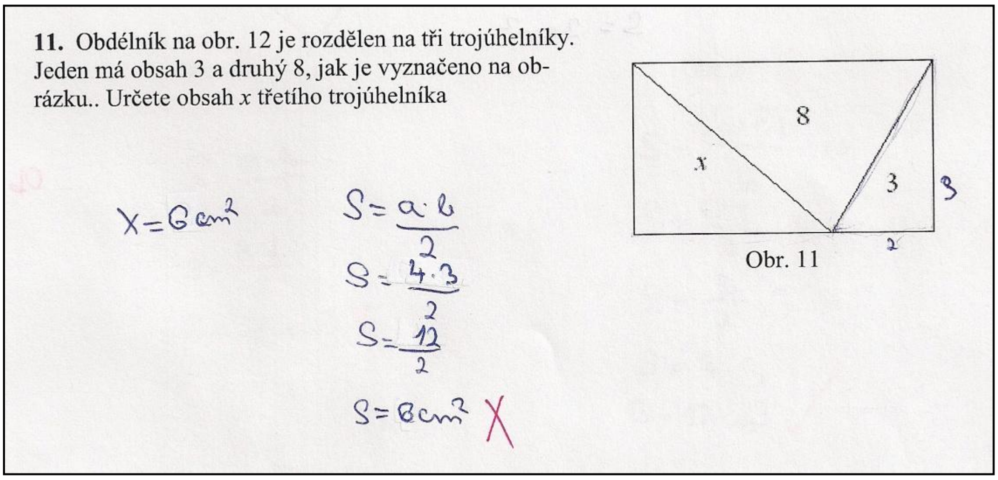
Obr. 2: Řešení přes osovou souměrnost.



Obr. 3: Geometrická interpretace.



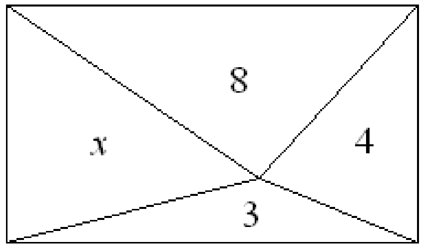
Obr. 4: Tento žák snad tušil řešení, měl však problém s označením jednotlivých obsahů a správným matematickým zápisem a nakonec spoustu myšlenek poškrtal.



Obr. 5: Tipování délky základny a výšky trojúhelníka *x*.

3.12 Úloha 12

Obdélník na obr. 12.1 je rozdělen na čtyři trojúhelníky. Tři z nich mají obsahy $S_1 = 3$, $S_2 = 4$ a $S_3 = 8$ cm² tak, jak je vyznačeno na obrázku.
Určete obsah x čtvrtého trojúhelníka.



Obr. 12.1

Komentář:

Úloha k prověření znalostí a dovedností pracovat s tématem obsahy trojúhelníků. Jako v předchozích překladech zde hraje roli pochopení vzorce pro obsah trojúhelníka a schopnost pracovat v souvislostech.

Úloha navazuje na předchozí dvě zadání. V předchozí úloze žáci odtušili, že součet obsahů dvou menších trojúhelníků by se měl rovnat obsahu největšího z nich. V této úloze pak měli vyvodit, že součet obsahů $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, protože trojúhelníky 1 a 3 mají stejné základny a součty jejich výšek se rovnají délce kratší strany obdélníka. Z toho pak můžeme odvodit, že součet jejich obsahů je roven jedné polovině obsahu obdélníka. Součet obsahů trojúhelníků 2 a 4 pak tvoří druhou polovinu obsahu obdélníka.

Algebraický přístup:

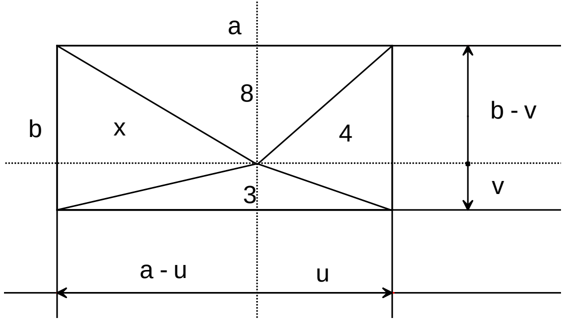
$S_1 + S_3 = \frac{1}{2} a \cdot v + \frac{1}{2} a \cdot (b - v) = \frac{1}{2} a \cdot v - \frac{1}{2} a \cdot v + \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} a \cdot b$ ($= \frac{1}{2}$ obsahu obdélníka)

$S_2 + S_4 = \frac{1}{2} b \cdot u + \frac{1}{2} b \cdot (a - u) = \frac{1}{2} b \cdot u - \frac{1}{2} b \cdot u + \frac{1}{2} b \cdot a = \frac{1}{2} a \cdot b$

$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

$3 + 8 = 4 + x$

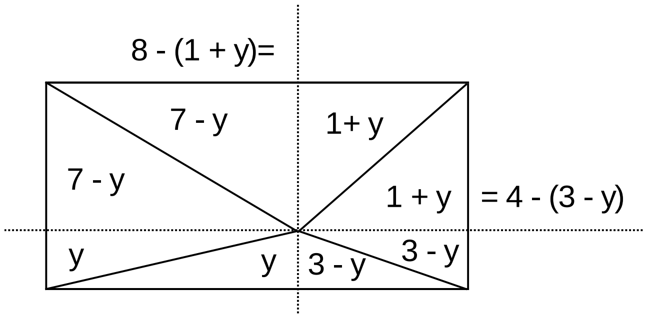
$x = 11 - 4 = 7$ cm^2



Algebraicko - geometrické řešení:

$x = 7 - y + y$

$x = 7$



Rozbor nejčastějších chyb žáků:

Při řešení tohoto příkladu mnoho žáků odhadlo, že součty dvou obsahů malých trojúhelníků dají součet obsahů zbylých dvou. Několik žáků úlohu spočítalo správně (obr. 1, 2) - 3 studenti tercie, jeden žák 8. třídy. Velmi pěkné řešení se objevilo u studenta tercie, který vyřešil úlohu pomocí rozřezání celého obdélníku na trojúhelníky, z nichž každý měl svůj shodný obraz se známým obsahem (obr. 2).

Málokdo však věděl, z čeho vychází podstata sčítání a porovnávání obsahů a to vedlo k chybným výpočtům.

Ve třech případech žáci od největšího čísla odečetli zbylá dvě, tedy : 8 - 4 - 3 = 1, (viz obr. 3). Jindy pak žáci určili součet $S_2 + S_3 = 12$ cm^2 a od tohoto čísla odečetli S_1,

$12 - S_1 = 12 - 3 = 9$ cm^2 (obr. 4)

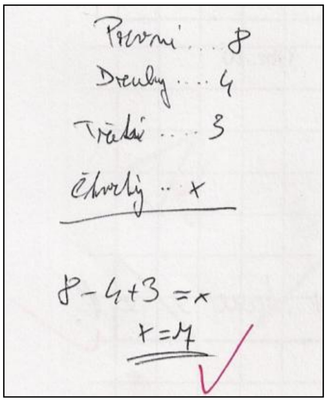
Poměrně často se pak objevoval výsledek $S_4 = 6$ cm^2. Z pečlivého prozkoumání různých postupů jsem došla k závěru, že tito studenti opticky posoudili velikosti jednotlivých trojúhelníků a obsah tipovali. Jedno řešení (obr. 5) vycházelo z úvahy, že součin dvou protilehlých trojúhelníků se musí rovnat součinu druhých dvou protilehlých trojúhelníků.

Nakonec jsem se u dvou žáků 8. třídy setkala s měřením zadaného obrázku pravítkem, vyčíslováním délek stran obdélníka i jednotlivých trojúhelníků a následné „vypočítávání“ obsahu S_4 (obr. 6).

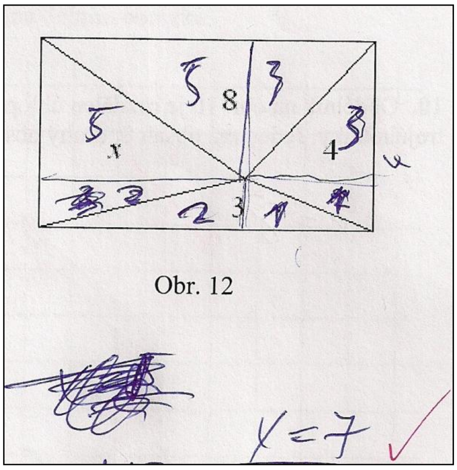
	Absolutní četnost ve 3.E	Relativní četnost ve 3.E	Absolutní četnost v 8. třídě	Relativní četnost v 8. třídě
Správné řešení	3 / 28	10,7	1 / 14	7,1
Chybná úvaha (vedoucí na výsledek 1)	2	7,1	1	7,1
Chybná úvaha (vedoucí na výsledek 9)	2	7,1	0	0
Výsledek 6 cm^2	6	21,4	1	7,1
Metoda měření	0	0	2	14,3

Tab. 12.1 Tabulka úspěšnosti.

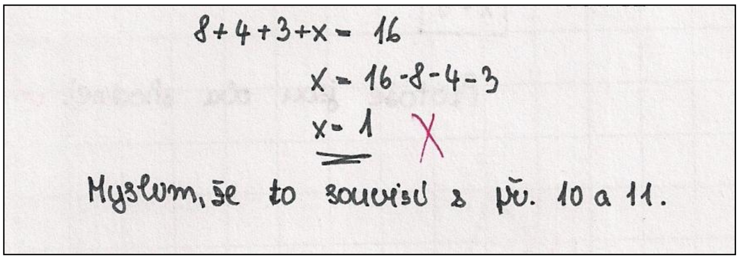
Ukázky z prací studentů:



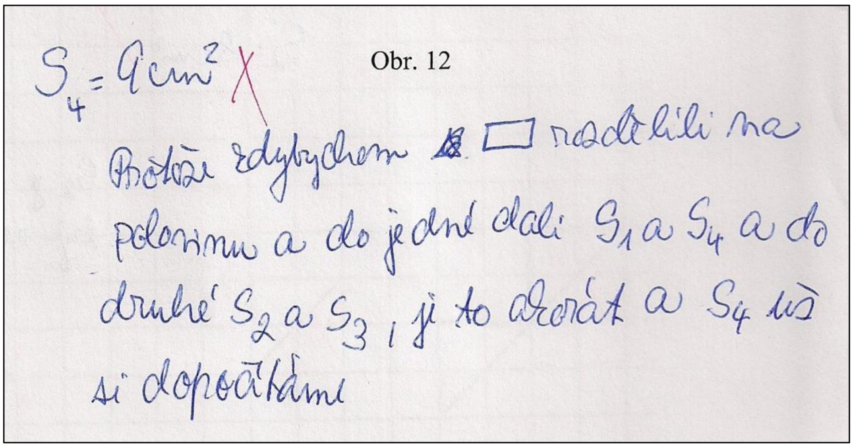
Obr. 1: Správné řešení, ale bez zdůvodnění.



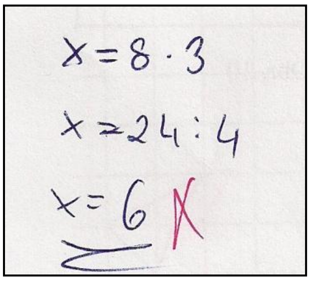
Obr. 2: Ryze geometrický přístup, žák však hodnoty tipoval tak, aby vyšly jednotlivé díly.



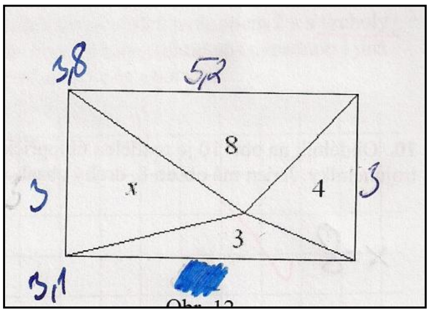
Obr. 3: Od největšího obsahu odečteny další dva.

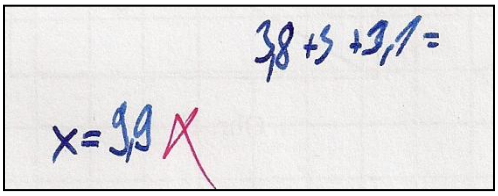


Obr. 4: Sčítání špatných obsahů.



Obr. 5: Jedno z řešení vedoucí k výsledku 6 cm^2.





Obr. 6: Řešení pomocí měření délek stran.

3.13 Shrnutí

V tercii gymnázia J. V. Jirsíka dopadl test velmi dobře. Studenti, aniž by dopředu o písemné práci věděli, nebo by v té době látku Obsahy probírali, zvládli jednotlivě vyřešit většinu úloh. Celkově jako třída pak vyřešili úlohy všechny - tedy nestalo se, že k některému příkladu by nikdo nebyl schopen nalézt správnou odpověď. Studenti si vybavovali vzorce, uměli s nimi pracovat a mnoho z nich dokázalo využít i svých osobních strategií řešení úloh tak, aby se dopracovali ke správnému výsledku. Projevila se snaha o vysvětlení postupů a zdůvodnění vybraných strategií, někteří žáci dokonce uváděli i více než jedno řešení daného problému. Celkově shledávám tuto třídu jako velmi nadanou a soudím, že při výuce tohoto tématu byly využity všechny prostředky na to, aby získané znalosti a dovednosti měly pro žáky trvalý charakter.

Pokud bych chtěla posílit tuto třídu a dopomoci jí k ještě lepším výsledkům, zařadila bych do výkladu a opakování víc úloh, kde by si žáci uvědomili, že pokud se nezmění hodnoty proměnných, nezmění se ani výsledek. (Např. u úloh 5, 6, 8, 9 by se tak mohla zvednout celková úspěšnost.)

V 8. třídě ZŠ Dobrá Voda práce zdaleka nedopadla tak dobře, jako u studentů osmiletého gymnázia. Žáci nepracovali se zaujetím či s touhou dosáhnout dobrého výsledku, někteří žáci si dokonce přišli ukřivdění, že o písemné práci nevěděli a tak se jí snažili sabotovat. Až na jednu žákyni, která svou snahu dovedla k dokonalosti a kromě podpisu nenapsala ani čárku, se však nakonec každý pokusil vyřešit alespoň lehčí úlohy. Vše je určitě dáno tím, že většina schopných žáků odešla po dokončení 5. třídy právě na osmiletá gymnázia a ve třídě zbyla hrstka žáků, kteří nejsou na matematiku zrovna zaměření. Těm žákům, kteří přesto jeví o matematiku zájem pak chybí ve třídě zdravá konkurence a tím pádem i motivace dosahovat lepších výsledků. Paní učitelka hodnotí svou výuku tak, že je ráda, když v žácích udrží nějaké znalosti alespoň po tu dobu, co se látka probírá, aby žáci vybojovali alespoň nějaké slušné známky.

Nejsem si jistá, zda by v této třídě, kde je dětem jedno, zda učivu porozumí a jakého výsledku či známky dosáhnou, nějak zásadně pomohl např. odlišný výklad nebo odvozování vzorců tak, aby je pochopili a uměli si je odvodit, i když je zapomenou. Určitě by to ale bylo zajímavým dlouhodobějším pokusem.

4 SBÍRKA ÚLOH

Sbírka úloh byla sestavená podle metodické části, vždy k procvičení jednotlivé kapitoly. Příklady byly seřazeny tak, aby na začátku žáci pracovali s lehčími úlohami a opevnili tak své znalosti vzorce a jeho užití, na konci každé podkapitoly jsou pak příklady těžší, kde musí žáci přemýšlet a vybrat nejvhodnější strategie řešení.

Za textem úlohy vždy uvádím publikaci, z níž byla převzata a číslo strany na které ji lze v dané publikaci najít. Úlohy označené symbolem • jsem sestavila sama a úlohy s označením * jsou považovány za náročnější.

Na konci každé podkapitoly jsou výsledky úloh, kde kromě samotných odpovědí nalezneme u složitějších příkladů návod na řešení nebo u zajímavých úloh různé strategie.

4.1 Obsah čtverce, kosočtverce

4.1.1 Spočítejte obsah čtverce, který má délku strany 6 cm.

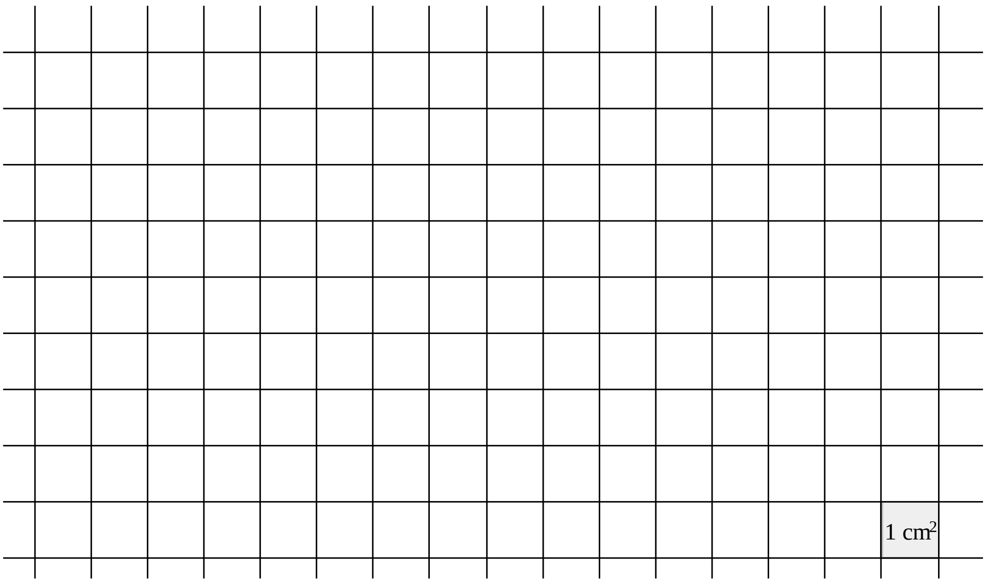
•

4.1.2 Určete délku strany čtverce, víme-li, že jeho obsah je 169 cm^2.

•

4.1.3 Zakreslete do čtvercové sítě čtverce o obsahu 4 cm^2, 9 cm^2, 16 cm^2.

•



4.1.4 Zvětší-li se strana čtverce o 5 centimetrů, zvětší se jeho obsah o 135 cm^2. Vypočítejte délku strany původního čtverce.
[5, str. 33]

4.1.5 Spočítejte obsah čtverce, víte-li, že délka jeho úhlopříčky je 10 cm.
[1, str. 118]

4.1.6 Fotografie čtvercového formátu je nalepena na tvrdé podložce, která je také čtvercového formátu s délkou strany 12 cm. Fotografie zaujímá 56,23% plochy podložky. Vypočítejte rozměry fotografie.
[upraveno dle 1, str. 122]

4.1.7 Délky stran dvou čtverců jsou v poměru 3 : 5. Vypočítejte jejich obsahy, jestliže větší čtverec má délku strany 20 cm.
[1, str. 121]

4.1.8 • Vypočítejte obsah kosočtverce, který má délku strany 6 cm a výšku 4 cm.

4.1.9 Parcela má tvar kosočtverce. Jeho strana je dlouhá 25 m a vzdálenost stran *AB* a *CD* je 22 m. Vypočítejte její výměru.
[1, str. 117]

4.1.10 Vodácký oddíl musí při letním putování použít 4 vojenské stany. Každý stan se skládá ze dvou dílů tvaru kosočtverce o délce strany 1,5 m a výšce 1,3 m. Před výpravou je třeba stany naimpregnovat. Kolik sprejů musí vedoucí oddílu zakoupit, když jeden sprej vystačí na 4 m^2 látky?
[9, str. 53]

4.1.11 * Vypočítejte délky úhlopříček kosočtverce, je-li obsah kosočtverce 156 cm^2 a délka strany 13 cm.
[1, str. 119]

4.1.12 Kosočtverec má délky úhlopříček 4,2 cm a 3,4 cm. Vypočítejte délku strany
* • kosočtverce, výšku a jeho obsah.

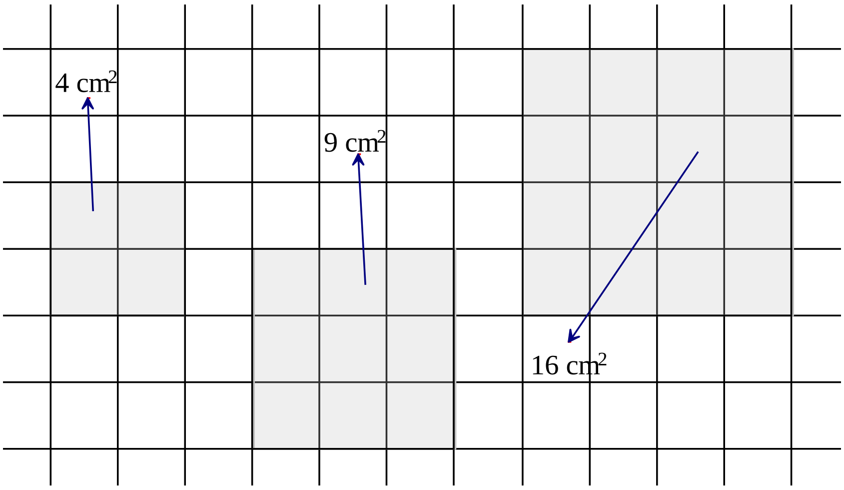
4.1.13 Je možné stříhat z pásu plechu širokého 2,2 cm destičky tvaru kosočtverce se stranou 2,4 cm a úhlopříčkou 3 cm?
[1, str. 126]

Výsledky úloh kapitoly 4.1

4.1.1 36 cm^2

4.1.2 13 cm

4.1.3 Buď si žáci vyjádří ze vzorce délky stran, nebo budou postupně vybarvovat čtverečky o obsahu 1 cm^2 do tvaru čtverce.



4.1.4 $(a + 5)^2 = a^2 + 135$, $a = 11$ cm

4.1.5 $u^2 = a^2 + a^2$, $a = 5\sqrt{2}$

4.1.6 a je délka strany fotografie, obsah podložky $S_p = 12^2 = 144$ cm^2, 56,23% ze 144 $cm^2 = a^2$, $a = 9$ cm

4.1.7 $5x = 20$ cm, $3x = 12$ cm, obsah menšího čtverce $S_1 = 144$ cm^2, obsah většího $S_2 = 400$ cm^2

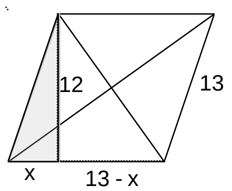
4.1.8 24 cm^2

4.1.9 550 cm^2

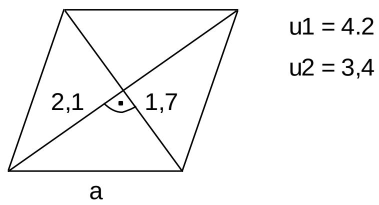
4.1.10 4 stany se dohromady skládají z 8 dílů, jejichž výměra celkem je $8 \cdot (1{,}5 \cdot 1{,}3) = 15{,}6\ \mathrm{m}^2$, na $15{,}6\ \mathrm{m}^2$ spotřebujeme 4 spreje

4.1.11 výška kosočtverce je 156 : 13 = 12 cm, z délek stran vybarveného trojúhelníku na obrázku dopočítáme Pyth. větou délku úseku x a následně $13 - x$, z trojúhelníku o délkách stran 12 a $13 - x$ dopočítáme Pyth. větou délku úhlopříčky u_2, podle vzorce $S_k = \frac{u1 \cdot u2}{2}$ pak dopočítáme délku u_1;

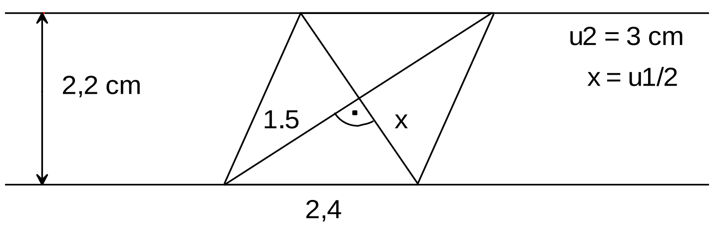
$u_1 = 6\sqrt{13}$, $u_2 = 4\sqrt{13}$



4.1.12 z pravoúhlého trojúhelníku o délce odvěsen rovné polovině délek úhlopříček dopočítáme Pyth. větou délku strany a, $a = 2{,}7$ cm, obsah kosočtverce vzorcem $S = \frac{u1 \cdot u2}{2}$, $S = 7{,}14\ \mathrm{cm}^2$, ze vzorce pro obsah kosočtverce $S = a \cdot v_a$ dopočítáme výšku $v = 2{,}64$ cm



4.1.13 Pyth. větou dopočítáme délku druhé úhlopříčky, $u_1 = 3{,}75$ cm, obsah kosočtverce podle $S = \frac{u1 \cdot u2}{2} = 5{,}632\ \mathrm{cm}^2$, dopočítáme výšku podle $S = a \cdot v_a$, $v_a = 2{,}35$ cm, není to možné, $v_a = 2{,}35\ \mathrm{cm} > 2{,}2\ \mathrm{cm}$



4.2 Obsah obdélníka, kosodélníka

4.2.1 Vypočítejte obsah obdélníka, který má délky stran a = 6 cm a b = 5 cm.

•

4.2.2 Jaký obsah má obdélník, jehož strany jsou dlouhé 24 mm a 6,5 cm?

•

4.2.3 Jak dlouhé strany má obdélník, víte-li, že strana a je třikrát delší než strana b a

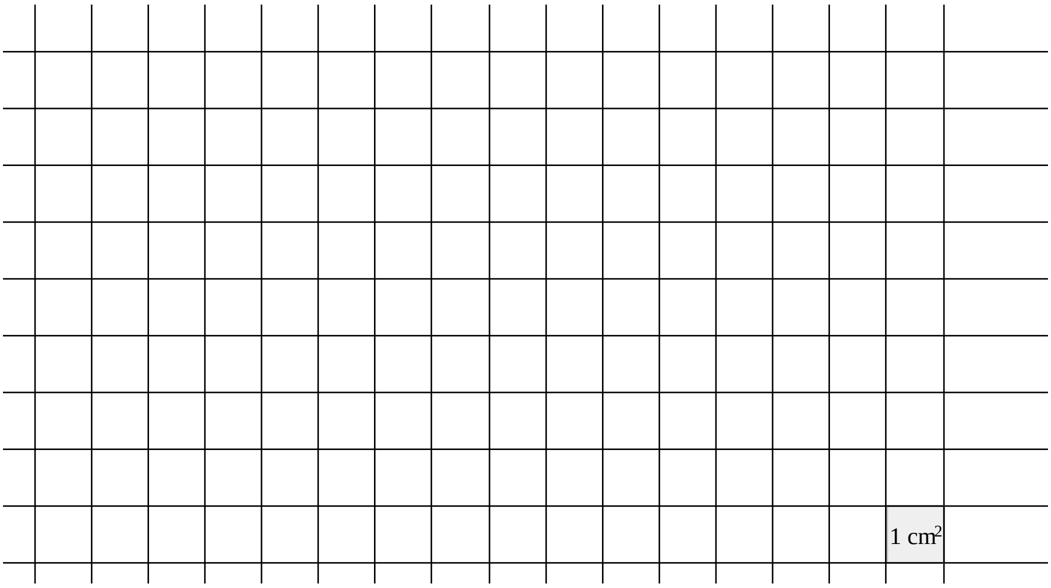
• obsah obdélníka je 48 cm^2.

4.2.4 Jak dlouhé strany má obdélník, víte-li, že jeho obsah je 48 cm^2. Určete všechna

• možná celočíselná řešení.

4.2.5 Zakreslete do čtvercové sítě obdélníky o obsahu: 6 cm^2, 8 cm^2, 12 cm^2.

• Kolik řešení lze nalézt? Zdůvodněte!



4.2.6 Zvětší-li se každý rozměr obdélníku o 3 cm, zvětší se délka jeho úhlopříčky

• * o 4 cm a jeho obsah o 60 cm^2 . Určete rozměry obdélníku.

4.2.7 Dno bazénu tvaru obdélníku o rozměrech 30 m a 10 m je vydlážděno čtvercovými dlaždicemi s délkou strany 10 cm. Kolik stálo vydláždění, jestliže cena jedné dlaždice je 15 Kč.
[5, str. 33]

4.2.8 Určete rozměry obdélníku, jehož obvod je 44 jednotek a platí-li : zvětšíme-li
* jeden rozměr o 10 jednotek a druhý o 6 jednotek, zvětší se jeho obsah právě tak, jako kdybychom k trojnásobku původního obsahu přidali ještě 10 jednotek.

4.2.9 Spočítejte obsah kosodélníka, jež má stanu a = 6 cm a výšku v_a = 3 cm.
•

4.2.10 Určete délku strany a výšky kosodélníka ABCD, jehož obsah je 72 cm^2 a
• víme-li, že délka strany je dvojnásobkem výšky.

4.2.11 Obvod kosodélníku je 60 cm, délka jedné jeho strany je dvakrát větší než délka
• jeho druhé strany a výška příslušná delší ze stran je 7 cm. Spočítejte obsah tohoto kosodélníka.

Výsledky úloh kapitoly 4.2

4.2.1 30 cm^2

4.2.2 $15{,}6 \text{ cm}^2 = 1560 \text{ mm}^2$

4.2.3 $S = 48 = a \cdot b$, $a = 3b$, $48 = 3b \cdot b = 3b^2$, $a = 12$ cm, $b = 4$ cm

4.2.4 součin čísel a a b se musí rovnat 48, najdeme všechny celočíselné kombinace

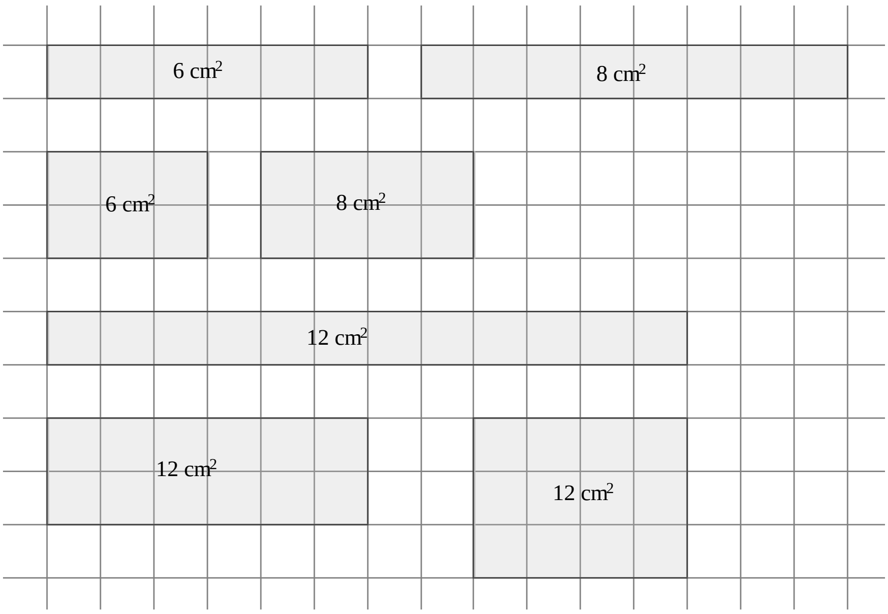
1) $a = 2$ cm, $b = 24$ cm ; 2) $a = 3$ cm, $b = 16$ cm ;

3) $a = 4$ cm, $b = 12$ cm ; 4) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm

4.2.5 6 cm^2 se dá zapsat jako součin délek 1 cm a 6 cm, nebo 2 cm a 3 cm

8 cm^2 jako 1 cm a 8 cm, 2 cm a 4 cm

12 cm^2 jako j cm a 12 cm, 2 cm a 6 cm, 3 cm a 4 cm



4.2.6 $a \cdot b = S$ | $a^2 + b^2 = u^2$

$(a + 3) \cdot (b + 3) = S + 60$ | $(a + 3)^2 + (b + 3)^2 = (u + 4)^2$

$a \cdot b + 3a + 3b + 9 = S + 60$ | $a^2 + b^2 + 6 \cdot (a + b) + 18 = u^2 + 8u + 16$

$S + 3a + 3b + 9 = S + 60$ | $u^2 + 6 \cdot (17) + 18 = u^2 + 8u + 16$

$3a + 3b + 9 = 60$ | $8u = 104$

$a + b + 3 = 20$ | $u = 13$

$a + b = 17$ | $(17 - b)^2 + b^2 = 13^2$

$a = 17 - b$ | $b^2 - 17b + 60 = 0$

$a = 12$ cm, $b = 5$ cm, $u = 13$ cm

4.2.7 30 m = 3000 cm, 10 m = 1000 cm, na delší stranu potřebujeme 300 dlaždic, na kratší 100 dlaždic, $300 \cdot 100 = 30\,000$ ks, $30\,000 \cdot 15 = 450\,000$ Kč

4.2.8 $2(a + b) = 44$ | $(a + 10) \cdot (b + 6) = 3ab + 10$

$a = 22 - b$ | $ab - 2b = 91$

1) $a = 9$ cm, $b = 13$ cm ; 2) $a = 15$ cm, $b = 7$ cm

4.2.9 18 cm^2

4.2.10 $a = 12$ cm, $v = 6$ cm

4.2.11 140 cm^2

4.3 Obsah trojúhelníka

4.3.1 Vypočítejte obsah trojúhelníku, jestliže :

a) c = 5 cm, v_c = 4 cm

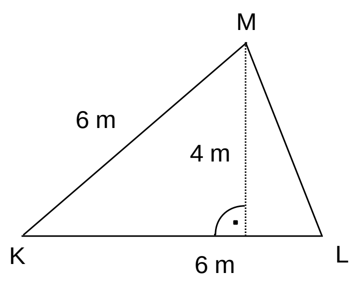
b) a = *4 cm*, b = 7 cm, v_b = 5 cm

c) a = 0,6 dm, v_a = 4 cm

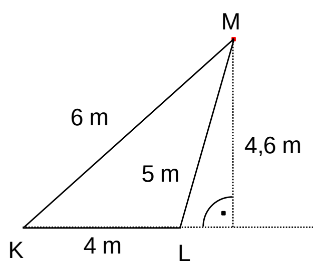
[3, str. 125]

4.3.2 Vyberte vhodné údaje z obrázku a vypočítejte obsah trojúhelníku *KLM* :

a)



b)



[9, str. 56]

4.3.3 Obsah trojúhelníku *MNO* je 96 cm^2, $|MN|$ = 8 cm. Vypočítejte výšku ke straně *MN*.

[9, str. 57]

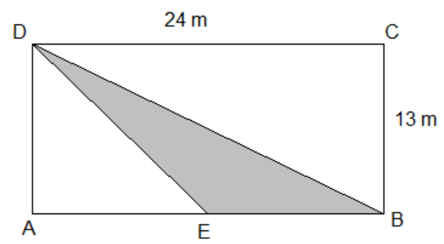
4.3.4 Délky stran obdélníku *ABCD* jsou 13 m a 24 m. Bod *E* je střed strany *AB*. Určete :

a) Obsah trojúhelníku *AED*

b) Obsah trojúhelníku *EBD*

c) Obsah trojúhelníku *BCD*

[9, str. 57]

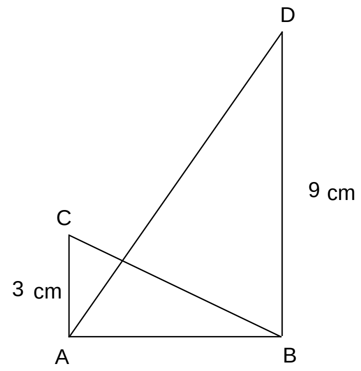


4.3.5 Určete obvod pravoúhlého trojúhelníku, jestliže délka jedné odvěsny je 75% délky druhé odvěsny a jeho obsah je 24 cm^2.

[1, str. 114]

4.3.6 Vypočítejte obsah trojúhelníku *ABD* víte-li, že obsah trojúhelníku *ABC* je 12 cm²

• a úhly *BAC* a *ABD* jsou pravé.



4.3.7 Trojúhelníky *ABC* a *EFG* mají stejný obsah a platí : a = 4,8 cm, e = 14,4 cm. Kolikrát je výška v_a delší než výška v_e?

[14, str. 25]

4.3.8 Vypočítejte obsah trojúhelníku *ABC* se stranami délek a = 10 cm, b = 8 cm, c = 14 cm.

[upraveno dle 11, str. 50]

4.3.9 Vypočítejte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jestliže úhel při základně má velikost 45° a základna má délku 10 cm.

[1, str. 114]

4.3.10 Délky stran trojúhelníku jsou v poměru 2:3:4 a jeho obvod je 45 cm. Určete

• délky stran a vypočítejte obsah trojúhelníku.

4.3.11 Vypočítejte obsah rovnostranného trojúhelníku, jestliže délka jeho strany

• je 12 cm.

4.3.12 Určete délku strany rovnostranného trojúhelníku, je-li jeho obsah 50 cm^2.

•

4.3.13 Obvod pozemku tvaru rovnoramenného trojúhelníku se rovná 474 m. Jeho základna je o 48 m delší než rameno. Vypočítejte výměru tohoto pozemku. [14, str. 24]

Výsledky úloh kapitoly 4.3

4.3.1 a) 10 cm^2 , b) 17,5 cm^2 , c) 12 cm^2

4.3.2 a) 12 m^2 , b) 9,2 cm^2

4.3.3 24 cm

4.3.4 a) 78 m^2 , b) 78 m^2 , c) 156 m^2

4.3.5 $\frac{0{,}75x \cdot x}{2}$ = 24 cm^2, x = 8 cm, 0,75 x = 6 cm, přepona = 10 cm, o = 24 cm

4.3.6 $S_{ABC} = a \cdot v_{a1} = a \cdot 3 = 12$, a = 4 cm, $S_{ABD} = a \cdot v_{a2} = 4 \cdot 9 = 36$ cm^2

4.3.7 $a \cdot v_a = e \cdot v_e$, $4{,}8 \cdot v_a = 14{,}4 \cdot v_e$, $v_a = 3v_e$

4.3.8 Heronův vzorec: $S = \frac{a+b+c}{2}$, $S = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$, s = 16,

$S = \sqrt{16\,(16-10)(16-8)(16-14)}$, S = 39,2 cm^2

4.3.9 $10^2 = a^2 + a^2$, $2a^2 = 100$, $a = 5\sqrt{2}$, $v = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2}$ = 5 cm,

$S = \frac{a \cdot va}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2}$ = 25 cm^2

4.3.10 a = 10 cm, b = 15 cm, c = 20 cm, S = 72,6 cm^2

4.3.11 $v = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ cm, $S = \frac{a \cdot va}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$ = 62,4 cm^2

4.3.12 $v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$, $S = \frac{a \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}$ = 50 cm^2, a = 7,6 cm

4.3.13 $o = 474 = 2a + (a + 48)$, $a = 142$ m, základna = 190 m,

$v = \sqrt{142^2 - 95^2} = 105{,}5$ m, $S = \dfrac{190 \cdot 105{,}5}{2} = 10\,022{,}5$ m^2

4.4 Obsah lichoběžníka

4.4.1 Vypočítejte obsah lichoběžníku *ABCD*, ve kterém je:

a) $a = 7$ m, $c = 4$ m, $v = 0,6$ m

b) $a = 2,3$ dm, $c = 22$ cm, $v = 0,8$ m

c) $a = 18$ cm, $b = 24$ cm, $c = 32$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 90°$

[9, str. 63]

4.4.2 Lichoběžník *ABCD* má základny *a*, *c*, výšku v a obsah *S*. Vypočítejte výšku *v*, je-li dáno:

a) $S = 29,34$ dm^2, $a = 9,9$ dm, $c = 6,4$ dm

b) $S = 15,84$ m^2, $a = 6,4$ m, $c = 3,5$ m

[14, str. 32]

4.4.3 V pravoúhlém lichoběžníku mají základny délky 9 cm a 5 cm. Délka kratšího ramene je 3 cm. Vypočítejte obsah a obvod lichoběžníka.

[1, str. 117]

4.4.4 Příčný průřez náspu železniční tratě má tvar rovnoramenného lichoběžníku *ABCD*, kde $AB \parallel CD$, $|AB| = 15$ m, $|CD| = 10,5$ m, $|BC| = 5$ m.

Vypočítejte obsah průřezu.

[1, str. 115]

4.4.5 Výška a základny v lichoběžníku jsou v poměru 2 : 3 : 5 , jeho obsah je 512 cm^2.

Vypočítejte jeho výšku a délky obou základen.

[12, str.72]

4.4.6 Délky základen rovnoramenného lichoběžníku jsou v poměru 5 : 3, ramena mají délku 5 cm a výška $v = 4,8$ cm. Vypočítejte obsah lichoběžníku.

[1, str. 121]

4.4.7 Parcela má tvar pravoúhlého lichoběžníku ABCD, kde AB || CD s pravým úhlem u vrcholu B. Strana AB má délku 36 m. Délky stran AB a BC jsou v poměru 12 : 7 a délky stran AB a CD jsou v poměru 3 : 2. Vypočítejte množství hnojiva, které musí zahradník nakoupit, chce-li pohnojit celou parcelu a vystačí-li mu 1 kg hnojiva na 16 m^2 plochy.
[upraveno podle 1, str. 126]

4.4.8 Lichoběžník, jehož základny mají délky 100 cm a 80 cm a výška je 50 cm byl
* rozdělen přímkou rovnoběžnou se základnami na dva lichoběžníky, jejichž výšky jsou v poměru 2 : 3. Vypočítejte délku společné základny.
[1, str. 121]

4.4.9 Délky základen lichoběžníku jsou v poměru 2 : 3. Vypočítejte jejich délky, jestliže délka střední příčky je 5 m.
[1, str. 119]

4.4.10 Štítek ke klíči od hotelového pokoje má tvar rovnoramenného lichoběžníku s obsahem 36 cm^2. Jedna základna je dvakrát větší než druhá, výška je 8 cm. Jakou délku mají základny?
[14, str. 33]

4.4.11 Pozemek tvaru pravoúhlého lichoběžníku, jehož jedno rameno je kolmé
* k základnám, byl oset pšenicí. Základny lichoběžníku jsou dlouhé 192 m a 176 m, kolmé rameno má délku 137 m. Využitím závlahového zařízení se zvýšil předpokládaný výnos pšenice 3,75 t z 1 ha na 4 t z 1 ha. Vypočítej výměru pozemku a o kolik více pšenice se sklidilo oproti předpokladu.
[14, str. 32]

4.4.12 Sadem tvaru lichoběžníku prochází cesta kolmá na rovnoběžné strany. Je široká 80 cm. Délky základen jsou v poměru 5 : 3 a délka delší základny k délce cesty je v poměru 5 : 6. Kolik metrů čtverečních zabírá cesta, je-li výměra celého sadu 5400 m^2?
[1, str. 118]

4.4.13 Boční stěny nádoby mají tvar shodných rovnoramenných lichoběžníků se
* základnami délek 65 cm a 44 cm a výškou 78 cm. Dno má tvar čtverce s délkou strany shodnou s kratší základnou lichoběžníka. Vypočítejte spotřebu plechu na výrobu dvou nádob, když se spotřeba plechu s ohledem na spoje, záhyby a odpad zvýší o 8 %.
[14, str. 32]

Výsledky úloh kapitoly 4.4

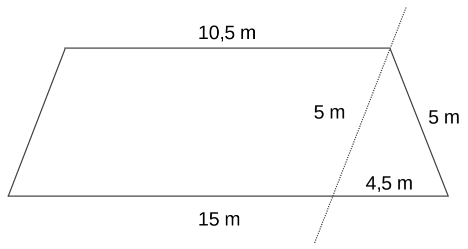
4.4.1 a) 3,3 m^2 , b) 18 dm^2 , c) 600 cm^2

4.4.2 a) 3,6 dm, b) 3,2 m

4.4.3 S = 21 cm^2 , o = 22 cm

4.4.4 výšku lichoběžníku spočítáme jako výšku trojúhelníku a délkách stran 5m, 5 m, 4,5 m, $v = \sqrt{5^2 - 2{,}25^2} \doteq 4{,}5$ m

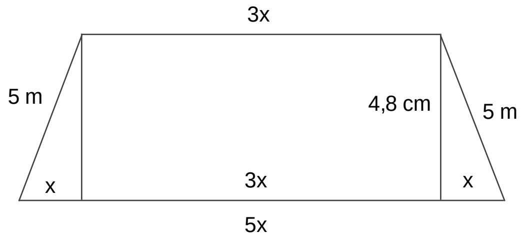
S_l = 57,4 m^2



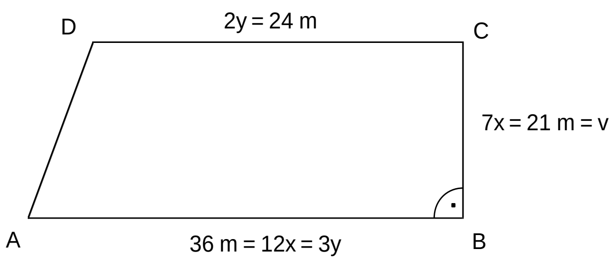
4.4.5 $v = 2x$, $z_1 = 5x$, $z_2 = 3x$, $S = \frac{(5x+3x)\cdot 2x}{2}$ = 512 cm^2

z_1 = 40 cm, z_2 = 24 cm, v = 16 cm

4.4.6 spočítáme délku úseku x, $x = \sqrt{5^2 - 4{,}8^2}$, z toho délka základen a dosadíme do vzorce, S = 26,9 cm^2



4.4.7 spočítáme si obsah lichoběžníka, a = 36 m, c = 24 m, v = 21 m, S = 630 m^2 , 630 : 13 = 39,375, musí koupit 40 kg hnojiva

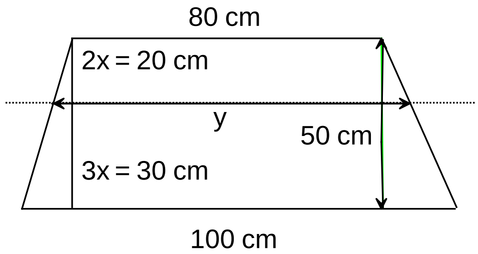


4.4.8 $S_1 = \frac{(100+y)\cdot 30}{2}$, $S_2 = \frac{(y+80)\cdot 20}{2}$

$S_1 + S_2 = S = \frac{(100+80)\cdot 50}{2}$

$y_1 = 88$, $y_2 = 92$

2 řešení: 88 cm, 92 cm



4.4.9 $S_1 + S_2 = S$, $\frac{(5x+5)\cdot \frac{v}{2}}{2} + \frac{(5+3x)\cdot \frac{v}{2}}{2} = \frac{(5x+3x)\cdot v}{2}$, $x = 2$,

$z_1 = 4$ m a $z_2 = 6$ m

4.4.10 S = 36 = $\frac{(2x+x)\cdot 8}{2}$, $x = 3$, délky základen jsou 3 a 6 cm

4.4.11 $S_{\text{pozemku}} = \frac{(192+176)\cdot 137}{2} = 25\,208\ \text{m}^2 = 2{,}5208$ ha

výnos původně = 9,453 t, se závlahou = 10,0832 t

sklidilo se o 0,6302 t více pšenice

4.4.12 $S = 5400 = \frac{(5x+3x)\cdot 6x}{2}$, $x = 15$ m, $S_{cesty} = 0{,}8 \cdot (6 \cdot 15) = 72\ \text{m}^2$

4.4.13 $S_{bo\check{c}.st\check{e}ny} = \frac{(44+65)\cdot 78}{2} = 4251\ \text{cm}^2$, $S_{dna} = 44^2 = 1936\ \text{cm}^2$,

$S_{n\acute{a}doby} = 4 \cdot 4251 + 1936 = 18940\ \text{cm}^2$

$S_{2n\acute{a}doby} = 2 \cdot (4 \cdot 4251 + 1936) = 2 \cdot 18940 = 40910{,}4\ \text{cm}^2$

+ 8% odpad = 40 910,4 $\text{cm}^2 \doteq 4{,}1\ \text{m}^2$

4.5 Obsah kruhu

4.5.1 Vypočítej obsah kruhu, který má poloměr :

a) 2 cm

b) 50 mm

[10, str. 30]

4.5.2 Vypočítej obsah kruhu, který má průměr :

a) 16 m

b) 25 dm

[10, str. 30]

4.5.3 Urči poloměr kruhu s obsahem :

a) 144 cm^2

b) 10 m^2

[10, str. 30]

4.5.4 Ke kolíku na pastvě je provazem o délce 3,5 m přivázána kráva. Jak velká plocha pro pastvu jí byla vymezena?

[10, str. 30]

4.5.5 Obsahy dvou kruhů jsou v poměru 4 : 9. Větší kruh má průměr 12 cm. Vypočítejte poloměr menšího kruhu.

[1, str. 126]

4.5.6 Obvod kruhu je18,84 cm. Vypočítejte jeho obsah.

[1, str. 126]

4.5.7 Kruhový park má rozlohu 1600 m^2. Napříč parkem přes jeho střed vede chodník. Jakou má délku?

[2, str. 23]

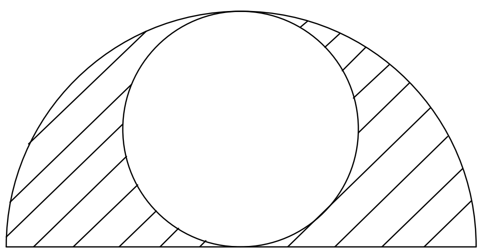
4.5.8 Jsou dány dvě soustředné kružnice o poloměrech 6 m a 9 m. Vypočítejte obsah mezikruží vytvořeného těmito kružnicemi.
[upraveno dle 10, str. 32]

4.5.9 Kruhový záhon o průměru 8 m se má rozdělit soustřednou kružnicí na kruh a mezikruží se stejným obsahem. Určete poloměr soustředné kružnice.
[1, str. 123]

4.5.10 Při jaké číselné hodnotě poloměru *r* platí, že počet jednotek obsahu a obvodu téhož kruhu jsou stejné?
[upraveno dle 1, str. 121]

4.5.11 Kulomet má dostřel 4,8 km. Při střelbě se může otáčet v rozmezí úhlu 40°. Vypočtěte plošný obsah území, které ohrožuje.
[5, str. 34]

4.5.12 Do půlkruhu je vepsán kruh (dle obrázku). Který z útvarů, kruh nebo vyšrafovaná část, má větší obsah?



[5, str. 34]

4.5.13 Čtverci o délce strany 10 cm je opsána a vepsána kružnice. Tyto kružnice jsou hraniční kružnice mezikruží. Vypočítejte obsah mezikruží.
[1, str. 126]

Výsledky úloh kapitoly 4.5

4.5.1 a) 12,6 cm^2, b) 7854 mm^2

4.5.2 a) 201 m^2, b) 1963,5 dm^2

4.5.3 a) 6,8 cm, b) 1,8 m

4.5.4 38,5 m^2

4.5.5 $S_1 = 4x$, $S_2 = 9x = \pi\ r_1^2 = \pi \cdot 6^2$, $x = 12{,}27$

$S_1 = 4 \cdot 12{,}27 = 50{,}3 = \pi \cdot r_2^2$, $r_2 =$ 4 cm

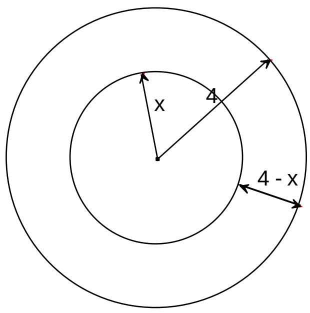
4.5.6 r = 3 cm, S = 28,26 cm^2

4.5.7 délka cesty je 2r, tedy 45,14 m

4.5.8 spočítejte jako rozdíl obsahů těchto kružnic, 141,4 m^2

4.5.9 $S_1 = S_2$, $\pi \cdot x^2 = \pi \cdot 4^2 - \pi \cdot x^2$

x = 2,83 m^2

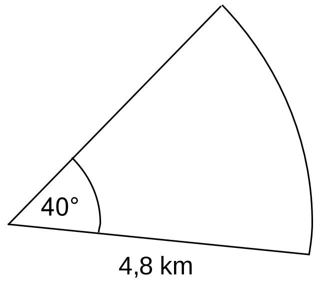


4.5.10 $o = S$, $2\pi \cdot r = \pi \cdot r^2$, $r = 2$

4.5.11 $40° = \frac{1}{9}$ z $360°$,

$S_{kruhu} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4{,}8^2 = 72{,}4$ km^2

$S_{výseče} = \frac{1}{9} S_{kruhu} = \frac{1}{9} \cdot 72{,}4 \doteq 8$ km^2



4.5.12 $S_{půlkruhu} = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$, $S_{kruhu} = \pi \cdot \frac{r^2}{4}$, $S_p - S_k = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

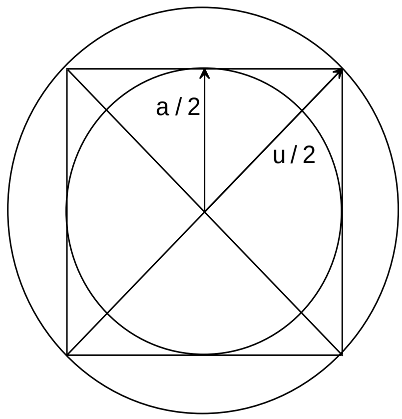
Obsah vyšrafované části je shodný s obsahem kruhu.

4.5.13 $S = (\pi \cdot (\frac{u}{2})^2) - (\pi \cdot (\frac{a}{2})^2)$

$u = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$,

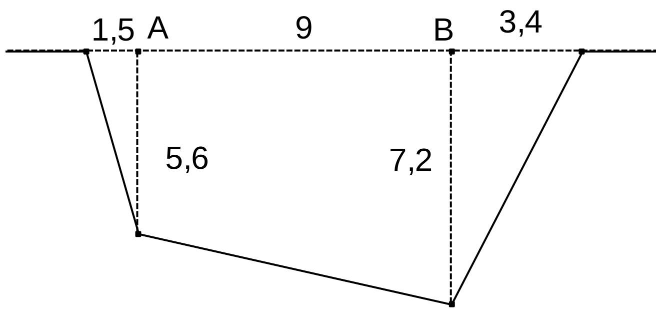
$\frac{u}{2} = 5\sqrt{2}$, $\frac{a}{2} = 5$

$S = 78{,}5$ cm^2



4.7 Příklady na závěr

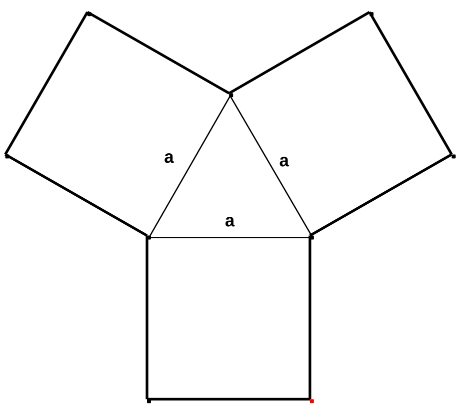
4.7.1 V elektrárně potřebují zjistit, kolik vody proteče za určitou dobu řekou. Aby to mohli zjistit, potřebují spočítat obsah profilu řeky. Mají k dispozici následující obrázek. Spočítejte obsah profilu řeky. (Čísla vyjadřují hloubky v daných místech, vzdálenost těchto míst od břehu a od sebe navzájem, vše v metrech.)



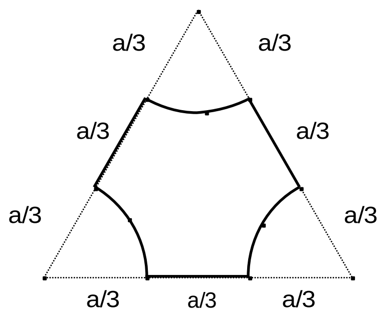
[5, str. 33]

4.7.2 Sestavte vzorec pro výpočet obsahu obrazců na obrázku.

a)



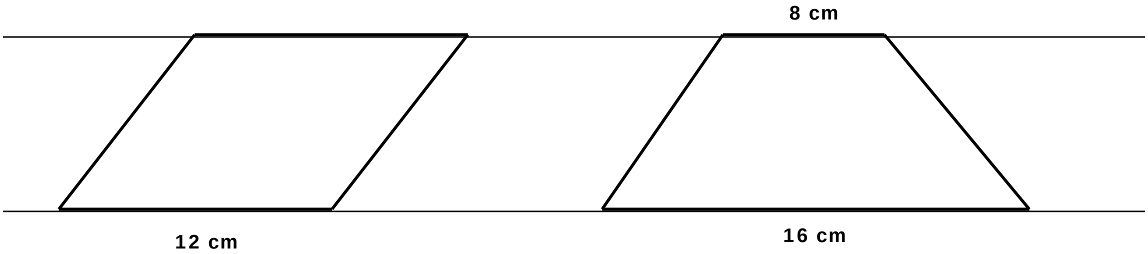
b)



[5, str. 33]

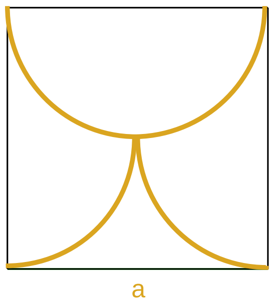
4.7.3 Určete bez počítání obsahů, který z obrazců má větší obsah.

- (Návod: Porovnejte vzorce pro výpočet objemů a zadané hodnoty.)



4.7.4 Ovce má na obojku provaz délky 3,1 m zakončený kroužkem, který se klouzavě pohybuje po drátě mezi dvěma kolíky na louce, jejichž vzdálenost je 5 m. Nakreslete obrázek a vypočítejte obsah louky, kterou může ovce vypást.
[5, str. 34]

4.7.5 Určete obsah poháru:

- 

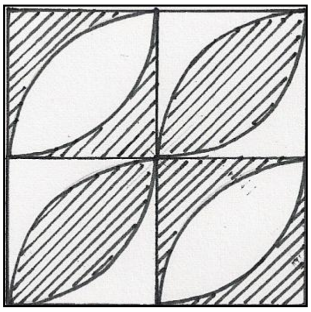
4.7.6 Král Artuš uložil svému dvornímu malíři, aby mu vyzdobil nový štít tvaru čtvrtkruhu *OAB* (*O* je střed ohraničující kružnice, *AB* je její oblouk). Malíř na štítu nejprve sestrojil půlkružnici nad úsečkou *OA* jako průměrem a potom osu úhlu *AOB*, která protnula oblouk *AB* v bodě *C*. Obě čáry se protnuly v bodě *D*. Vzniklý útvar *OBCD* vybarvil červeně, útvar *OAD* zeleně a zbytek štítu žlutě. Králi pak přinesl štít se slovy: Milý králi, červená barva značí tvoji statečnost, zelená moudrost a žlutá laskavost.
Co byste králi odpověděli na jeho otázku: „Jsem tedy více statečný než moudrý, nebo u mne převládá moudrost nad statečností?"
[6, str. 35 - 36]

4.7.7 Ze čtverce o délce strany 35 cm je vystřižen kruh s největším možným průměrem. Kolik % obsahu čtverce tvoří odpad?

[1, str. 119]

4.7.8 Určete obsah vyšrafované části, je-li délka strany celého čtverce 10 cm.

•

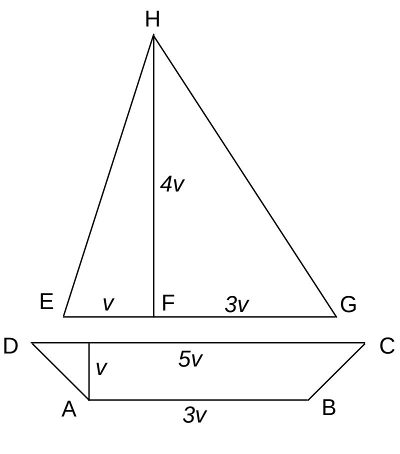


4.7.9 Do kružnice o poloměru r = 19 mm je vepsán pravidelný šestiúhelník. Vypočítejte obsah kruhové úseče ohraničené stranou šestiúhelníku a kružnicí.

[12, str. 73]

4.7.10 Vypočítejte obsah obrázku plachetnice víte-li, že je zakreslen jako lichoběžník *ABCD* a dva pravoúhlé trojúhelníky *EFH* a *FGH* a platí-li, že výška *v* = 1 m.

[14, str. 31]



4.7.11 Poloměr kruhového záhonu je 2 m. Okolo něj je plocha vysypaná pískem, jejíž hranici tvoří strany čtverce o délce 5 m a obvod záhonu. Vypočítejte obsah plochy vysypané pískem.

[1, str. 123]

4.7.12 Pole osázené zeleninou má tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku o

* délce odvěsny 24 m. Ve vrcholech trojúhelníku jsou umístěny otáčecí postřikovače s dosahem 12 m. Jak velkou část pole postřikovače nezavlažují?

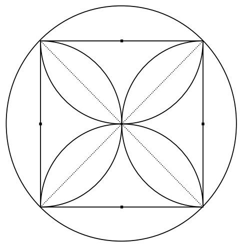
[1, str. 119]

4.7.13 Kruhový stůl o průměru 80 cm je pokryt čtvercovým ubrusem s délkou strany 1,2 m. O co výše nad zemí je střed ubrusu než jeho rohy?

[1, str. 119]

4.7.14 Nad stranami čtverce vepsaného do kružnice o poloměru 3 cm jsou opsány polokružnice, které procházejí středem čtverce. Vypočítejte obsah obrazce tvaru čtyřlístku na obrázku.

[1, str. 119]



4.7.15 V tenké čtvercové desce se stranou délky 25 cm byly vyříznuty tři kruhové otvory s průměry d_1 = 2 cm, d_2 = 4 cm a d_3 = 20 cm. Vypočítejte obsah desky po vyříznutí otvorů.

[1, str. 123]

4.7.16 Je dán trojúhelník *ABC* a body *D*, *E*, které jsou po řadě středy stran *AB*, *BC*.

* Úsečka *DE* rozdělí trojúhelník *ABC* na trojúhelník *DBE* a lichoběžník *ADEC*. Určete poměr jejich obsahů.

[1, str. 126]

4.7.17 Stavební pozemek tvaru obdélníku s rozměry 40 m a 60 m se má z části zastavět domem se základnou tvaru čtverce, jehož strana má délku 18 m. Zbytek pozemku se má rozdělit tak, aby jedna třetina připadla na dvůr a zbytek na zahrádku. Vypočítejte výměru dvoru a zahrádky.

[upraveno dle 1, str. 126]

Výsledky úloh kapitoly 4.7

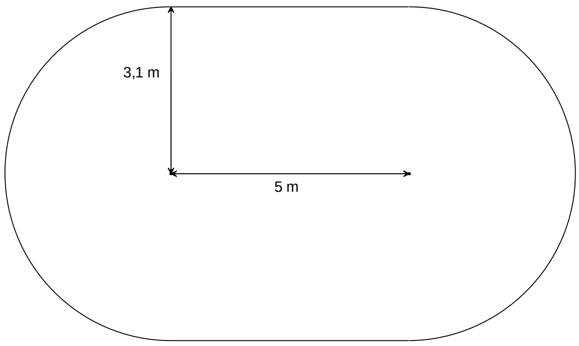
4.7.1 rozdělit na obdélník a 3 trojúhelníky, S = 71,32 m^2

4.7.2 a) $\frac{a^2}{4}(12+\sqrt{3})$, b) $\frac{a^2}{36}(9\sqrt{3}-\pi)$

4.7.3 Oba mají stejný obsah, protože $S_1 = 12v$, $S_2 = \frac{(8+16)v}{2} = 12v$

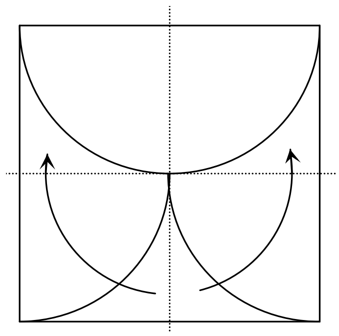
4.7.4 obdélník + dva půlkruhy:

S = 61,2 m^2



4.7.5 přesuneme-li části tvořící nožku poháru, dostaneme celou polovinu obsahu čtverce,

$S = \frac{a^2}{2}$

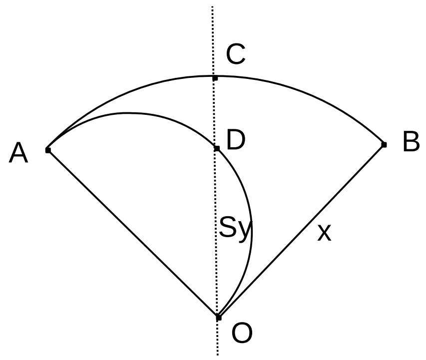


4.7.6 S_{ADO} ? S_{OBCD}

$S_{ADO} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{x^2}{4} - S_y = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot x^2 - S_y$

$S_{OBCD} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot x^2 - S_y = S_{ADO}$

Plocha červené a zelené barvy je stejná.

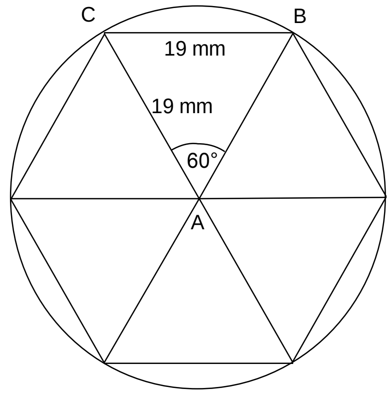


4.7.7 kruh má poloměr $\frac{a}{2}$ = 17,5 cm, S = 21,46 cm^2

4.7.8 části tvaru lístku přesuneme do nevyšrafovaných částí čtverečků s délkou strany $\frac{a}{2}$, $S = \frac{a^2}{2} = \frac{10^2}{2}$ = 50 cm^2

4.7.9 hledaný obsah zjistíme jako rozdíl obsahu kruh. výseče ABC a obsahu trojúhelníku ABC:

$$S = \frac{\pi \cdot 19^2}{6} - \frac{19 \cdot \sqrt{19^2 - 9{,}5^2}}{2} = 32{,}7 \text{ mm}^2$$



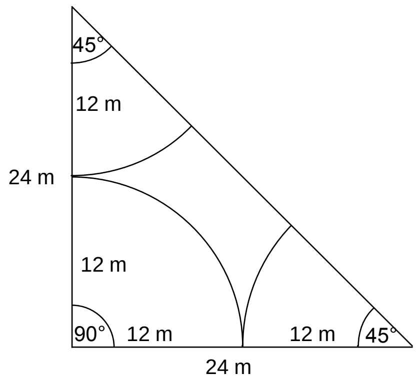
4.7.10 12 m^2

4.7.11 rozdíl obsahu čtverce o délce strany 5 m a obsahu kruhového záhonu o poloměru 2 m, S = 12,44 m^2

4.7.12 výměra trojúhelníkového pole = 288 m^2
plocha která je zavlažovaná odpovídá obsahu půlkruhu o poloměru 12 m

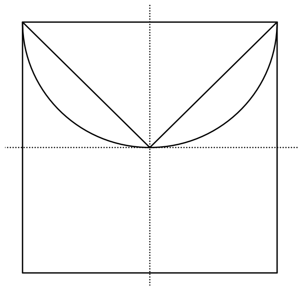
$S_{půlkr.} = \frac{\pi \cdot 12^2}{2}$ = 226,2 m^2

288 - 226,2 = 61,8 m^2



4.7.13 rozdíl polovin délek úhlopříčky ubrusu a průměru stolu určí, o kolik je roh ubrusu níž než střed, $u = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}2^2}$ = 1,7 m, 85 - 40 = 45 cm

4.7.14 délka strany vepsaného čtverce

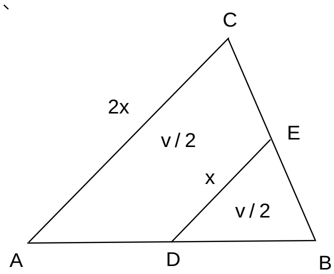


je $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ cm,

každý „lístek“ je úhlopříčkou rozdělen na dvě části, pokud je vyberu tak, jako je naznačeno na obrázku, jejich obsah spočítám jako rozdíl obsahu půlkružnice s poloměrem $\frac{\sqrt{18}}{2}$ a trojúhelníka o obsahu 4,5 cm^2, 1 lístek má obsah 2,57 cm^2, celý čtyřlístek pak $4 \cdot 2{,}57 = 10{,}3$ cm^2

4.7.15 295,3 cm^2

4.7.16 $|DE| = \frac{1}{2}|AC|$, protože střední příčka má polovinu délky rovnoběžné strany trojúhelníka, střední příčka půlí výšku na ní kolmou, tznm.:



$S_l = \dfrac{(2x+x)\cdot\frac{v}{2}}{2}$, $S_t = \dfrac{x\cdot\frac{v}{2}}{2}$

$S_l : S_t = 3 : 1$

4.7.17 $S_{pozemku} = 40 \cdot 60 = 2400$ m^2, $S_{domu} = 18^2 = 324$ m^2, rozdíl = 2076 m^2, na dvůr $\frac{1}{3}$ = 692 m^2, zbytek, $\frac{2}{3}$ jsou zahrada = 1384 m^2

5 ZÁVĚR

Obsahem této práce se staly kapitoly, které dokumentují vznik a vývoj matematických představ o tématu obsahy rovinných útvarů, jiné, které se mohou stát podkladem pro výuku tohoto tématu na základních a středních školách a mohou sloužit nejen učitelům, ale i samotným žákům k lepšímu pochopení této látky. Další částí je pak zadání a zpracování průzkumného testu k danému tématu a vyvození úrovně znalostí a zhodnocení jejich trvalosti. Posledním oddílem se stala sbírka klasických procvičovacích a zajímavých doplňovacích příkladů, které slouží k procvičení a upevnění získaných znalostí a dovedností.

Hlavní přínos této práce spatřuji v možnosti využít ji jako učebnici pro výuku, včetně cvičebnice, nebo v možnosti pročíst kapitolu praktického prozkoumání znalostí a poučit se z nejčastějších chyb žáků, díky čemuž se během výuky můžeme na nedostatky zaměřit a odstranit je.

Myslím si, že toto materiál je přínosem nejen pro mne, jako budoucí paní učitelku, ale i pro široké spektrum učitelů, kteří by jej mohli využít ve své praxi při běžné a rozšířené výuce nebo během hodin zájmové matematiky, kde by bylo velmi zajímavé, projít s žáky i historii tématu a využívat nadstandardní strategie řešení.

6 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Běloun, F. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ*, Praha: Prometheus, 1995

[2] Bušek, I., Macháček, V.: *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník ZŠ*, Praha: Prometheus, 1995

[3] Česenek , J., Floreková, Š.: *Sbírka úloh z matematiky pro 6. ročník ZŠ*, Praha: Prometheus, 1994

[4] Havelka, M.: *DP Povrchy a objemy těles ve středoškolské matematice*, PF České Budějovice, 1999

[5] Hnilička, Z.: *DP Sbírka úloh z matematiky pro učňovské školy*, PF České Budějovice, 1997

[6] Leischner, P.: *Metody řešení úloh*, sbírka úloh na adrese http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/externi/kat_mat_82142/metody.pdf

[7] Leishner, P.: *Obsahy a objemy útvarů*, výukové materiály na adrese http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Search/Simple?terms=obsah

[8] Odvárko, O.- Kadleček, J.: *Matematika pro 6. ročník ZŠ*, Praha: Prometheus, 1998

[9] Odvárko, O.- Kadleček, J.: *Matematika pro 7. ročník ZŠ*, Praha: Prometheus, 1996

[10] Odvárko, O.- Kadleček, J.: *Matematika pro 8. ročník ZŠ*, Praha: Prometheus, 2000

[11] Petáková, J.: *Matematika - příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na VŠ*, Praha: Prometheus, 2008

[12] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia, Planimetrie*, Praha: Prometheus, 2008

[13] Schwabik, Š.- Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu*, Brno: Prometheus, 1996

[14] Trejbal, J., Filip, Š.: *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník ZŠ*, Praha: Prometheus, 1994