Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

MAGICKÉ ČTVERCE A KŘÍŽOVÉ SOUČTY NA ZŠ S PODPOROU POČÍTAČE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Albín OČKAY

České Budějovice, duben 2011

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě - v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných Pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

20. dubna 2011 Albín Očkay

Rád bych poděkoval své vedoucí práce RNDr. Heleně Binterové, Ph.D., která mi vždy pomohla, pokud jsem si s něčím nevěděl rady. Současně i za podnětné připomínky, které mi vždy pomohly uvědomit si, jakým směrem se mám dál ubírat.

Velké poděkování též patří Daně Očkayové a Franciscu Godoy Amador za práci, kterou odvedli ve Španělsku a škole Beriz Las Rozas de Madrid, která poskytla časový prostor a své žáky ke srovnání s českými. Dále bych chtěl za totéž poděkovat vedení školy Gymnázium a Obchodní akademie Chodov a všem žákům, kteří statečně řešili zadané úlohy.

Na závěr byl chtěl poděkovat všem pedagogickým i nepedagogickým pracovníkům, kteří se podíleli na formování mé osoby, bez nichž by určitě tato práce nevznikla.

Anotace

Didaktické materiály se vyvíjejí spolu s prostředky, které jsou dostupné pro jejich použití. Obnovují se a přinášejí s sebou nové pohledy na základy pedagogiky. Tato diplomová práce si klade za cíl vytvořit a poté zhodnotit nové didaktické materiály. Jejich základem jsou příklady na křížové součty a magické čtverce. Vytvořené materiály mají být zasazené do současné hodiny matematiky, kde se setkáváme jak s klasickými prostředky jako je psaní na papír, tak s moderními jako je počítač.

První kapitola se věnuje teoretickému uvedení aspektů této práce. Jsou představeny křížové součty a magické čtverce, aby byla získána základní představa o jejich matematických vlastnostech, které jsou nezbytné pro tvorbu uvedených materiálů. V případě magických čtverců je uvedena jejich historie, jejich vztah k jiným oblastem lidského bytí jako je umění, psychologie nebo zábava a také několik způsobů jejich konstrukce. Je představen současný didaktický přínos křížových součtů a čtverců z hlediska kompetencí pro matematické osnovy druhého stupně základního školství. Je uveden přehled didaktických prostředků, které se v současnosti nejvíce používají v hodinách matematiky, a které poslouží jako médium pro vytvořené materiály, pracovní listy, počítače a interaktivní tabule.

V druhé části je prostudováno téma křížových součtů a magických čtverců ve vzdělávání v České republice a to ve vzdělávacích prostředcích jako jsou učebnice a digitální média, které jsou k dispozici na internetu a mají vzdělávací cíl. Také jsou prostudovány materiály existující ve vzdělávací síti v jiné zemi, ve Španělsku, které jsou k dispozici na internetu.

Dále jsou představeny pracovní listy v papírové a elektronické podobě a statistická studie, která se snaží ověřit jejich využití v současném vzdělávacím systému jak v České republice, tak i v jiných blízkých zemích, konkrétně ve Španělsku, a jejich didaktickou a motivační hodnotu pro studenty.

Summary

The didactic material advances according to the progress of the available media and evolve bringing new visions and foundations to pedagogy. This dissertation is about creating and estimating new didactic options, based on mathematical games, figures and magical squares and introducing them to the mathematics class where they will meet more classical options such as handwriting or more modern options like computers.

The first part deals with the theoretical introduction of the concepts to study. We will introduce the magical figures and especially the magic squares to give an overview of their mathematical properties which are useful to generate the material we will present. In the particular case of the magical squares, we will give an historical introduction and present briefly their relation with some other sectors related to the human being, such as arts, psychology or the hobbies and we will add some useful methods to create these magical squares. We will introduce the didactic usefulness of the magical figures in their connexion with some topics of the mathematics secondary programme. We will analyse the different nowadays most used didactic options in the mathematics class and determine which of them will be used as a basis for the material we will create, the exercises that will be done on paper sheets, the use of computers and of the digital boards.

The second part of the dissertation deals with the use of the magical figures in the actual education in Czech Republic as education options, the same way textbooks or digital devices are used with educational purpose. Moreover, we will have a look at already existing material on the education web of another country: Spain.

We will present the didactic material we generated on paper sheets and digitally and we will check its usefulness in the educational system both in Czech Republic and in Spain and see if it creates motivation on the students.

Resumen

Los materiales didácticos evolucionan a la vez que los medios disponibles para su uso y se renuevan transportando con ellos nuevas visiones y fundamentos de la pedagogía. Esta tesina trata de generar y evaluar nuevos recursos didácticos basados en los juegos matemáticos figuras y cuadrados mágicos e introducirlos en la actualidad del aula de matemáticas donde nos encontramos soportes clásicos como la escritura a mano en papel y otros más novedosos como los informáticos.

El primer capítulo se dedica la introducción teórica de los aspectos a estudio.

Se introducen las figuras mágicas y en particular los cuadrados mágicos para dar una visión de sus propiedades matemáticas que son de utilidad para la generación de los materiales que se presentan. En el caso particular de los cuadrados mágicos se realiza una introducción histórica y su relación con otras áreas del ser humano como el arte, la psicología o los pasatiempos además de algunos métodos útiles para su generación. Se introduce la utilidad didáctica actual de las figuras mágicas en su conexión con las competencias del curriculum de matemáticas de educación secundaria. Se realiza un recorrido por los recursos didácticos más utilizados actualmente en el aula de matemáticas y que servirán se soporte para los materiales realizados, el trabajo en hojas de ejercicios y la utilización de la informática con los ordenadores y las pizarras digitales.

En la segunda parte se realiza un paso por la utilización de las figuras mágicas en la actualidad de la educación en la República Checa en recursos educativos como son los libros de texto y el soporte digital encontrado en internet con fine educativos, además se repasan materiales existentes en la red educativa de otro país como es España disponibles para su uso desde internet.

Se presentan los materiales didácticos generados en los dos soportes y trata de comprobar su aprovechamiento en el sistema educativo actual tanto en la República Checa como en otros países cercanos como España y su utilidad didáctica y motivacional para el alumnado.

Obsah

1 Úvod

Vzdělávání se mění, přizpůsobuje se změnám, které probíhají ve společnosti a u všech lidí, kteří danou společnost vytvářejí. Mění se, protože musí formovat žáky, kteří budou žít v budoucnosti odlišné od současnosti, ve které teď žijeme a také proto, že má k dispozici média, která neexistovala v minulosti a nyní je společnost schopna je nabídnout. Změn ve vzdělávání je mnoho a jsou rozdílné. Mění se například filozofie vzdělávání, s kterou jsou zaváděné nové koncepty, jako se v současné době zavádí vzdělávání ve smyslu rozvíjení kompetencí, mění se obsah materiálů tak, jak se mění znalosti, které má společnost a které nám odborníci předkládají, mění se, protože má k dispozici nová média jako je internet nebo interaktivní tabule. Také je důležité, aby změny ve vzdělávání zrcadlily změny ve společnosti, aby probíhaly ve všech svých aspektech najednou a konstantně a aby motorem těchto změn jsme byli my učitelé profesionálové ve vzdělávání.

S cílem zapracovat a spojit některé z těchto změn byla vybrána starodávná matematická hříčka, kterou se zabývali dávní myslitelé a kterou dokonce zakomponovali do svých myšlenek o planetách a jejich nadpřirozených silách nebo i do bajek a kultury. Byla vybrána záměrně, neboť zábavnou formou rozvíjí logické a kombinatorické myšlení. V dostupných zdrojích jak v tištěné tak elektronické podobě jsem se vždy setkal s příklady, u kterých bylo uvedeno pouze jedno řešení. Tento nedostatek mě vedl k vypracování příkladů s uvedením postupu a všech jejich možných řešení. Tuto matematickou hříčku pak zanést do aktuálního vzdělávání s ohledem na dva aspekty, které jsou v současné době v popředí výuky, vzdělávání v kompetencích a informační technologie, které jsou pro výuku k dispozici.

Studie, která je realizována v této práci, se snaží spojit tyto aspekty prostřednictvím vytvoření didaktických materiálů, které jsou založené na příkladech na křížové součty a magické čtverce. Materiály, které mohou učitelé využít ke své práci v hodinách matematiky nebo je brát jako příklad pro vývoj dalších materiálů, které odpovídají jejich potřebám a potřebám jejich studentů. Materiály, které by byly přínosné pro změny probíhající aktuálně ve školní didaktice.

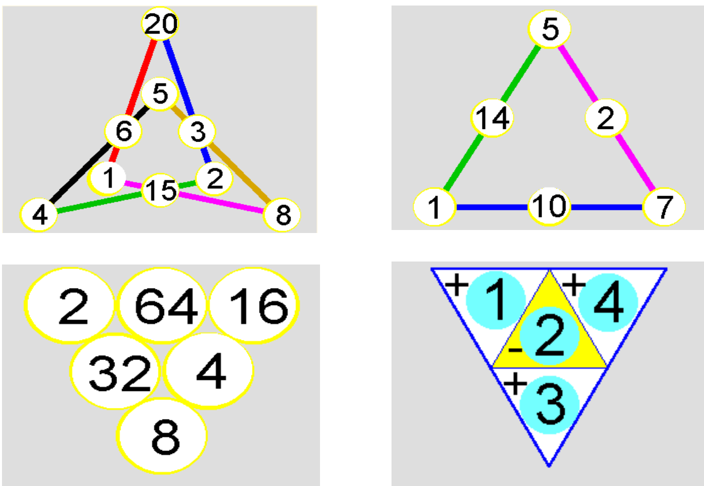
2 Teoretická část

2.1 Křížové součty

Křížové součty jsou početní hry, ve kterých se musí rozmístit série čísel do předem daných políček tak, aby jejich součet byl vždy stejný ve všech liniích a aby nejméně jedno číslo z uvedené série čísel bylo zastoupeno ve více než jedné linii [1].

Nejvýznamnějším druhem křížových součtů jsou magické čtverce, o kterých se podrobněji rozepíši v následující kapitole.

Tyto křížové součty jsou pouze jednou součástí větší skupiny, ve které se kromě operace sčítání používají i jiné operace, jako násobení, dělení a odčítání [1]. Některé příklady této skupiny můžeme vidět na následujících obrazcích.



Obr.1 Magické obrazce s operací násobení, dělení, sčítání a odčítání

Horní dva příklady jsou příklady, kde násobení čísel na všech liniích má stejný výsledek: v prvním příkladě 120 a v druhém 70. Dolní dva příklady jsou příklady s operacemi dělení a odčítání. V prvním příkladě jsou všechna čísla výsledkem dělení čísel umístěných nad nimi. Ve druhém příkladě je spodní číslo výsledkem součtu vrchních čísel, od kterého je odečteno číslo prostřední.

S křížovými součty se hojně setkáváme v mnohých časopisech a novinách v rubrice zábava, v některých cvičebnicích pro žáky základních a středních škol a rovněž v psychologických testech a v testech inteligence.

2.1.1 Specifické příklady křížových součtů

2.1.1.1 Křížový součet ve formě kříže

Nejjednodušší příklad křížových součtů je sestaven z $2n+1$ čísel umístěných do formy, která je tvořena dvěmi liniemi, jednou vertikální a druhou horizontální, a středovým číslem. Součet čísel v obou liniích je stejný. Příklad této formy křížového součtu uvádím na následujícím obrázku.

			11			
			1			
			6			
10	4	2	55	6	9	5
			7			
			3			
			8			

Obr.2 Křížový součet ve formě kříže

Vlastnosti křížových součtů ve formě kříže jsou tak jednoduché, jako ony samotné.

I. Středové číslo není ve své podstatě důležité a je možno jej libovolně měnit, aniž by křížový součet jako celek přestal fungovat.

II. Je možno sečíst dva křížové součty ve formě kříže a vznikne další křížový součet ve formě kříže vždy, pokud jsou výchozí kříže stejného řádu. Konstanta vzniklého kříže bude $K_1 + K_2$, kde K_1 je konstanta prvního kříže a K_2 je konstanta druhého kříže.

		a_1						d_1						a_1+d_1		
		…						…						…		
b_1	…	c	…	b_n	+	e_1	…	f	…	e_n	=	b_1+e_1	…	c+f	…	b_n+e_n
		…						…						…		
		a_n						d_n						a_n+d_n		

Obr. 3 Součet křížových součtů ve formě kříže

III. Vynásobením křížového součtu ve formě kříže vznikne nový křížový součet a konstanta vzniklého kříže bude kK, kde K je konstanta výchozího kříže.

			a_1						ka_1		
			…						…		
k	b_1	…	c	…	b_n	=	kb_1	…	kc	…	kb_n
			…						…		
			a_n						ka_n		

Obr. 4 Násobení křížového součtu ve formě kříže

Přičtením stejného čísla ke všem elementům křížového součtu ve formě kříže vznikne nový křížový součet, kde konstanta vzniklého kříže bude $K+(n+1)k$, kde K je konstanta výchozího kříže.

		a_1						a_1+k		
		…						…		
b_1	…	c	…	b_n	+k	b_1+k	…	$c+k$	…	b_n+k
		…						…		
		a_n						a_n+k		

Obr. 5 Součet křížového součtu ve formě kříže a čísla

Speciálním případem křížových součtů ve formě kříže je takový, kdy sérii čísel, která vyplňují kříž, vyjma středového čísla, tvoří aritmetická posloupnost.

Pokud $A_n=\left\{a_1,a_1+d,a_1+2d,...,a_1+nd\right\}$, a obsahuje-li tato množina sudý počet hodnot, může se sestrojit křížový součet ve formě kříže umístěním nejprve jakéhokoliv čísla, které není součástí aritmetické posloupnosti do středového políčka. Poté se umístí nejvyšší a nejnižší hodnota aritmetické posloupnosti do stejné linie, následně se umístí druhá nejvyšší a druhá nejnižší hodnota aritmetické posloupnosti do stejné nebo další linie, jediné na co musíme dbát je, aby byly obě hodnoty ve stejné linii. Opakováním této operace vznikne křížový součet ve formě kříže. Tímto způsobem každá dvojice čísel, která byla umístěna, dává stejný součet $2a_1+nd$.

Obsahuje-li množina *A* lichý počet hodnot, tehdy je potřeba vyplnit středové políčko první, poslední nebo prostřední hodnotou aritmetické posloupnosti. Toto platí pro nejjednodušší sestavy.

Dvě z variací křížových součtů ve formě kříže se obvykle využívají v rámci didaktických cvičení. Jsou to asymetrické kříže a obrazce ve formě hvězdy. Obě formy ve své teoretické podstatě převzaly velmi prosté změny, a proto si udržují stejné vlastnosti jako kříže symetrické. Tedy jak způsob jakým se konstruují, tak i aplikace aritmetických posloupností je evidentní a všeobecně platná.

Asymetrické kříže obsahují jiný počet políček u jednotlivých větví.

		10		
		20		
		2		
14	6	11	16	8
		4		
		18		
		12		

			11			
			16			
20	10	6	9	7	3	8
			12			
			15			

	1			
	12			
	21			
	5			
34	2	13	3	24
	30			
	3			

Obr. 6 Příklady asymetrických křížů

Forma hvězdy je jednoduchou variací, kdy jednotlivé větve sdílejí společné středové políčko a jsou prostorově rozmístěny do formy hvězdy.

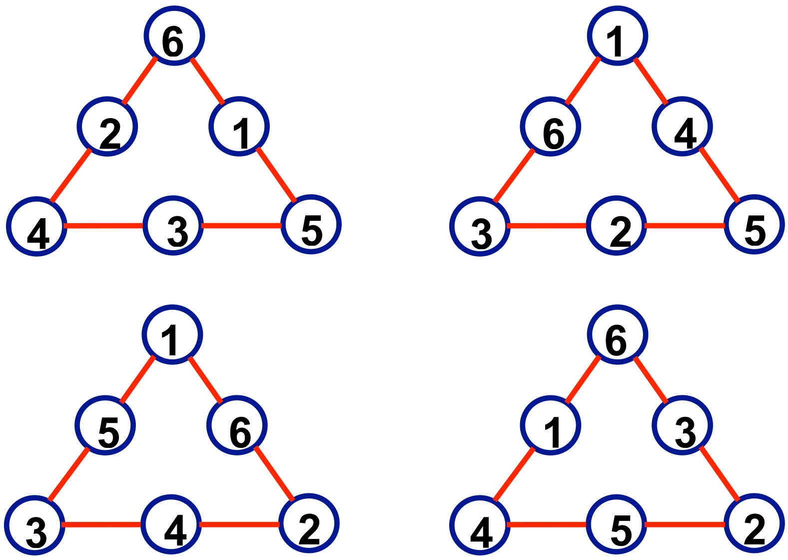
29				25				26
	21			17			18	
		13		9		10		
			5	1	2			
30	22	14	6	33	3	11	19	27
			7	8	4			
		15		16		12		
	23			24			20	
31				32				28

Obr. 7 Příklad formy hvězdy křížového součtu ve formě kříže

2.1.1.2 Křížový součet ve formě trojúhelníku

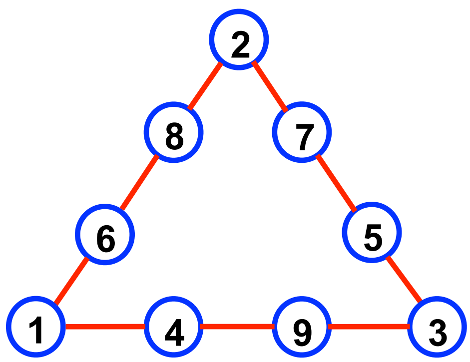
Dalším specifickým příkladem křížových součtů je křížový součet uspořádaný do formy trojúhelníku. V těchto případech se čísla uspořádají do stran trojúhelníku takovým způsobem, aby součty čísel na stranách trojúhelníku byly shodné.

Nejjednodušší příklad je sestaven z šesti čísel, kde je jedno číslo umístěno v každém vrcholu trojúhelníku a po jednom čísle na jeho stranách.



Obr. 8 Trojúhelníky s konstanty 9, 10, 11 a 12

Také existují trojúhelníky vyššího řádu, které se sestrojí jednoduše přidáním čísel na strany trojúhelníku.



Obr. 9 Trojúhelník vyššího řádu

Křížové součty ve formě trojúhelníku sdílejí druhou, třetí a čtvrtou vlastnost křížových součtů ve formě kříže, vždy když trojúhelníky, které sčítáme mají stejný počet elementů. Kromě uvedených vlastností mají další speciální vlastnost. Konstanta křížového součtu ve formě trojúhelníku, což je součet čísel na straně trojúhelníku, může dosahovat hodnoty v určitém rozmezí, které je ohraničeno minimální a maximální konstantou. Pro nejjednodušší příklad křížového součtu ve formě trojúhelníku je rozmezí konstanty křížového součtu ve formě trojúhelníku vymezeno hodnotami 9, 10, 11 a 12 (viz obrázek 8).

Hodnota konstanty křížového součtu ve formě trojúhelníku bude vždy stejná jako součet čísel jednotlivých stran trojúhelníku děleno třemi. To znamená, že započítáváme dvakrát čísla umístěná ve vrcholech trojúhelníku. Tedy maximální konstanta křížového součtu ve formě trojúhelníku se obdrží, pokud se do vrcholů trojúhelníku umístí nejvyšší hodnoty číselné řady a naopak minimální konstanta křížového součtu ve formě trojúhelníku se obdrží, pokud se do vrcholů trojúhelníku umístí minimální hodnoty číselné řady. Ostatní konstanty křížového součtu ve formě trojúhelníku se obdrží zbývajícími možnostmi uspořádání čísel.

V případě, kdy série čísel je $A_n = \{1,2,3...n\}$, je možno spočítat hodnoty minimální a maximální konstanty křížového součtu ve formě trojúhelníku následujícím způsobem:

Maximální konstanta

$$K_{max} = \frac{1+2+3+...+(n-1)+n+[(n-2)+(n-1)+n]}{3} = \frac{S_n+[(n-2)+(n-1)+n]}{3} =$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2}+[(n-2)+(n-1)+n]}{3} = \frac{n(n+1)+2[(n-2)+(n-1)+n]}{6}$$

Minimální konstanta

$$K_{min} = \frac{1+2+3+...+(n-1)+n+[1+2+3]}{3} = \frac{S_n+6}{3} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}+6}{3} = \frac{n(n+1)+4}{6}$$

V případě, kdy série čísel je $A_n = \left\{ a_1, a_2, a_3 ... a_n \right\}$, kde $a_1 < a_n$, jakákoliv aritmetická posloupnost, je možno spočítat hodnoty minimální a maximální konstanty křížového součtu ve formě trojúhelníku následujícím způsobem:

Maximální konstanta

$$K_{max} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{(n-1)} + a_n + \left[a_{(n-2)} + a_{(n-1)} + a_n \right]}{3} = \frac{S_n + \left[a_{(n-2)} + a_{(n-1)} + a_n \right]}{3} =$$

$$= \frac{\frac{n\left(a_n + a_1\right)}{2} + \left[a_{(n-2)} + a_{(n-1)} + a_n \right]}{3} = \frac{n\left(a_n + a_1\right) + 2\left[a_{(n-2)} + a_{(n-1)} + a_n \right]}{6}$$

Minimální konstanta

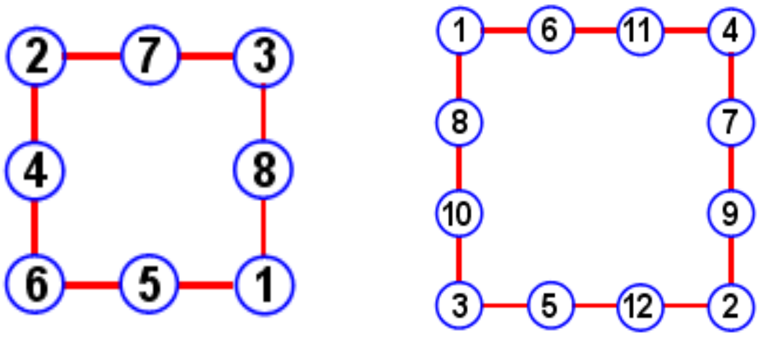
$$K_{min} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{(n-1)} + a_n + \left[a_1 + a_2 + a_3 \right]}{3} = \frac{S_n + \left[a_1 + a_2 + a_3 \right]}{3} =$$

$$= \frac{\frac{n\left(a_n + a_1\right)}{2} + \left[a_1 + a_2 + a_3 \right]}{3} = \frac{n\left(a_n + a_1\right) + 2\left[a_1 + a_2 + a_3 \right]}{6}$$

2.1.1.3 Křížový součet ve formě čtverce

Dalším specifickým příkladem křížových součtů je křížový součet uspořádaný do formy čtverce. V těchto případech se čísla uspořádají do stran čtverce takovým způsobem, aby součty čísel na stranách čtverce byly shodné. Neměli bychom je zaměňovat s magickými čtverci, které se čísly vyplňují úplně. O této zvláštní skupině pojednává následující kapitola.

Nejjednodušší příklad je sestaven z osmi čísel, kde je jedno číslo umístěno v každém vrcholu čtverce a po jednom čísle na jeho stranách. Také existují čtverce vyššího řádu, které se sestrojí jednoduše přidáním čísel na strany čtverce.



Obr. 10 Křížové součty ve formě čtverce

Křížové součty ve formě čtverce sdílejí všechny vlastnosti křížových součtů ve formě trojúhelníku, včetně existence minimální a maximální konstanty. Jediným rozdílem je v tomto případě to, že čtverec má čtyři vrcholy a čtyři strany, pročež při výpočtu konstanty se sčítají čtyři čísla, která se započítávají dvakrát a proto i celý výraz je dělen čtyřmi.

V případě, kdy série čísel je $A_n = \{1,2,3 \ldots n\}$ je možno spočítat hodnoty minimální a maximální konstanty křížového součtu ve formě čtverce následujícím způsobem:

Maximální konstanta

$$K_{max} = \frac{S_n + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n}{4} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1) + 8n - 12}{8}$$

Minimální konstanta

$$K_{min} = \frac{S_n + 1 + 2 + 3 + 4}{4} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + 10}{4} == \frac{n(n+1) + 20}{8}$$

V případě, kdy série čísel je $A_n = \{a_1, a_2, a_3 \ldots a_n\}$, pak $a_1 < a_n$, jakákoliv aritmetická posloupnost, je možno spočítat hodnoty minimální a maximální konstanty křížového součtu ve formě čtverce následujícím způsobem:

Maximální konstanta

$$K_{max} = \frac{S_n + a_{(n-3)} + a_{(n-2)} + a_{(n-1)} + a_n}{4} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + a_{(n-3)} + a_{(n-2)} + a_{(n-1)} + a_n}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2\left[a_{(n-3)} + a_{(n-2)} + a_{(n-1)} + a_n\right]}{8}$$

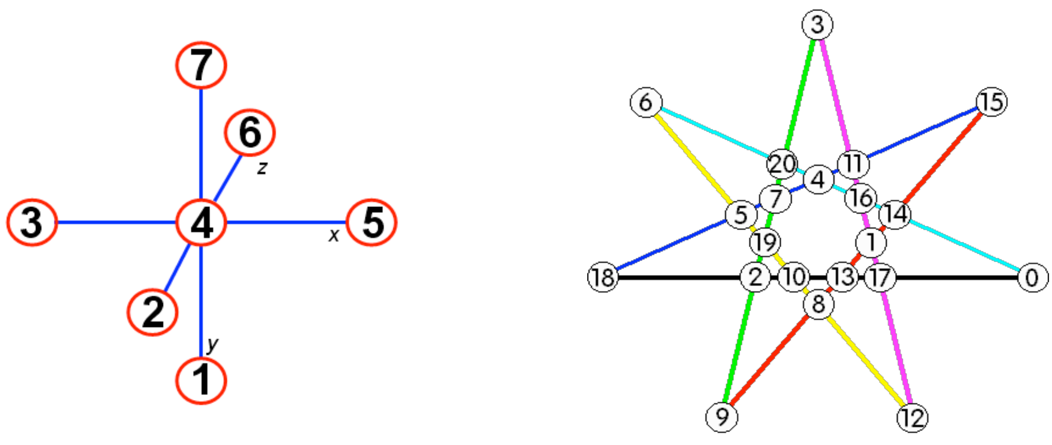
Minimální konstanta

$$K_{max} = \frac{S_n + a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2\left[a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right]}{8}$$

2.1.1.4 Křížové součty jiných forem

Aplikací větších či menších změn a kombinací vzniká nekonečné množství dalších forem. Dalším rozšířením výčtu křížových součtů je převedení křížových součtů do trojrozměrného prostoru. Rovněž tyto formy sdílejí všechny vlastnosti jako křížové součty ve formě trojúhelníku nebo čtverce, včetně existence minimální a maximální konstanty. Výpočet konstant je velice podobný ve všech případech, vždy pouze s jednoduchými úpravami závisejícími na konkrétním případu křížového součtu. Proto a rovněž i pro obsáhlost možných variací, není možné uvést jejich celkový výčet.



Obr. 11 Ukázka různých forem křížových součtů

2.2 Magický čtverec

2.2.1 Pojem magický čtverec

Pojem magický čtverec má v různých pramenech různé významy.

Magický čtverec je rozmístění řady celých čísel do čtvercové matice tak, aby součet čísel ve všech sloupcích, řádcích a hlavní diagonále byl stejný, čili konstantní. Obvykle čísla používaná k vyplnění políček jsou od 1 do n^2, kde n je počet sloupců a řad magického čtverce.

Magickým čtvercem se nazývá čtverec složený z $n \times n$ jednotkových čtverečků, v nichž je napsáno n^2 přirozených čísel tak, že součty čísel v každém řádku a sloupci i na úhlopříčkách se rovnají témuž číslu.

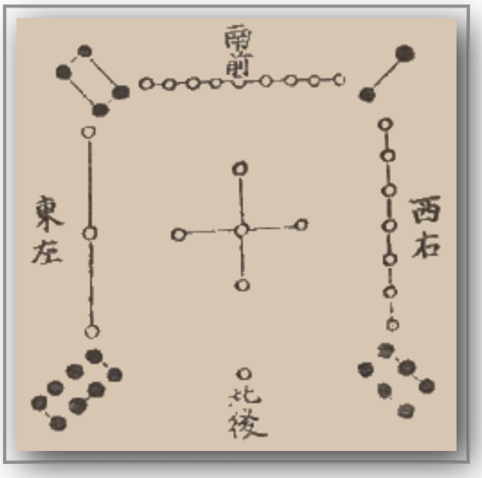
Nejobvyklejší definice je však následující. Magický čtverec řádu n je čtvercové schéma o n řádcích a n sloupcích,v němž jsou vepsána čísla 1, 2, 3... n^2 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i úhlopříčce je stejný [1].

Ze všech definic vyplývá stejný závěr a s tím spojené použití následujících dvou pojmů. Prvním pojmem je stupeň (řád) magického čtverce, který se značí n. Druhým pojmem je konstanta magického čtverce, která se značí K [1]. Stupeň magického čtverce je určen počtem řádků a sloupců daného magického čtverce. Například magický čtverec tvořený třemi sloupci a třemi řádky má stupeň magického čtverce $n = 3$. Každý čtverec má n řádků a součty ve všech řádcích jsou stejné. Odtud vyplývá, že součet všech čísel ve čtverci je n-krát větší než součet libovolného řádku.

Součet všech čísel je $S = \frac{\left(1+n^2\right)n^2}{2}$ a hodnota konstanty $K = \frac{\left(1+n^2\right)n^2}{2}$

2.2.2 Historie

Magické čtverce patří zřejmě k nejstarším písemně doloženým objektům. Ve starověké Číně byl znám magický čtverec již v třetím tisíciletí před naším letopočtem, jako Lo Shu. Objevuje se ve věštecké knize I-ťing užívané v Číně Taoisty, která obsahuje dvě konfigurace: Velký plán (Lo Shu) a Říční mapu [2]. Podle legendy, došlo jednoho dne k vylití řeky z břehů. Vystrašení lidé se snažili dát oběť bohu řeky Lo a tím utišit jeho hněv. Ovšem nenacházeli správný počet obětí, bůh se neuklidnil, pouze viděli želvu procházející se kolem vylité řeky. Až dokud si jeden chlapec nevšiml zvláštní značky, kterou měla želva na krunýři. A to Velký plán, Lo Shu. Obětovali pak požadované množství 15, bůh oběť přijal a řeka se zase vrátila do normálu [2]. Velký plán Lo Shu je znázorněn na následujícím obrázku.



Obr. 12 Velký plán Lo Shu [2]

Dosadíme-li za znaky čísla, obdržíme známý magický čtverec Saturn..

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 13 Magický čtverec Saturn

Tato konfigurace je pozoruhodná tím, že součet prvků v každém řádku, sloupci a úhlopříčce je stále stejný, a to 15.

Říční mapa., kterou opět podle legendy měla na svém krunýři posvátná želva, která se opět vynořila z řeky (tentokrát z řeky Ho), je znázorněna na dalším obrázku [2].

Obr. 14 Říční mapa [2]

Dosadíme-li čísla, dostaneme následující konfiguraci.

			7			
			2			
		10		10		
8	3		5		4	9
		10		10		
			1			
			6			

Obr. 15 Číselný zápis Říční mapy

Pouhým pohledem v této mapě dobře vidíme středovou symetrii součtů protilehlých cifer. Například $5+3=8$; $5+1=6$;$3+10+2=8+7$; $3+10+1=8+6$.

Tento typ magických čtverců znali také Indové, Egypťané, Arabové a Řekové. Těmto magickým čtvercům přisuzovali astrologické a věštecké vlastnosti. Často je psali na talismany. Věřili, že jim tyto talismany přinesou štěstí, sílu, zdraví, apod. Už v šestnáctém století Cornelius Agrippa ve své knize De libri tres Occulta philosophia přiřadil každé tehdy známé planetě jeho magický čtverec. Magický čtverec Saturn je tentýž jako Velký plán Lo Shu. Stejné rozdělení magických čtverců lze nalézt i v indické astrologii. Na následujícím obrázku je znázorněn magický čtverec, který je situován v indickém Khajurahu a byl vytvořen v 11-tém až 12-tém století [1].

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Obr. 16 Magický čtverec v Khajurahu

Zavedení magických čtverců v evropské kultuře je přičítáno Emanueli Moschopoulosi, který žil ve čtrnáctém století. V jeho rukopise jsou poprvé popsány některé metody, které vysvětlují, jak se tvoří magické čtverce. Od tohoto momentu se začali o magické čtverce zajímat i velcí matematikové, mezi něž patří Stifel, Fermat, Pascal, Leibnitz, Frenicle, Bachet, La Hire, Saurin, Euler a mnoho dalších. Ale studovali je vědecky, bez přisuzování jim nadpřirozených vlastností.

Leonard Euler, nejplodnější a velký švýcarský matematik z osmnáctého století, si dal za úkol vyřešit problém pohybu koně po šachovnici. Jde o to pohybovat koněm po šachovnici tak, aby prošel všechna políčka, ale žádné z nich dvakrát. Dalším problémem, který fascinuje matematiky a ne-matematiky, je konstrukce magických čtverců řádu n . Euler dokázal nalézt jedno simultánní řešení pro oba problémy. Vytvořil tabulku, ve které každý řádek a každý sloupec dává součet 260 a každý řádek a sloupec každého ze čtyř magických podčtverců čtvrtého stupně dává součet 130. V této magické tabuli osmého řádu je vepsána cesta pohybu koně po celé desce, tedy i šachovnici [3].

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Obr. 17 Eulerova magická tabule

2.2.2.1 Magické čtverce v evropském umění

Poprvé použil magické čtverce v evropském umění Albrecht Dürer ve své rytině Melancholie I, která je na následujícím obrázku.

Obr. 18 Melanchole I, rytina Albrechta Albrechta Dürera, magický čtverec je zobrazen v pravém horním rohu [2]

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. 19 Magický čtverec Albrechta Dürera [1]

Je to magický čtverec o čtyřech sloupcích a čtyřech řádcích. Součet čísel ve všech řádcích, sloupích a úhlopříčkách nám dá vždy magickou konstantu 34. Rovněž součet ve čtyřech submaticích řádu 2 je 34. Kromě toho součet čtyř prostředních čísel je 34 a také tak součet čísel umístěných v rozích magického čtverce. Existuje několik dalších kombinací, které dávají součet 34.

16	3	2	13
5	10	11	18
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	18
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	18
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	18
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	18
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. 20 Ukázky kombinací, které dávají součet 34

Prostřední čísla poslední řady 1514 udávají rok, ve kterém stvořil toto dílo.

Z moderního umění uvádím magický čtverec umístěný na fasádě Gaudího katedrály La Sagrada Familia v Barceloně, navržený sochařem Josepem Maria Subirachs. Jedná se o mírně pozměněný magický čtverec čtvrtého řádu, odvozený z Dürerova čtverce. Konstantou magického čtverce je 33, což jsou Kristova léta [4].

Obr. 21 Katedrála La Sagrada Familia [4]

2.2.3 Vlastnosti magických čtverců

První vlastností magických čtverců je, že se mohou sčítat, odčítat, násobit nebo dělit stejným číslem všechna čísla magického čtverce a z něj vznikne nový magický čtverec.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}
….				…
…..				…
a_{n1}	a_{n2}	….	…	a_{nn}

$a_{11}+k$	$a_{12}+k$	$a_{13}+k$	…	$a_{1n}+k$
$a_{21}+k$	$a_{22}+k$	$a_{23}+k$	…	$a_{2n}+k$
$a_{31}+k$	$a_{32}+k$	$a_{33}+k$	…	$a_{3n}+k$
….				…
…..				…
$a_{n1}+k$	$a_{n2}+k$	….	…	$a_{nn}+k$

Konstanta vzniklého magického čtverce bude $nk + K$, kde K je konstanta výchozího magického čtverce.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}
….				…
…..				…
a_{n1}	a_{n2}	….	…	a_{nn}

ka_{11}	ka_{12}	ka_{13}	…	ka_{1n}
ka_{21}	ka_{22}	ka_{23}	…	ka_{2n}
ka_{31}	ka_{32}	ka_{33}	…	ka_{3n}
….				…
…..				…
ka_{n1}	ka_{n2}	….	…	ka_{nn}

Konstanta vzniklého magického čtverce bude *kK*, kde *K* je konstanta výchozího magického čtverce.

Další vlastností magických čtverců je, že pokud sečteme čísla z homologních polí dvou magických čtverců, vznikne další magický čtverec. Nevznikne operací násobení nebo dělení.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}
….				…
…..				…
a_{n1}	a_{n2}	….	…	a_{nn}

+

b_{11}	b_{12}	b_{13}	…	b_{1n}
b_{21}	b_{22}	b_{23}	…	b_{2n}
b_{31}	b_{32}	b_{33}	…	b_{3n}
….				…
…..				…
b_{n1}	b_{n2}	….	…	b_{nn}

=

$a_{11}+b_{11}$	$a_{12}+b_{12}$	$a_{13}+b_{13}$	…	$a_{1n}+b_{1n}$
$a_{21}+b_{21}$	$a_{22}+b_{22}$	$a_{23}+b_{23}$	…	$a_{2n}+b_{2n}$
$a_{31}+b_{31}$	$a_{32}+b_{32}$	$a_{33}+b_{33}$	…	$a_{3n}+b_{3n}$
….				…
…..				…
$a_{n1}+b_{n1}$	$a_{n2}+b_{n2}$	….	…	$a_{nn}+b_{nn}$

Konstanta vzniklého magického čtverce bude $K_A + K_B$, kde K_A je konstanta prvního magického čtverce a K_B je konstanta druhého magického čtverce.

Zajímavou vlastností magických čtverců je, že pokud se zamění dva libovolné sloupce a současně dva řádky stejného pořadí, jako pořadí zaměněných sloupců, vznikne nový magický čtverec.

a_{11}	⋯	a_{1i}	⋯	a_{1j}	…	a_{1n}
…		…		…	…	…
a_{i1}	⋯	a_{ii}	⋯	a_{ij}	…	a_{in}
…				…		…
a_{j1}	⋯	a_{ji}	⋯	a_{ji}	…	a_{jn}
…		…		…		…
a_{n1}	⋯	a_{ni}	⋯	a_{nj}	…	a_{nn}

a_{11}	⋯	a_{1j}	⋯	a_{1i}	…	a_{1n}
…		…		…		…
a_{j1}	⋯	a_{ij}	⋯	a_{ii}	…	a_{jn}
….		…				…
a_{i1}	⋯	a_{ji}	⋯	a_{ji}	…	a_{in}
…		…		…		…
a_{n1}	⋯	a_{nj}	⋯	a_{ni}	…	a_{nn}

Nechť je dán magický čtverec *A*.

a_{11}	⋯	a_{1i}	⋯	a_{1j}	…	a_{1n}
…		…		…	…	…
a_{i1}	⋯	a_{ii}	⋯	a_{ij}	…	a_{in}
…				…		…
a_{j1}	⋯	a_{ji}	⋯	a_{ji}	…	a_{jn}
…		…		…		…
a_{n1}	⋯	a_{ni}	⋯	a_{nj}	…	a_{nn}

Využitím komutativního zákona u sčítání přirozených čísel se může zaměnit řádek *i* za řádek *j*. Součty se pak v řádcích ani ve sloupcích nezmění. Záměnou řádku *i* za řádek *j* se však porušily součty na diagonálách, neboť došlo k záměně hodnoty a_{ii} za hodnotu a_{ji} a hodnoty a_{ji} za hodnotu a_{ij}.

a_{11}	⋯	a_{1i}	⋯	a_{1j}	…	a_{1n}
…		…		…	…	…
a_{j1}	⋯	a_{ji}	⋯	a_{ji}	…	a_{jn}
…				…		…
a_{i1}	⋯	a_{ii}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…		…		…		…
a_{n1}	⋯	a_{ni}	⋯	a_{nj}	…	a_{nn}

Jestliže se provede další záměna, tentokráte sloupce *i* za sloupec *j*, opět se součty v řádcích ani sloupcích nezmění. Avšak teď se součty v diagonálách navrátí na původní hodnotu, protože mají stejné hodnoty jako na počátku, ale v rozdílných pozicích. Což opět nehraje roli díky využití komutativního zákona u sčítání přirozených čísel.

a_{11}	⋯	a_{1j}	⋯	a_{1i}	…	a_{1n}
…		…		…		…
a_{j1}	⋯	a_{ij}	⋯	a_{ii}	…	a_{jn}
….		...				…
a_{i1}	⋯	a_{ji}	⋯	a_{ji}	…	a_{in}
…		...		...		…
a_{n1}	⋯	a_{nj}	⋯	a_{ni}	…	a_{nn}

Specifickou vlastností magických čtverců čtvrtého řádu je, že když sečteme čísla umístěná v rozích magického čtverce, nebo čtyři prostřední čísla nebo první a poslední číslo druhého a třetího řádku nebo první a poslední číslo prvního a čtvrtého řádku obdržíme opět konstantu magického čtverce.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Nechť je dán magický čtverec čtvrtého řádu *A*.

$$\begin{cases} a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44} = K \\ a_{21} + a_{31} + a_{24} + a_{34} = K \\ a_{12} + a_{13} + a_{42} + a_{43} = K \\ a_{22} + a_{23} + a_{33} + a_{32} = K \end{cases}$$

R_i je definováno jako součet všech elementů v řádku *i*. S_j je definováno jako součet všech elementů sloupce *j*. D_1 a D_2 jsou definována jako součty elementů v hlavních diagonálách.

Je-li A magickým čtvercem, pak platí:

$$R_i = S_j = D_1 = D_2 = K \quad a \quad R_2 + R_3 - S_2 - S_3 = 0$$

Z toho plyne:

$$a_{21} + a_{24} + a_{31} + a_{34} - a_{12} - a_{13} - a_{42} - a_{43} = 0 \quad a$$

$$a_{21} + a_{24} + a_{31} + a_{34} = a_{12} + a_{13} + a_{42} + a_{43} \qquad (1)$$

$$R_1 + R_4 - S_2 - S_3 = 0$$

Z toho plyne:

$$a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44} - a_{22} - a_{23} - a_{32} - a_{33} = 0 \quad a$$

$$a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44} = a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} \qquad (2)$$

Tyto závěry budou použity později.

Na druhé straně

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - D_1 - D_2 = 2K$$

Z toho plyne:

$$a_{21} + a_{13} + a_{21} + a_{24} + a_{31} + a_{34} + a_{42} + a_{43} = 2K$$

Ze závěru *(1)* se nahradí $a_{21} + a_{24} + a_{31} + a_{34}$ *za* $a_{12} + a_{13} + a_{42} + a_{43}$

Z toho plyne:

$$2\left(a_{12} + a_{13} + a_{42} + a_{43}\right) = 2K \quad \text{pak} \quad a_{12} + a_{13} + a_{42} + a_{43} = a_{21} + a_{14} + a_{31} + a_{34} = K$$

Dále platí: $D_1 + D_2 = 2K$

Z toho plyne:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} = 2K$$

Ze závěru *(2)* se nahradí $a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44}$ *za* $a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33}$

Z toho plyne:

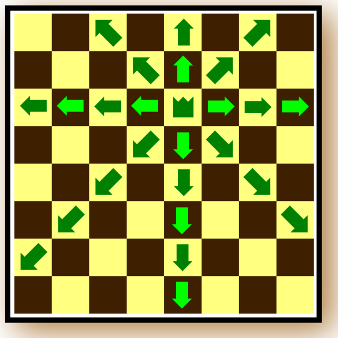
$$2\left(a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33}\right) = 2K \quad \text{pak} \quad a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44} = a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = K$$

2.2.4 Typy magických čtverců

Magické čtverce jsou čtverce tvořené písmeny, symboly nebo čísly, které jsou uspořádány podle pravidelného schématu a kterým se dříve přisuzovali magické schopnosti [5]. Existuje mnoho typů magických čtverců, mezi které řadíme následující.

2.2.4.1 Čtverce se specifickými pravidly

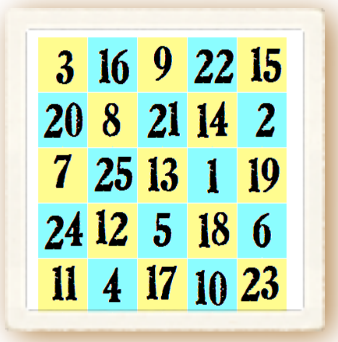
Nejvýraznějším příkladem tohoto typu magických čtverců je Gaussův problém určit, kolika různými způsoby je možno uspořádat osm dam na šachovnicové pole tak, aby žádná z nich nemohla napadnout jinou dámu. Existuje 92 možných řešení [5].



Obr. 22 Znázornění možných pohybů dámy na šachovnicovém poli a jeden z možných příkladů rozestavění osmi dam [5]

2.2.4.2 Magické čtverce aritmetické

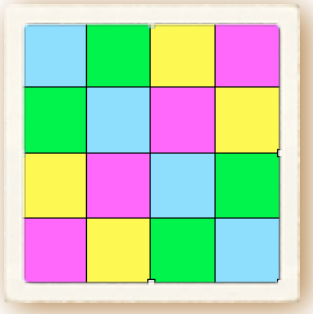
Je to řada různých po sobě jdoucích čísel s určitou definovanou vlastností. Tato čísla jsou uspořádána do čtverce, pro nějž je charakteristické to, že součet čísel v řádcích, sloupcích a na hlavních diagonálách je stejný. Tento součet se nazývá konstanta magického čtverce [5].



Obr. 23 Příklad aritmetického magického čtverce [5]

2.2.4.3 Latinské čtverce

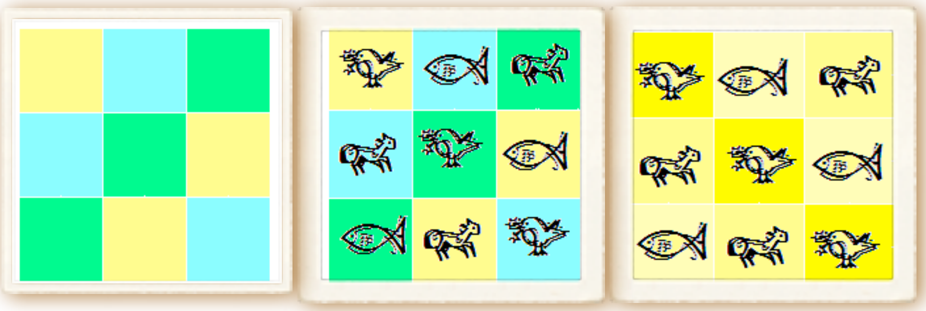
Je to řada různých symbolů nebo čísel, které jsou umístěné do jednotlivých polí čtverce tak, že každý symbol nebo číslo se vyskytuje právě jednou v každém řádku a v každém sloupci. Počet symbolů nebo čísel je shodný se stupněm latinského čtverce. Stupeň latinského čtverce je určený počtem řádků nebo sloupců [5].



Obr. 24 Příklad latinského čtverce

2.2.4.4 Magické čtverce řecko-latinské

Je to kombinace dvou různých latinských čtverců stejného stupně a to takovým způsobem, že se každý symbol jednoho čtverce kombinuje s každým symbolem druhého [5].



Obr. 25 Příklad magického čtverce řecko-latinského [5]

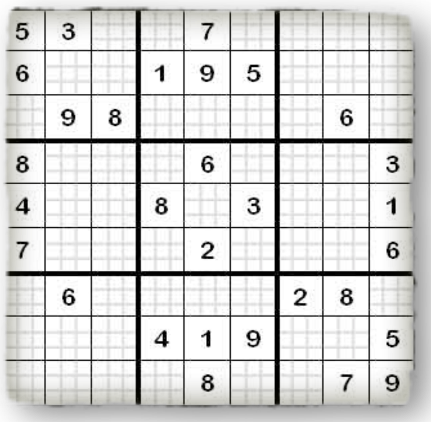
2.2.4.5 Magické desky

Na konci dvacátého století studoval aritmetické magické čtverce Don Richi a zjistil, že pro stejnou konstantu magického čtverce je možné nalézt nekonečně mnoho variant. Pokud jsou tyto varianty tvořené ne jenom z přirozených čísel, ale i z čísel celých, racionálních, zlomků apod. Zjistil také, že je možné vytvořit magické čtverce, kde se jednotlivá čísla v řádcích nebo sloupcích navzájem nesčítají, ale násobí [5].

Obr. 26 Příklad magické desky [5]

2.2.4.6 Sudoku

Sudoku je moderní hra založena na matematických výpočtech. Klasické sudoku je tvořeno devíti řadami a devíti sloupci, které jsou ještě rozděleny do devíti polí třetího stupně. V každém poli jsou umístěná záchytná čísla, která by nás měla navést k řešení. Zbývá doplnit číslice od jedné do devíti tak, aby byla splněna jediná podmínka. Nesmí se opakovat žádná číslice v řádku ani sloupci. Základní vlastností klasického sudoku je, že součet všech čísel v řádku nebo sloupci dává konstantu 45, ovšem v diagonále ne [5].



Obr. 27 Příklad sudoku [5]

2.2.5 Konstrukce magických čtverců

Existuje řada způsobů, jak sestrojit magické čtverce. Ty nejjednodušší se zakládají na sledování určitých konfigurací nebo formulí, které vytvářejí pravidelné vzorce. Kromě toho je možno přidat čtverci další vlastnosti, které pak vytvářejí čtverce bi-magické, tri-magické, atd. Podobně mohou být budovány kruhy, mnohoúhelníky a magické kostky.

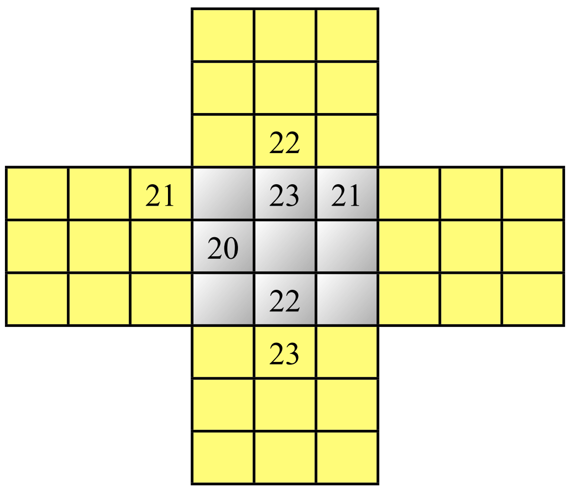
Neexistuje obecná metoda pro konstrukci magických čtverců libovolného typu a řádu, je nezbytné rozlišovat mezi magickými čtverci lichého řádu, magickými čtverci násobků čtvrtého řádu a magickými čtverci sudého řádu.

2.2.5.1 Magické čtverce lichého řádu

Magické čtverce lichého řádu mohou být konstruovány metodou, kterou publikoval v roce 1691 Simon de la Loubere. Tato metoda je rovněž nazývána siamskou metodou, protože Simon de la Loubere byl velvyslancem Ludvíka XIV v Siamu [6].

Příklad, který uvádím, je pro magický čtverec třetího řádu pro svou jednoduchost, ačkoliv by mohl být uveden magický čtverec jakéhokoliv lichého stupně.

Začíná se umístěním prvního čísla řady po sobě jdoucích čísel do jakéhokoliv středového políčka obvodu magického čtverce. Pokračuje se umístěním následujícího čísla vždy doprava po diagonále směrem nahoru, až do té doby, než se narazí na již obsazené políčko. Tehdy se sestoupí o jednu pozici níž a pokračuje se dál. Až se dojde k pravé straně magického čtverce, aby následující číslo nebylo mimo magický čtverec, přejde se na levou stranu do horního řádku a pokračuje se dál. Obdobně, až se dojde k horní straně magického čtverce, aby následující číslo nebylo mimo magický čtverec, přejde se do spodního řádku sousedního pravého sloupce magického čtverce a pokračuje se dál, až do vyplnění celého magického čtverce [6].



Obr. 28 Znázornění siamské metody

Nakonec se obdrží následující magický čtverec.

28	23	21
20	27	25
24	22	26

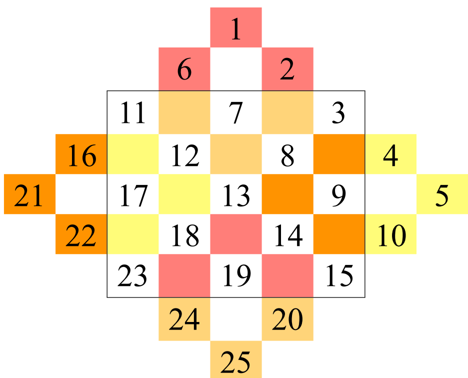
Obr. 29 Výsledný magický čtverec

Jako příklad uvádím magický čtverec sedmého řádu vytvořený touto metodou.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	43	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	42	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Obr. 30 Magický čtverec sedmého řádu vytvořený siamskou metodou

Další metoda, kterou se dají konstruovat magické čtverce lichého řádu, se nazývá metoda teras [1] a platí pouze pro skupinu magických čtverců, které jsou tvořené čísly 1 až n^2 . Vytvoří se pomocný diamant, do kterého se postupně vkládají čísla. Jako první se umístí jednička do horního rohu diamantu. Následující po sobě jdoucí čísla se umístí směrem dolů v naznačeném úhlu. Magickým čtvercem bude čtverec vepsaný v pomocném diamantu.



Obr. 31 Znázornění metody tvorby magických čtverců pomocí metody teras

Následně se přemístí čísla z rohů pomocného diamantu do volných polí, které jsou na opačné straně magického čtverce. Tímto vznikne výsledný magický čtverec lichého řádu.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Obr. 32 Výsledný magický čtverec

2.2.5.2 Magické čtverce násobků čtvrtého řádu

Při konstrukci magického čtverce násobku čtvrtého řádu se nejprve uspořádají čísla vzestupně do magického čtverce. Tedy tak, aby součet čísel na diagonálách byl roven konstantě magického čtverce. Zachovávaje centrální submatici řádu $\frac{n}{2}$ a čtyři rohové submatice řádu $\frac{n}{4}$, se otočí ostatní čísla o 180° vzhledem ke středu čtverce, neboli uspořádají se sestupně (v obou případech se dostane stejný výsledek) [1].

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

→

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Obr. 33 Znázornění způsobu konstrukce magického čtverce osmého řádu

Zevšeobecněním tohoto způsobu můžeme skládat různé magické čtverce. Začíná se vždy ze stejného výchozího uspořádání a zvolí se určitá seskupení políček, která jsou symetrická vzhledem ke středu čtverce, a ta zůstanou beze změny. Ostatní políčka se symetricky prohodí.

1	2	3	4	5	6	7	8		1	63	62	4	5	59	58	8
9	10	11	12	13	14	15	16		56	10	11	53	52	14	15	49
17	18	19	20	21	22	23	24		48	18	19	45	44	22	23	41
25	26	27	28	29	30	31	32	→	25	39	38	28	29	35	34	32
33	34	35	36	37	38	39	40		33	31	30	36	37	27	26	40
41	42	43	44	45	46	47	48		24	42	43	21	20	46	47	17
49	50	51	52	53	54	55	56		16	50	51	13	12	54	55	9
57	58	59	60	61	62	63	64		57	7	6	60	61	3	2	64

Obr. 34 Znázornění další varianty tvorby magického čtverce osmého řádu

2.2.5.3 Magické čtverce násobků čtvrtého řádu plus dva

Pro tvorbu magických čtverců těchto řádů lze použít metodu LUX [7]. Tuto metodu vysvětlím na příkladu konstrukce magického čtverce desátého řádu.

V prvním kroku se rozdělí magický čtverec do subčtverců 2×2 a každý z nich se označí následujícím způsobem. Subčtverce z prvních $k+1$ řad, kde k je celé číslo podílu řádu magického čtverce děleno čtyřmi, se označí písmenem L (v tomto případě se jedná o první tři řady). Subčtverce následující řady se označí písmenem U. Zbývající řady se označí písmenem X. Tato označení budou později indikovat způsob vyplnění subčtverců 2×2. V druhém kroku se vymění centrální subčtverec U se subčtvercem L, které je přímo nad ním.

	L		L		L		L		L			L		L		L		L		L
	L		L		L		L		L			L		L		L		L		L
	L		L		L		L		L	→		L		L		U		L		L
	U		U		U		U		U			U		U		L		U		U
	X		X		X		X		X			X		X		X		X		X

Obr. 35 Znázornění konstrukce magických čtverců metodou LUX (1)

V následujícím kroku se subčtverce označí čísly podle metody de Loubera. Tyto určují pořadí, ve kterém se budou jednotlivé subčtverce vyplňovat. Nyní, i-tému subčtverci patří čísla *4i-3*, *4i-2*, *4i-1* a *4i*. Například subčtverci 10 patří číla 37, 38, 39 a 40. Chybí už jen upořádat čísla v rámci subčtverce a k tomu slouží jednotlivá označení LUX.

Subčtverec typu L			Subčtverec typu U			Subčtverec typy X	
4.číslo	1. číslo		1.číslo	4.číslo		1.číslo	4.číslo
2.číslo	3.číslo		2.číslo	3.číslo		3.číslo	2.číslo

17		24		1		8		15			68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
	L		L		L		L		L		66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
23		5		7		14		16			92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
	L		L		L		L		L		90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
4		6		13		20		22		→	16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
	L		L		U		L		L		14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
10		12		19		21		3			37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
	U		U		L		U		U		38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
11		18		25		2		9			41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
	X		X		X		X		X		43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

Obr. 36 Znázornění konstrukce magických čtverců metodou LUX (2)

2.3 Aktuální využití magických čtverců a křížových součtů

Mimo využití magických čtverců a křížových součtů ve školním prostředí a ve vzdělávání, jsou aktuálně magické čtverce a křížové součty používány i v jiných oblastech jako je psychologie nebo v geriatrii.

V rámci psychologie se magické čtverce a křížové součty používají v realizaci testů inteligence k měření rozdílných oblastí jako je inteligence logicko-matematická ze zcela evidentních důvodů a k měření schopností logicko-deduktivního uvažování.

V oblasti medicíny, v geriatrii se velice často používají magické čtverce a křížové součty a obzvláště pak sudoku. Velké množství studií a prací realizovaných v této linii indikuje, a to především v ranných stádiích onemocnění jako je Alzheimer a senilní demence, mentální hry jako je osmisměrka, sudoku, hádanky, včetně hry binga. Dle Williama Reichmana, generálního ředitele Baycrestu v Torontu, bychom měli zařadit hry rozvíjející inteligenci jako léčebný prostředek k léčbě pacientů s Alzheimrem nebo senilní demencí, abychom zadrželi rychlost s jakou se rozvíjí tyto nemoci, a použít je jako udržovací terapii [8].

A jestliže je tomu tak, že realizace těchto matematických her pomáhá k zadržení vývoje nemocí a že pomáhají k udržení schopností u těch, kteří je ztrácejí, nepomohli by také tyto matematické hry k rozšíření stejných schopností u těch, kteří je rozvíjejí?

2.4 Didaktika magických čtverců a křížových součtů

Uvedení různých metod a aktivit do hodin jakéhokoliv předmětu nebo oblasti vzdělávání s sebou přináší výhody velice přínosné jak pro studenty tak i pro profesory, kteří se spolu podílí na práci učení [9].

Prvotně pomáhá studentům vyvléct se z rutiny, kterou předpokládá způsob nejvíce tradičního stylu práce, aktivity jsou opakující se a proto nudné. Také dá studentům na vyšší úrovni možnost postavit se čelem k novým výzvám, které jsou více zábavné a stimulující. Studentům na nižší úrovni dá možnost pracovat na stejném konceptu z jiných úhlů pohledu, pomáhaje tak ke zevšeobecnění konceptů, které se jinou formou naučí způsobem méně reflexivním.

Pomáhat studentům zevšeobecňovat koncepty, protože jestli má stejný koncept různé aplikace, také bude nezbytné rozumět mu, pracovat s ním a používat ho různými způsoby. A navíc jestli nějaký student má specifické obtíže v rámci nějaké lekce, nahlížet na ni z jiného úhlu pohledu je mnohokrát dostačující k jejímu pochopení.

Příkladem zavádění rozličných metod v různých předmětech je používání interaktivních map v zeměpise, sledování filmů vztahujících se k určitým specifickým částem dějepisu, realizace divadelních představení v literatuře, nebo rovněž v jazykových lekcích, kde patří mezi velice zajímavé možnosti aktivity jako křížovka, osmisměrka, atd [9].

V rámci předmětu matematika existuje také velké množství příkladů, které se realizují v hodinách, jako například:

- využití kuličkového počítadla jako metody základních počtů
- řešení příkladů ve skupinách nebo soutěže
- ruční výroba pomůcek nebo prezentací, které pomáhají pochopit počty s desetinnými čísly
- použití programů jako je Microsoft Excel nebo jiných výpočetních programů při studiu statistiky v rámci realizace průzkumu vytvořeného samotnými studenty na témata, která se jim zdají zajímavá

2.4.1 Kompetence

Na úvod uvádím, jaké schopnosti a dovednosti rozvíjí matematika jako studijní obor, abych poté vysvětlil, proč si myslím, že je vhodné využití magických čtverců a křížových součtů ve všeobecném vzdělávacím procesu studentů.

Společně s ostatními předměty náležejícími do obecného vzdělání se matematika podílí na formování osobnosti žáka, jeho morálních a volních vlastností. Rozvíjí logické a tvořivé myšlení žáků, vede k vytvoření aktivního a samostatného přístupu k práci, k předvídavosti, přesnosti a snaze po úplnosti. Matematika je předmětem všeobecně vzdělávacím a současně předmětem průpravným pro odborné vzdělání. Vede k výchově přemýšlivého člověka, který bude umět používat matematiku v různých životních situacích (v odborné složce vzdělávání, v dalším studiu, v osobním životě, v budoucím zaměstnání, ve volném čase apod.). Studium matematiky vybavuje žáka schopností orientovat se v přírodních, technických a ekonomických jevech, vnímat souvislosti mezi nimi a řešit úlohy z praxe. Matematika umožňuje přechod od kvalitativního ke kvantitativnímu pozorování buď přímo udáním číselné hodnoty, nebo určením vztahu vyjadřujícího závislost mezi veličinami. Matematika se významně podílí na rozvoji intelektuálních schopností žáků, především v jejich logickém myšlení, vytváření úsudků a schopnosti abstrakce.

Učivo je rozvrženo pro vyučování v tradiční tematické celky: operace s čísly a výrazy, funkce a její průběh, řešení rovnic a nerovnic, planimetrie, stereometrie, analytická geometrie v rovině, posloupnosti a jejich využití, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika v praktických úlohách. Rozšiřující tematické celky jako jsou základní poznatky o výrocích a množinách, analytická geometrie kvadratických útvarů mohou být přidány v závislosti na specifických potřebách studentů. Hloubka probíraného učiva je variabilní, ovlivňují ji zejména vstupní vědomosti a dovednosti, též jejich intelektuální úroveň. Vyučující může provést podle svého uvážení úpravy obsahu, rozsahu učiva s přihlédnutím k úrovni konkrétních studentů. Změny však nesmí narušit logickou návaznost učiva.

V afektivní oblasti směřuje matematické vzdělávání k tomu, aby žáci získali pozitivní postoj k matematice a zájem o ni a její aplikace, motivaci k celoživotnímu vzdělávání, důvěru ve vlastní schopnosti a akceptovali matematiku jako součást lidské kultury.

Pro zvýšení motivace studentů k matematice je vhodné střídat a kombinovat tradiční i moderní vyučovací metody: výklad, samostatná práce (individuální procvičování nových dovedností), skupinové vyučování (řešení obtížnějších a časově náročných úloh), tvorba projektů, shrnutí a opakování učiva po každém tematickém celku, aktualizace učiva, práce s PC (grafické znázorňování průběhu funkce, geometrické útvary, řešení soustav rovnic), hry (zařazení zajímavých a netypických úloh, rébusů), studentské soutěže, diskuse (zhodnocení možností, přístupů, metod řešení, výsledků atd.), simulace (praktické slovní úlohy s možností využití v praktickém životě), projekce a modelace (využít projekční techniky v úlohách grafického charakteru, které jsou časově náročné, využít modelů pro znázornění situací náročných pro představivost – např. funkce, planimetrie, stereometrie).

Mezi kompetence [10], které získají studenti studiem matematiky, se řadí:

I. kompetence k učení:

- studenti získávají pozitivní vztah k učení a vzdělávání
- studenti využívají k učení různé zdroje informací

II. kompetence komunikativní:

- studenti formulují své myšlenky srozumitelně, v mluveném i písemném projevu používají přiměřenou odbornou terminologií

III. kompetence personální a sociální:

- studenti posilují pozitivní rysy osobnosti (pracovitost, přesnost, důslednost, sebekontrola a odpovědnost, vytrvalost a schopnost překonávat překážky)
- studenti nachází vhodnou míru sebevědomí, odpovědnosti
- studenti jsou schopni vlastního úsudku, přijímají hodnocení výsledků své práce, radu i kritiku, jsou schopni pracovat v týmu, podílí se na realizaci společných činností

IV. občanské kompetence:

- studenti jednají odpovědně, samostatně a iniciativně nejen ve vlastním zájmu, ale i ve veřejném zájmu

V. kompetence k řešení problémů:

- studenti porozumí zadání úkolu, určí jádro problému, navrhnou způsob řešení, zdůvodní jej, vyhodnotí a ověří správnost zvoleného postupu a dosažené výsledky
- studenti uplatňují různé metody myšlení při řešení běžných pracovních úkolů a vhodně zvolí prostředky k jejich naplnění
- studenti spolupracují při řešení problémů s jinými lidmi (týmové řešení), umí prosadit a zdůvodnit vlastní názor a zároveň jsou schopni přijímat kompromisy

VI. matematické kompetence:

- studenti čtou s porozuměním matematický text, užívají správné matematické terminologie a symboliky, přesně se vyjadřují
- studenti rozumí obsahu potřebných matematických pojmů a vztahů mezi nimi, správně používají a převádějí běžné jednotky a užijí je při řešení úloh a problémů
- studenti rozvinou své abstraktní a logické myšlení, prostorovou představivost
- studenti efektivně aplikují matematické postupy při řešení různých praktických úkolů v běžných situacích
- studenti provádí v praktických úlohách jednoduché výpočty z paměti, náročnější za použití kalkulátoru
- studenti používají běžné rýsovací a jiné matematické pomůcky

- studenti analyzují zadanou úlohu, postihnou v ní matematický problém, vytvoří algebraický nebo geometrický model situace a úlohu vyřeší
- studenti nachází vztahy mezi jevy a předměty při řešení praktických úkolů, umí je vymezit, popsat a správně využít pro dané řešení
- studenti provádí reálný odhad a kontrolu správnosti výsledků řešení dané úlohy
- studenti formulují matematické myšlenky slovně a písemně
- studenti získávají informace z různých zdrojů (grafů, diagramů, tabulek, odborné literatury internetu), třídí je, analyzují, při řešení problému postupují přehledně a systematicky
- studenti vyjádří vztah mezi proměnnými, správně je interpretují a prakticky používají, jsou schopni je zachytit tabulkou, grafem, případně rovnicí
- studenti aplikují znalosti o základních tvarech předmětů a jejich vzájemné poloze v rovině i prostoru

Pokud zavedeme do výuky matematiky studium magických čtverců a křížových součtů, ty mohou u žáků rozvíjet následující kompetence. Mezi specifické kompetence, které studenti mohou získat studiem magických čtverců a křížových součtů patří:

1. rozvinutí pozitivního vztahu k matematice
2. srozumitelná formulace vlastních myšlenek srozumitelně
3. použití přiměřené odborné terminologie v mluveném i písemném projevu
4. dovednost řešit, analyzovat a vyhodnotit matematické hry
5. při řešení problému postupovat přehledně a systematicky
6. provádět kontrolu správnosti výsledků řešení dané úlohy
7. dovednost kombinatorického myšlení
8. dovednost analogického myšlení
9. vyjadřovat vztah mezi proměnnými, správně je interpretovat a být schopen je zachytit tabulkou, rovnicí
10. rozvinout své abstraktní a logické myšlení,
11. dovednost vypracovat matematické hry pro nižší stupeň
12. dovednost matematického uvažování

13. provádět jednoduché výpočty z paměti, náročnější písemně nebo pomocí kalkulátoru
14. dovednost používat strategie rozboru problémů a schopnost navrhnout řešení a vyřešit matematické hry jak ve školním tak i mimoškolním prostředí
15. dovednost kritického myšlení
16. rozpoznat, interpretovat a prezentovat různé situace a problémy.

Mezi mezioborové kompetence, které studenti mohou získat studiem magických čtverců a křížových součtů patří:

17. týmová práce, podílí se na realizaci společných činností
18. samostatné učení a práce
19. posilování pozitivních rysů osobnosti (pracovitost, přesnost, důslednost, sebekontrola a odpovědnost, vytrvalost a schopnost překonávat překážky)
20. zvyšování vhodné míry sebevědomí, odpovědnosti
21. schopnost vlastního úsudku, přijímání hodnocení výsledků své práce, rady i kritiky
22. vyhledávání, zpracování a vyhodnocení informací v globální společnosti
23. využívání ICT (informační a komunikační technologie)
24. komunikační dovednosti ústní a písemné
25. vystupování na veřejnosti, veřejná diskuze, prezentace a obhajoba svých návrhů
26. schopnost analýzy a syntézy
27. schopnost kritické analýzy
28. umět navrhnout matematické hry, které se vztahují na jiný okruh vzdělávání

Výčet kompetencí, které se mohou u studentů studiem magických čtverců a křížových součtů je velice rozsáhlý. Tedy přínos zahrnutí této oblasti do matematického vzdělávání žáků a studentů je tak značný, že není možné jej zanedbávat.

2.4.2 Příklady využití magických čtverců ve vzdělávacím procesu

Nyní se zaměřím na možnosti vyuřití magických čtverců a křížových součtů u žáků v závislosti na jejich věku a v závislosti na probíraných tematických celcích.

Název: Desetinný magický čtverec

Věk: 12

Materiál:

0,6	0,5	2,3	1,6	1,4
2,1	1,9	1,2	1	0,3
1,5	0,8	0,1	2,4	1,7
0,4	2,2	2	1,3	0,7
1,8	1,1	0,9	0,2	2,5

Instrukce: Magický čtverec má tu vlastnost, že součet čísel v každém jeho řádku, sloupci i úhlopříčkách je stejný. Při přepisování se však někde stala chyba. Pomoz nám ho opravit. Najdi, která dvě čísla si vyměnila svá místa.

Rozvíjené kompetence: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14,15, 18, 19, 20, 21, 27

Název: Magický čtverec se zlomky

Věk: 13

Materiál:

	$\frac{11}{12}$	
	1	$\frac{17}{21}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{31}{21}$	

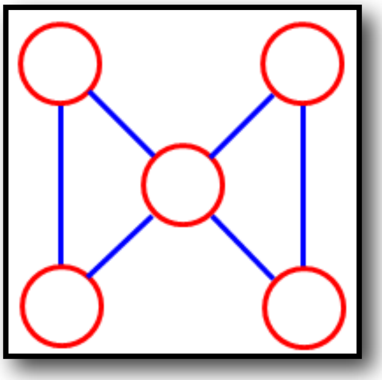
Instrukce: Doplň prázdná pole tak, aby byl daný čtverec magický.

Rozvíjené kompetence: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14,15, 18, 19, 20, 21, 27

Název: Výraz

Věk: 14

Materiál:



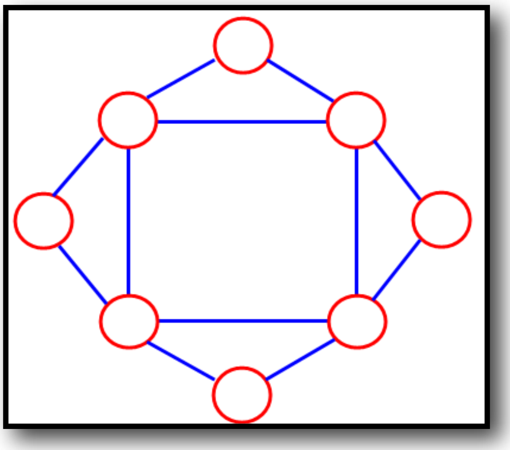
Instrukce: Doplň čísla od 1 do 5 tak, aby součty v trojúhelnících si byly rovny. Sestav výraz pro středové číslo a pak jej vyčísli.

Rozvíjené kompetence: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 26, 27

Název: Rovnice

Věk: 15

Materiál:



Instrukce: Doplň čísla od 1 do 8 tak, aby součty v trojúhelnících i ve čtverci si byly rovny. Převeď problém do soustavy rovnic a vyřeš je.

Rozvíjené kompetence: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 26, 27

2.5 Didaktické prostředky

Pojem didaktické prostředky jako kategorie didaktická zahrnuje všechny materiální předměty, které zajišťují, podmiňují a zefektivňují průběh vyučovacího procesu. Jde o takové předměty, které v úzké souvislosti s vyučovací metodou a organizační formou výuky napomáhají dosažení výchovně vzdělávacích cílů [11].

Existuje obrovské množství didaktických prostředků. Pro přehlednost se didaktické prostředky dělí do pěti hlavních skupin [9]:

1. Učební pomůcky, které se dále dělí na originální předměty (např. minerály, rostliny, přístroje), znázornění předmětů (např. školní obrazy, mapy, zvukové záznamy), textové pomůcky (např. učebnice, pracovní sešity, encyklopedie), pořady prezentované didaktickou technikou (např. televizní pořady, vyučovací stroje, počítače) a speciální pomůcky (např. pomůcky pro tělesnou výchovu).
2. Technické výukové prostředky, které se dále dělí na auditivní techniku (např. školní rozhlas, přehrávače CD, MP3 přehrávače), audiovizuální techniku (např. filmové projektory, DVD přehrávače, televizní technika) a techniku řídící a hodnotící (např. výukové počítačové systémy, osobní počítač, trenažér).
3. Organizační a reprografická technika, jako jsou kopírovací a rozmnožovací stroje, fotolaboratoře, videostudia a rozhlasová studia, nebo počítače a počítačové sítě.
4. Výukové prostory a jejich vybavení, kam se řadí učebny se standardním vybavením, učebny se zařízením pro reprodukci audiovizuálních pomůcek, odborné učebny, počítačové učebny, laboratoře, dílny, školní pozemky, tělocvičny nebo hudební a dramatické sály.
5. Vybavení učitele a žáka mezi které náleží psací potřeby, kreslící a rýsovací potřeby, kalkulátory, přenosné počítače, notebooky, učební úbor nebo pracovní oděv.

Funkce materiálních didaktických prostředků vyplývá ze skutečnosti, že člověk získává 80% informací zrakem, 12% informací sluchem, 5% informací hmatem a 3% ostatními smysly [9]. Tato skutečnost není v tradiční škole naplňována a zapojení smyslů je v jiném poměru: 12% informací přijímáno zrakem, 80% sluchem, 5% hmatem a 3% ostatními smysly. Aby došlo ke změně těchto poměrů, je nutné využití co největšího rozsahu didaktických prostředků.

Dále se budu podrobněji zabývat třemi typy didaktických pomůcek, které jsem uplatnil při tvorbě své diplomové práce, a to pracovními listy, počítači a interaktivní tabulí.

2.5.1 Pracovní listy

Didaktické prostředky v papírové podobě, jako jsou pracovní listy, jsou používány již dlouhou dobu. Ačkoliv nyní, a zvláště poté, co se pracuje i s jinými interaktivními prostředky, jako je počítač nebo interaktivní tabule, by mohly vypadat zastarale, byly obrovskou pomocí pro učitele a žáky, kteří museli trávit spoustu času přepisováním cvičení na tabuli, respektive do svých sešitů. Práce, která v mnoha případech zabírala příliš velkou část z celkového vymezeného času vyučovací hodiny.

Používání těchto materiálů se rozšířilo diky hromadnému zavedení kopírek do školního prostředí. Kopírky nabízejí možnost připravit materiál pro všechny žáky třídy z pouhého jednoho originálu vytvořeného učitelem.

Inkorporace pracovních listů do vyučovacích hodin dovoluje začlenění nových aktivit, odlišných od těch, které jsou uvedené v učebnicích a učitelem tradičně vybírané, ačkoliv vypadalo nemožně jejich další rozšíření.

Učiteli dala inkorporace těchto materiálů do vyučovacích hodin možnost velice snadně si ukládat výukový materiál, aby jej mohl využívat následující roky, vylepšovat jej a realizovat nezbytné změny v rozumném čase. A to díky rozšíření textových editorů sloužících k jejich vypracování.

Další očividnou výhodou jejich inkorporace do vzdělávacího prostředí je snadná manipulace, kterou oceňují jak žáci, tak učitelé. Jedná se zejména o lehkou přenosnost pracovních listů ze školy domů, které jsou následně používány k vypracování domácích úkolů u žáků nebo k opravě prací žáků u učitelů. Používání pracovních sešitů jakkoliv vypadá velmi podobně je přesto poněkud nepohodlné pro jejich transport.

Materiály vytvořené takovýmto způsobem mohou být navržené pro práci na rozvoji různých oblastí nebo specifických schopností, čímž je také v takovýchto případech pro učitele velmi lehké detekovat některé žákovy obtíže.

Není se čemu divit, že ačkoliv se nacházíme v nové generaci tříd, kde je přítomen počítač nebo interaktivní tabule, tento didaktický materiál je stále aktuální. Má široké pole využití. Nemůže být nahrazen těmito modernějšími prostředky, protože naučení a procvičování psaní je a bude stále velmi důležité pro vývoj našich žáků a jejich včlenění do sociálního a pracovního života vybavené nezbytnými schopnostmi.

Rovněž je důležité komentovat realitu našich škol. Aktuálně ne všechny školy jsou vybaveny dostatečným počtem počítačů nebo interaktivními tabulemi tak, by bylo možno počítat s nimi jako se standardním vybavením. Inkorporace nových technologií je postupný proces závislý na finančních prostředcích jednotlivých škol.

2.5.2 Počítač

Didaktický materiál na počítači by měl splňovat následující charakteristiky:

- Rozhraní didaktických materiálů by mělo být pro žáky intuitivního charakteru, jejich použití by mělo být velice snadné, aby nezasahovalo do procesu učení matematického obsahu a neměly by dát prostor k tomu, aby se žák rozptyloval anebo dělal jiné aktivity, které nesouvisí s cílem učení, který byl definován učitelem.
- Jsou kontrolovatelné učitelem v přiměřeném čase.
- Jsou jednoduché pro ovládání žákem, neměli-by ubírat čas na jejich naučení.
- Jsou přizpůsobitelné pro didaktický a metodologický záměr učitele, který lépe vyhovuje žákům, s kterými hodlá pracovat.

Výhody, které přináší použití didaktických materiálů na počítači:

- Aktivní, žák je sám protagonistou v procesu učení.
- Kreativní, žáci přijímají rozhodnutí během procesu učení.
- Kooperativní, žáci zpracovávají koncepty a postupy ve dvojicích nebo malých skupinách.

- Individuální, každý žák může postupovat svým tempem a udržovat vlastní pozornost, individuální přístup se tak stává realitou.

Didaktický materiál na počítači žákovi dovoluje:

- Zkoumat vlastnosti.
- Osvojit si pojmy a propojovat je.
- Objevovat hypotézy a zkoušet jejich platnost bez toho, aby musel čekat na korekci učitelem.
- Stanovit vlastnosti a zákony.
- Přemýšlet nad problémy a řešit je.

2.5.3 Interaktivní tabule

Interaktivní tabule jsou novinkou jednadvacátého století a patří mezi nejoblíbenější školní vybavení. Interaktivní tabule jsou realizací nápadu za pomoci nejnovějších technologií. Je jen otázkou času, kdy interaktivní tabule nahradí ty klasické křídové a magnetické [12].

Interaktivní tabule je velká interaktivní plocha, ke které je připojen počítač a datový projektor, případně jde o velkoplošnou obrazovku s dotykových senzorem. Projektor promítá obraz z počítače na povrch tabule a přes ni můžeme prstem, speciálními fixy, nebo dalšími nástroji ovládat počítač nebo pracovat přímo s interaktivní tabulí. Tabule je většinou připevněna přímo na stěnu, nebo může být na stojánku. Interaktivní tabule je v podstatě druh dotykového displeje.

Používání interaktivní tabule zahrnuje:

- interakci s jakýmkoli software, který běží na připojeném počítači, včetně internetového prohlížeče nebo i software chráněného copyrightem
- použití software pro ukládání poznámek napsaných na plochu interaktivní tabule
- ovládání počítače, označování a s použitím speciálního software dokonce i k rozpoznání psaného textu

Interaktivní tabule může být připojena k počítači buď přes rozhraní jako jsou USB a sériový port nebo bezdrátově přes Bluetooth. Obvykle se ovladač zařízení instaluje do připojeného počítače. Ovladač tabule se zavádí po startu počítače automaticky a interaktivní tabule začne s počítačem komunikovat.

V současnosti je šest základních druhů interaktivních tabulí, které se dělí podle druhu snímání pohybu na: snímající elektrický odpor, elektromagnetické a kapacitní, infračervené, laserové, ultrazvukové a kamerové.

Interaktivní tabule jsou dostupné ve dvou podobách: s přední a zadní projekcí obrazu [13]. U interaktivní tabule s přední projekcí je datový projektor umístěn před tabulí. U interaktivní tabule se zadní projekcí je datový projektor umístěn za tabulí, a proto odpadá problém vrženého stínu.

Pro práci na interaktivní tabuli slouží interaktivní učebnice. Interaktivní učebnice umožňují použití interaktivních materiálů (obrázky, audio, video, animace apod.) přímo ve výuce. V České republice první systém interaktivních učebnic vyvinulo Nakladatelství Fraus. Dalšími producenty interaktivních učebnic v České republice jsou například Nakladatelství Nová škola, LANGMaste, Tobiáš a další.

Velmi důležité je umístění interaktivních tabulí ve škole tak, aby mohla být využita jejich funkčnost ve více předmětech a více učiteli. Rozhodujícím prvkem úspěchu je příprava učitelů a jejich neustálá podpora včetně pokročilého dalšího vzdělávání. Přestože existuje velké množství materiálů online, pro jednotlivé státy vznikají domácí úložiště. Rozhodující roli hraje dosud stále podceňovaná role učitele misionáře, která je inspirací pro ostatní učitele.

Výhody používání interaktivní tabule ve výuce pro učitele:

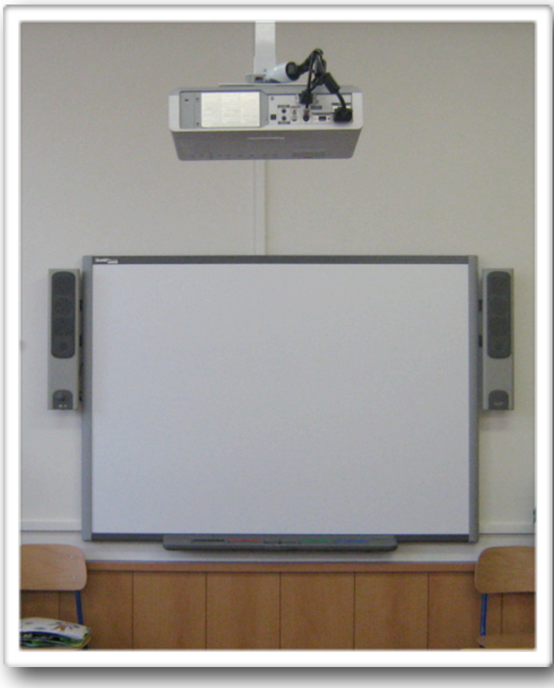
- Flexibilní a adaptabilní pro různé učební strategie, posiluje různé způsoby výuky s celou třídou, ale slouží i jako vhodná kombinace individuální a skupinové práce se studenty.

- Interaktivní tabule je ideálním nástrojem pro učitele s konstruktivistickým přístupem k učení, jelikož je to zařízení, které podporuje kritické myšlení u žáků. Kreativní použití interaktivní tabule je omezeno pouze představivostí učitelů a žáků.
- Interaktivní tabule podporuje flexibilitu a spontánnost učitelů, protože mohou dělat poznámky přímo do aktuálně používané prezentace pomocí různých barevných speciálních fixů.
- Interaktivní tabule je vynikajícím nástrojem pro videokonferenci jako podpora kooperativního učení prostřednictvím komunikačních nástrojů.
- Dostupnost atraktivní ICT technologie a snadno se používá.
- Interaktivní tabule motivuje učitele k využívání nových výukových strategií a intenzivnějšího využívání informačních a komunikačních technologií, podporuje profesní rozvoj.
- Učitel stojí před jednoduchou technologií, zejména ve srovnání s využitím počítačů pro celou třídu.
- Interaktivní tabule podporuje zájem učitelů o inovaci a profesní rozvoj.
- Učitel se může více soustředit na sledování svých studentů a jejich řešení úkolů než při pohledu na obrazovku počítače.
- Učitel si může připravit atraktivnější hodiny a navíc si je může zdokumentovat. Materiál jednou vytvořený, si může každý rok zdokonalovat.
- Interaktivní tabule nabízí učitelům možnost ukládání a tisk proběhlé hodiny, což mu usnadní zpětné zhodnocení proběhlé hodiny.
- Obecně platí, že software interaktivní tabule poskytuje přístup k grafům a diagramům, což umožňuje snadnější a efektivnější přípravu hodin, které lze uložit a znovu použít.

Přínos používání interaktivní tabule ve výuce pro studenty:

- Zvýšení motivace a zájmu studentů, protože mají možnost vychutnat si hodinu, která umožňuje společnou práci, diskusi a prezentaci prací ve vizuální podobě svým vrstevníkům, což podporuje nárůst sebevědomí a rozvoj sociálních dovedností.
- Použití interaktivní tabule jim usnadňuje pochopení látky, a to zejména u složitějších témat, což je dáno možností posílit vysvětlení látky pomocí videa, simulací a obrázků.

- Studenti mohou znovu prostudovat hodinu nebo její vybranou část, pokud jim ji učitel poskytne například emailem.
- Žáci se zrakovým postižením mají prospěch z možnosti zvětšení velikosti textu a obrázků.
- Žáci se sluchovým postižením budou mít prospěch z možnosti využití vizuálních prezentací nebo současného použití znakového jazyka.
- Žáci s kinestetickými poruchami ocení možnost tisku průběhu hodiny.
- Žáci s jinými typy speciálních vzdělávacích potřeb, jako jsou studenti s vážnými poruchami chování a pozornosti, mohou dojít ke zlepšení tím, že interaktivní tabule zvyšuje kvantitu a rozmanitost stimulů.



Obr. 37 Interaktivní tabule

3 Praktická část

3.1 Průzkum učebnic

Při výuce matematiky si učitel volí učebnici, kterou bude při své pedagogické činnosti využívat, ze seznamu učebnic. Seznam učebnic určených k využití při vzdělávání žáků ve školách poskytujících základní vzdělávání je zveřejňován dvakrát v roce ve Věstníku Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy. Zároveň jsou tyto seznamy zveřejněny na internetové stránce Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy www.msmt.cz.

Učebnice je zařazena do seznamu učebnic udělením schvalovací doložky ředitelem odboru Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, který odpovídá podle platného Organizačního řádu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy za obsah rámcového vzdělávacího programu, pro který je předložena učebnice určena.

V seznamu učebnic vydaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v říjnu 2010 je pro výuku matematiky pro druhý stupeň základního vzdělávání uvedeno devět sad učebnic [14]. Všechny řady učebnic sledují vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace dle rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Vzdělávací obsah je rozdělen na čtyři tematické okruhy: Číslo a proměnná; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a v prostoru a Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Každý tematický celek je konkretizován očekávanými výstupy a učivem. Magické čtverce a křížové součty nejsou součástí učiva těchto tematických celků. Tento prostý fakt ovšem neznamená, že by se v konkrétních příkladech nemohly nalézat úlohy s magickými čtverci a křížovými součty. Je zřejmé, že se jedná o úlohy do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky. Při jejich řešení je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by se měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání.

Podrobně jsem prozkoumal konkrétní příklady a úlohy níže uvedených sad učebnic:

1. Matematika pro 6. až 9. ročník ZŠ vydané nakladatelstvím Prometheus, jejichž autory je dvojice O. Odvárko a J. Kadleček.
2. Matematika Prima až Kvarta vydané nakladatelstvím Prometheus, jejichž autory jsou Herman, J.; Chrápavá, V.; Jančovičová, E.; Šimša, J.
3. Matematika pro 6. až 9. ročník ZŠ vydané nakladatelstvím FORTUNA, jejichž autory jsou Coufalová, J. a kolektiv.
4. Matematika pro 6. až 9. ročník ZŠ vydané nakladatelstvím SPN, jejichž autory jsou Trejbal J.; Jirotková D.; Sýkora V.

Tyto sady učebnic jsem si vybral záměrně pro jejich nejširší použití na základních školách v mém regionu. Bohužel musím konstatovat, že jsem se shledal pouze s příklady na jednoduchou kombinatoriku. Ty jsou svým založením nejblíže magickým čtvercům a křížovým součtům. Ovšem úlohy zaměřené přímo na magické čtverce nebo křížové součty jsem nenalezl. Až na jeden jediný příklad na sčítání a odčítání zlomků v učebnici Matematika pro 9. ročník ZŠ 1. díl vydané nakladatelstvím SPN, jejíž autorem je Trejbal J. [15]. Bohužel tato sada učebnic už není v seznamu učebnic vydaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v říjnu 2010 pro výuku matematiky pro druhý stupeň základního vzdělávání.

Jiná je situace v učebnicích matematiky pro první stupeň základního vzdělávání. Magické čtverce jsou konkrétní položkou učiva tematického celku Nestandardní aplikační úlohy a problémy v rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání [16]. Proto se žáci setkávají s úlohy na magické čtverce a křížové součty v páté třídě prvního stupně základního vzdělávání.

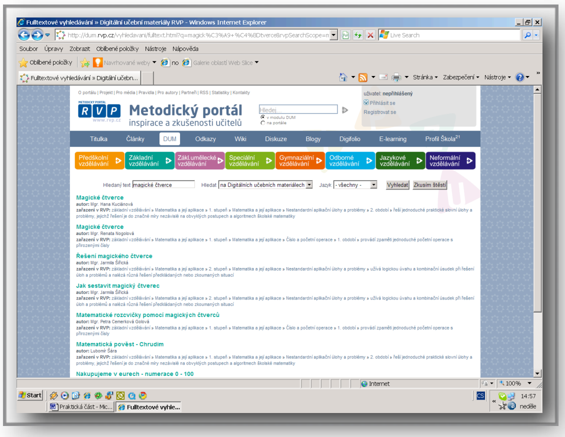
3.1.1 Digitální učební materiály

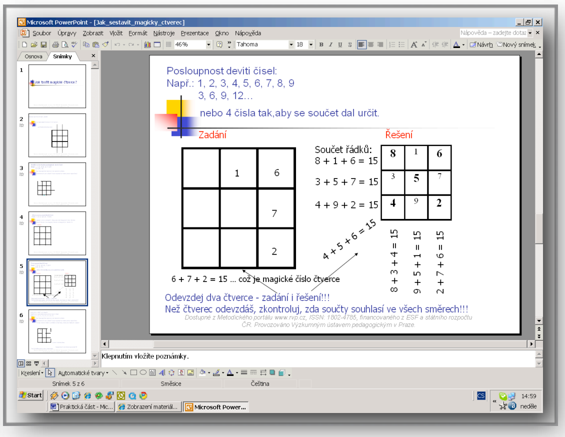
Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy nabízí digitální učební materiály na metodickém portálu www.rvp.cz projektu Metodika II, jehož realizátorem je Výzkumný ústav pedagogický v Praze a Národní ústav odborného vzdělávání.

Metodický portál www.rvp.cz vznikl, aby podporoval zavedení rámcových vzdělávacích programů ve školách a jako hlavní metodická podpora učitelů. Cílem je vytvoření prostoru, ve kterém si učitelé a školy navzájem předávají své zkušenosti, shromažďují příspěvky teoretické i praktické povahy.

Digitální učební materiály jsou dostupné v elektronické podobě, jsou využitelné přímo ve výuce bez dalších úprav. Nejčastěji se jedná o pracovní listy, prezentace, audio a video ukázky. Klíčovou vlastností všech digitálních učebních materiálů je jejich propojení s konkrétními očekávanými výstupy, které jsou jako povinné položky definované v rámcových vzdělávacích programech. Všechny materiály jsou publikovány pod licencí Creative Commons, což znamená, že se mohou stahovat, šířit a upravovat v případě, že je uveden autor, zachována licence a nebudou využívány ke komerčním účelům. Autorem digitálních učebních materiálů se může stát každý registrovaný uživatel. Autorovi je za publikovaný materiál stanovena odměna a vystavena Dohoda o provedení práce.

Mezi digitálními učebními materiály publikovanými na metodickém portálu www.rvp.cz se nachází 7 úloh na magické čtverce, většinou v podobě pracovního listu nebo prezentace. Dvě z nich jsou svou obtížností řazeny pro druhý stupeň základního vzdělávání, ostatní jsou pro první stupeň.





Obr. 38 Metodický portál www.rvp.cz

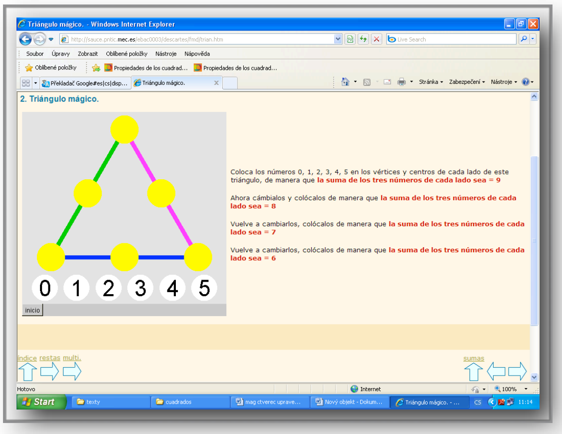
3.1.2 Učební materiály ve Španělsku

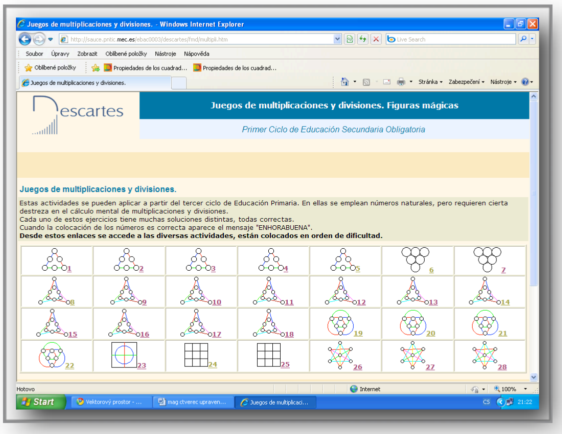
Ve Španělsku je výběr učebnic matematiky, podle kterých se žáci v jednotlivých ročnících učí osnovami předepsanou látku, výsledkem domluvy vedení školy a konkrétních vyučujících daného předmětu. Tedy jako v České republice neexistuje jeden učební text používaný ve všech školách. Téma magických čtverců a křížových součtů není v učebnicích zařazeno.

Ve Španělsku nabízí Ministerstvo školství interaktivní materiály vhodné ke studiu matematiky na webových stránkách projektu Descartes. Mezi těmito materiály se nachází křížové součty a magické čtverce, u kterých musí student umístit daná čísla do specifické dispozice tak, že je splněná určitá vlastnost. Když je problém dobře vyřešen, objeví se gratulace, která indikuje dosažení správného výsledku. Nachází se zde problémy k řešení pro žáky různého věku a různých ročníků, sledujíce stupeň obtížnosti a témata, která jsou zařazena do tématických plánů jednotlivých ročníků, ačkoliv každý učitel může vždy rozhodnout jak a v kterém momentě je použije. Na úvodní stránce je stručný návod k použití daných příkladů.

Existence těchto materiálů, které se objevují v projektu Descartes, který začal v roce 1998, mají za cíl podporovat nové formy výuky a učení matematiky integrujíc informační a komunikační technologie do hodin jako didaktický nástroj.

Způsob, kterým naplňuje svůj cíl, je, že nabízí mnoho různých didaktických materiálů pro výuku matematiky pro žáky druhého stupně základní školy (žáci ve věku 11 až 16 let). Všechny tyto materiály jsou interaktivními aktivitami použitelné z jakéhokoliv počítače s připojením na internet, což zahrnuje počítače v počítačové učebně všech škol, počítače žáků a učitelů ve svých domovech, jakož i interaktivní tabule v kmenových učebnách. Také zahrnuje další možnosti, jako je možnost stáhnutí si všech materiálů zdarma, aby je bylo možno používat na počítačích, které nejsou připojeny k internetu. Dále tvorba nových didaktických materiálů ze strany učitelů používajíc k tomu aplikaci v jazyce Java. Materiály vytvořené učiteli touto aplikací jsou přístupné pro další učitele, rozšiřujíc tak základnu o nové materiály nebo vylepšení skrz úsilí těch, kteří využívají výhod její existence. Ministerstvo školství odměňuje tvůrce těchto stránek tím, že jim nabízí kurzy zdarma, které rozšiřují jejich profesionální vzdělání.





Obr. 39 Webové stránky projektu Descartes

3.2 Tvorba pracovních listů v tištěné podobě

Pracovní list na křížové součty tvoří celkem deset tematických příkladů (viz příloha). Šest z nich jsou ve tvaru čtverce nebo seskupení čtverců, zbylé ve tvaru trojúhelníka nebo seskupení trojúhelníků. Příklady jsou seskupeny tak, že zaujímají reálně jeden pracovní list a to při zachování přehlednosti a dostatečného prostoru pro jejich vypracování. Pracovní list je vytvořen v textovém editoru Microsoft Word. Obrázky jsou vytvořeny v programu Cabri.

Příklady jsou voleny tak, aby na sebe logicky navazovali. Jsou seřazeny dle obtížnosti od nejjednoduššího po nejsložitější. Záměrem je, aby žáci při lehčích příkladech objevili určitou systematiku řešení. Tu následně uplatní při řešení složitějších příkladů. Příklady nemají být řešeny pouhým náhodným tipováním. S každým správně vyřešeným příkladem se zvyšuje motivace žáka k řešení dalších příkladů. S rostoucí obtížností příkladů nehrozí snížení pozornosti kvůli stereotypnosti činnosti.

Jednotlivé příklady nemají jediné správné řešení. Veškerá možná řešení jednotlivých příkladů uvádím v kapitole 3.4. Zadání příkladů je nastoleno tak, aby si žáci mohli sami ověřit správnost řešení. A to jak výsledného řešení, tak i při samotném průběhu řešení. Tím je docílena možnost individuálního postupu jednotlivých žáků.

Nadanější žáci postupují rychleji, vyřeší více příkladů. Méně zdatní žáci postupují pomaleji, vyřeší méně příkladů. To vše bez zbytečných stresových situací, ke kterým by docházelo při nutnosti společného ověření správnosti.

Pracovní listy na magické čtverce tvoří tři strany s jedním příkladem na každé stránce (viz příloha). Tak je na každé stránce dostatek prostoru pro jejich vypracování. Pracovní listy jsou vytvořené v textovém editoru Microsoft Word. Magické čverce jsou vytvořené v programu Microsoft Excel. Na CD, které je součástí diplomové práce, se nachází soubor magickýčtverec3až9, ve kterém jsou magické čtverce třetího až devátého řádu a pomocí kterého může učitel tvořit nové magické čtverce a vytvářet nové příklady podobného zadání. Řešení jednotlivých příkladů uvádím v kapitole 3.4.

3.3 Tvorba pracovních listů v elekronické podobě

Pro tvorbu příkladů jsem vybral program Microsoft Excel a ne jiné programy nebo programovací jazyky jako například aplikace vytvořené v Javě záměrně. Excel je běžně používán jak učiteli tak žáky. Učitelé si tak mohou lehce vytvářet nové příklady a protože žáci znají tento program, jeho používání pro ně není složité a tak není ubírán čas z hodiny na jeho naučení. Použití tohoto programu také dovoluje vkládat značky skrz makra, drobné příkazy, které se zadají programu a jsou automaticky realizované, nebo skrz podmíněný formát, které usnadňují nebo informují ve specifických momentech o něčem, co pokládáme za důležité.

Byly vytvořeny příklady různé obtížnosti, aby tak sloužily pro práci žákům s rozdílnými schopnostmi (viz příloha). Součástí diplomové práce je CD, na kterém se nacházejí veškeré pracovní listy v elektronické podobě. Příklady byly seřazeny takovým způsobem, aby poslední byly obtížnější než první, ačkoliv toto pořadí je skvěle modifikovatelné při vlastní práci.

Rozhraní příkladů bylo vytvořeno co možná nejjednodušším způsobem, bez vkládání nadbytečných možností, které by rozptylovaly žáky od práce. Obrázky jsou velké proto, aby bylo nezbytné otevřít okno celé a tím se eliminovala možnost odvádění pozornosti žáků jinými programy počítače nebo plochy.

Příklady jsou opatřeny příkazem, který, pokud je příklad správně vyřešen, ukáže žákovi vzkaz „máš to správně“, který mu indikuje jeho úspěch. To je možné, jak jsem uvedl, prostřednictvím makra nebo podmíněného formátování, ačkoliv se jeví jako jednodušší podmíněné formátování. Podmínkou formátu je jednoduše vlastní zadání příkladu.

Rovněž se mělo na paměti použití barev. Živé barvy pro důležité elementy, jako je červená nebo sytě modrá, a jemnější barvy pro pozadí. To vede k tomu, že žáci soustředí svou pozornost na tyto části. Kromě toho takovéto použití barev přidává na atraktivnosti. Jestliže vidíme videohry, které je baví hrát, vždy jsou tvořeny těmito barvami a touto distribucí.

Souhrnně můžeme říct, že příklady v Excelu byly vytvořené takovým způsobem, aby žáky stálo menší úsilí soustředit se a zaměřit své síly na jejich řešení. To bylo zajištěno přidáním interaktivní části, která jim pomáhá pokračovat v práci a která pomáhá rovněž učiteli. Není nezbytná jeho oprava, která by pokryla potřebu žáka dozvědět se konkrétní odpověď, zda má příklad dobře nebo špatně.

3.4 Řešení příkladů

3.4.1 Příklady na křížové součty

Pro řešení jednotlivých příkladů budu používat následující pojmy:

S_n součet řady čísel

S součet (počet součtů)

K konstanta, hodnota jednoho součtu, může být jen přirozené číslo

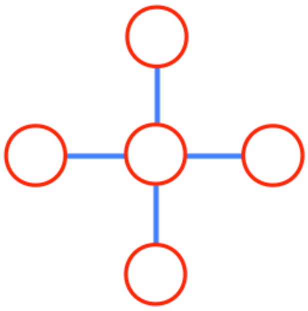
A středové číslo

$B, C, D, \ldots$ další čísla, které přicítám v součtech několikrát

Ve všech příkladech se musí použít každé číslo právě jednou.

Příklad 1

Doplň čísla od 1 do 5, tak, aby součty na úsečkách si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 5 je $S_n = 15$. Čísla je nutné rozdělit do dvou řad, vzniknou tedy dva součty $2S$. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze středové číslo A dvakrát. Poprvé do svislé řady a podruhé do horizontální. Neboť platí $2S = S_n + A$, vypočítá se konstanta pomocí rovnice $K = \frac{S_n + A}{2}$.

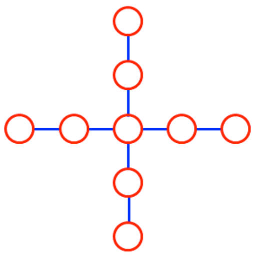
Z rovnice plyne, že pro A lze volit pouze lichá čísla, tedy 1, 3, 5.

Výsledek:

A	K	1. řada	2. řada
1	8	2, 5	3, 4
3	9	1, 5	2, 4
5	10	1, 4	2, 3

Příklad 2

Doplň čísla od 1 do 9 tak, aby součty na úsečkách si byly rovny.



Řešení:

Postup je stejný jako v předchozím případě, $S_n = 45$. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \dfrac{S_n + A}{2}$.

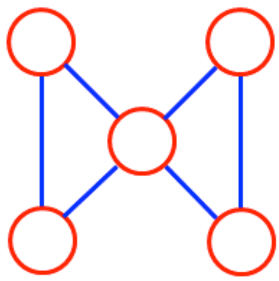
Z rovnice plyne, že pro A lze volit pouze lichá čísla, tedy 1, 3, 5, 7 a 9.

Výsledek:

A	K	1. řada	2. řada
1	23	9, 8, 3, 2	7, 6, 5, 4
		9, 7 , 4, 2	8, 6, 5, 3
		9, 6, 5, 2	8, 7, 4, 3
		9, 6, 4, 3	8, 7, 5, 2
3	24	9, 7, 4, 1	8, 6, 5, 2
		9, 6, 4, 2	8, 7, 5, 1
		9, 6, 5, 1	8, 7, 4, 2
5	25	9, 8, 2, 1	7, 6, 4, 3
		9, 7, 3, 1	8, 6, 4, 2
		9, 6, 4, 1	8, 7, 3, 2
		9, 6, 3, 2	8, 7, 4, 1
7	26	9,6, 3, 1	8, 5, 4, 2
		9, 5, 4, 1	8, 6, 3, 2
		9, 5, 3, 2	8, 6, 4, 1
9	27	8, 7, 2, 1	6, 5, 4, 3
		8, 6, 3, 1	7, 5, 4, 2
		8, 5, 4, 1	7, 6, 3, 2
		8, 5, 3, 2	7, 6, 4, 1

Příklad 3

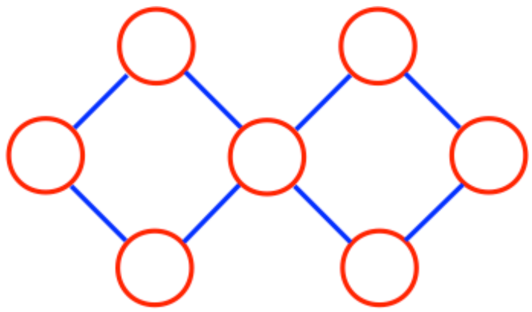
Doplň čísla od 1 do 5 tak, aby součty v trojúhelnících si byly rovny.



Řešení a výsledek jsou shodné s příkladem číslo jedna.

Příklad 4

Doplň čísla od 1 do 7 tak, aby součty ve čtvercích si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 7 je $S_n = 28$. Čísla je nutné rozdělit do dvou čtverců, vzniknou tedy dva součty $2S$. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze středové číslo A dvakrát. Neboť platí $2S = S_n + A$, vypočítá se konstanta pomocí rovnice $K = \frac{S_n + A}{2}$.

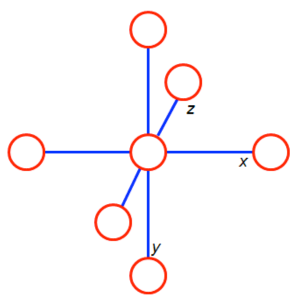
Z rovnice plyne, že pro A lze volit pouze sudá čísla, tedy 2, 4 a 6.

Výsledek:

A	**K**	**1. řada**	**2. řada**
2	15	7 , 5 , 1	3 , 4 , 6
4	16	7 , 3 , 2	1 , 5 , 6
6	17	7 , 3 , 1	2 , 4 , 5

Příklad 5

Doplň čísla od 1 do 7 tak, aby součty v osách si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 7 je $S_n = 28$. Čísla je nutné rozdělit do tří řad, vzniknou tedy tři součty $3S$. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze středové číslo A třikrát. Platí $3S = S_n + 2A$, konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \dfrac{S_n + 2A}{3}$.

Z rovnice plyne, že pro A lze volit pouze tři možnosti, tedy 1, 4 a 7.

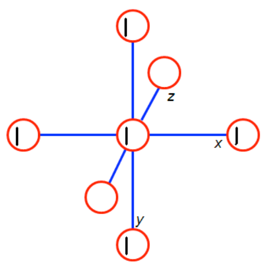
Výsledek:

A	**K**	**1. řada**	**2. řada**	**3. řada**
1	10	7 , 2	6 , 3	5 , 4
4	12	7 , 1	6 , 2	5 , 3
7	14	6 , 1	5 , 2	4 , 3

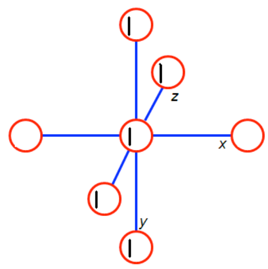
Zadání příkladu je možno obměnit na následující. Doplň čísla od 1 do 7 tak, aby součty v rovinách si byly rovny.

Řešení:

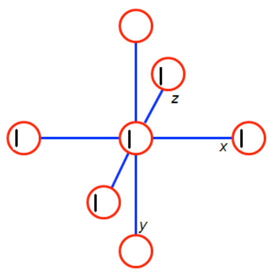
Aby se zjistilo, kolikrát se budou jednotlivá čísla sčítat, každému číslu, které v rovině leží, se udělá čárka.



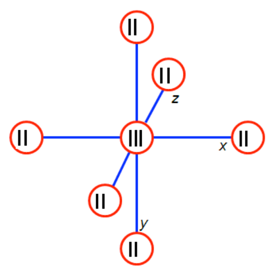
rovina xy



rovina yz



rovina xz



všechny roviny

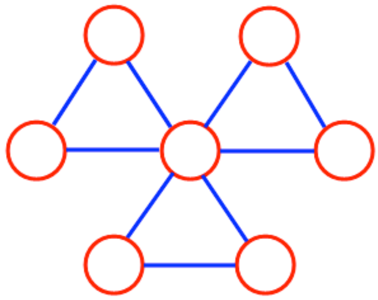
Z obrázků vyplývá, že středové číslo A se sčítá třikrát, ostatní čísla dvakrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{2S_n + A}{3}$.

Z rovnice plyne, že pro A lze volit pouze tři možnosti, tedy 1, 4 a 7.

Výsledek je stejný jako u nezměněného zadání.

Příklad 6

Doplň čísla od 1 do 7 tak, aby součty v trojúhelnících si byly rovny.



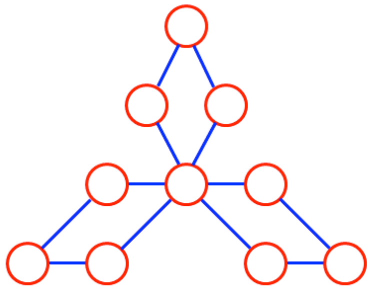
Součet čísel od 1 do 7 je $S_n = 28$. Neboť obrazec se skládá ze tří trojúhelníků, pak existují tři součty. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze středové číslo A dvakrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{S_n + 2A}{3}$, tedy $K = \frac{28 + 2A}{3}$, tedy $K = 9 + \frac{1 + 2A}{3}$. Neboť K je přirozené číslo, součet $1 + 2A$ je násobkem čísla tři, tedy $A = \{1,4,7\}$. Zbývající čísla každého trojúhelníku musí dát součet $B + C = K - A$. Pro $A = 4$, je $K = 11$, pak $B + C = 7$, což není možné. Pro ostatní možnosti existuje řešení.

Výsledek:

A	**K**	**1. řada**	**2. řada**	**3. řada**
1	10	5, 4	6, 3	7, 2
7	14	6, 1	5, 2	7, 2

Příklad 7

Doplň čísla od 1 do 10 tak, aby součty v kosočtvercích si byly rovny.



Řešení:

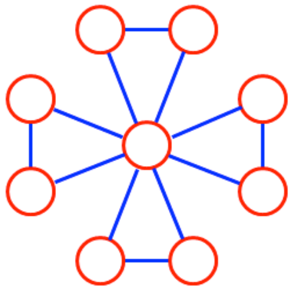
Součet čísel od 1 do 10 je $S_n = 55$. Středové číslo A je sčítáno třikrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \dfrac{S_n + 2A}{3}$. Neboť K je přirozené číslo, součet $55 + 3A$ je násobkem čísla tři. Z toho plyne, že $A = \{1, 4, 7, 10\}$.

Výsledek:

A	K	1. řada	2. řada	3. řada
1	19	10, 6, 2	9, 5, 4	8, 7, 3
		10, 5, 3,	9, 7, 2	8, 6, 4
4	21	10, 6, 1	9, 5, 3	8, 7, 2
		10, 5, 2,	9, 7, 1	8, 6, 3
7	23	10, 5, 1	9, 4, 3	8, 6, 2
		10, 4, 2	9, 6, 1	8, 5, 3
10	25	9, 5, 1	8, 4, 3	7, 6, 2
		9, 4, 2	8, 6, 1	7, 5, 3

Příklad 8

Doplň čísla od 1 do 9 tak, aby součty v trojúhelnících si byly rovny.



Řešení:

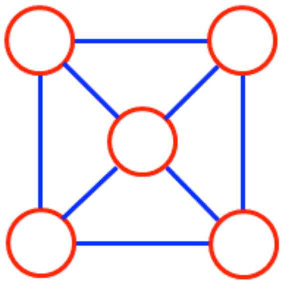
Součet čísel od 1 do 9 je $S_n = 45$. Středové číslo A je sčítáno čtyřikrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \dfrac{S_n + 3A}{4}$. Neboť K je přirozené číslo, součet $45 + 3A$ je násobkem čísla čtyři. Z toho plyne, že $A = \{1, 5\}$.

Výsledek:

A	K	1. řada	2. řada	3. řada	4. řada
1	12	9, 2	8, 3	7, 4	6, 5
5	15	9, 1	8, 2	7, 3	6, 4

Příklad 9

Doplň čísla od 1 do 5 tak, aby součty v úhlopříčkách a čtverci si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 5 je $S_n = 15$. Pro součty v úhlopříčkách se konstanta vypočítá pomocí rovnice $K = \dfrac{S_n + 2A}{3}$. Pro součet ve čtverci se konstanta vypočítá pomocí rovnice $K = S_n - A$. Platí $\dfrac{S_n + A}{2} = S_n - A$. Z úpravy rovnice plyne $S_n = 3A$.

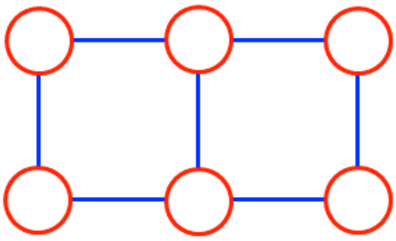
Z rovnice plyne, že pro A lze volit pouze jednu možnost, tedy 5.

Výsledek:

A	K	1. řada	2. řada
5	10	4, 1	3, 2

Příklad 10

Doplň čísla od 1 do 6 tak, aby součty ve čtvercích si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 6 je $S_n = 21$. Neboť obrazec se skládá ze dvou čtverců, pak existují dva součty. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze dvě středová čísla A a B dvakrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \dfrac{S_n + A + B}{2}$. Hodnota konstanty K je omezena minimem a maximem. Minimální konstanta se vypočítá $K_{min} = \dfrac{21 + 1 + 2}{2}$, pak $K_{min} = 12$. Maximální konstanta se vypočítá $K_{max} = \dfrac{21 + 6 + 5}{2}$, pak $K_{max} = 16$. Konstanta nabývá hodnot $K = \{12, 13, 14, 15, 16\}$.

Neboť konstanta je celé přirozené číslo, pak za středová čísla A a B mohu dosadit pouze jedno číslo liché a jedno sudé. Neboť $K_{min} = \dfrac{21 + A + B}{2}$, neboli $K_{min} = \dfrac{20 + 1 + A + B}{2}$, pak výraz $1 + A + B$ musí být dělitelný dvěmi.

Kombinace čísel A a B udává následující tabulka:

K	A	B
12	1	2
13	1	4
	2	3

K	A	B
14	1	6
	3	4
	2	5

K	A	B
15	3	6
	4	5
16	5	6

Ověří-li se všechny možné kombinace pro dané konstanty, získají se po eliminaci nemožných veškerá možná řešení.

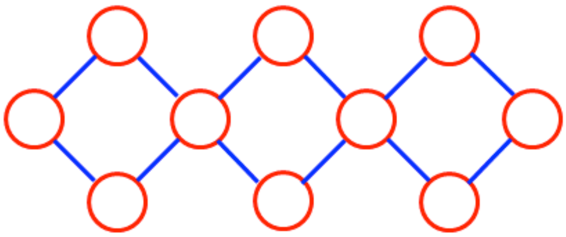
Výsledek:

K	**A**	**B**
12	1	2
13	1	4
14	1	6
	3	4
	2	5

K	**A**	**B**
15	3	6
16	5	6

Příklad 11

Doplň čísla od 1 do 10 tak, aby součty ve čtvercích si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do10 je $S_n = 55$. Neboť obrazec se skádá ze tří čtverců, pak existují tři součty. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze dvě čísla ve vrcholech středového čtverce A a B dvakrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{S_n + A + B}{3}$, tedy $K = \frac{55 + A + B}{3}$, tedy $K = 18 + \frac{1 + A + B}{3}$.

Hodnota konstanty K je omezena minimem a maximem. Minimální konstanta se vypočítá $K = 18 + \frac{A + B}{3}$, tedy $K_{min} = 18 + \frac{1 + 1 + 2}{3}$, pak $K_{min} = 19 + \frac{1}{3}$.

Maximální konstanta se vypočítá $K = 18 + \frac{1 + A + B}{3}$, tedy $K_{max} = 18 + \frac{1 + 10 + 9}{3}$, pak $K_{max} = 24 + \frac{1}{3}$. Neboť konstanta je celé přirozené číslo, pak nabývá hodnot

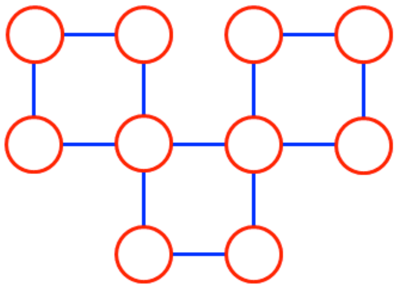
$K = \{20,21,22,23,24\}$. Je-li $K = 18 + \frac{1+A+B}{3}$, neboli $K = 18 + N$, pak $N = \{2,3,4,5,6\}$. Kombinace čísel A a B, které v součtu spolu s jedničkou jsou násobkem čísla tři, udává následující tabulka. Ověřením se zjistí, že pro všechny kombinace existuje řešení.

Výsledek:

K	N	A B	A B	A B	A B	A B
20	2	1 4	2 3			
21	3	1 7	2 6	3 5		
22	4	1 10	2 9	3 8	4 7	5 6
23	5	4 10	5 9	6 8		
24	6	7 10	8 9			

Příklad 12

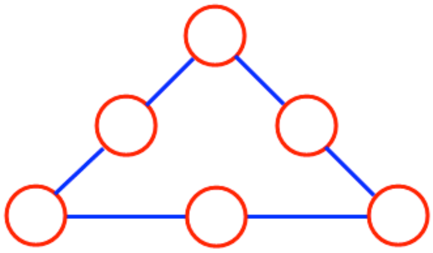
Doplň čísla od 1 do 10 tak, aby součty ve čtvercích si byly rovny.



Řešení a výsledek jsou shodné s příkladem číslo jedenáct.

Příklad 13

Doplň čísla od 1 do 6 tak, aby součty na stranách trojúhelníku si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 6 je $S_n = 21$. Neboť obrazec se skládá ze tří řad, pak existují tři součty. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze čísla ve vrcholech A, B, C dvakrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{S_n + A + B + C}{3}$,

tedy $K = \frac{21 + A + B + C}{3}$, tedy $K = 7 + \frac{A + B + C}{3}$. Hodnota konstanty K je omezena minimem a maximem. Minimální konstanta se vypočítá $K = 7 + \frac{A + B + C}{3}$, tedy $K_{min} = 7 + \frac{1 + 2 + 3}{2}$, pak $K_{min} = 9$. Maximální konstanta se vypočítá $K = 7 + \frac{A + B + C}{3}$, tedy $K_{max} = 7 + \frac{6 + 5 + 4}{3}$, pak $K_{max} = 12$. Konstanta nabývá hodnot $K = \{9, 10, 11, 12\}$. Je-li $K = 7 + \frac{A + B + C}{3}$, neboli $K = 7 + N$, pak $N = \{2, 3, 4, 5\}$. Kombinace čísel A, B, C, jejichž součet je násobkem čísla tři, udává následující tabulka.

K	N	A B C	A B C	A B C
9	2	1 2 3		
10	3	1 2 6	1 3 5	2 3 4
11	4	1 5 6	2 4 6	3 4 5
12	5	4 5 6		

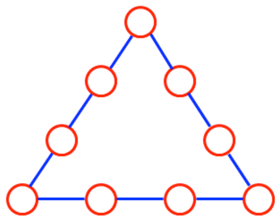
Ověří-li se všechny možné kombinace pro dané konstanty, získají se po eliminaci nemožných veškerá možná řešení.

Výsledek:

K	N	A B C
9	2	1 2 3
10	3	1 3 5
11	4	2 4 6
12	5	4 5 6

Příklad 14

Doplň čísla od 1 do 9 tak, aby součty v řadách si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 9 je $S_n = 45$. Neboť obrazec se skládá ze tří řad, pak existují tři součty. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze čísla ve vrcholech A,B,C dvakrát. Konstanta K se vypočítá pomocí rovnice $K = \dfrac{S_n + A + B + C}{3}$,

tedy $K = \dfrac{45 + A + B + C}{3}$, tedy $K = 15 + \dfrac{A + B + C}{3}$. Hodnota konstanty K je omezena minimem a maximem. Minimální konstanta se vypočítá $K_{min} = 15 + \dfrac{1 + 2 + 3}{2}$, pak $K_{min} = 17$. Maximální konstanta se vypočítá $K_{max} = 15 + \dfrac{7 + 8 + 9}{3}$, pak $K_{max} = 23$. Konstanta K je $K = \{12,13,14,15,16\}$.

Je-li $K = 15 + \dfrac{A + B + C}{3}$, neboli $K = 15 + N$, pak $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Kombinace čísel A,B,C , jejichž součet je násobkem čísla tři, udává následující tabulka.

K	N	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C
17	2	1 2 3							
18	3	1 2 6	1 3 5	2 3 4					
19	4	1 2 9	1 3 8	1 4 7	1 5 6	2 3 7	2 4 6	3 4 5	
20	5	1 5 9	2 4 9	1 6 8	2 5 8	3 4 8	2 6 7	3 5 7	4 5 6
21	6	1 8 9	2 7 9	3 6 9	4 5 9	3 7 8	4 6 8	5 6 7	
22	7	4 8 9	5 7 9	6 7 8					
23	8	7 8 9							

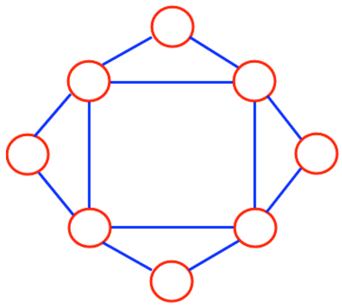
Ověří-li se všechny možné kombinace pro dané konstanty, získají se po eliminaci nemožných veškerá možná řešení.

Výsledek:

K	N	A B C	A B C	A B C	A B C
17	2	1 2 3			
19	4	1 4 7	2 3 7		
20	5	1 5 9	2 5 8	3 5 7	4 5 6
21	6	3 6 9	3 7 8		
23	8	7 8 9			

Příklad 15

Doplň čísla od 1 do 8 tak, aby součty v trojúhelnících i ve čtverci si byly rovny.

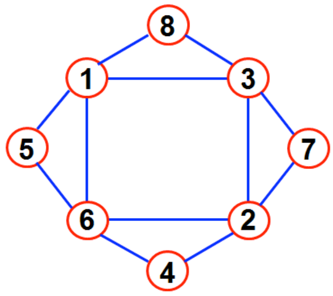


Řešení:

Součet čísel od 1 do 8 je $S_n = 36$. Neboť obrazec je složen ze čtyř trojúhelníků a jednoho čtverce , pak existuje pět součtů. Čísla ve vrcholech čtverce A,B,C,D , jsou sčítána třikrát, ostatní jedenkrát. Jestliže je od čtyř součtů trojúhelníků odečten jeden součet čtverce, pak zbydou tři součty, ve kterých je každé číslo zastoupeno právě jednou. Konstantu vypočteme pomocí rovnice $K = \frac{S_n + 2(A+B+C+D)}{5}$ nebo pomocí rovnice $K = \frac{S_n}{3}$, tedy $K = \frac{36}{3}$, pak $K = 12$. Dalším krokem v řešení je nalézt kombinaci čtyř čísel, jejichž součet je roven 12.

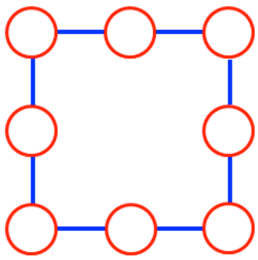
Tuto podmínku splňují dvě kombinace: 1, 2, 3, 6 a 1, 2, 4, 5. Ověřením se zjistí, že kombinace 1, 2, 4, 5 nevyhovuje zadání. Existuje jediné správné řešení.

Výsledek:



Příklad 16:

Doplň čísla od 1 do 8 tak, aby součty na stranách čtverce si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 8 je $S_n = 36$. Všechny vrcholy čtverce jsou sčítány dvakrát, ostatní čísla na stranách jednou. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{S_n + A + B + C + D}{4}$. Neboť K je přirozené číslo, součet $36 + A + B + C + D$ je násobkem čísla čtyři. Hodnota konstanty K je omezena minimem a maximem. Minimální konstanta se vypočítá $K_{min} = \frac{36+1+2+3+4}{4}$, pak $K_{min} = 11{,}5$.

Maximální konstanta se vypočítá $K_{max} = \frac{36+8+7+6+5}{4}$, pak $K_{max} = 15{,}5$. Neboť konstanta je celé přirozené číslo, pak $K = \{12,13,14,15\}$.

Je-li $K = 9 + \frac{A+B+C+D}{4}$, neboli $K = 9 + N$, pak $N = \{3,4,5,6\}$. Kombinace čísel A,B,C,D, jejichž součet je násobkem čísla čtyř, udává následující tabulka.

K	N	A	B	C	D
12	3	1	2	3	6
		1	2	4	5
13	4	1	2	5	8
		1	2	6	7
		1	3	4	8
		1	3	5	7
		1	4	5	6
		2	3	4	7
		2	3	5	6

K	N	A	B	C	D
14	5	1	4	7	8
		1	5	6	8
		2	3	7	8
		2	4	6	8
		2	5	6	7
		3	4	5	8
		3	4	6	7
15	6	3	6	7	8
		4	5	7	8

Rozmístí-li se čísla kombinace 1, 2, 3, 6 do vrcholů čtverce postupně za sebou, pak číslo na straně čtverce bude $12 - (1+2) = 9$. To je v rozporu se zadáním. Prohodí-li se umístění čísla 2 za číslo 3 a dopočítá-li se číslo na straně čtverce, nedojde ke sporu.

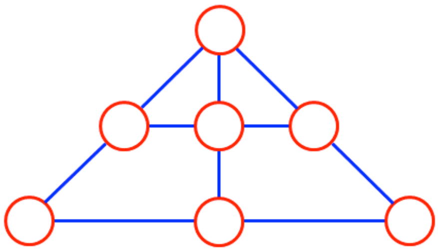
Ověří-li se všechny možné kombinace pro dané konstanty, získají se po eliminaci nemožných veškerá možná řešení.

Výsledek:

K	N	A	B	C	D
12	3	1	2	3	6
13	4	1	2	5	8
		1	4	5	6
14	5	1	4	7	8
		3	4	5	8
15	6	3	6	7	8

Příklad 17

Doplň čísla od 1 do 7 tak, aby součty v řadách si byly rovny.



Řešení:

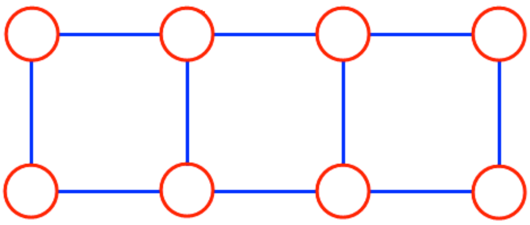
Součet čísel od 1 do 7 je $S_n = 28$. Neboť obrazec se skládá z pěti řad, pak existuje pět součtů. Všechna čísla jsou sčítána dvakrát, pouze jedno číslo ve vrcholu trojúhelníku i kříže A třikrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{2S_n + A}{5}$,

tedy $K = \frac{2 \cdot 28 + A}{5}$. Řešením rovnice se obdrží konstanta $K = 12$ a čísla $A = 4$

Tři součty z vrcholu A obsahují všechny cifry. Neboť $A = 4$, je třeba zbylých šest cifer rozdělit do dvojic tak, aby jejich součet byl roven $K - A$, tedy 8. Tuto podmínku splňují tři dvojice: 1 a 7, 2 a 6, 3 a 5. Z uvedených dvojic je vybráno vždy po jedné cifře do trojice tak, aby součet trojice byl roven konstantě K , neboť součet základny a střední příčky trojúhelníku naproti vrcholu A jsou jí rovny. Tuto podmínku splňují dvě trojice: 1, 6, 5 a 7, 2, 3. Řešení má dvě varianty. Základna je tvořena trojicí 1, 6, 5 a střední příčka trojicí 7, 2, 3 a naopak.

Příklad 18

Doplň čísla od 1 do 8 tak, aby součty ve čtvercích si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 8 je $S_n = 36$. Neboť obrazec se skládá ze tří čtverců, pak existují tři součty. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze čtyři středová čísla A, B, C, D dvakrát. Neboť platí, že konstanty vnějších čtverců jsou si rovny a že součet obou konstant je roven součtu S_n, pak se konstanta vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{S_n}{2}$,

tedy $K = \frac{36}{2}$, tedy $K = 18$.

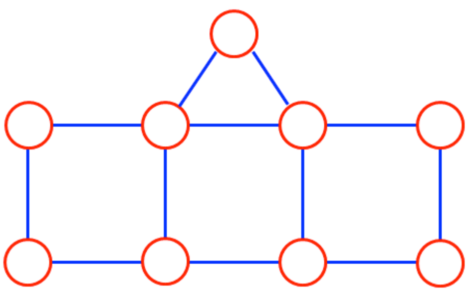
Kombinace čísel A, B, C, D , jejichž součet je roven 18, udává následující tabulka. Ověřením se zjistí, že pro všechny kombinace existuje řešení.

Výsledek:

K	**A**	**B**	**C**	**D**
18	8	7	2	1
	8	6	3	1
	8	5	4	1
	8	5	3	2
	7	6	4	1
	7	6	3	2
	7	5	4	2
	6	5	4	3

Příklad 19

Doplň čísla od 1 do 9 tak, aby součty ve čtvercích a trojúhelníku si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 9 je $S_n = 45$. Existují čtyři součty, tři čtverce a jeden trojúhelník. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze čtyři čísla prostředního čtverce B, C, D, E dvakrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{S_n + 2B + 2C + D + E}{4}$

Platí $A = D + E$, z toho plyne $K = \frac{S_n + A + 2B + 2C}{4}$. Dále platí $B + C = K - A$, z toho plyne $K = \frac{S_n + A + 2(K - A)}{4}$, tedy $K = \frac{S_n - A}{2}$, pak A je liché číslo, protože $S_n = 45$. Možnost $A = 1$ nemá řešení, neboť pro $A = 1$ je $K = \frac{45 - 1}{2} = 22$, tedy $B + C = 21$, což není možné, neboť neexistují dvě čísla od 2 do 9, jejichž součet by byl roven 21. Možnost $A = 3$ nemá řešení, neboť pro $A = 3$ je $K = \frac{45 - 3}{2} = 21$, tedy $B + C = 18$, což není možné, neboť neexistují dvě čísla od 1 do 9, jejichž součet by byl roven 18. Z toho plyne $A = \{5, 7, 9\}$. Hodnota konstanty K nabývá hodnot $K = \{18, 19, 20\}$. Výsledné kombinace udává následující tabulka. Ověřením se zjistí, že pro všechny kombinace existuje řešení.

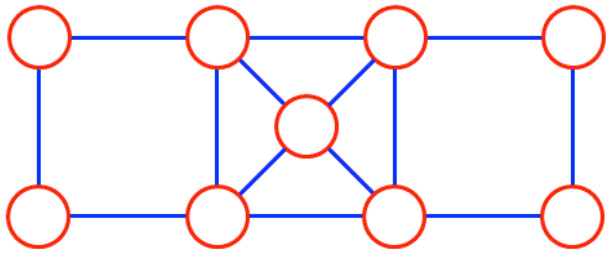
Výsledek:

K	A	B	C	D	E
18	9	8	1	2	7
	9	8	1	3	6
	9	8	1	5	4
	9	7	2	6	3
	9	7	2	4	5
	9	6	3	4	5

K	A	B	C	D	E
19	7	9	3	1	6
	7	9	3	2	5
	7	8	4	1	6
	7	8	4	2	5
20	5	9	6	1	4
	5	8	7	2	3

Příklad 20

Doplň čísla od 1 do 9 tak, aby součty ve čtvercích si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 9 je $S_n = 45$. Existují tři součty. Všechna čísla jsou sčítána jedenkrát, pouze čtyři čísla prostředního čtverce B, C, D, E dvakrát. Konstanta se vypočítá pomocí rovnice $K = \frac{S_n + B + C + D + E}{3}$, tedy $K = \frac{45 + B + C + D + E}{3}$, tedy $K = 15 + \frac{B + C + D + E}{3}$. Hodnota konstanty K je omezena minimem a maximem. Minimální konstanta se vypočítá $K = 15 + \frac{B + C + D + E}{3}$, tedy $K_{min} = 15 + \frac{1 + 2 + 3 + 4}{3}$, pak $K_{min} = 18 + \frac{1}{3}$. Maximální konstanta se vypočítá $K = 15 + \frac{B + C + D + E}{3}$, tedy $K_{max} = 15 + \frac{9 + 8 + 7 + 6}{3}$, pak $K_{max} = 25$.

Dále platí, nebude-li se přičítat součet prostředního čtverce, pak pro konstantu platí vztah $K = \frac{S_n - A}{2}$, tedy $K = \frac{45 - A}{2}$. Z toho plyne, že číslo A je liché číslo.

Sjednotí-li se obě podmínky, pak konstanta K nabývá hodnot $K = \{19, 20, 21, 22\}$. Dalším krokem v řešení je nalézt kombinace pěti čísel tak, aby se v každé z nich objevilo alespoň jedno liché číslo, což je podmínka pro číslo A. Všechny možné kombinace udává následující tabulka.

K	a	b	c	d	e
19	1	2	3	4	9
	1	2	3	5	8
	1	2	3	6	7
	1	2	4	5	7
	1	3	4	5	6
20	1	2	3	5	9
	1	2	3	6	8
	1	2	4	5	8
	1	3	4	5	7
	2	3	4	5	6

K	a	b	c	d	e
21	1	2	3	6	9
	1	2	3	7	8
	1	2	4	5	9
	1	2	4	6	8
	1	2	5	6	7
	1	3	4	5	8
	1	3	4	6	7
	2	3	4	5	7

K	a	b	c	d	e
22	1	2	3	7	9
	1	2	4	6	9
	1	2	4	7	8
	1	2	5	6	8
	1	3	4	5	9
	1	3	4	6	8
	2	3	4	5	8
	2	3	4	6	7

Uvědomíme-li si, že platí-li $K = \frac{S_n - A}{2}$, platí rovněž $A = S_n - 2K$, pak je možno eliminovat ty možnosti kombinací čísel, které hodnotu A pro danou konstantu nenabízí. Výsledné kombinace udává následující tabulka. Ověřením se zjistí, že pro všechny kombinace existuje řešení.

Výsledek:

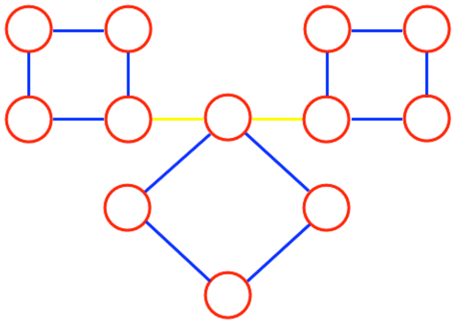
K	A	B	C	D	E
19	7	2	3	6	1
	7	2	4	5	1
20	5	2	3	1	9
	5	2	4	1	8
	5	3	4	1	7
	5	3	4	2	6

K	A	B	C	D	E
21	3	2	1	6	9
	3	2	1	7	8
	3	1	4	5	8
	3	1	4	6	7
	3	2	4	5	7

K	A	B	C	D	E
22	1	2	3	7	9
	1	2	4	6	9
	1	2	4	7	8
	1	2	5	6	8
	1	3	4	5	9
	1	3	4	6	8

Příklad 21

Doplň čísla od 1 do 12 tak, aby součty ve čtvercích i na žluté příčce si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 12 je $S_n = 78$. Neboť obrazec je složen ze tří čtverců a jedné úsečky, pak existují čtyři součty. Čísla na úsečce A, B, C jsou sčítána dvakrát, ostatní jedenkrát. Jestliže se nebude počítat úsečka, zbydou tři samostatné čtverce. Z toho plyne, že konstanta K může nabývat pouze jedné hodnoty. $K = \frac{S_n}{3}$, tedy

$K = \frac{78}{3}$, pak $K = 26$.

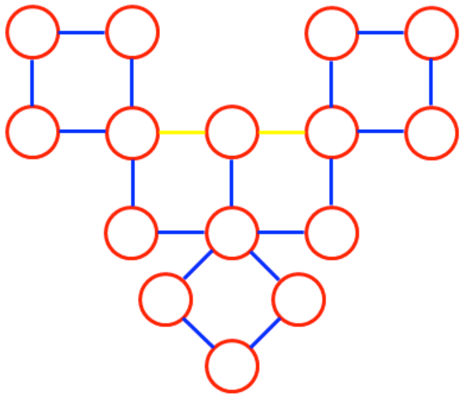
Dalším krokem v řešení je nalézt kombinaci čísel A, B, C , jejichž součet je roven konstantě. Všechny možné kombinace udává následující tabulka. Ověřením se zjistí, že pro všechny kombinace existuje řešení.

Výsledek:

K	A	B	C
26	12	11	3
	12	10	4
	12	9	5
	12	8	6
	11	10	5
	11	9	6
	11	8	7
	10	9	7

Příklad 22

Doplň čísla od 1 do 15 tak, aby součty ve čtvercích i na žluté příčce si byly rovny.



Řešení:

Součet čísel od 1 do 15 je $S_n = 120$. Neboť obrazec je složen z pěti čtverců a jedné úsečky, pak existuje šest součtů. Číslo ve společném vrcholu tří čtverců a čísla na úsečce A, B, C, D jsou sčítána třikrát, ostatní jedenkrát. Jestliže od pěti součtů čtverců odečteme jeden součet úsečky, pak zbydou čtyři součty, ve kterých je každé číslo zastoupeno právě jednou, kromě čísla A ve společném vrcholu tří čtverců, které se sčítá třikrát. Konstantu vypočteme pomocí rovnice $K = \frac{S_n + 2(A + B + C + D)}{6}$ nebo pomocí rovnice $K = \frac{(S_n + 2A)}{4}$, tedy $K = \frac{(120 + 2A)}{4}$, pak $K = 30 + \frac{A}{2}$.

Dalším krokem v řešení je nalézt kombinaci čísel *B, C, D*, jejichž součet je roven konstantě pro každé sudé *A*. Všechny možné kombinace udává následující tabulka. Ověřením se zjistí, že pro všechny kombinace existuje řešení.

Výsledek:

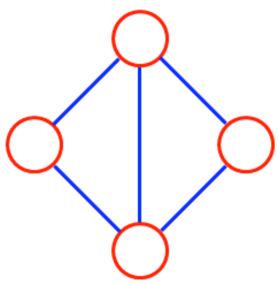
K	A	B	C	D
31	2	15	13	3
		15	12	4
		15	11	5
		15	10	6
		15	9	7
		14	13	4
		14	12	5
		14	11	6
		14	10	7
		14	9	8
		13	12	6
		13	11	7
		13	10	8
		12	11	8
		12	10	9

K	A	B	C	D
32	4	15	14	3
		15	12	5
		15	11	6
		15	10	7
		15	9	8
		14	13	5
		14	12	6
		14	11	7
		14	10	8
		13	12	7
		13	11	8
		13	10	9
33	6	15	14	4
		15	13	5
		15	11	7
		15	10	8
		14	12	7
		14	11	8
		14	10	9
		13	12	8
		13	11	9
		12	11	10

K	A	B	C	D
34	8	15	14	5
		15	13	6
		15	12	7
		15	10	9
		14	13	7
		14	11	9
		13	12	9
		13	11	10
35	10	15	14	6
		15	13	7
		15	12	8
		15	11	9
		14	13	8
		14	12	9
36	12	15	14	7
		15	13	8
		15	11	10
		14	13	9
37	14	15	13	9
		15	12	10

Příklad 23

Doplň čísla od 1 do 4 tak, aby součty v trojúhelnících si byly rovny.



Řešení:

Jsou dána dvě středová čísla A a B. Součty v trojúhelnících se liší třetím číslem v součtu. Za podmínky, že se čísla nemohou opakovat, je nemožné vyhovět zadání. Platí-li $A+B+X=A+B+Y$, pak $X=Y$ a to je spor.

Výsledek:

Příklad nemá řešení.

3.4.2 Příklady na magické čtverce

Příklad 1

Zjistěte, která dvě čísla v magickém čtverci si zaměnila svou pozici.

17	24	1	8	15
23	3	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	5
11	18	25	2	9

Řešení:

Pro každý řádek a sloupec se vypočte jejich součet. Tím se dojde ke zjištění, že řádky $r_{1,}r_{3,}r_5$ a sloupce $s_{1,}s_{3,}s_4$ mají stejný součet $S=65$. Řádek r_2 má součet $S=63$, řádek r_4 má součet $S=67$, sloupec s_2 má součet $S=63$ a sloupec s_5 má součet $S=67$. Druhý řádek má součet o dvě menší než většina řádků a sloupců a čtvrtý řádek má součet o dvě větší než většina řádků a sloupců. Z toho plyne, hledaná zaměněná čísla musí být v druhém a čtvrtém řádku. Obdobně druhý sloupec má součet o dvě menší a pátý sloupec má součet o dvě větší než většina řádků a sloupců. Z toho plyne, hledaná zaměněná čísla musí být v druhém a pátém sloupci. Spojíme-li oba závěry dostaneme řešení. První hledané číslo je v průsečíku druhého řádku a druhého sloupce, druhé pak v průsečíku čtvrtého řádku a pátého sloupce. V magickém čtverci si svou pozici zaměnila čísla 3 a 5.

Příklad 2

Magický čtverec je narušen jedním číslem, které tam nepatří. Najděte ho.

3	105	102	9	96	18
90	24	84	81	33	21
72	69	45	48	46	57
39	51	63	66	60	54
36	78	27	30	87	75
93	6	12	99	15	108

Řešení:

Pro každý řádek a sloupec se vypočte jejich součet. Tím se dojde ke zjištění, že jen řádek r_3 a sloupec s_5 mají součet $S = 337$, který je jiný než součet ostatních řádků a sloupců $S = 333$. Hledané číslo je o čtyři vyšší než by mělo být, a jeho pozice je v průsečíku třetího řádku a pátého sloupce. Narušitel je číslo 46, místo kterého tam mělo být číslo 42.

Jiný způsob řešení. Všechna čísla „vypadají“ jako násobky čísla 3. Kontrolou všech čísel zjistíme, že číslo 46 není žádným násobkem čísla 3 a tím jsme našli narušitele.

Příklad 3

Doplň chybějící čísla z řady čísel od 1 do 16 tak, aby daný čtverec byl magický.

1		14	
		7	9
	10	11	
13		2	

Řešení:

Součet čísel v sloupci s_3 udává konstantu magického čtverce $K = 34$. Postupně dopočítáváme další hodnoty pozic. Na diagonále $a_{14} = 34 - 30$, $a_{14} = 4$. V prvním řádku $a_{12} = 34 - 19$, $a_{12} = 15$. Dostaneme se do fáze, kdy musím doplnit dvojici čísel. Do sloupce s_2 musíme doplnit takovou dvojici, která bude mít součet $S = K - 15 - 10$, $S = 9$. Z řady čísel, které máme k dispozici splňuje tuto podmínku jen dvojice čísel 3 a 6. Kam umístit číslo 3? Dosazením do druhého řádku na pozici a_{22} bychom museli na pozici a_{21} dosadit číslo 15, a to nejde. Z toho plyne, číslo 3 musí být ve čtvrtém řádku na pozici a_{42} a číslo 6 v druhém řádku na pozici a_{22} . Zbývající pozice lehce dopočítáme: $a_{21} = 12$, $a_{31} = 8$, $a_{34} = 5$, $a_{44} = 16$.

3.5 Popis hodiny s pracovními listy

Využití tohoto materiálu, jak v podobě pracovního listu tak v Excelu, je možné různými způsoby. Závisí na učiteli, kterým způsobem chce pracovat. V následující části popíšu několik způsobů, které byly použity ve vyučovacích hodinách a dosáhli dobrých výsledků.

1) Pracovní list na křížové součty v tištěné podobě

I. Individuální práce

Touto metodou se chce docílit, aby se žák koncentroval na práci s počty a dedukcí. Metoda je velmi jednoduchá, pracovní listy se rozdají žákům a ti mají za úkol vyřešit postupně příklady. Žák pracuje v tichosti, může používat pomocný papír pro výpočty. Po skončení práce, která trvá mezi 30 minutami a hodinou, se zaznamenají příklady vyhotovené každým žákem a umožní se jim, aby dokončili zbývající příklady, které nestihli vyřešit v hodině, doma. Takto je žákům, pro které je práce těžší, dána možnost vypracovat všechny příklady. Zajisté, pokud vypracovali méně příkladů v hodině, potřebují procvičovat více doma. Vyplněný pracovní list je možné sesbírat v následující hodině.

Kompetence, které se rozvíjejí touto metodou, číslované jako v části 2.3.1, jsou:

1. rozvinutí pozitivního vztahu k matematice
2. srozumitelná formulace vlastních myšlenek
4. dovednost řešit, analyzovat a vyhodnotit matematické hry
8. dovednost analogického myšlení
10. rozvinout své abstraktní a logické myšlení,
12. dovednost matematického uvažování
13. provádět jednoduché výpočty z paměti, náročnější písemně
14. dovednost používat strategie rozboru problémů a schopnost navrhnout řešení a vyřešit matematické hry jak ve školním tak i mimoškolním prostředí
18. samostatné učení a práce
19. posilování pozitivních rysů osobnosti (pracovitost, přesnost, důslednost, sebekontrola a odpovědnost, vytrvalost a schopnost překonávat překážky)
20. zvyšování vhodné míry sebevědomí, odpovědnosti
26. schopnost analýzy a syntézy

II. Skupinová práce

Cílem této metody je, aby se žáci učili zábavnějším způsobem od svých spolužáků a aby se učili utvářet pracovní skupiny.

Vytvoří se skupiny, kde jsou žáci různých úrovní tak, aby v jedné skupině byli žáci s vyšší a nižší úrovní, ne velmi početné, nejlépe o třech až čtyřech žácích. Stejně jako v předchozím případě se skupinám rozdají pracovní listy a udá se čas pro vypracování, mezi 30 a 40 minutami. Je na žácích, aby si práci zorganizovali tak, jak uznají za vhodné. Na konci práce se pozbírají pracovní listy a ověří se, která skupina správně vyřešila nejvyšší počet příkladů. Tito žáci mohou být odměněni dobrými známkami.

Je důležité disponovat dostatečným množstvím pracovních listů, aby žáci měli možnost dokončit doma individuálně nebo skupině, co nestihli v zadaném časovém limitu. Cílem je, aby žáci vypracovali všechny příklady.

Kompetence, které se rozvíjejí touto metodou, číslované jako v části 2.3.1, jsou:

1. rozvinutí pozitivního vztahu k matematice
2. srozumitelná formulace vlastních myšlenek srozumitelně
4. dovednost řešit, analyzovat a vyhodnotit matematické hry
8. dovednost analogického myšlení
10. rozvinout své abstraktní a logické myšlení,
12. dovednost matematického uvažování
13. provádět jednoduché výpočty z paměti, náročnější písemně
14. dovednost používat strategie rozboru problémů a schopnost navrhnout řešení a vyřešit matematické hry jak ve školním tak i mimoškolním prostředí
17. týmová práce, podílí se na realizaci společných činností
19. posilování pozitivních rysů osobnosti (pracovitost, přesnost, důslednost, sebekontrola a odpovědnost, vytrvalost a schopnost překonávat překážky)
20. zvyšování vhodné míry sebevědomí, odpovědnosti
21. schopnost vlastního úsudku, přijímání hodnocení výsledků své práce, rady i kritiky
26. schopnost analýzy a syntézy

2) Pracovní listy na magické čtverce v tištěné podobě
III. Individuálně-skupinová práce

Touto metodou se chce docílit, aby se žák koncentroval na práci s počty a dedukcí a byl schopen předložit své výsledky spolužákům a pracovat v týmu. Metoda je velmi jednoduchá, pracovní listy se rozdají žákům a ti mají deset minut na to, aby přemýšleli individuálně nad možnostmi řešení. Poté, se žáci rozdělí do skupin po čtyřech žácích. Je dobré, aby tyto skupiny nebyly málo nebo příliš početné. Mají vymezený čas na to, aby vyřešili daný příklad. Tento čas může být různě dlouhý, ale pevně stanovený. Pro patnáctileté žáky je optimální čas deset až patnáct minut. Skupina, která správně vyřeší příklad jako první, předvede řešení zbytku třídy. Pokud žádná skupina nevyřeší příklad v zadaném časovém limitu, může být čas prodloužen anebo řešení příkladu předvede učitel.

Kompetence, které se rozvíjejí touto metodou, číslované jako v části 2.3.1, jsou:

1. rozvinutí pozitivního vztahu k matematice
2. srozumitelná formulace vlastních myšlenek
3. použití přiměřené odborné terminologie v mluveném i písemném projevu
4. dovednost řešit, analyzovat a vyhodnotit matematické hry
5. při řešení problému postupovat přehledně a systematicky
6. provádět kontrolu správnosti výsledků řešení dané úlohy
8. dovednost analogického myšlení
10. rozvinout své abstraktní a logické myšlení,
12. dovednost matematického uvažování
13. provádět jednoduché výpočty z paměti, náročnější písemně
14. dovednost používat strategie rozboru problémů a schopnost navrhnout řešení a vyřešit matematické hry jak ve školním tak i mimoškolním prostředí
15. dovednost kritického myšlení
17. týmová práce, podílí se na realizaci společných činností
18. samostatné učení a práce
19. posilování pozitivních rysů osobnosti (pracovitost, přesnost, důslednost, sebekontrola a odpovědnost, vytrvalost a schopnost překonávat překážky)
20. zvyšování vhodné míry sebevědomí, odpovědnosti
21. schopnost vlastního úsudku, přijímání hodnocení výsledků své práce, rady i kritiky
24. komunikační dovednosti ústní a písemné
25. vystupování na veřejnosti, veřejná diskuze, prezentace a obhajoba svých návrhů
26. schopnost analýzy a syntézy
27. schopnost kritické analýzy

3) Pracovní list na křížové součty v elektronické podobě

IV. Individuální práce

Žáci se posadí zvlášť k počítačům. Jestliže je počet žáků větší než počet počítačů, což je běžné v našich školách, mohou se posadit do dvojic. Je jim předložen soubor s přibližně deseti příklady v Excelu. Počet příkladů závisí na obtížnosti, deset příkladů je optimální pro 45 minut práce. Žáci příklady vypracují, uloží a odevzdají učiteli. Způsob odevzdání může být prostřednictvím paměti flash, uložením na předem určené místo v počítači nebo prostřednictvím sítě přímo do počítače učitele do složky vytvořené pro jejich uložení. Pokud žáci použijí paměť flash, kterou dnes téměř všichni vlastní, rovněž je možné získat je velmi levně pro školní využití, mohou si příklady odnést domů a vypracovat ty, které nestihli vyřešit v určeném časovém limitu. Vyřešené pak mohou poslat učiteli emailem nebo odevzdat příští hodinu. Opět proto, aby všichni žáci vyřešili všechny příklady.

Kompetence, které se rozvíjejí touto metodou, číslované jako v části 2.3.1, jsou:

1. rozvinutí pozitivního vztahu k matematice
2. srozumitelná formulace vlastních myšlenek srozumitelně
4. dovednost řešit, analyzovat a vyhodnotit matematické hry
8. dovednost analogického myšlení
10. rozvinout své abstraktní a logické myšlení,
12. dovednost matematického uvažování
13. provádět jednoduché výpočty z paměti, náročnější písemně
14. dovednost používat strategie rozboru problémů a schopnost navrhnout řešení a vyřešit matematické hry jak ve školním tak i mimoškolním prostředí
18. samostatné učení a práce
19. posilování pozitivních rysů osobnosti (pracovitost, přesnost, důslednost, sebekontrola a odpovědnost, vytrvalost a schopnost překonávat překážky)
20. zvyšování vhodné míry sebevědomí, odpovědnosti
23. využívání ICT (informační a komunikační technologie)
26. schopnost analýzy a syntézy

V. Skupinová práce

Vytvoří se skupiny, kde jsou žáci různých úrovní tak, aby v jedné skupině byli žáci s vyšší a nižší úrovní, ne velmi početné, nejlépe o třech až čtyřech žácích. Doporučuje se, aby skupiny nebyly tvořeny více než třemi žáky na počítač. Jsou-li skupiny příliš početné, nemohou všichni žáci přímo pracovat s počítačem a snadněji se tak někteří odpojí a nespolupracují. Všechny skupiny dostanou stejné příklady, přibližně deset, záleží na jejich obtížnosti, bez možnosti volby. Tak je docíleno toho, aby práce všech skupin byla stejně obtížná. Stejně jako v předchozím případě je zadán čas pro jejich vypracování, mezi 30 a 40 minutami. Je na žácích, aby si práci zorganizovali tak, jak uznají za vhodné. Na konci práce se sesbírají výsledky a určí se, která skupina vypracovala nejvyšší počet příkladů. Tyto žáky je možné odměnit dobrými známkami. Žáci si rovněž mohou stejným způsobem jako v předešlém případě odnést příklady domů a vypracovat ty, které nestlihli v daném časovém limitu.

Kompetence, které se rozvíjejí touto metodou, číslované jako v části 2.3.1, jsou:

1. rozvinutí pozitivního vztahu k matematice
2. srozumitelná formulace vlastních myšlenek srozumitelně
4. dovednost řešit, analyzovat a vyhodnotit matematické hry
8. dovednost analogického myšlení
10. rozvinout své abstraktní a logické myšlení,
12. dovednost matematického uvažování
13. provádět jednoduché výpočty z paměti, náročnější písemně
14. dovednost používat strategie rozboru problémů a schopnost navrhnout řešení a vyřešit matematické hry jak ve školním tak i mimoškolním prostředí
17. týmová práce, podílí se na realizaci společných činností
19. posilování pozitivních rysů osobnosti (pracovitost, přesnost, důslednost, sebekontrola a odpovědnost, vytrvalost a schopnost překonávat překážky)
20. zvyšování vhodné míry sebevědomí, odpovědnosti
23. využívání ICT (informační a komunikační technologie)
26. schopnost analýzy a syntézy

3.6 Statistická studie

Realizovat obecnou studii o tom, zda jsou pro danou třídu navržené příklady vhodné a použitelné, je velice komplikované a těžce proveditelné. Na prvním místě by se měla zvážit konkrétní situaci ve zmiňované třídě. Tou může být celková úroveň třídy ve studiu matematiky. Zda je úroveň homogenní nebo se naopak setkáváme s žáky s velmi rozličnými úrovněmi, kdy máme žáky, kteří řeší příklady s hravou lehkostí a druhým se zdají být nezdolatelnou překážkou. Také je důležité zvážit celkovou a individuální motivaci ke studiu, úroveň matematických znalostí a dovedností třídy a speciálně pak jedince. Tedy je třeba být si vědom toho, že ve vzdělávání se vyskutují momenty, kdy to, co je vhodné a užitečné pro jedny, nemusí být vhodné pro druhé. To však nic nemění na skutečnosti, že je důležité mít objektivní data, která dávají určitou představu o tom, co by se obecně dalo očekávat.

Takovýmto způsobem byla provedena statistická studie o příkladech, které byly realizované ve vyučovací hodině matematiky. Cílem bylo získat spolehlivější orientaci v použitelnosti vytvořených pracovních listů a možnostech jejich využití. Pro statistickou studii byly vybrány pracovní listy na křížové součty, protože jsou vytvořené jak v tištěné tak elektronické podobě. Tak je možné jejich srovnání. Dalším důvodem je, že v rámci běžné hodiny matematiky je možné vyřešit určitý racionální počet příkladů, který je možno statisticky vyhodnotit. Navíc studie zahrnuje příklady realizované českými a španělskými žáky. Tedy žáky ze zemí, které dle mezinárodního srovnání výukových výsledků patnáctiletých žáků PISA 2009 dosáhly srovnatelných výsledků v matematických kompetencích, 493 Česká republika a 483 Španělsko. Tak byly vyhodnoceny dvě skupiny, které sledují mírně rozdílné tématické plány a metody, ale které se příliš neliší v kompetencích žáků.

3.6.1 Vyhodnocení výsledků pracovních listů v tištěné podobě

Statistická studie byla realizována ve dvou částech. První část s 65 žáky na Gymnáziu a Obchodní akademii Chodov v České republice. Studie byla provedena ve dvou třídách s patnáctiletými žáky. První třída s 33 žáky, ze kterých bylo 16 dívek a 15 chlapců, druhá třída s 32 žáky, ze kterých bylo 16 dívek a 18 chlapců.

Druhá část studie byla provedena na škole Berriz v Rozas de Madrid ve Španělsku, také ve dvou třídách s patnáctiletými žáky. První třída se 30 žáky, ze kterých bylo 16 dívek a 14 chlapců, druhá třída s 28 žáky, ze kterých bylo 15 dívek a 13 chlapců. Výsledky mi byly zaslány v dopise, který uvádím v části přílohy.

V obou případech byli žáci seznámeni s problematikou v úvodní pětiminutové části. Na samostatnou práci měli 40 minut. Výsledné práce byly posbírané na konci hodiny spolu s evaluačním dotazníkem. Práce byla zcela anonymní, jediný požadovaný osobní údaj bylo pohlaví. Obdržená data uvádím v tabulkách v části přílohy .

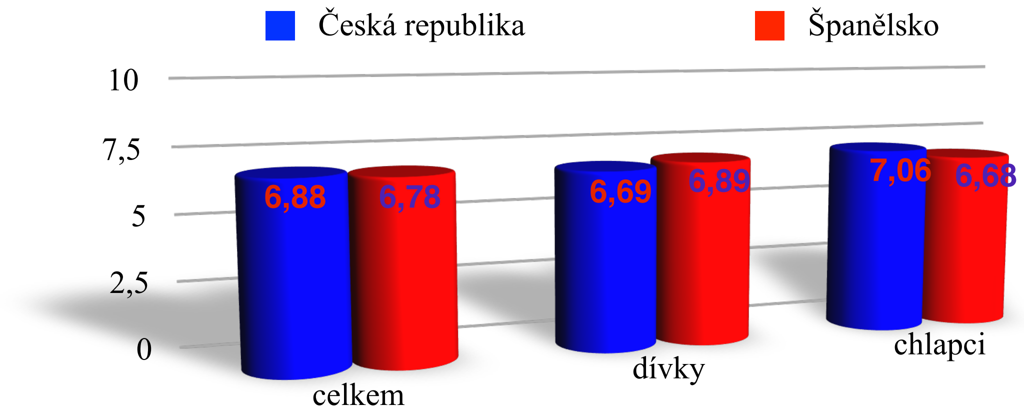
Pro posouzení použitelnosti a možností využití vytvořených příkladů byla realizována statistická studie s žáky mezi 14 a 15 lety. V následující tabulce uvádím počet žáků, kteří správně vyřešili 1 až 10 příkladů během vyučovací hodiny.

Počet příkladů	ČR	ES	ČR dívka	ČR chlapec	ES dívka	ES chlapec
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	0%	0%	0%	0%	0%	0%
3	7,69%	3,45%	12,5%	3,03%	7,41%	0%
4	1,54%	5,17%	0%	3,03%	7,41%	3,57%
5	4,62%	5,17%	6,25%	3,03%	3,7%	7,14%
6	21,54%	34,48%	21,88%	21,21%	22,22%	50%
7	26,15%	18,97%	21,88%	30,3%	14,81%	25%
8	24,62%	13,79%	25%	24,24%	18,52%	10,71%
9	12,31%	18,97%	9,38%	15,15%	25,93%	3,57%
10	1,54%	0%	3,13%	0%	0%	0%
Průměr	6,88	6,78	6,69	7,06	6,89	6,68
Směrodatná odchylka	1,63	1,57	1,84	1,41	1,89	1,25
Medián	7	7	7	7	7	6
Modus	7	6	6 ; 7	7	9	6

Tabulka 1 Procento správně zodpovězených příkladů

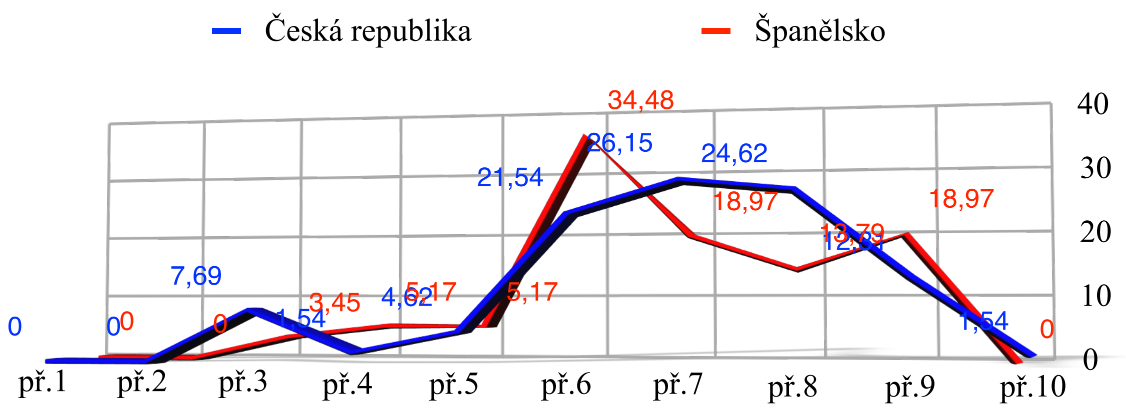
Modus je označen červenou barvou, medián žlutou a oranžová barva je použita, pokud se tyto dvě hodnoty shodují.

Když porovnáme průměrné počty správně vyřešených příkladů dívkami a chlapci z České republiky a ze Španělska, vidíme, že se velice shodují. Vezmeme-li také v úvahu směrodatnou odchylku, můžeme tvrdit, že všechna data spadají do stejného rozmezí. Zaokrouhlíme-li směrodatnou odchylku nahoru a spolu s průměrem na celá čísla, vypočtené rozmezí průměru se rovná hodnotě 7 ± 2 .Tím se potvrzuje, že dané příklady jsou aplikovatelné v mnohých a rozdílných případech. Z čehož můžeme usuzovat, že jejich použití je univerzální, jak se očekávalo.



Obr.40 Průměrný počet správně vyřešených příkladů

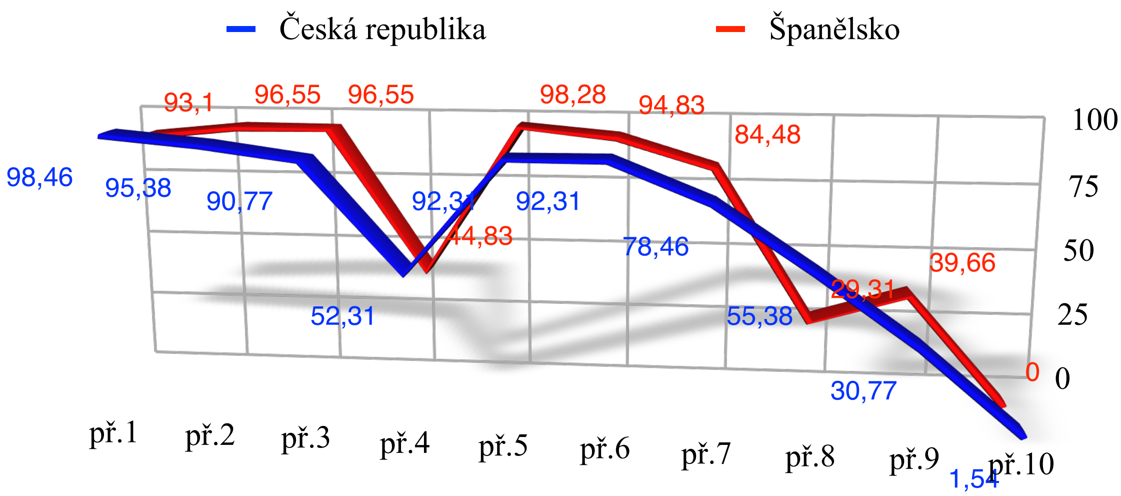
Na druhou stranu musíme mít na zřeteli směrodatnou odchylku, která je pro Českou republiku 1,63 a pro Španělsko 1,57. Její hodnota je způsobena rozdílnými znalostmi žáků, jejich různou motivací apod. Můžeme říct, že její hodnota není příliš vysoká. Kromě toho může být nápomocná učiteli při detekci extrémních případů, jako jsou problémy s počty, koncentrací, nebo naopak žáků s vysokými matematickými schopnostmi.



Obr. 41 Poměr žáků a správných odpovědí

Z tohoto grafu můžeme vyčíst několik zajímavých faktů. Vrchol distribuce počtu správně vyřešených příkladů, kde se nachází většina žáků, je umístěný mezi šesti a sedmi správnými odpověďmi. Lokální maximum v hodnotě tři odpovědi na křivce pro Českou republiku a lokální maximum v hodnotě devět odpovědí na křivce pro Španělsko indikuje žáky, kteří pravděpodobně vykazují speciální potřeby kvůli svému nízkému nebo vysokému výkonu, jak bylo uvedeno v předchozím odstavci.

Pro vyhodnocení výběru příkladů a jejich pořadí v pracovním listě uvádím následující graf.



Obr. 42 Správnost řešení jednotlivých příkladů

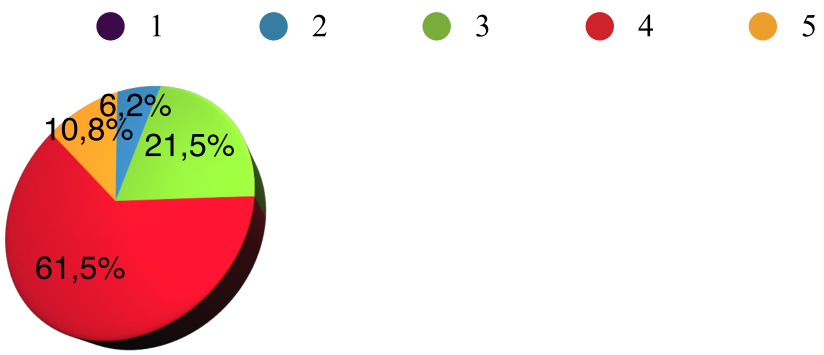
Tento graf ukazuje procentuální počty žáků, kteří správně vyřešili jednotlivé příklady. Znovu se setkáváme s křivkami velmi podobnými pro Českou republiku a pro Španělsko. Obě křivky vykazují vysoké hodnoty, téměř 100 %, u prvních příkladů, od prvního do šestého, s výjimkou příkladu číslo 4, který dosahuje výsledku výrazně nižšího.

Příklad číslo 4 je posledním, pročež nejtěžším, příkladem v řadě příkladů ve formě čtverce, a proto jej byl schopen vyřešit menší počet žáků. Ovšem jeho pozice uprostřed pracovního listu, obklopen jinými lehčími příklady, má svůj důvod. A to jako motivační element. Jeví-li se příklady příliš snadnými anebo předkládají-li se způsobem příliš stereotypním, žák ztrácí pozornost. To se přihodí rovněž v případě, kdy je obtížnost tak vysoká, že se příklad zdá být nedosažitelným v krátkém časovém horizontu. Nemůžeme opomenout, že adolescenti obecně hledají okamžité uspokojení, je pro ně obtížné čekat na výsledek, jak vyplývá z nesčetných psychologických studií. V tomto případě je odměnou úspěšné vyřešení zábavného příkladu, který byl předložen jako cíl.

Na křivkách můžeme sledovat postupný pokles. Příklad číslo 7 vykazuje slabý pokles, u příkladů číslo 8 a 9 je pokles mnohem větší a nakonec příklad číslo 10, který pouze jedna žákyně dokázala vyřešit v čase vymezeném vyučovací hodinou. Jednoznačně pro zvyšující se obtížnost a tím, že čas na řešení byl omezen, musely mít poslední příklady méně správných odpovědí. Přestože to nespadá do statistické studie jako takové, rád bych poukázal, že jak ve Španělsku tak i v České republice žáci žádali učitele, zda by mohli doma dokončit příklady, které nestihli, což nám dává důkaz nesporné síly motivace. Tato schopnost motivace úzce souvisí se vzrůstající obtížností příkladů, jejich přirozeností, a odlišností od běžných příkladů, které se ve třídě probírají.

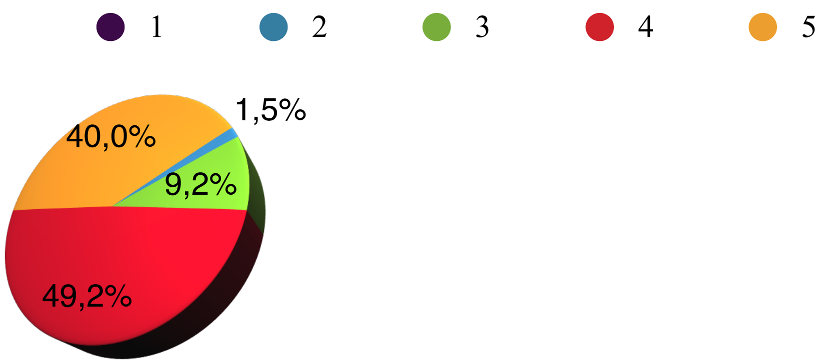
Na závěr této části statistické studie chci ukázat na skutečnost, že medián, modus a průměr jsou si velmi podobné téměř ve všech případech, až na jednu výjimku, modus dívek ze Španělska. Proto mají sestrojené distribuce tvar velice podobný Gaussově křivce. To indikuje, že výsledky provedené statistické studie jsou spolehlivé, neboť nejznámější statistická funkce, u které se průměr, medián a modus shodují, je Gaussova křivka, která se normálně objevuje u těchto typů studií.

Cenný je rovněž názor žáků, který jsem získal prostřednictvím dotazníku, který žáci vyplnili po práci s příklady. Dotazník se skládá z pěti otázek, které žáci hodnotili od jedné do pěti, kde jedna znamená vůbec ne a pět znamená velmi.



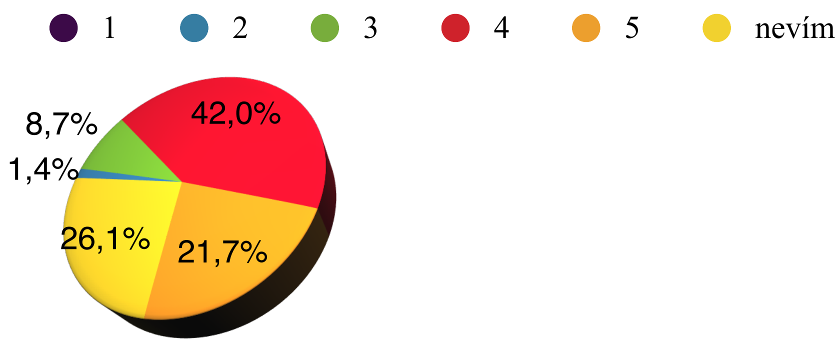
Obr. 43 Vyhodnocení otázky číslo 1 evaluačního dotazníku

Otázka číslo jedna „Líbila se ti dnešní práce v hodině matematiky?“ získala průměrné hodnocení 3,8. To je z bodové stupnice velmi blízko čtyřce, což znamená, že žáci přijali předloženou práci velice dobře. Dosáhnout tak dobrého hodnocení práce je v hodinách matematiky složité. Sami žáci často komentují, že se v hodinách nudí nebo že je matematika nezajímá. Podíváme-li se na rozdělení bodového hodnocení, které znázorňuje obrázek číslo 40, vidíme, že většina žáků hodnotila práci čtyřmi body. Celkem 61,5 % žáků oproti 21,5% žáků, kteří hodnotili práci třemi body, což bylo druhé nejvíce zastoupené bodové hodnocení. Podíváme-li se i na otázku číslo dvě, získáme mnohem názornější pohled.



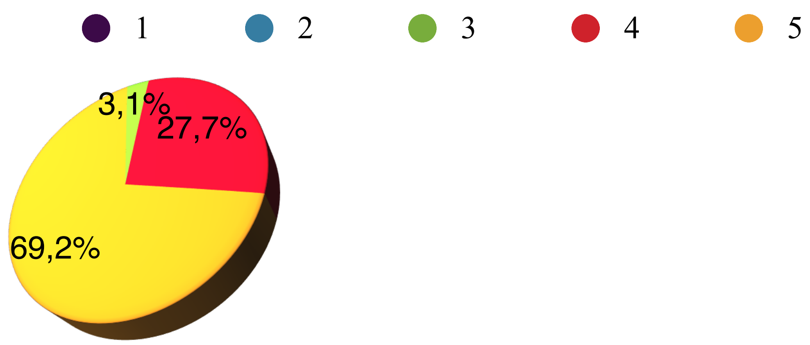
Obr. 44 Vyhodnocení otázky číslo 2 evaluačního dotazníku

Otázka číslo dvě „Jak bys dnešní hodinu hodnotil(a) v porovnání s běžnými hodinami matematiky?“ získala průměrné hodnocení 4,3. Zaznamenáváme zde zvýšení o 13%, které je velice významné zvláště, máme-li na paměti, že již bodové hodnocení otázky číslo jedna bylo velmi vysoké. To nás přivádí k myšlence, že tyto příklady mohou pomoci motivavat žáky k práci v hodinách matematiky, což je obtížným prvkem rozhodujícího významu.



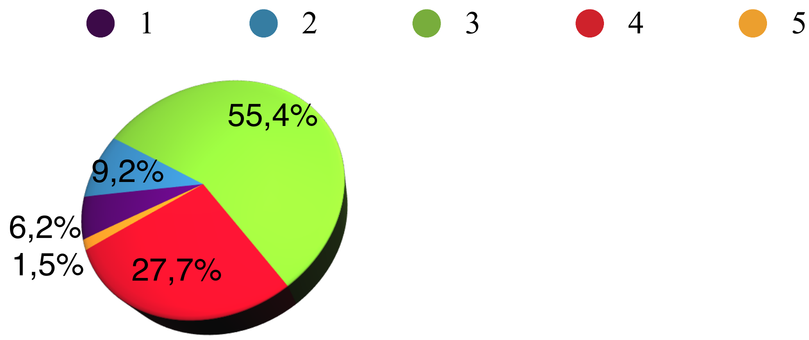
Obr.45 Vyhodnocení otázky číslo 3 evaluačního dotazníku

Otázka číslo tři „Myslíš si, že tato aktivita, nebo jí podobné, by ti mohly pomoci zlepšit se v matematice?“ získala průměrné hodnocení 4,1. Žáci tedy pokračují v pozitivním hodnocení. Hodnocení 4 body se 44,6% zůstává nejvíce zastoupeným bodovým hodnocením. Velice důležitým jevem je, že se objevila nová možnost odpovědi, žáci, kteří na otázku neodpověděli, 27,7%, téměř třetina žáků. Je to způsobeno tím, že žáci nejsou zvyklí spolupodílet se a oceňovat aktivity v hodinách jinak než obvyklým, co se jim líbí, co je nudí, co je pro ně složité nebo naopak lehké. Žáci nejsou navyklí hodnotit prospěšnost příkladů, které jim učitelé předkládají, a vyjadřovat na ně svůj názor. To je dost smutný fakt, pokud vzdělávání nemá být pouhým předáváním vědomostí a jejich hodnocení. Dle Jeana Piageta, švýcarského psychologa a filozofa, je hlavním cílem vzdělávání utvářet takové jedince, kteří budou schopni dělat nové věci, ne jen jednoduše opakovat to, co udělali předchozí generace; jedince, kteří budou kreativní, vynálezci a objevitelé. Druhým cílem je formovat kritickou mysl, která může soudit a ne jen akceptovat vše, co se jí nabídne [17].



Obr. 46 Vyhodnocení otázky číslo 4 evaluačního dotazníku

Otázka číslo čtyři „Pochopil(a) jsi snadno zadání příkladů?“ získala průměrné hodnocení 4,6. Z čehož vyplývá, že žáci pochopili zadání příkladů velmi lehce. Na obrázku číslo 43 můžeme vidět, jak se zvýšilo zastoupení bodového hodnocení pět bodů na téměř 70%. Aktuálně díky studiu kompetencí víme, že tento aspekt a jeho praktikování je velice důležitý. Mnohokrát se setkáváme s případy žáků, kteří mají velké problémy porozumět matematická zadání, což jim způsobuje frustraci. Existence příkladů s velmi jednoduchým zadáním, jako jsou tyto, a postupné zavádění stále složitějších zadání může takovýmto žákům pomoct být v obraze a dohnat své spolužáky.



Obr. 47 Vyhodnocení otázky číslo 5 evaluačního dotazníku

Otázka číslo pět „Zdály se ti příklady lehké z matematického hlediska?“ získala průměrné hodnocení 3,1. Na obrázku číslo 44 můžeme vidět, jak bodové hodnocení tři body získalo s 55,4% nejvyšší zastoupení. Takové hodnocení je normální, ani hodně, ani málo. Je v kontrastu s předchozími odpověďmi, kde žáci hodnotili, jestli se jim příklady líbí nebo obtížnost zadání vyšším bodovým hodnocením. Příklady s jednoduchým zadáním mohou skrývat obtížnost ve svém řešení. To nám dává možnost pracovat s jistými oblastmi, jako je v tomto případě deduktivní myšlení. Zaměřit žáky na tento aspekt práce a to tak, že jim ulehčíme práci na jiných kompetencích, jako je porozumění zadání. Také je dobré uvést, že ačkoliv žáci nehodnotili příklady jako lehké, dosáhli velmi dobrých výsledků v jejich řešení, jak můžeme vidět v první části této studie.

3.6.2 Vyhodnocení výsledků pracovních listů v elektronické podobě

Tato část statistické studie byla provedena rovněž ve dvou třídách s patnáctiletými žáky na víceletém gymnáziu a obchodní akademii v Chodově v České republice. První třída s 20 žáky, ze kterých bylo 10 dívek a 10 chlapců. Druhá třída se 16 žáky, ze kterých bylo 8 dívek a 8 chlapců.

V obou případech byli žáci seznámeni s problematikou v úvodní pěti minutové části. Na samostatnou práci měli 40 minut. Na konci hodiny byla zaznamenána data o provedené práci spolu se sesbíráním evaluačních dotazníků, které byly zcela anonymní, jediný osobní údaj bylo pohlaví. Obdržená data uvádím v tabulkách v části přílohy.

Pro posouzení použitelnosti a možností využití vytvořených příkladů byla realizována statistická studie s žáky mezi 14 a 15 lety. V následující tabulce uvádím počet žáků v procentech, kteří správně vyřešili 1 až 10 příkladů během vyučovací hodiny.

Počet příkladů	ČR	ČR dívka	ČR chlapec
1	0	0	0
2	0	0	0
3	2,78%	5,56%	0
4	5,56%	5,56%	5,56%
5	2,78%	0	5,56%
6	2,78%	0	5,56%
7	30,56%	44,44%	16,66%
8	36,11%	27,78%	44,44%
9	19,44%	16,67%	22,22%
10	0	0	0
Průměr	7,39	7,22	7,56
Směrodatná odchylka	1,49	1,56	1,38
Medián	8	7	8
Modus	8	7	8

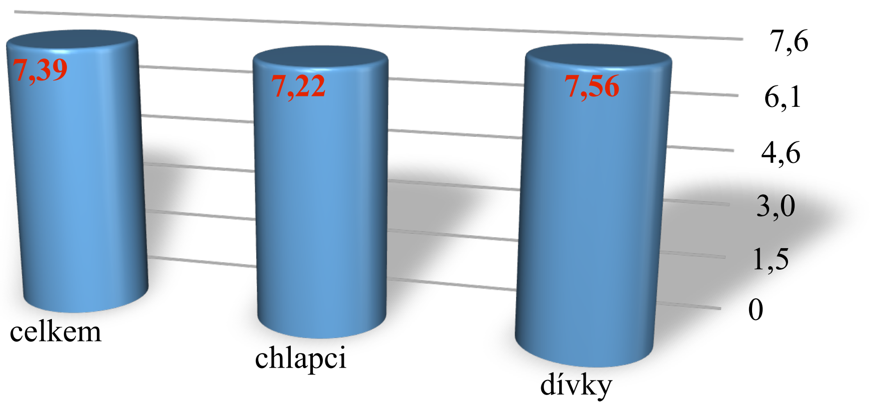
Tabulka 2 Procento správně zodpovězených příkladů

Modus je označen červenou barvou, medián žlutou a oranžová barva je použita, pokud se tyto dvě hodnoty shodují.

Jestliže porovnáme průměrné počty správně vyřešených příkladů dívkami a chlapci, vidíme, že jsou doopravdy téměř identické a samozřejmě všechny spadají do předpokládaného intervalu 7 ± 2 , vezmeme-li v úvahu směradatnou odchylku, kterou spolu s průměrem zaokrouhlíme na celá čísla. Opět můžeme získat stejné závěry ohledně univerzálnosti těchto příkladů a jejich možné aplikace v mnohých a rozdílných případech.

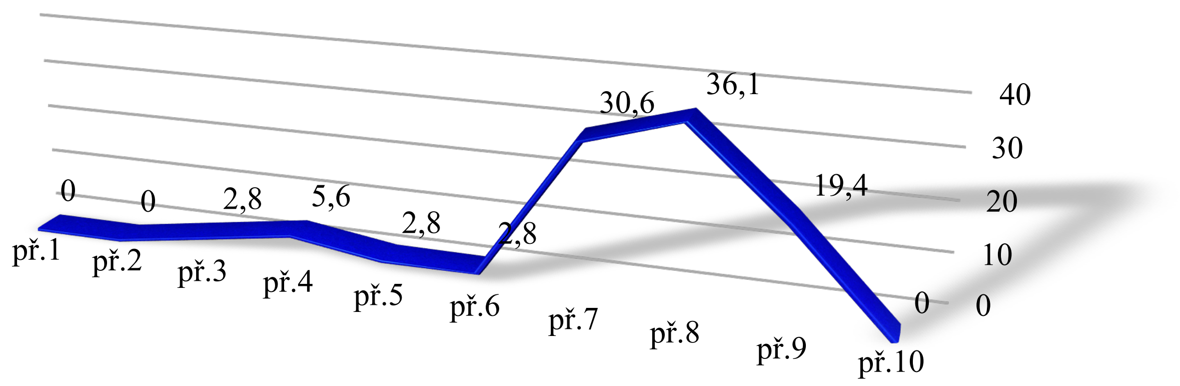
Také půžeme potvrdit, že obdržené výsledky jsou velmi podobné výsledkům, které jsme získali s použitím pracovních listů. Přestože konečný výsledek 7 ± 2 je stejný, hodnota se zvýšila v průměru o 0,5 příkladu.

Co se týká směrodatné odchylky, je pravda, že její hodnoty se téměř vůbec nezměnily. To je jako i v předchozím případě způsobeno tím, že se ve třídě setkáváme s žáky s rozdílnou úrovní znalostí, dovedností a motivace, což způsobuje, že někteří žáci se nacházejí mimo vytýčené rozmezí, což ale opět může posloužit učiteli k detekci speciálních případů ve třídě.



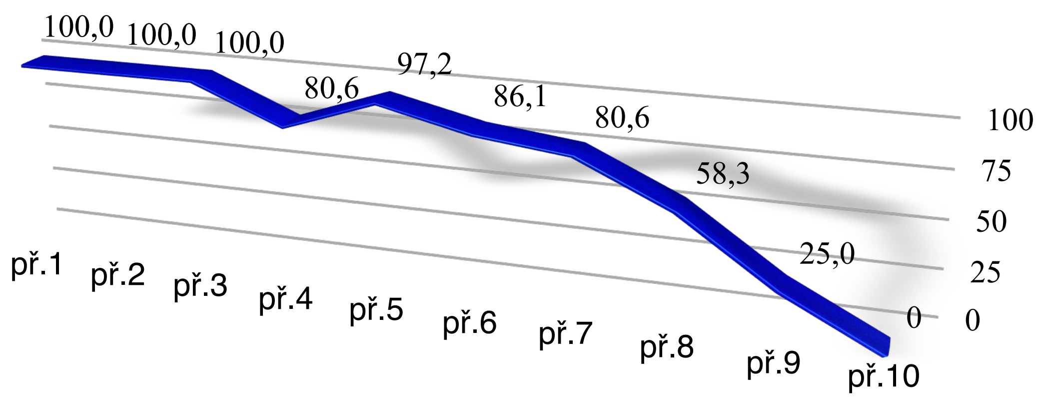
Obr. 48 Průměrný počet správně vyřešených příkladů

Následující graf uvádí procenta žáků, kteří správně zodpověděli 1 až 10 příkladů. Tato křivka vykazuje vrchol, stejně jako v případě výsledků získaných z pracovních listů, ikdyž v tomto případě je mírně posunut, umísťujíc se mezi sedmi a osmi správnými odpověďmi. Tento výsledek je velmi důležitý, uvážíme-li, že zvýšit hodnotu, kdy počet správně vyřešených příkladů při použití pracovních listů již byl vysoký, je komplikované. V zóně 7, 8 a 9 správných odpovědí se nachází více než 80% žáků. Na křivce se nachazí lokální maximum v hodnotě čtyři správné odpovědi, což stejně jako v případě pracovních listů může ukazovat na žáky, kteří pravděpodobně vykazují speciální potřeby, což, jak už bylo řečeno, může být velice užitečné pro učitele.



Obr. 49 Poměr žáků a správných odpovědí

Následující graf ukazuje procentuální počty žáků, kteří správně vyřešili jednotlivé příklady.



Obr. 50 Správnost řešení jednotlivých příkladů

Vidíme, jak se tento graf velice podobá grafu, který jsme obdrželi při použití pracovních listů. Musíme mít na zřeteli, že pro realizaci této části statistické studie byly hledány stejné příklady, ale s několika zajímavými rozdíly. V první řadě vidíme, jak 100% žáků správně zodpovědělo příklady 1, 2, 3 a téměř i příklad 5. Tedy, že počet udělaných chyb je nižší. Mnohem zajímavější je vidět, jak příklad 4 dosahuje nižšího propadu než v případě použití pracovních listů.

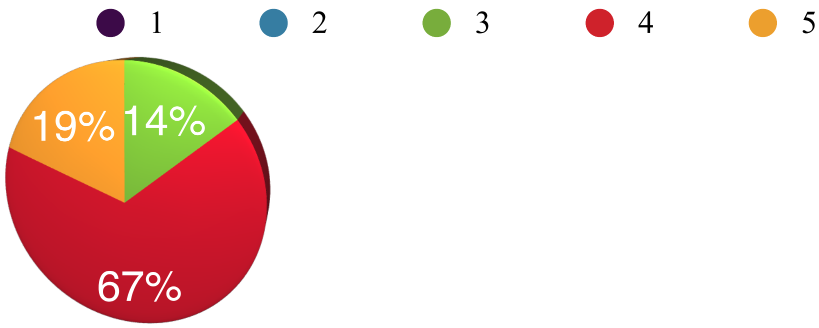
Zamyslíme-li se nad tímto datem, že žáci příklad, ačkoliv složitý, nepřeskočili, nenechali si ho na později, ale naopak pokračovali v jeho řešení dokud nedosáhli odpovědi, můžeme dospět k zajímavému názoru. Proti všeobecnému mínění, že počítače a obrazovky snižují schopnost koncentrace našich žáků, je pro žáky, protože se s počítači a obrazovky setkávají již od svého narození, daleko jednodušší pomoci nich udržet pozornost. Tuto schopnost je možné s použitím adekvátních materiálů využít k jejich učení namísto abychom se stavěli proti nim.

Jak říká Marc Prensky, americký expert ve vzdělávání a videohrách, není tomu tak, že děti nejsou schopné soustředit se. Pokud jim pustíš videohru, budou jí věnovat pozornost a soustředit se na ní dlouhou dobu, neboť to je právě to, co se jim líbí. Jsou více ochotné věnovat pozornost tomuto novému tipu podnětů [18].

Pokles křivky začíná osmou otázkou a je v tomto případě strmější než v případě použití pracovních listů. Hlavním důvodem poklesu křivky je čas, větší věnování se příkladu čtyři a vzrůstající obtížnost příkladů.

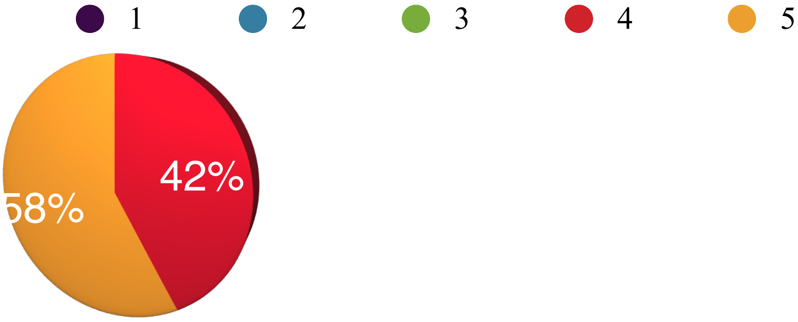
I v tomto případě a mnohem naléhavěji, téměř 100% žáků požadovalo kopii souboru s příklady pro práci doma. Mimo statistickou studii, kvůli nedostatku objektivních dat, je to dobrá informace o motivační schopnosti těchto příkladů.

Opět je vyhodnocen názor žáků, který jsem získal prostřednictvím dotazníku, který žáci vyplnili po práci s příklady. Dotazník se skládá z pěti otázek, které žáci hodnotili od jedné do pěti, kde jedna znamená vůbec ne a pět znamená velmi.



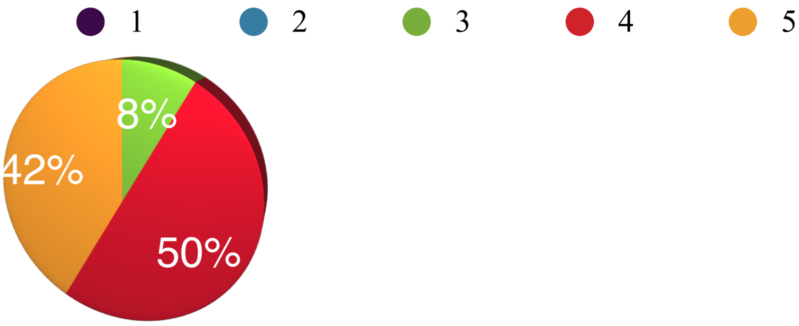
Obr. 51 Vyhodnocení otázky číslo 1 evaluačního dotazníku

Otázka číslo jedna „Líbila se ti dnešní práce v hodině matematiky?" získala průměrné hodnocení 4,1. Velmi blízko čtyřce, ale vyšší než v případě pracovních listů, což znamená, že žáci přijali předloženou práci velice dobře. Rozdělení bodového hodnocení se poněkud změnilo, vzrostlo hodnocení čtyřmi body a pokleslo až na nulu hodnocení dvěmi body. Názor žáků je tedy více homogenní. Dobré přijetí žáky je velice výhodné jak pro samotné žáky, tak pro učitele, neboť pozornost k práci snižuje nežádoucí chování.



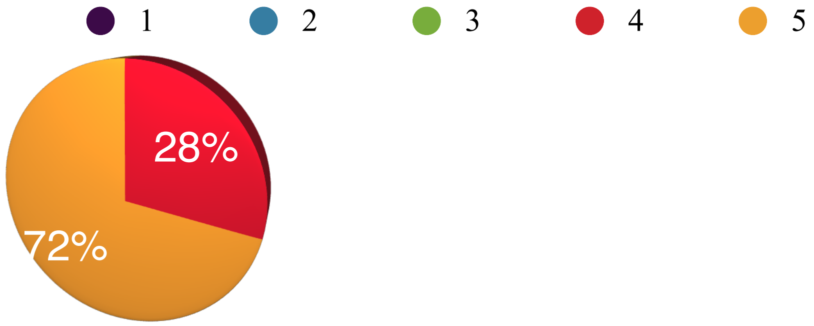
Obr. 52 Vyhodnocení otázky číslo 2 evaluačního dotazníku

Otázka číslo dvě „Jak bys dnešní hodinu hodnotil(a) v porovnání s běžnými hodinami matematiky?“ získala průměrné hodnocení velmi vysoké a to 4,6. Zaznamenáváme zde významné zvýšení o 0,5 bodu vzhledem k první otázce, tedy o 10%, které je ještě pozoruhodnější, máme-li na paměti, že již bodové hodnocení stejné otázky v případě pracovních listů bylo s hodnotou 4,3 velmi vysoké. Rovněž v tomto případě je distribuce homogenní, téměř můžeme říct, že dochází k totální shodě, kdy se žáci pouze rozhodují, zda se líbila hodně nebo velmi. Hodnocení 5 je s více než 50% nejvíce zastoupeným bodovým hodnocením.



Obr. 53 Vyhodnocení otázky číslo 3 evaluačního dotazníku

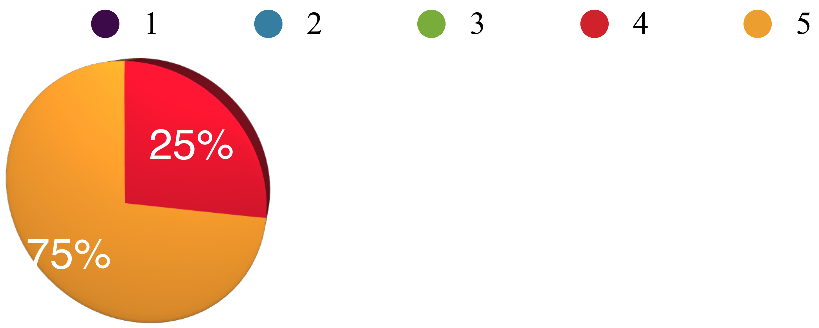
Otázka číslo tři „Myslíš si, že tato aktivita, nebo jí podobné, by ti mohly pomoci zlepšit se v matematice?“ získala průměrné hodnocení 4,3. Tedy vyšší hodnocení než v případě pracovních listů, ale důležitější je, že vymizeli odpovědi typu nevím. Žáci se tedy cítí aktivněji, uvnitř vzdělávacího procesu. Je velmi důležité dělat je zodpovědnými za svůj vlastní rozvoj ve vzdělání. Navíc polovina žáků hodnotí tyto příklady jako velmi dobré a téměř druhá polovina jako dobré.



Obr. 54 Vyhodnocení otázky číslo 4 evaluačního dotazníku

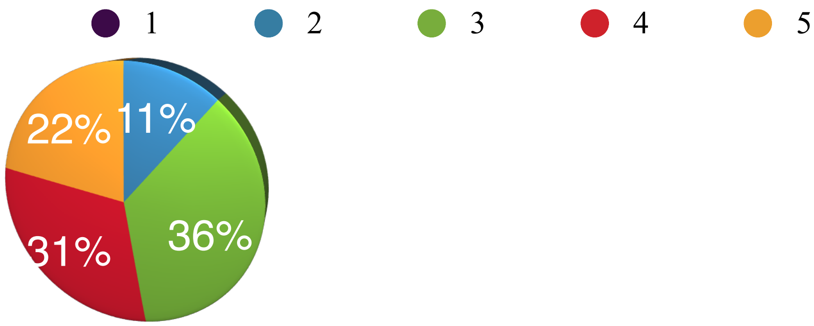
Otázka číslo čtyři „Pochopil(a) jsi snadno zadání příkladů?“ získala jako v případě pracovních listů vysoké hodnocení, v tomto případě 4,7. Tím můžeme potvrdit, že pro naše žáky zařazení počítačů do práce v hodině neznemožňuje pochopení jiných konceptů nebo zadání, jak si mnoho učitelů myslí, že přinášejí rozptýlení navíc.

Tuto otázku by bylo dobré porovnat s otázkou číslo šest, proto tuto otázku posuneme.



Obr. 55 Vyhodnocení otázky číslo 6 evaluačního dotazníku

Otázka číslo šest „Bylo pro tebe snadné naučit se používat daný počítačový program?“ získala průměrné hodnocení 4,8 s třetinou odpovědí lehké a dvěmi třetinami velmi lehké. Tedy pro žáky nepředstavuje použití počítačů žádnou zátěž navíc, jde-li o věc tak jednoduchou jako pochopení těch nejlehčích zadání. Tento závěr je vyvozen z hodnocení otázek čtyři a šest, která jsou téměř identická. To, aby se nekomplikovala práce žáků, je při tvorbě počítačových materiálů důležitým bodem.



Obr. 51 Vyhodnocení otázky číslo 5 evaluačního dotazníku

Otázka číslo pět „Zdály se ti příklady lehké z matematického hlediska?“ získala průměrné hodnocení 3,6. Tedy 0,5 bodu více než hodnocení stejné otázky v případě pracovních listů, což bylo způsobené zvýšením hodnocení čtyřmi a pěti body. Jak můžeme vidět, názor žáků ohledně obtížnosti příkladů se změnil, vídí je lehčími, ačkoliv obtížnost příkladů byla stejná. Tedy zřetelně můžeme z otázek 4, 5 a 6 vyvodit závěr, že počítače nekomplikují práci žáků, pokud se představí jasným způsobem. Z otázek 1, 2 a 3 můžeme odvodit, že je možné zvýšit motivaci žáků skrz příklady trochu odlišné od těch běžných, jestliže je rovněž prezentujeme za použití technologie jako je počítač.

3.6.3 Závěr statistické studie

Závěry, které můžeme vyjmout z této statistické studie a použití vytvořených materiálů jsou následující:

I. Materiál je prakticky univerzálně použitelný. Jak jsme viděli v provedené studii, neexistují významné rozdíly u získaných výsledků žáků, kteří sledovali rozdílné tématické plány, jak jsme viděli v porovnání mezi českými žáky a španělskými. Použití materiálů závisí na učiteli a jejich prospěšnosti pro jeho konkrétní žáky. To v sobě rovněž obsahuje možnost použít materiály pro různé věkové skupiny. Nejsou vyžadovány pokročilé početní znalosti, pouze mladší žáci budou potřebovat na řešení více času.

II. Materiály je možno použít k detekci speciálních případů. Jak jsme viděli, obrázky číslo 38 a 46, poměr žáků a správných odpovědí, nám ukazují žáky, kteří vypracovali hodně nebo málo příkladů. Tito žáci mají nízkou nebo vysokou úrověň v počtech a logice. Tento materiál by také bylo možné použít jako pomocný materiál pro žáky s nízkou úrovní.

III. Příklady jsou řazeny od nejjednoduššího k nejtěžšímu s jedním vmezeřeným obtížnějším příkladem. Jak vidíme na obrázku číslo 39 a 47, správnost řešení jednotlivých příkladů, žáci vyřešili nejlépe první příklady, s výjimkou obtížnějšího čtvrtého, vmezeřeného. Jeho úkolem je udržet koncentraci žáků.

IV. Materiály mohou být využity jako motivační nástroj. Jak vidíme, odpovědi na otázky číslo 1, 2 a 3 evaluačního dotazníku jsou pozitivní. Žákům se líbí práce s odlišnými příklady, které jim přinášejí nové výzvy.

V. Použití počítačů v hodině je dalším motivačním nástrojem. To vidíme, porovnáme-li odpovědi na otázky číslo 1, 2 a 3 evaluačního dotazníku pro případ použití pracovních listů nebo použití programu Microsoft Excel. Žáci hodnotili ještě vyšším bodovým hodnocením případ použití programu Microsoft Excel, ačkoliv již hodnocení případu použití pracovních listů bylo vysoké.

VI. Použití počítačů a příkladů vypracovaných v programu Microsoft Excel pomáhá, aby byli žáci vytrvalejšími v hledání řešení. To vidíme, porovnáme-li grafy ukazující počty žáků, kteří správně vyřešili jednotlivé příklady, obrázek číslo 39 a 47. V případě použití programu Microsoft Excel více žáků dospělo k správnému vyřešení příkladu číslo 4, který byl obtížnější.

VII. Žáci se cítí více zapojení do procesu svého vzdělávání, pokud použijeme takové materiály, jako například příklady vypracované v programu Microsoft Excel, které se více přibližují tomu, co se jim líbí. To vidíme, porovnáme-li odpovědi na otázku číslo 3 evaluačního dotazníku, obrázek číslo 42 a 49. V případě použití pracovních listů 26,1% žáků na otázku neodpověděli, zatímco v případě použití programu Microsoft Excel všichni žáci na otázku odpověděli.

VIII. Zadání příkladů nezvyšuje obtížnost příkladů. To dokazují odpovědi na otázku číslo 4 evaluačního dotazníku, obrázek číslo 43 a 50. Žáci se mohou plně soustředit na práci s počty a logikou.

IX. Použití počítače a příkladů speciálně připravených nezvyšuje obtížnost práce. To dokazují odpovědi na otázku číslo 6 evaluačního dotazníku, obrázek číslo 50. Používaní počítače je pro žáky běžnou záležitostí, jejich použití pro vzdělávací cíle nenavyšuje obtížnost vždy, pokud je rozhraní jednoduché, jako v tomto případě.

Je možné předpokládat, že závěry I, II a IV jsou platné i pro pracovní listy na magické čtverce.

4 Závěr

V současnosti mají učitelé snadný přístup k mnoha didaktickým materiálům. Dnes, kdy se běžně používá internet jako komunikační médium, se počet materiálů znásobil. Nicméně mnoho těchto materiálů je neuspořádaných a chybí jim instrukce. Pro učitele je velice přínosné mít přístup k používání různých materiálů. Ovšem přínos by byl mnohem větší, kdyby byly materiály opatřeny informacemi o tom, které kompetence rozvíjejí, jak s příklady pracovat, jak jsou obtížné, kolik příkladů zvládnou v průměru žáci vyřešit v určitém časovém úseku, řešení příkladů a další údaje, které usnadňují práci s didaktickými materiály.

Hlavním cílem diplomové práce bylo vytvořit nový didaktický materiál pro hodiny matematiky v rámci druhého stupně základního vzdělávání, který by rozvíjel logické, kombinatorické, systematické a kritické myšlení. Didaktický materiál byl zpracován ve formě pracovních listů v papírové a elektronické podobě. Součástí diplomové práce je CD, kde se nachází pracovní listy v elektronické podobě.

Základem pracovních listů jsou příklady na křížové součty a magické čtverce. Křížové součty jsou početní matematické hry, ve kterých se musí rozmístit série čísel do předem daných políček tak, aby jejich součet byl vždy stejný ve vyznačených liniích a aby nejméně jedno číslo z uvedené série čísel bylo zastoupeno ve více než jedné linii. Nejběžnější formy křížových součtů jsou forma kříže, trojúhelníku a čtverce. Vyznačují se společnými vlastnostmi. Některá čísla se v součtu opakují a konstanta křížového součtu je omezena minimální a maximální hodnotou.

Na základě teoretických poznatků bylo sestrojeno 23 příkladů na křížové součty a 3 příklady na magické čtverce v programu Microsoft Excel. Program byl vybrán záměrně pro svojí uživatelskou jednoduchost a rozšířenost mezi populací. Zadání příkladů umožňuje několik řešení. Některé příklady nejsou řešitelné, což bývá pro žáky obtížné rozpoznat. V pracovním listu, který byl použit ve statistické studii, se objevilo zadání jednoho příkladu dvakrát. Záměrem bylo, aby si žáci uvědomili, že příklady mohou mít několik různých řešení.

Statistická studie mě vede k těmto závěrům:

- Použití těchto materiálů není vázano na konktrétní vzdělávací systém.
- Příklady pro svou odlišnou formu zadání aktivují žáky k práci.
- Materiál ve formě hry motivuje žáky k řešení, podněcuje je k většímu výkonu a pomáhá jim soustředit se.
- Materiály mohou být použity učitelem k identifikaci žáků s problémy v oblasti matematických operací.
- Pracovní listy v elektronické podobě zvyšují samostatnost práce žáků, ulehčují jim práci, ale zároveň je svádí k použití metody pokus omyl.
- Pracovní listy v elektronické podobě pomáhají učiteli zvýšit pozornost žáků k řešení problému, neboť počítače jsou žákům blízké.

Myslím si, že cíl diplomové práce byl splněn. Vytvořené didaktické materiály jsou použitelné v praxi a mohou sloužit jako vodítko pro tvorbu podobných materiálů. Učitel získá sadu příkladů s kompletním řešením, které může lehce obměňovat. Žáci pomocí řešení křížových součtů a magických čtverců rozvíjejí mnohé kompetence a učí se nové algoritmy.

Seznam literatury

[1] ŽELEZNÝ, Ivo. *IQ Mensa 8: Magické obrazce.* 1. vydání. Praha: IŽ, 2001. ISSN 1212-8236.

[2] FUCHS, Eduard. *Magické čtverce aneb Od knihy I-ťing k internetové současnosti.* [online]. [cit. 2004-4-14].
URL: <http://bart.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/mactv.pdf>.

[3] *The Euler's 8x8 magic square.* [online]. [cit. 2009-5-13].
URL:<http://www.chess.com/article/view/the-eulers-8x8-magic-square>.

[4] *De cuadrados mágicos y Gaudí.* [online]. [cit. 2009-3-2].
URL: <http://unamodernacajadepandora.blogspot.com/2009/03/de-cuadrados-magicos-y-gaudi.html>.

[5] *Los Cuadrados Mágicos (2) Tipos de Cuadrados Mágicos.* [online]. [cit. 2009-7-21]. URL: <http://www.medicina21.com/doc.php?op=especialidad3&id=2974>.

[6] LAUGWITZ, Detlef. *Eulerovy čtverce. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. 1980, 25, 2 [cit. 2010]. URL:
<http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/139131/PokrokyMFA_25-1980-2_3.pdf>.

[7] ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce.* [online]. [cit. 2009].
URL: <http://mks.mff.cuni.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf>.

[8] *Hacer sudokus combate la enfermedad de Alzheimer.* [online]. [cit. 2009-12-10].
URL: <http://www.medicina21.com/doc.php?op=especialidad3&id=2974>.

[9] KALHOUS, Zdeněk aj. *Školní didaktika*. 1. Vydání. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

[10] *ŠVP GOA Chodov*. Chodov. 2009.

[11] SKALKOVÁ, Jarmila. Obecná didaktika. 1. vydání. Praha: ISV, 1999. ISBN 80-85866-33-1.

[12] *Výuka budoucnosti.* [online]. [cit. 2010-2-13].
URL: <http://www.interaktivni-skolni-tabule.cz/interaktivni-tabule-clanky/vyuka-budoucnosti/>.

[13] DOSTÁL, J. *Interaktivní tabule - významný přínos pro vzdělávání.* Časopis Česká škola [online]. [cit. 2009-4-28].
URL: <http://www.ceskaskola.cz/2009/04/jiri-dostal-interaktivni-tabule.html >.

[14] *Schvalovací doložky učebnic říjen 2010.* Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. [online]. [cit. 2010].
URL: <http://www.msmt.cz/vzdelavani/schvalovaci-dolozky-ucebnic-rijen-2010>.

[15] TREBAL, Josef. *Matematika pro 9. Ročník základní školy 1. díl.* 2. vydání. Praha: SNP, 1999. ISBN 80-7235-056-0.

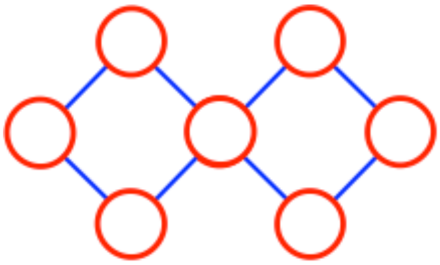
[16] BLAŽKOVÁ, Růžena aj. *Pracovní sešit I. díl k učebnici matematika pro 3.* Ročník. 1. vydání. Praha: Alter, 2006. ISBN 80-7245-087-5.

[17] *Lectura 2. ¿Qué debemos esperar de la escuela?*. [online]. [cit. 2008-1-31]. URL: <http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/articulos/pdf/lectura2_t2.pdf>.

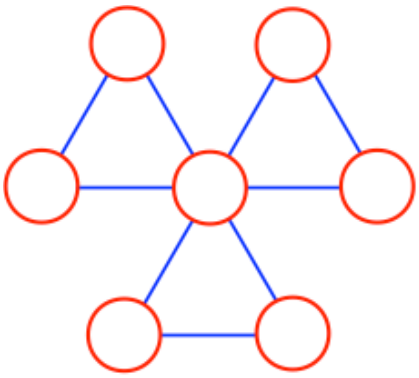
[18] PRENSKY, Marc. Digital Natives, Digital Immigrants, Part II: Do they really think differently? [online] [cit. 2001]. URL: <http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part2.pdf>.

Seznam příloh

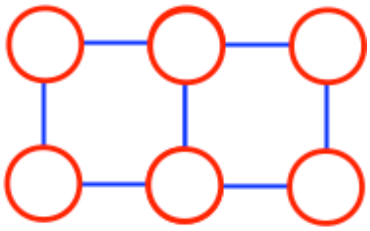
Pracovní list v tištěné podobě



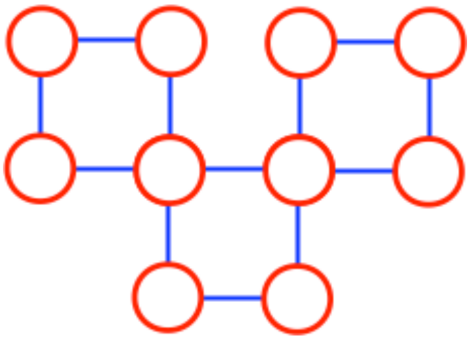
1) Vepište čísla od 1 do 7 tak, aby součty čísel ve dvou čtvercích byly shodné.



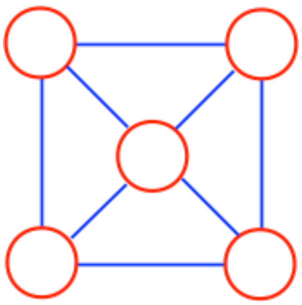
2) Vepište čísla od 1 do 7 tak, aby součty čísel ve třech trojúhelnících byly shodné.



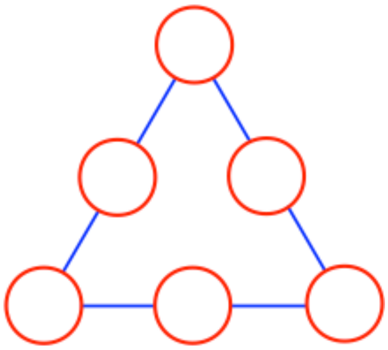
3) Vepište čísla od 1 do 6 tak, aby součty čísel v obou čtvercích byly shodné.



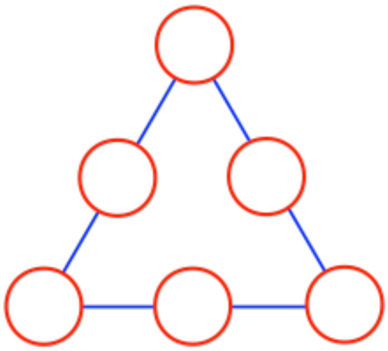
4) Vepište čísla od 1 do 10 tak, aby součty čísel ve všech čtvercích byly shodné.



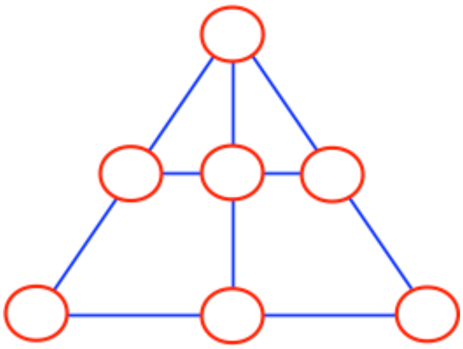
5) Vepište čísla od 1 do 5 tak, aby součty čísel v úlopříčkách a ve čtverci byly shodné.



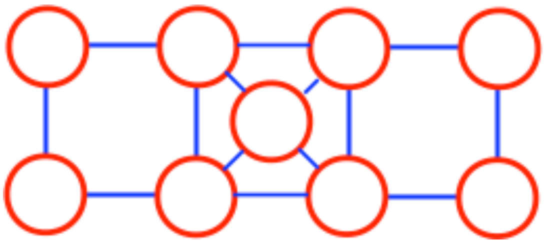
6) Vepište čísla od 1 do 6 tak, aby součty čísel na stranách byly shodné.



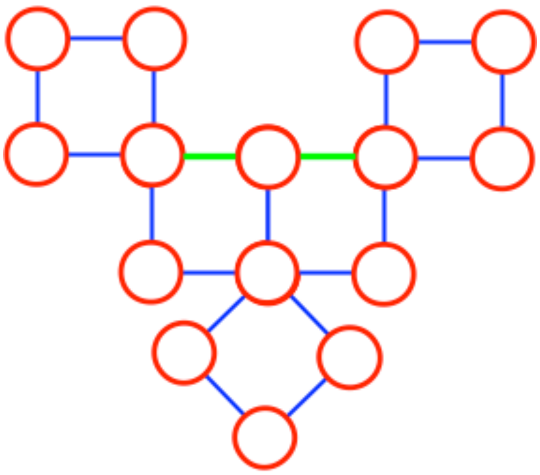
7) Vepište čísla od 1 do 6 tak, aby součty čísel na stranách byly shodné.



8)Vepište čísla od 1 do 7 tak, aby součty čísel na stranách, výšce a střední příčce trojúhelníka byly shodné.



9) Vepište čísla od 1 do 9 tak, aby součty číselve třech čtvercích byly shodné.



10) Vepište čísla od 1 do 15 tak, aby součty číselv pěti čtvercích a na zelené úsečce (tři střední čísla) byly shodné.

Zjistěte, která dvě čísla v magickém čtverci si zaměnila svou pozici.

17	24	1	8	15
23	3	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	5
11	18	25	2	9

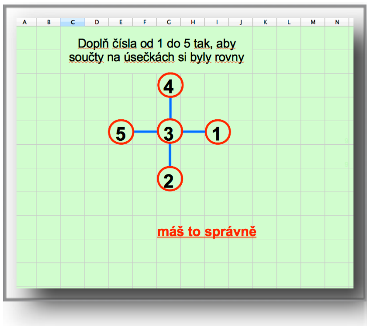
Magický čtverec je narušen jedním číslem, které tam nepatří. Najděte ho.

3	105	102	9	96	18
90	24	84	81	33	21
72	69	45	48	46	57
39	51	63	66	60	54
36	78	27	30	87	75
93	6	12	99	15	108

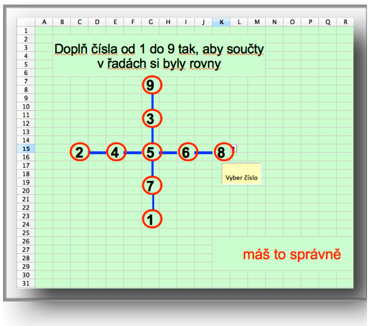
Doplň chybějící čísla z řady čísel od 1 do 16 tak, aby daný čtverec byl magický.

1		14	
		7	9
	10	11	
13		2	

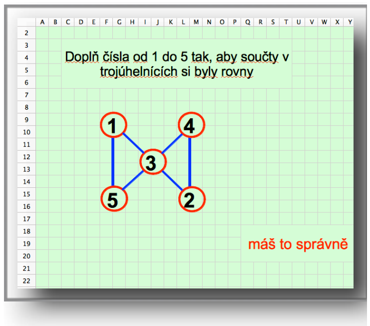
Pracovní listy v elektronické podobě



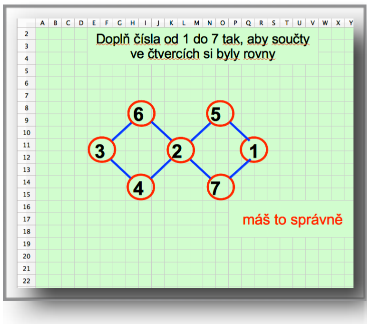
Příklad 1



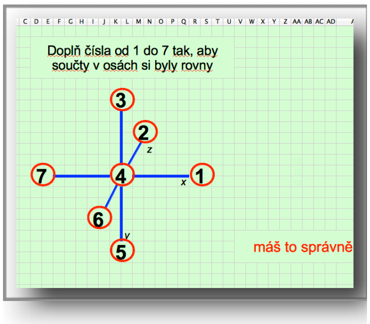
Příklad 2



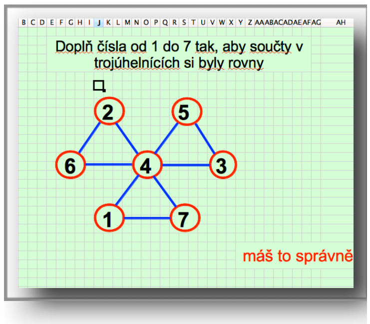
Příklad 3



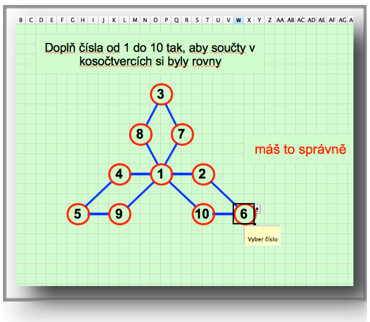
Příklad 4



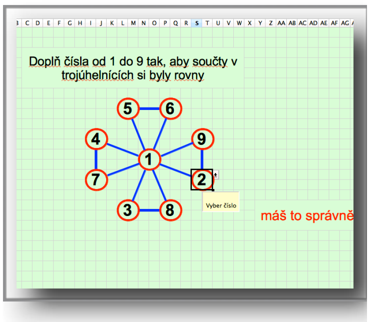
Příklad 5



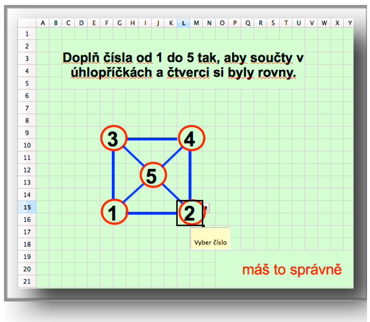
Příklad 6



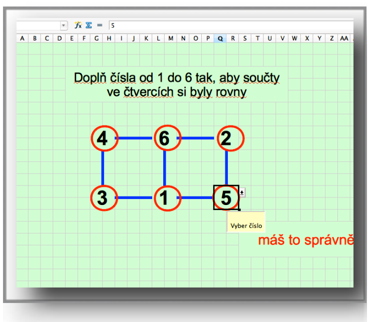
Příklad 7



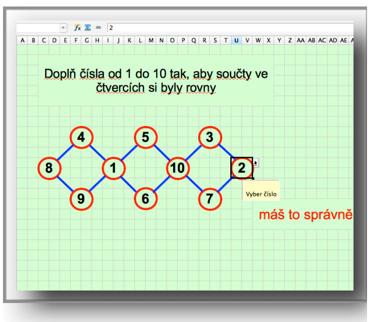
Příklad 8



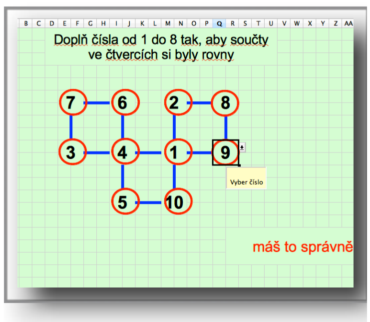
Příklad 9



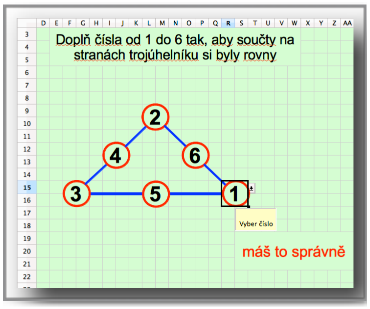
Příklad 10



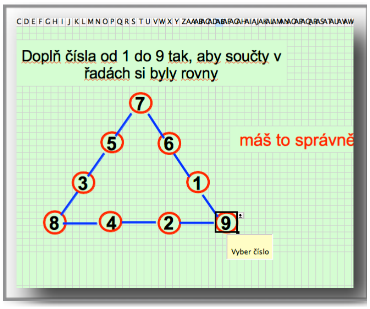
Příklad 11



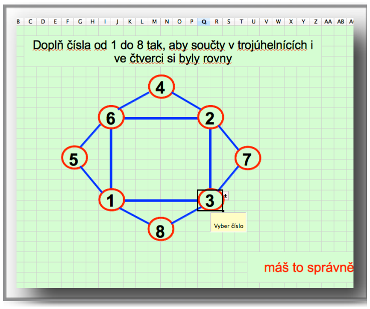
Příklad 12



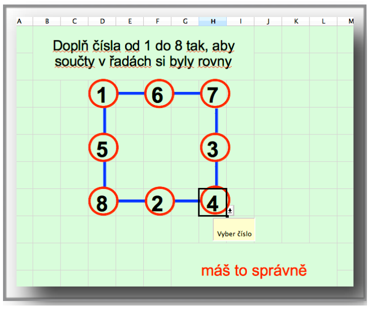
Příklad 13



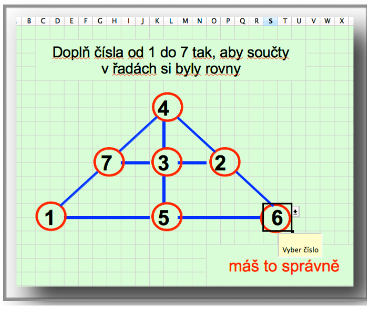
Příklad 14



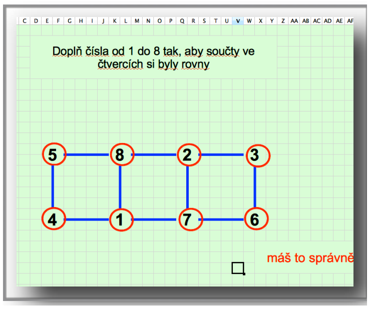
Příklad 15



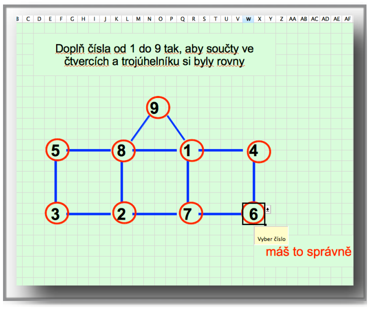
Příklad 16



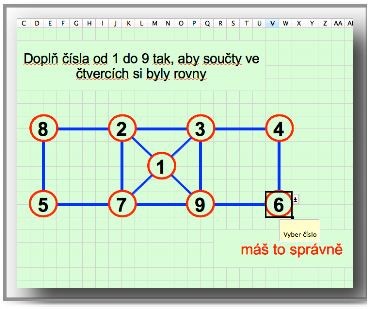
Příklad 17



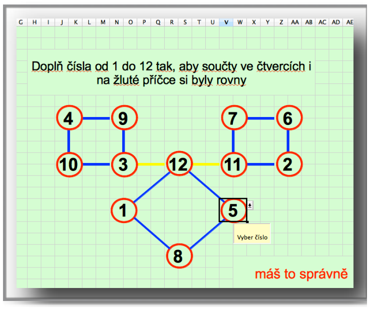
Příklad 18



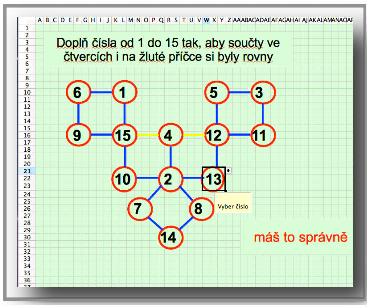
Příklad 19



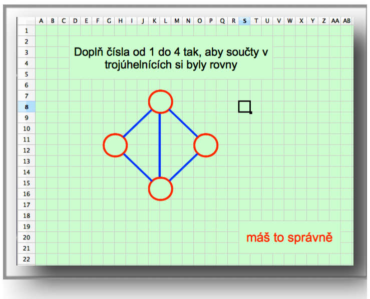
Příklad 20



Příklad 21



Příklad 22



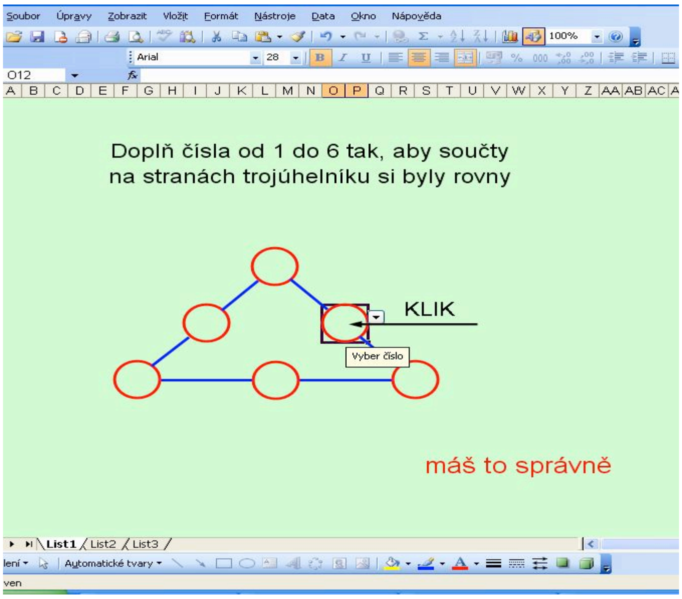
Příklad 23

Manuál pro žáky

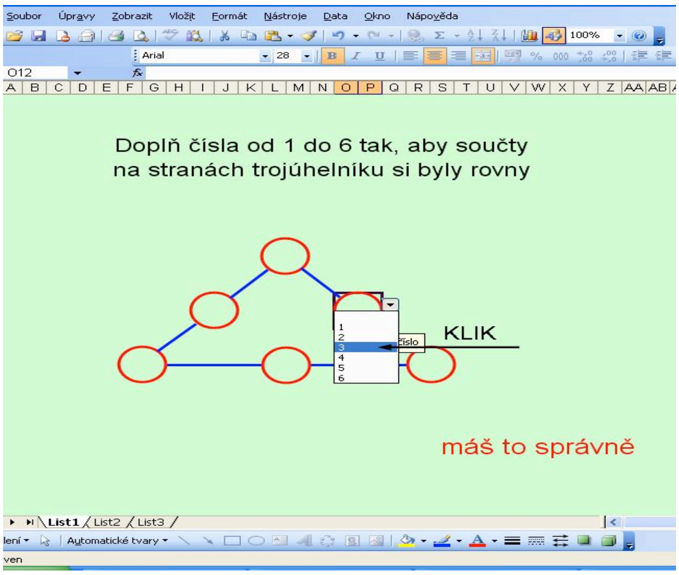
V sešitu se pohybujeme pomocí myši.

Jak vložit číslo?

Kurzorem myši najedeme na buňku (kroužek), kam chceme vložit číslo.



Klikneme levým tlačítkem myši, rozbalí se nám nabídka, v ní najedeme kurzorem myši na číslo, které chceme vložit, podbarví se nám modře a dalším kliknutím levého tlačítka myši se číslo vloží do kroužku.

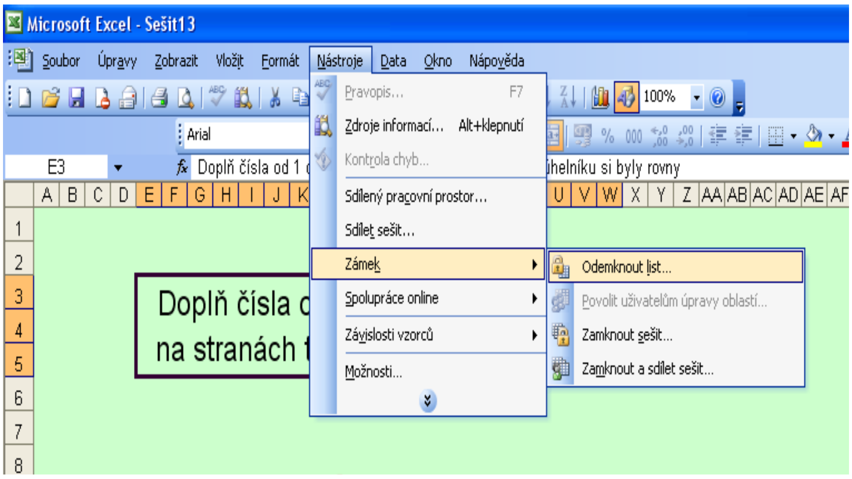


Manuál pro učitele

Všechny pracovní listy jsou vytvořeny pro rozlišení monitoru 1024 x 768 bodů.

<u>Pracovní listy - Křížové součty</u>

Pokud potřebujeme změnit řadu čísel, je nutné nejprve odemknout list.



Heslo pro odemknutí je albin.

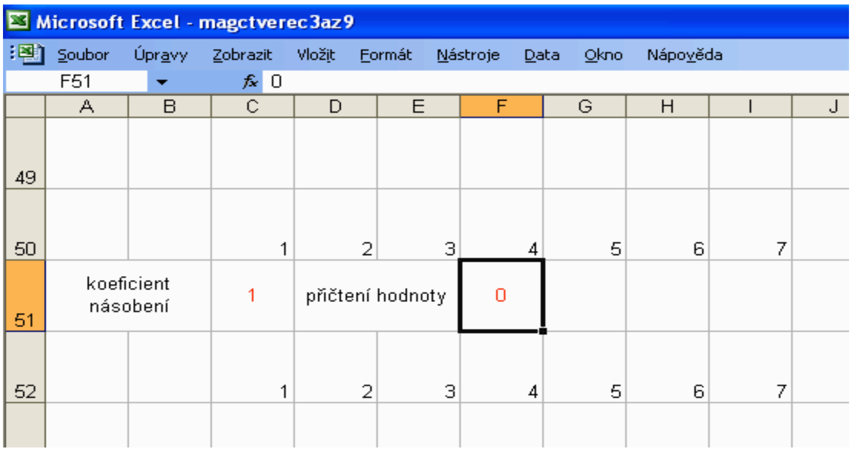
Řadu čísel je možné měnit vždy na padesátém řádku. Rozbalovací seznam začíná prázdnou buňkou C50, první číslo až na buňce C51.

Když změníme řadu čísel, musíme upravit i text v zadání.

<u>Pracovní listy – Magické čtverce</u>

Každý prvek z řady čísel má svou pozici v magickém čtverci.

Pro úpravu hodnot slouží na padesátém prvém řádku buňky C51 a F51.



Přepsáním hodnoty v buňce C51 všechny prvky řady čísel násobím nebo dělím.
Přepsáním hodnoty v buňce F51 ke všem prvkům řady čísel přičítám nebo odčítám požadovanou hodnotu.
V hotovém magickém čtverci se mohou hodnoty mazat nebo přepisovat podle potřeby.

Výsledky pracovních listů v tištěné podobě

Číslo	Pohlaví	Číslo příkladu										Správné odpovědi
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	
1.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
2.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
3.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
4.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
5.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
6.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				***6***
7.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
8.	*chlapec*	*d*	*d*			*d*	*d*	*d*	*d*			***6***
9.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
10.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			***7***
11.	*dívka*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*					***5***
12.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
13.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
14.	*dívka*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
15.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
16.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			***7***
17.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
18.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
19.	*dívka*	*d*	*d*			*d*						***3***
20.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
21.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
22.	*chlapec*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***7***

Číslo	**Pohlaví**	**Číslo příkladu**										**Správné odpovědi**
		1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	
23.	*dívka*	*d*		*d*		*d*						***3***
24.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
25.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*					***6***
26.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*					***6***
27.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
28.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				***6***
29.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
30.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			***7***
31.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			***7***
32.	*chlapec*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
33.	*dívka*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*					***5***
34.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
35.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*					***5***
36.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*							***4***
37.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	***10***
38.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
39.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			***7***
40.	*chlapec*	*d*		*d*		*d*						***3***
41.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
42.	*dívka*	*d*	*d*				*d*					***3***
43.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
44.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				***6***
45.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***

Číslo	Pohlaví	Číslo příkladu										Správné odpovědi
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	
46.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				*6*
47.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		*8*
48.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				*6*
49.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				*6*
50.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		*d*		*8*
51.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*			*d*	*d*	*d*	*d*		*7*
52.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			*7*
53.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			*8*
54.	*dívka*	*d*	*d*	*d*								*3*
55.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*					*6*
56.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*					*6*
57.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		*9*
58.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			*7*
59.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				*7*
60.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*				*6*
61.	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				*6*
62.	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		*9*
63.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*				*6*
64.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*			*7*
65.	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*		*d*	*d*		*7*

Výsledky evaluačního dotazníku pro pracovní listy v tištěné podobě

Číslo	Pohlaví	Číslo otázky				
		1	2	3	4	5
1.	*chlapec*	*3*	*4*		*5*	*3*
2.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*5*	*3*
3.	*chlapec*	*4*	*4*	*4*	*5*	*2*
4.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*4*	*3*
5.	*chlapec*	*4*	*5*		*5*	*4*
6.	*chlapec*	*3*	*4*	*4*	*4*	*3*
7.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*5*	*4*
8.	*chlapec*	*3*	*4*		*5*	*3*
9.	*chlapec*	*4*	*5*	*3*	*4*	*3*
10.	*chlapec*	*5*	*5*	*4*	*5*	*4*
11.	*dívka*	*2*	*2*		*4*	*3*
12.	*dívka*	*4*	*3*	*3*	*4*	*3*
13.	*chlapec*	*5*	*5*	*5*	*5*	*3*
14.	*dívka*	*4*	*4*	*5*	*5*	*2*
15.	*chlapec*	*3*	*4*	*4*	*5*	*4*
16.	*dívka*	*4*	*4*	*5*	*5*	*2*
17.	*dívka*	*4*	*5*		*5*	*3*
18.	*chlapec*	*3*	*4*	*4*	*5*	*3*
19.	*dívka*	*2*	*3*		*3*	*2*
20.	*dívka*	*4*	*3*	*3*	*4*	*3*
21.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*5*	*4*
22.	*chlapec*	*3*	*5*	*4*	*4*	*4*

Číslo	Pohlaví	Číslo otázky				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
23.	*dívka*	*3*	*3*		*5*	*3*
24.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*5*	*4*
25.	*dívka*	*4*	*4*		*4*	*3*
26.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*5*	*4*
27.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*3*
28.	*chlapec*	*3*	*5*		*5*	*3*
29.	*dívka*	*5*	*4*	*4*	*4*	1
30.	*chlapec*	*4*	*5*		*5*	*3*
31.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*5*	*4*
32.	*chlapec*	*4*	*3*	*4*	*5*	*4*
33.	*dívka*	*3*	*4*	*4*	*4*	*4*
34.	*chlapec*	*4*	*4*		*5*	*3*
35.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*3*
36.	*chlapec*	*3*	*5*	*4*	*5*	1
37.	*dívka*	*5*	*4*	*4*	*5*	*5*
38.	*chlapec*	*4*	*4*	*3*	*5*	*3*
39.	*chlapec*	*4*	*5*		*5*	*3*
40.	*chlapec*	*2*	*4*	*4*	*4*	1
41.	*chlapec*	*4*	*4*	*4*	*5*	*2*
42.	*dívka*	*3*	*4*	*4*	*4*	*4*
43.	*dívka*	*4*	*4*		*4*	*3*
44.	*dívka*	*4*	*5*	*4*	*5*	*4*
45.	*dívka*	*4*	*5*	*4*	*5*	*3*

Číslo	Pohlaví	Číslo otázky				
		1	2	3	4	5
46.	*dívka*	*3*	*4*	*3*	*5*	*3*
47.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*4*
48.	*chlapec*	*4*	*4*	*4*	*5*	*4*
49.	*chlapec*	*4*	*4*	*3*	*4*	*3*
50.	*chlapec*	*4*	*5*		*5*	*2*
51.	*chlapec*	*4*	*4*	*4*	*4*	*2*
52.	*dívka*	*4*	*5*	*4*	*5*	*3*
53.	*dívka*	*5*	*4*		*4*	*3*
54.	*dívka*	*2*	*3*	*2*	*3*	1
55.	*chlapec*	*3*	*5*	*5*	*5*	*3*
56.	*dívka*	*4*	*5*	*4*	*5*	*3*
57.	*chlapec*	*5*	*5*		*5*	*4*
58.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*4*	*3*
59.	*chlapec*	*4*	*4*		*5*	*3*
60.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*
61.	*dívka*	*4*	*5*	*4*	*5*	*3*
62.	*dívka*	*5*	*4*	*4*	*5*	*3*
63.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*4*
64.	*chlapec*	*3*	*5*		*5*	*3*
65.	*chlapec*	*4*	*4*	*4*	*5*	*3*

Výsledky pracovních listů v elektronické podobě

Číslo	Pohlaví	Číslo příkladu										Správné odpovědi
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	
1	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
2	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
3	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
4	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
5	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
6	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
7	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*						***4***
8	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
9	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
10	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
11	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
12	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
13	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
14	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
15	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*						***5***
16	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
17	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
18	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
19	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
20	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
21	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		*d*			***7***
22	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***

Číslo	Pohlaví	Číslo příkladu										Správné odpovědi
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	
23	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
24	*dívka*	*d*	*d*	*d*								***3***
25	*dívka*	*d*	*d*	*d*		*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***8***
26	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
27	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
28	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
29	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*				***7***
30	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
31	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*					***6***
32	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
33	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***
34	*chlapec*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*			***8***
35	*chlapec*	*d*	*d*	*d*		*d*						***4***
36	*dívka*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*		***9***

Výsledky evaluačního dotazníku pro pracovní listy v elektronické podobě

Číslo	Pohlaví	Číslo otázky					
		1	2	3	4	5	6
1.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*4*	*4*	*5*
2.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*3*	*5*
3.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*4*	*2*	*4*
4.	*chlapec*	*3*	*4*	*4*	*5*	*3*	*5*
5.	*dívka*	*4*	*5*	*4*	*5*	*5*	*5*
6.	*chlapec*	*5*	*5*	*4*	*5*	*4*	*5*
7.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*
8.	*chlapec*	*4*	*4*	*4*	*5*	*5*	*5*
9.	*chlapec*	*4*	*5*	*3*	*5*	*3*	*4*
10.	*chlapec*	*4*	*5*	*4*	*4*	*5*	*5*
11.	*dívka*	*4*	*4*	*3*	*5*	*3*	*5*
12.	*dívka*	*5*	*5*	*4*	*4*	*4*	*5*
13.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*3*	*4*
14.	*dívka*	*4*	*4*	*5*	*5*	*4*	*5*
15.	*chlapec*	*3*	*4*	*4*	*5*	*4*	*5*
16.	*dívka*	*4*	*4*	*5*	*5*	*2*	*5*
17.	*chlapec*	*4*	*5*	*4*	*5*	*3*	*5*
18.	*dívka*	*4*	*4*	*4*	*5*	*4*	*5*
19.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*4*	*2*	*4*
20.	*chlapec*	*4*	*4*	*3*	*5*	*5*	*5*
21.	*dívka*	*3*	*4*	*5*	*5*	*2*	*4*
22.	*chlapec*	*5*	*5*	*4*	*4*	*5*	*5*

Číslo	Pohlaví	Číslo otázky					
		1	2	3	4	5	6
23.	*dívka*	*5*	*5*	*5*	*5*	*3*	*5*
24.	*chlapec*	*4*	*4*	*4*	*5*	*5*	*5*
25.	*dívka*	*4*	*4*	*5*	*4*	*3*	*5*
26.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*4*	*5*
27.	*chlapec*	*5*	*5*	*5*	*5*	*5*	*5*
28.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*5*	*3*	*4*
29.	*dívka*	*3*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*
30.	*chlapec*	*3*	*5*	*4*	*5*	*3*	*5*
31.	*dívka*	*4*	*5*	*5*	*5*	*5*	*5*
32.	*chlapec*	*4*	*5*	*4*	*5*	*3*	*4*
33.	*dívka*	*5*	*5*	*4*	*4*	*4*	*5*
34.	*chlapec*	*5*	*4*	*4*	*5*	*3*	*5*
35.	*chlapec*	*4*	*5*	*5*	*5*	*3*	*5*
36.	*dívka*	*4*	*5*	*4*	*5*	*4*	*5*

Dopis od španělského kolegy

COLABORACIÓN DEL PROYECTO FIGURAS MÁGICAS EN 3° DE E.S.O.

Tras recibir el material informativo sobre las figuras mágicas y su posterior evaluación en función de los conocimientos y habilidades de los alumnos de enseñanza secundaria, se decide la realización del ejercicio propuesto con alumnos de 3º de E.S.O." de 14 a 15 años".

A continuación se informa sobre los procedimientos seguidos y su transcurso, los resultados obtenidos y otras observaciones que se considera de importancia.

I. Procedimiento

Se pasa los ejercicios a 58 alumnos, 31 chicos y 27 de 3º de E.S.O. voluntarios, entre los cuales se encuentran de nivel normal como 14 chicos y chicas que habitualmente van a clases de apoyo, haciendo así una actividad conjunta

Durante un corto tiempo se les explica la dinámica del ejercicio haciendo hincapié en que es voluntario pero que queremos seriedad para aquellos que decidan hacerlo y que el trabajo es individual. Ademas se les presentan las figuras mágicas pues concretamente estos alumnos no habían trabajado con ellas. EL resto de tiempo, 45 minutos, se les indica que realicen los ejercicios tan bien como puedan

II. Observaciones

Algunas observaciones que aunque no entraban directamente en la selección de datos a recoger nos parece importante reseñar es la buena aceptación recogida por una meritoria mayoría de los alumnos al trabajo propuesto, los alumnos mostraron en muchas ocasiones sus ganas de conseguir por ellos mismos la solución correcta.

Aunque esta acogida no fue del todo unánime, tres alumnos prefirieron no realizar los ejercicios ya que eran voluntario,s esto en un conjunto de 61 alumnos no es muy a tener en cuenta, ademas uno de estos solicito copia de los ejercicios para realizarlos, al ver que sus compañeros estaban mas entretenidos que el, aunque no se le ha incluido en el estudio por no disponer del mismo tiempo que sus compañeros

También en de destacar los mas de 30 alumnos que nos solicitaron una copia de los ejercicios para usarlos en casa y conseguir el objetivo, aunque en ningún momento se le s comento esta posibilidad, fueron ellos mismos quienes quisieron hacerlo.

Le comento estos datos pues pensamos que como observaciones pueden ser muy validas para su estudio

III. Datos Recogidos

Tablas con los datos recogidos tras la corrección de los ejercicios

nº Alumno.	**Sexo**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Respuestas Correctas.**
1	femenino	c	c	c		c	c	c				**6**
2	masculino	c		c		c	c					**4**
3	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
4	femenino	c	c	c	c	c	c	c		c		**8**
5	femenino	c	c	c	c	c	c	c		c		**8**
6	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
7	masculino	c	c	c	c	c	c	c		c		**8**
8	masculino	c	c	c		c	c	c		c		**7**
9	masculino	c		c		c	c	c		c		**6**
10	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
11	masculino	c	c	c	c	c	c	c				**7**
12	femenino	c	c	c		c	c			c		**6**
13	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
14	femenino	c	c	c	c	c	c	c				**7**
15	femenino	c	c	c		c	c	c				**6**
16	masculino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
17	masculino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
18	masculino	c	c	c		c	c		c			**7**
19	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
20	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
21	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
22	femenino	c	c	c		c	c	c	c			**7**
23	femenino		c	c		c	c					**4**

nº Alumno.	Sexo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Respuestas Correctas.
24	masculino	c	c	c		c	c					**5**
25	femenino	c	c	c		c	c	c				**6**
26	masculino	c	c	c		c	c	c	c	c		**7**
27	masculino	c	c	c		c	c	c		c		**7**
28	femenino	c	c	c		c						**4**
29	masculino	c	c	c	c	c	c	c		c		**8**
30	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
31	femenino	c	c	c		c	c	c				**6**
32	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
33	femenino	c	c	c	c	c	c	c		c		**8**
34	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
35	femenino		c	c	c	c	c	c	c			**7**
36	masculino	c	c	c	c	c	c					**6**
37	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
38	masculino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
39	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c			**8**
40	masculino		c	c		c	c	c				**5**
41	masculino	c	c	c	c	c	c	c				**7**
42	femenino	c	c	c		c	c	c		c		**7**
43	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
44	femenino	c	c			c						**3**
45	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
46	femenino	c	c	c								**3**
47	masculino	c	c	c	c	c	c	c				**7**
48	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**

nº Alumno.	Sexo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Respuestas Correctas.
49	femenino	c	c	c		c	c	c				**6**
50	masculino	c	c	c	c	c	c	c		c		**8**
51	masculino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
52	femenino	c	c			c	c	c				**5**
53	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
54	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c	c		**9**
55	masculino		c	c	c	c	c	c				**6**
56	femenino	c	c	c	c	c	c	c	c			**8**
57	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**
58	masculino	c	c	c		c	c	c				**6**

IV Comentarios

Aunque resulte un poco precipitado realizar conclusiones antes de terminar el estudio si se añade que este material parece de buena aplicación en alumnos de estas edades, a incluso un poco mas jóvenes, y que su capacidad de motivación es alta.

Por esto le estamos muy agradecidos por participar con usted de eta experiencia y estaríamos muy agradecidos de recibir más todo el material que le sea posible enviarnos

Un Saludo

Francisco Godoy Amador