Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2012 Denisa Tomanová

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Vennovy diagramy

Bakalářská práce

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Vypracovala:
Denisa Tomanová

České Budějovice, 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou práci na téma Vennovy diagramy jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 25. dubna 2012 …………………………….

Denisa Tomanová

Poděkování

Děkuji RNDr. Libuše Samková, Ph.D. za vedení bakalářské práce a za její cenné rady a konzultace. Také těm, kteří mi ochotně pomáhali a poskytovali potřebné informace pro zpracování tématu a všem, kteří mi po celou dobu studia byli oporou.

ANOTACE

Název práce:	Vennovy diagramy
Autor:	Denisa Tomanová
Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Hlavním cílem bakalářské práce je vytvořit přehled matematických úloh zabývajících se znázorněním množin ve Vennových diagramech. Uvedený přehled slouží jako inspirace učitelům a zahrnuje hlavní typy příkladů na procvičování. Příklady jsou řešené a určené k použití na základních školách.

První část bakalářské práce je teoretická. Tato část se věnuje popisu množin a následného zobrazování množin do Vennových diagramů.

Druhá část bakalářské práce se zabývá Vennovými diagramy v praxi. V pěti podkapitolách jsou uvedeny řešené příklady. Tyto příklady ukazují využití Vennových diagramů v úlohách různého typu.

ANNOTATION

Name of bachelor thesis: Venn diagrams
Author: Denisa Tomanová
Tutor of bachelor thesis: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

The aim of the bachelor thesis is to create a list of mathematical problems dealing with the representation of sets in Venns diagrams. The overview serves as an inspiration for teachers and includes the main types of examples to practice. The examples are designed and intended for use in primary schools.

The first part of the thesis is theoretical. This section is focused on the description set and subsequent display sets to Venns diagrams.

The second part of the thesis deals with Venns diagrams in practice. There are solid examples given in five sub-sections. These examples show the use of Venns diagrams in roles of various types.

OBSAH:

1. ÚVOD

Hlavním cílem bakalářské práce je vytvořit přehled řešených příkladů zabývajících se Vennovými diagramy. Dalším cílem je představení různých typů grafického ztvárnění Vennových diagramů.

Vennovy diagramy jsou tvořeny uzavřenými křivkami, přičemž prvky uvnitř křivky představují prvky dané množiny. Používají se při zobrazování množin či vztahů mezi množinami. Pomocí těchto diagramů je také možné řešit slovní úlohy.

Bakalářská práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol. První kapitola obsahuje teoretické znalosti o množinách a podrobné teoretické zkoumání Vennových diagramů, bez kterého by nebylo možné praktické příklady a užití diagramů pochopit. Je zmíněna také historie množinového diagramu a ukázka dalšího typu množinového diagramu - Eulerova diagramu. Vennovy diagramy znázorňujeme pomocí křivek, teoretická část proto dále uvádí různé typy ztvárnění Vennových diagramů.

Přehled řešených příkladů je uveden ve druhé části práce. Příklady jsou rozděleny podle typu do pěti podkapitol, které zahrnují příklady od zobrazování Vennových diagramů, až po řešení slovních úloh.

Práce je především určena učitelům 1. i 2. stupně základních škol, které může inspirovat různými typy uvedených příkladů.

2. TEORIE

2.1 MNOŽINY

Podle Buška a Caldy (2004) užívali intuitivně množinové představy staročečtí matematici už ve 3. století před naším letopočtem. A to tehdy, když zkoumali geometrická místa bodů neboli množiny všech bodů dané vlastnosti.

Kindl (1980) uvádí, že pojem množina používají lidé běžně. V hovorovém jazyce však místo slova množina používáme jiné názvy. Uvádí také některé příklady: množina stromů je les, množina žáků je třída, množina jmen nebo názvů je seznam apod.

Na vytvoření teorie množin se značně podílel pražský matematik, filozof a teolog Bernard Bolzano (1781 – 1848), který publikoval své dílo Paradoxy nekonečna. Německý matematik Georg Cantor (1845 – 1918) studoval problémy týkající se nekonečných množin reálných čísel. Kolem roku 1870 pak zavedl pojem množina. V současnosti pomáhá teorie množin mnoha oblastem matematiky vytvářet systém a udává jejich společný jazyk.
(Bušek, Calda, 2004)

Podle Kindla (1980) je pojem množina jedním ze základních matematických pojmů.

Drábek a kol. (1985, s. 20) dodává, že když budeme budovat teorii množin intuitivně jako Georg Cantor a ne axiomaticky, můžeme pojem množiny vysvětlit takto: „Množina je takový „souhrn objektů“, že o každém objektu můžeme rozhodnout, zda patří nebo nepatří do uvažovaného „souboru objektů“.“

Pro běžné počítání si můžeme tedy množinu představit jako soubor několika různých prvků. Důležitost nenáleží tomu, co tyto prvky představují, ale tomu, zda od sebe můžeme jednotlivé prvky rozeznat, odlišit a určit, jestli do množiny patří nebo ne.

Kindl (1980) uvádí příklad, že množinu všech lidí v autobusu tvoří cestující a řidič. Tyto objekty, ze kterých je množina složena, nazýváme prvky množiny. Prvky množiny mohou být lidé, jména, věci, znaky, čísla, body, apod.

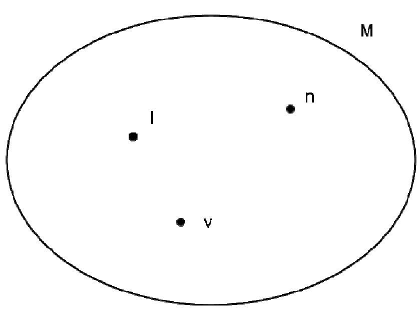
2.1.1 Znázornění množin

Kreslení všech prvků množiny je velmi obtížné, zdlouhavé a nepraktické. Často ani nelze znázornit všechny prvky množiny. Například těžko nakreslíme množinu, která je tvořena názvy všech vyučovacích předmětů ve škole. Jakékoliv prvky množiny jednodušším a výhodnějším způsobem znázorníme pomocí značek, ke kterým podle potřeby přiřadíme čísla, písmena nebo jiná označení. Pro lepší zapisování značíme obvykle množinu písmenem velké abecedy. Takto znázorněný obrázek nazýváme množinovým diagramem.
(Kindl, 1980)

Drábek a kol. (1985) přidá ještě značení prvků množiny písmeny malé abecedy.

Na obrázku č. 1 je zobrazen diagram množiny M, která se skládá z prvků l, n, v a žádných jiných. Tuto množinu M zapíšeme tak, že ohraničující čáru prvků nahradíme složenými závorkami. Tedy $M = \{m, n, v\}$. Zápis poté čteme: množina M se skládá z prvků l, n, v.
(Kindl, 1980)

Obrázek č. 1: Množinový diagram

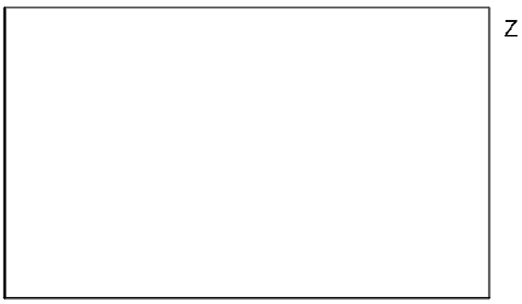


Zdroj: Kindl, 1980

Kuřina (1970) naopak tvrdí, že při tvoření takovýchto množin může docházet k rozporům. Proto předpokládáme jistou základní množinu, ze které při konstrukci libovolné množiny vybíráme prvky. Tuto základní množinu nejčastěji značíme symbolem Z. Uvádí také, že v aritmetice je základní množinou množina všech čísel a v geometrii množina všech bodů dané roviny.

Drábek a kol. (1985) dodává, že základní množinu Z graficky znázorníme obdélníkem (obrázek č. 2).

Obrázek č. 2: Základní množina



Zdroj: Drábek a kol., 1985

Nováková (1981) doplňuje, že většina množinových diagramů sloužila ke znázorňování rozsahů pojmů už před vytvořením teorie množin. Obraz množiny vyznačujeme v rovině uzavřenou křivkou, která dělí svůj doplněk v rovině na dvě oblasti – vnitřní a vnější. Prvky zobrazené množiny zaznamenáváme do vnitřní oblasti této křivky. Jestliže ve vnitřní oblasti není zakreslen žádný prvek, je počet prvků množiny neznámý nebo může být množina prázdná.

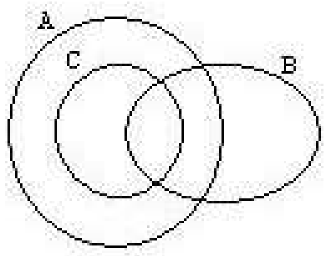
Kuřina (1989) navíc dodává, že prvky doplňku množiny (prvky, které množině nepatří) kreslíme do oblasti vnější.

Množinové diagramy můžeme podle Novákové (1981) rozdělit na dva typy:

1. Eulerovy diagramy (obrázek č. 3)
2. Vennovy diagramy (obrázek č. 4)

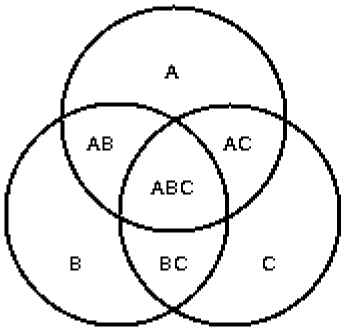
Eulerovy diagramy používají ke znázorňování množin vnitřky kruhů, oválů, obdélníků či trojúhelníků. Podle Kuřiny (1989) se tyto diagramy zdají být názornější. Hodí se například ke znázornění vztahů mezi množinami a určování různých hierarchií. Naopak Vennovy diagramy lze dobře užít při ověřování strukturálních vlastností množinových operací.

Obrázek č. 3: Eulerův diagram



Zdroj: http://www.eulerdiagrams.com/

Obrázek č. 4: Vennův diagram



Zdroj: http://www.theory.csc.uvic.ca/~cos/venn/VennWhatEJC.html

2.1.2 Množiny a jejich prvky

Jestliže číslo 2 je prvkem množiny S, která znázorňuje všechna sudá čísla, tuto skutečnost zapíšeme $2 \in S$.
Jestliže číslo 3 není prvkem množiny S všech sudých celých čísel, zapíšeme tuto skutečnost $3 \notin S$.

Je tedy patrné, že pro každou množinu A a pro každý objekt a nastane právě jedna z těchto dvou možností: $a \in A$, $a \notin A$.
(Drábek a kol., 1985)

Podle Kuřiny (1870) může mít množina buď konečný počet prvků – říkáme, že je množina konečná, nebo konečný počet prvků množina nemá – potom je množina nekonečná. Konečnou množinou je například množina přirozených dělitelů čísla 16. Naopak množina násobků čísla 7 je nekonečná.

Drábek a kol. (1985) dodává, že velmi důležitou množinou je množina prázdná. Prázdná množina je například množina všech zbylých lístků na vyprodaném představení. Přidává také značení prázdné množiny symbolem ϕ nebo $\{\ \}$.

Bušek, Calda (2004) dodávají, že v současnosti značíme prázdnou množinu především symbolem ϕ.

Neprázdná množina je taková množina, která není prázdná. Platí tedy, že každá neprázdná množina obsahuje alespoň jeden prvek.
(Hruša a kol., 1977)

2.1.3 Určování množin

Kindl (1980) uvádí, že množinu obvykle určujeme:

A) vyjmenováním neboli výčtem všech prvků množiny
B) uvedením charakteristické vlastnosti všech jejích prvků, to znamená předpisem, který udává vlastnosti, které musí mít objekt, aby byl prvkem dané množiny.

Drábek a kol. (1985) popisuje zápis množiny určené výčtem neboli taxativně tak, že vyjmenujeme všechny její prvky. Zapíšeme $\{a, b, c, d\}$. Do složených závorek zapíšeme každý prvek patřící do množiny právě jednou. Ze zápisu vyplývá, že výčtem prvků můžeme určit jen konečné množiny.

Kindl (1980) navíc dodává, že prvky do složených závorek zapisujeme často podle nějakého pořadí: písmena podle abecedy, čísla dle velikosti apod., není to však nutné.

Žádným přirozeným číslem nelze vyjádřit počet všech prvků nekonečné množiny. Těchto prvků je nekonečně mnoho. Jestliže tedy nemůžeme určit množinu výčtem všech jejích prvků, pak uvádíme charakteristickou vlastnost, kterou má každý prvek dané množiny a žádný jiný prvek tuto vlastnost nemá. Množinu určenou tímto způsobem zapisujeme často užitím proměnné, což znamená ve tvaru výrokového vzorce.
(Kindl, 1980)

Jako příklad množiny zadané charakteristickou vlastností uvádí Drábek a kol. (1985) množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitelná pěti. Tuto množinu zapíšeme takto: $\{x \in N : 5 \mid x\}$.
Dále uvádí obecné schéma množiny určené charakteristickou vlastností, které má tvar $\{x \in Z : A(x)\}$, kde $A(x)$ je výroková forma o jedné proměnné x. Je tedy zřejmé, že určující charakteristická vlastnost je právě dána výrokovou formou. $A(x)$ je výroková forma o jedné proměnné x a $B(x, y)$ je výroková forma o dvou proměnných x, y.

2.1.4 Základní vztahy mezi množinami

Kuřina (1970) vysvětluje, že každá množina je částí základní množiny. Tento vztah „být částí" (být podmnožinou) zavedeme obecněji – ne jen jako vztah množiny a základní množiny. Definici podmnožiny utváříme pomocí představy, že množina žáků třídy je částí množiny žáků školy a tak dále. Je – li tedy každý prvek množiny A prvkem množiny B říkáme, že množina A je částí (podmnožinou) množiny B.

Drábek a kol. (1985) dodává zápis podmnožiny: $A \subset B \Leftrightarrow$ pro každé $x \in Z$ platí $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Podle Kindla (1980) je množina A podmnožinou množiny B, jestliže v množině A není žádný prvek, který není prvkem množiny B.

Za povšimnutí stojí ještě dva krajní případy vztahující se k podmnožině.

1. Protože každý prvek libovolné množiny A je prvkem množiny A, je samozřejmě každá množina A podmnožinou sebe sama, tedy platí vztah $A \subset A$.
2. Protože prázdná množina nemá žádné prvky, tudíž každý prvek prázdné množiny je prvkem libovolné množiny A, je podmnožinou každé množiny A také prázdná množina. Platí tedy vztah $\phi \subset A$.

(Bušek, Calda, 2004)

Dalším vztahem mezi množinami je podle Drábka a kol. (1985) rovnost množin. Množina $A = B$ právě tehdy, když je každý prvek množiny A také prvkem množiny B a každý prvek množiny B prvkem množiny A.

Rovnost množin tedy znamená, že platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.
(Kuřina, 1970)

Dále Kuřina (1970) uvádí, že pokud je A neprázdná podmnožina množiny B, která obsahuje i prvky nepatřící do množiny A, je množina A vlastní podmnožinou množiny B. Naopak je – li $A = B$ nebo $A = \phi$, je A nevlastní podmnožinou množiny B.

Kindl (1980) dodává další vztah mezi množinami: mohutnost. Říkáme, že konečné množiny A, B jsou stejné mohutnosti, pokud mají stejný počet prvků. Tento nový vzájemný vztah množin A, B zapisujeme $A \sim B$. Mezi stejnou mohutností dvou množin a mezi rovností těchto množin je však podstatný rozdíl. Stejně mohutné jsou každé dvě množiny, které se sobě rovnají. Obecně však neplatí, že dvě konečné množiny stejné mohutnosti jsou si rovny.

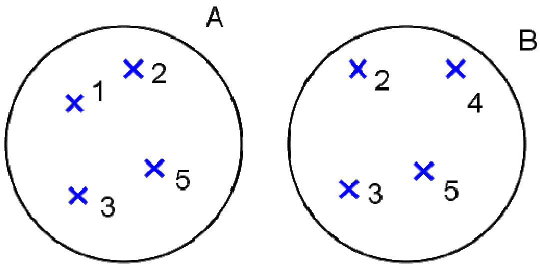
Mohutností množiny tedy vyjadřujeme počet prvků množiny a značíme card (cardinality). Mohutnost množiny $A = \{1, 2, 3\}$ zapíšeme následovně: $cardA = |A| = 3$.

Rozdíl mezi rovností a mohutností si můžeme ověřit na jednoduchém příkladu:

Příklad: 2.1.4.1

Je dána množina $A = \{1, 2, 3, 5\}$ *a množina* $B = \{2, 3, 4, 5\}$. *Jsou množiny stejně mohutné? Jsou si rovny?*

Obrázek č. 5: Mohutnost množin



Zdroj: vlastní tvorba

Tyto množiny mají stejný počet prvků, což znamená, že mají stejnou mohutnost $A \sim B$. $|A| = |B| = 5$.

Množiny však neobsahují tytéž prvky, proto si nejsou rovny.

2.1.5 Základní množinové operace

Drábek a kol. (1985) uvádí pět základních množinových operací: průnik, sjednocení, rozdíl, symetrický rozdíl dvou daných množin a dále doplněk dané množiny vzhledem k množině základní.

Průnikem dvou množin A, B je množina všech prvků, které patří do množiny A a současně do množiny B. Tuto množinovou operaci značíme $A \cap B$ a zapíšeme takto: $A \cap B = \{x \in Z; x \in A \wedge x \in B\}$.

(Drábek a kol., 1985)

Prázdná množina je průnikem každých dvou množin, které nemají žádné společné prvky. Množiny A, B, pro které platí $A \cap B = \phi$, nazýváme disjunktní.

(Bušek, Calda, 2004)

Podle Kindla (1980) sjednocení dvou množin A, B dostaneme, přidáme – li ke všem prvkům množiny A všechny prvky množiny B. Pokud mají množiny A, B společné prvky, počítáme je do sjednocení pouze jednou.

Drábek a kol. (1985) dodává značení sjednocení dvou množin A, B: $A \cup B$ a zápis: $A \cup B = \{x \in Z; x \in A \vee x \in B\}$.

Rozdílem množiny A a množiny B rozumíme podle Kuřiny (1970) množinu $A \setminus B$ (případně $A - B$), pro kterou platí: $A \setminus B = \{x \in Z; x \in A \wedge x \notin B\}$.

Obecně tedy v základní množině Z platí, že rozdíl dvou konečných množin A, B je množina všech prvků množiny A, které nejsou v množině B.
(Kindl, 1980)

Drábek a kol. (1985) tvrdí, že symetrickým rozdílem dvou množin A, B je množina, která obsahuje právě ty prvky, které patří právě do jedné z množin A, B. Symetrický rozdíl značíme $A \Delta B$.

Jinými slovy je symetrický rozdíl sjednocením rozdílů množin $A - B$ a množin $B - A$. Nebo ho můžeme také získat tak, že od sjednocení množin odečteme jejich průnik.
$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Hruša a kol. (1977) vysvětluje poslední základní množinovou operaci: doplněk množiny. Pod názvem doplněk množiny A si představujme vše, co zbude ze základní množiny Z po odstranění všech prvků množiny A. Platí tedy, že doplňkem základní množiny je prázdná množina a obráceně. Doplňkem množiny A rozumíme množinu A' definovanou takto: $A' = \{x \in Z; x \notin A\}$.

2.1.5.1 Vlastnosti množinových operací

Kuřina (1970) uvádí přehled základních vlastností množinových operací. Pro libovolné množiny P, Q, S platí:

- Komutativní zákon pro průnik a sjednocení množin

$P \cap Q = Q \cap P$ $\quad\quad$ $P \cup Q = Q \cup P$

- Asociativní zákon pro průnik a sjednocení

$(P \cap Q) \cap S = P \cap (Q \cap S)$ $\quad\quad$ $(P \cup Q) \cup S = P \cup (Q \cup S)$

- Distributivní zákony

$P \cap (Q \cup S) = (P \cap Q) \cup (P \cap S)$ $\quad\quad$ $P \cup (Q \cap S) = (P \cup Q) \cap (P \cup S)$

- Zákony de Morganovy

$(P \cap Q)' = P' \cap Q'$ $\quad\quad$ $(P \cup Q)' = P' \cup Q'$

- Idempotence průniku a sjednocení

$P \cap P = P$ $\quad\quad$ $P \cup P = P$

- Involutornost

$(P')' = P$

Drábek a kol. (1985) dodává, že existuje celá řada množinových vlastností a rovností. Mezi základní vlastnosti přidává ještě:

- Neutrálnost základní množiny Z vůči průniku

$A \cap Z = A$

- Agresívnost prázdné množiny vůči průniku

$A \cap \phi = \phi$

- Agresívnost základní množiny Z vůči sjednocení

$A \cup Z = Z$

- Neutrálnost prázdné množiny vůči sjednocení

$A \cup \phi = A$

2.2 VENNOVY DIAGRAMY

Hruša a kol. (1977) uvádí, že jestliže si znázorníme některé matematické situace, hned se pro nás stanou srozumitelnějšími. Přesně tak je tomu i v případě množin. Jedním ze způsobů znázornění množin jsou Vennovy diagramy. Tento způsob znázornění je spjat se jménem Johna Venna (1834 – 1923), profesora v Cambridge, a je srozumitelný i pro sedmileté děti.

Drábek a kol. (1985) dodává, že ve Vennových diagramech znázorňujeme množiny pomocí oblastí roviny ohraničených oválnými křivkami nebo jinými uzavřenými křivkami. Základní množinu v těchto diagramech opět značíme obdélníkem, který nám udává rámec úvah.

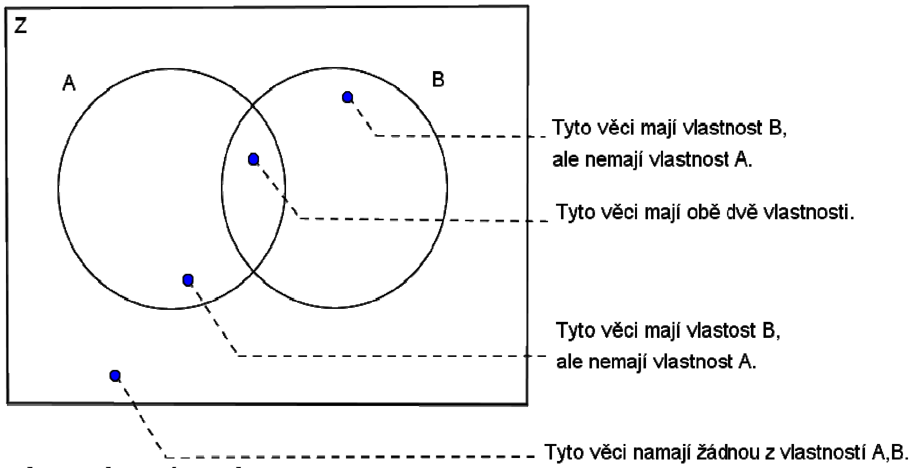
Podle Kindla (1980) překřížením těchto křivek a čar vznikají přihrádky, kterým říkáme pole diagramu. Protože každý bod uvnitř uzavřené čáry nemusí znamenat prvek, užíváme stejný tvar a velikost pole diagramu pro množiny s různým počtem prvků. Vennovy diagramy velmi usnadňují představu a tím také řešení často dost složitých situací. Největší výhodou je snadné znázornění a kreslení těchto diagramů.

Drábek a kol. (1985) uvádí jiný název pro pole diagramu. Tyto pole nazývá komponenty.

Bušek, Calda (2004) dodávají, že slovní úlohy, které požadují určení počtu prvků konečných množin, se výhodně řeší množinově – logickou analýzou textu a užitím Vennových diagramů.

Následující obrázek zobrazuje kruhový Vennův diagram pro dvě množiny A a B základní množiny Z.

Obrázek č. 6: Vennův diagram pro dvě množiny

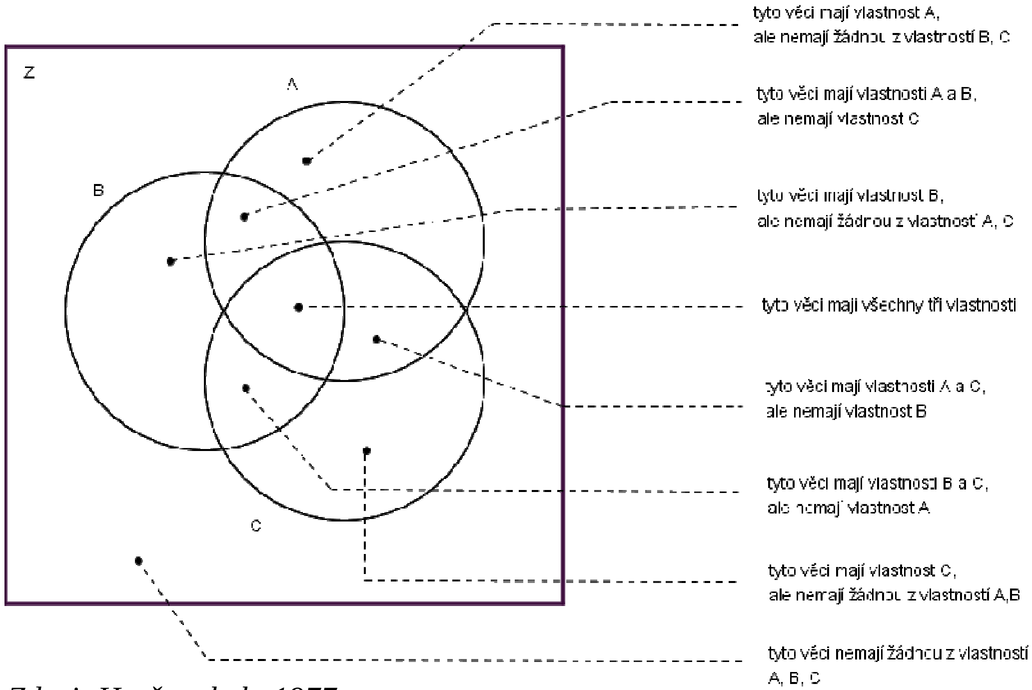


Zdroj: vlastní tvorba

Hruša a kol. (1977) dodává podobný přehledný obrázek Vennova diagramu pro tři množiny. Na obrázku č. 7 je Vennův diagram, na kterém je zachycena tato situace: Je dána základní množina *Z* a tři vlastnosti A, B, C.

- *A* je množina všech věcí majících vlastnost A.
- *B* je množina všech věcí s vlastností B.
- *C* je množina všech věcí, které mají vlastnost C.

Obrázek č. 7: Vennův diagram pro tři množiny



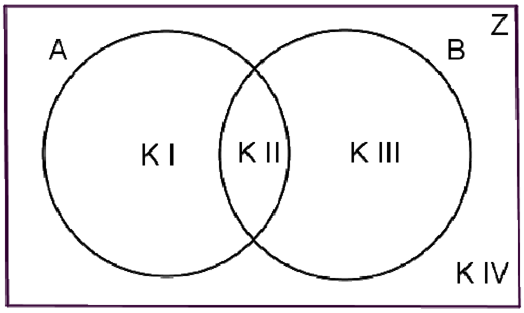
Zdroj: Hruša a kol., 1977

Existuje také jiný typ ztvárnění Vennových diagramů než tento kruhový, například Vennův diagram ztvárněný pomocí elips či obdélníků. Často se také používá Vennův diagram nakreslený pomocí konvexních oválů. Tento typ je často používaný zejména pro zobrazení většího počtu množin. Nejprve se ale seznámíme s kruhovými diagramy.

2.2.1 Vennův diagram pro dvě množiny

Znázorníme – li Vennův diagram pro dvě množiny A, B, prvky základní množiny Z se roztřídí do čtyř komponent KI, KII, KIII, KIV (obrázek č. 8). Zkoumáním tohoto diagramu zjistíme, že každý prvek základní množiny Z bude prvkem právě jedné z komponent.
(Drábek a kol., 1985)

Obrázek č. 8: Vennův diagram pro dvě množiny pomocí kruhových oblastí



Zdroj: Drábek a kol., 1985

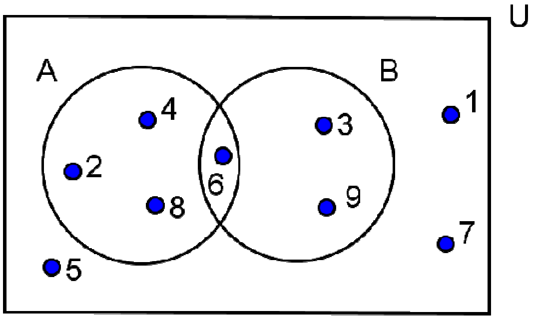
Pro lepší pochopení uvádí Bušek a Calda (2004) jednoduchý příklad.

Příklad 2.2.1.1

Základní množina U je množina všech přirozených čísel menších než 10. A je množina všech sudých čísel z množiny U. B je množina všech čísel z množiny U, která jsou dělitelná třemi. Úkolem bude zakreslit Vennův diagram pro uvedené množiny a vyznačit všechny prvky množiny U.

Řešení:

Obrázek č. 9: Příklad na Vennovy diagramy



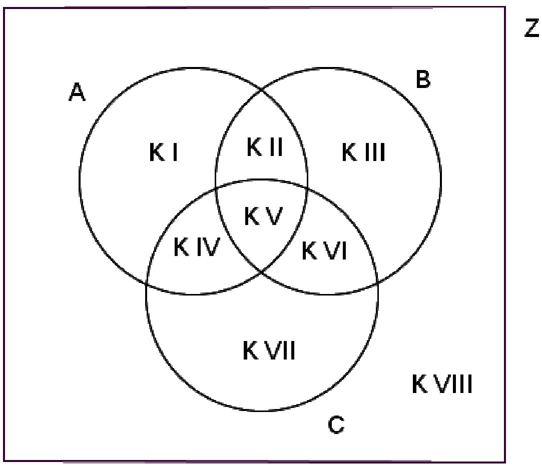
Zdroj: Bušek, Calda, 2004

2.2.2 Vennův diagram pro tři množiny

Základní množinu opět znázorníme obdélníkem, ostatní množiny pomocí kruhů.

Zkoumáním Vennova diagramu pro tři množiny A, B, C zjistíme, že se nám základní množina Z rozdělí do osmi komponent KI, KII, KIII, KIV, KV, KVI, KVII, KVIII (obrázek č. 10). Každý prvek základní množiny Z patří právě do jedné z komponent. (Drábek a kol., 1985)

Obrázek č. 10: Vennův diagram pro tři množiny pomocí kruhových oblastí



Zdroj: Drábek a kol., 1985

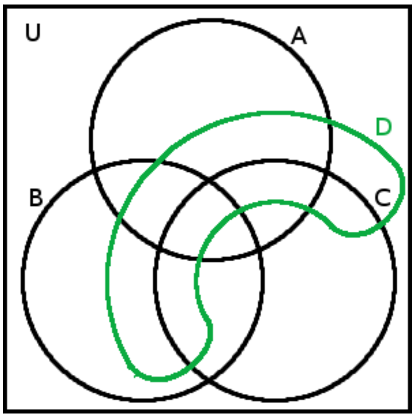
2.2.3 Vennův diagram pro více množin

Kindl (1980) uvádí, že počet polí diagramu je závislý na počtu znázorněných množin. Proto překřížením dvou, tří, čtyř uzavřených čar vznikne 2^2, 2^3, 2^4 polí, tedy 4, 8, 16 polí.

Nováková (1981) přidává pravidlo, že n křivek vytvoří 2^n polí v rovině nebo ve vnitřní oblasti jedné předem znázorněné křivky.

Chceme – li vytvořit Vennův diagram pro čtyři množiny, nemůžeme množiny zakreslovat jen pomocí kruhů, musíme použít i jiné tvary (části roviny vymezené složitějšími uzavřenými křivkami). Můžeme zde vycházet z kruhového diagramu pro tři množiny a dokreslit nekruhovou množinu čtvrtou. Tuto situaci nám znázorňuje obrázek č. 11, kde je zeleně zvýrazněná čtvrtá množina.

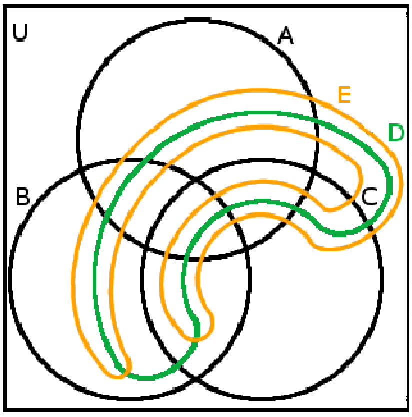
Obrázek č. 11: Vennův diagram pro čtyři množiny



Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/moravecdp/mnoziny.php

Pokud chceme sestrojit Vennův diagram pro pět množin, dokreslíme do předcházejícího obrázku pátou množinu. Na obrázku č. 12 je pátá množina znázorněna oranžovou barvou.

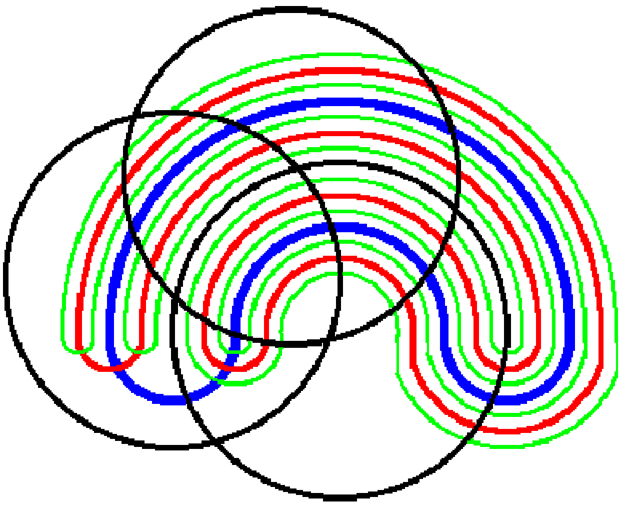
Obrázek č. 12: Vennův diagram pro pět množin



Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/moravecdp/mnoziny.php

Na obrázku Vennova diagramu pro šest množin (obrázek č. 13) je šestá množina dokreslena zelenou barvou.

Obrázek č. 13: Vennův diagram pro šest množin



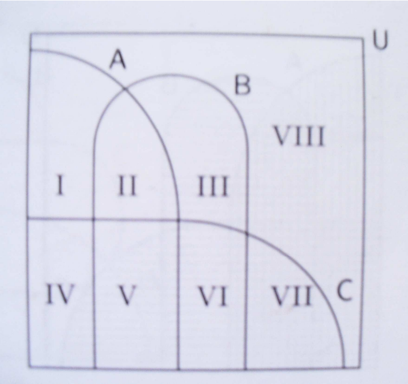
Zdroj: http://www.eulerdiagrams.com/

Přesvědčili jsme se, že se s přibývajícím počtem množin se stávají kruhové Vennovy diagramy velmi nepřehledné. Již bylo zmíněno, že díky velké nepřehlednosti existuje další způsob ztvárnění Vennových diagramů – pomocí konvexních oválů, elips či obdélníků.

2.2.4 Vennovy diagramy pomocí konvexních oválů

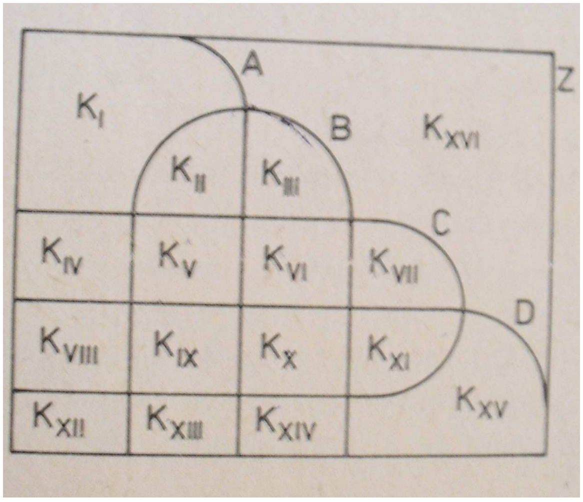
Pomocí konvexních oválů můžeme znázornit jakýkoliv konečný počet množin. Při čemž nám n konvexních oválů rozdělí rovinu na 2^n polí.

Obrázek č. 14: Vennův diagram pro tři množiny pomocí konvexních oválů



Zdorj: Bušek, Calda, 2004

Obrázek č. 15: Vennův diagram pro čtyři množiny pomocí konvexních oválů



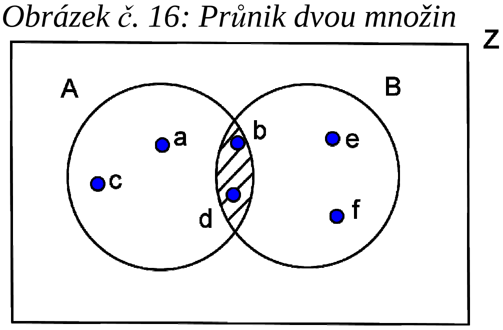
Zdroj: Drábek a kol., 1985

2.2.5 Množinové operace ve Vennových diagramech

2.2.5.1 Průnik množin

Na obrázku č. 16 znázorňuje Vennův diagram v základní množině Z množinu A, která má prvky a, b, c, d a množinu B s prvky b, d, e, f. Prvky b, d, které jsou společné oběma množinám A, B, tvoří novou množinu nazývající se průnik množiny A s množinou B.
(Kindl, 1980)

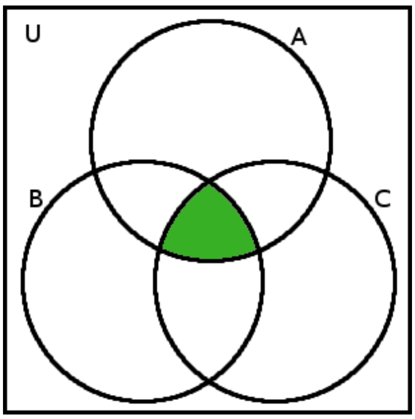
Obrázek č. 16: Průnik dvou množin



Zdroj: Kindl, 1980

Na dalším obrázku je Vennův diagram průniku tří množin A, B, C. Průnik těchto tří množin je vybarven a obsahuje všechny prvky, které patří zároveň množině A i množině B i množině C.

Obrázek č. 17: Průnik tří množin

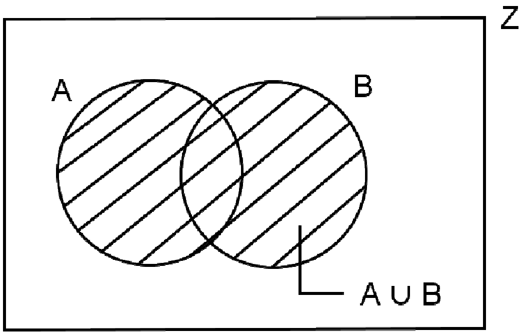


Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/moravecdp/mnoziny.php

2.2.5.2 Sjednocení množin

Na Vennovém diagramu (obrázek č. 18) je znázorněno sjednocení dvou množin *A*, *B*.

Obrázek č. 18: Sjednocení dvou množin

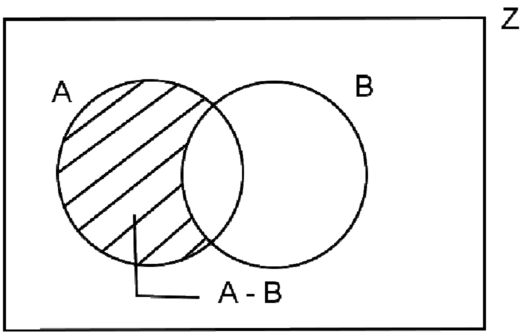


Zdroj: Drábek a kol., 1985

2.2.5.3 Rozdíl dvou množin

Na obrázku č. 19 nalezneme grafické znázornění rozdílu dvou množin Vennovým diagramem.

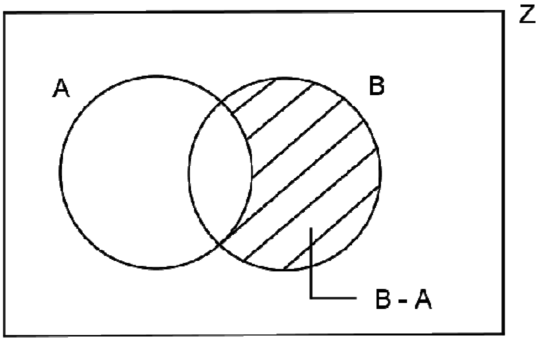
Obrázek č. 19: Rozdíl dvou množin



Zdroj: Drábek a kol., 1985

Další obrázek nás přesvědčí o tom, jak je nutné rozlišovat rozdíl množiny $A-B$ od rozdílu množiny $B-A$.

Obrázek č. 20: Rozdíl dvou množin 2

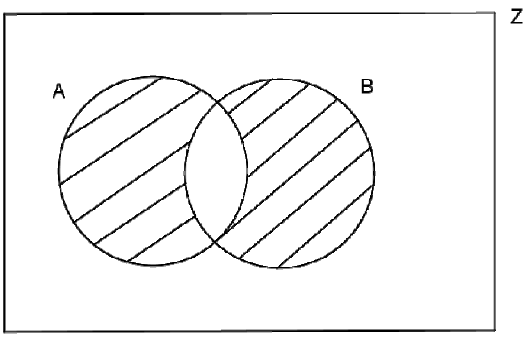


Zdroj: vlastní tvorba

2.2.5.4 Symetrický rozdíl dvou množin

Podle Drábka a kol. (1985) lze pomocí Vennova diagramu také znázornit méně obvyklou množinovou operaci: symetrický rozdíl dvou množin A, B.

Obrázek č. 21: Symetrický rozdíl dvou množin



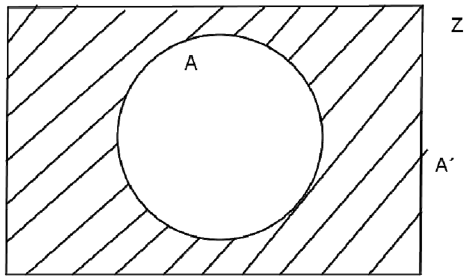
Zdroj: Drábek a kol., 1985

2.2.5.5 Doplněk množiny

Na Vennovém diagramu (obrázek č. 22) je podle Drábka a kol. (1985) šrafováním znázorněn doplněk A' množiny A.

Například je – li základní množinou množina N všech přirozených čísel, doplněk množiny všech lichých čísel je množina všech sudých čísel. Totéž platí i obráceně.

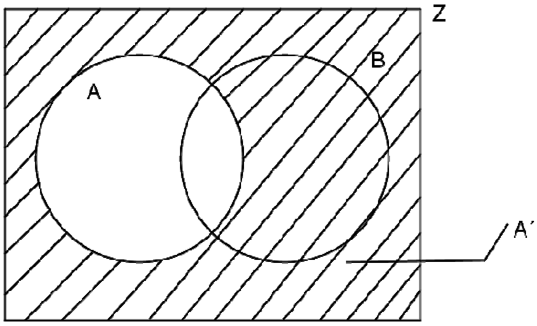
Obrázek č. 22: Doplněk množiny



Zdroj: Drábek a kol., 1985

Pro lepší pochopení ukazuje následující obrázek dvě množiny: množinu A a množinu B. Vyšrafován je zde opět pouze doplněk A' množiny A.

Obrázek č. 23: Doplněk množiny 2



Zdroj: vlastní tvorba

3. VENNOVY DIAGRAMY V PRAXI

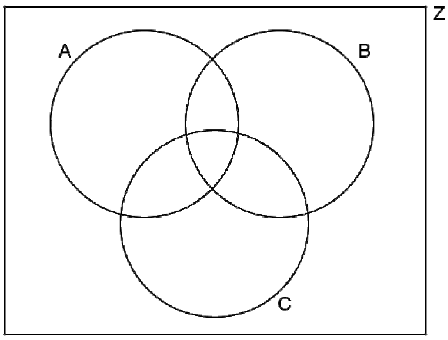
3.1 Grafické znázornění Vennových diagramů

Příklad 3.1.1

Znázorněte kruhový Vennův diagram základní množiny Z *pro množiny* A, B, C .

Řešení:

Obrázek č. 24: Řešení 3.1.1



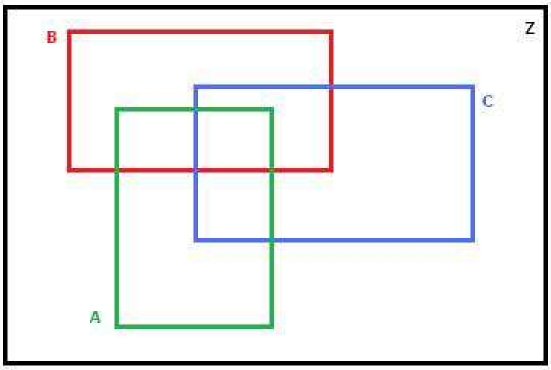
Zdroj: vlastní tvorba

Příklad 3.1.2

Vennův diagram pro tři množiny A, B, C *základní množiny* Z *lze znázornit také například pomocí obdélníků. Pomocí nich vypadá diagram moderněji. Uvedenou situaci zakreslete.*

Řešení:

Obrázek č. 25: Řešení 3.1.2



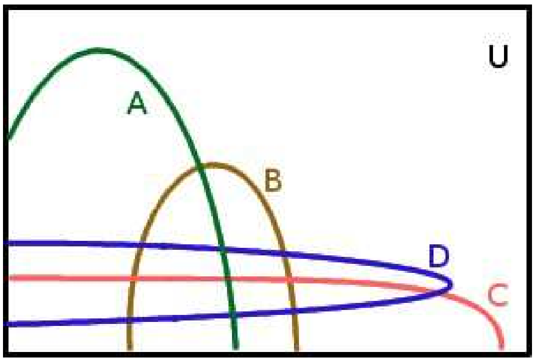
Zdroj: vlastní tvorba

Příklad 3.1.3

Znázorněte Vennův diagram základní množiny U *pro čtyři množiny* A, B, C, D *pomocí konvexních oválů.*

Řešení:

Obrázek č. 26: Řešení 3.1.3



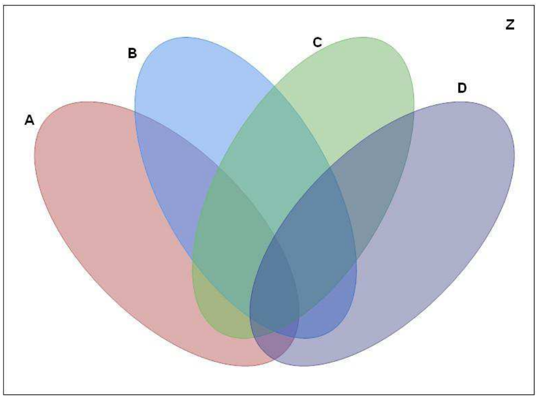
Zdroj: http://fyzmatik.pise.cz/8334-vennovy-diagramy.html

Příklad 3.1.4

Vennův diagram pro čtyři množiny A, B, C, D *základní množiny* Z *lze také znázornit využitím elips. Znázorněte takový diagram.*

Řešení:

Obrázek č. 27: Řešení příkladu 3.1.4



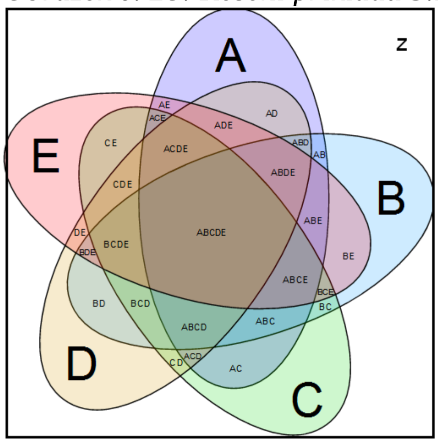
Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~numb3rs/lipa/power.html

Příklad 3.1.5

Elipsový Vennův diagram lze při pečlivém nákresu sestavit i pro pět množin A, B, C, D, E *základní množiny* Z *. Sestrojte takový diagram.*

Řešení:

Obrázek č. 28: Řešení příkladu 3.1.5



Zdroj: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Symmetrical_5-set_Venn_diagram.png

3.2 Grafické znázornění množin do Vennových diagramů

Příklad 3.2.1

V daném Vennově diagramu pro dvě množiny (obrázek č. 29) zvýrazněte:

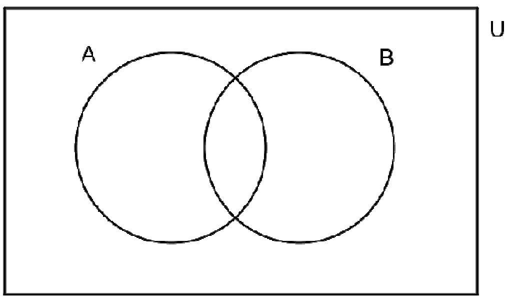
a) všechny prvky, které náleží množině A

b) všechny prvky, které nenáleží množině A

c) všechny prvky, které náleží jen množině A

d) všechny prvky, které náleží právě jedné z množin A *a* B.

Obrázek č. 29: Zadání 3.2.1

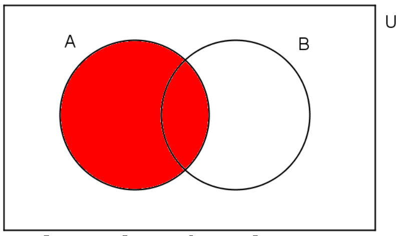


Zdroj: vlastní tvorba

Řešení:

a)

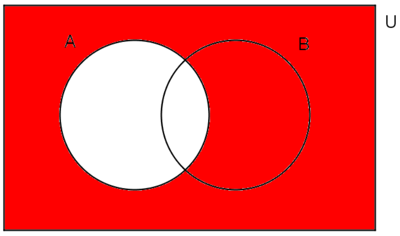
Obrázek č. 30: Řešení 3.2.1a



Zdroj: vlastní tvorba

b)

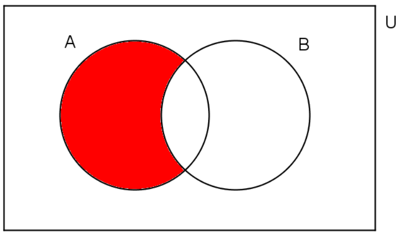
Obrázek č. 31: Řešení 3.2.1b



Zdroj: vlastní tvorba

c)

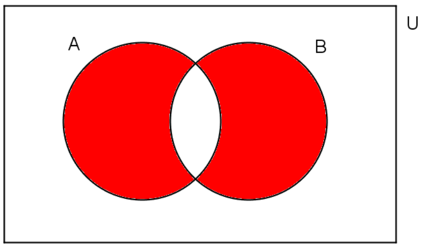
Obrázek č. 32: Řešení 3.2.1c



Zdroj: vlastní tvorba

d)

Obrázek č. 33: Řešení 3.2.1d



Zdroj: vlastní tvorba

Příklad 3.2.2

V daném Vennově diagramu pro tři množiny (obrázek č. 34) zvýrazněte:

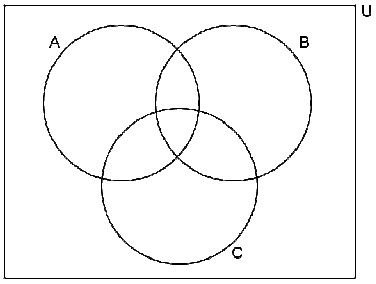
a) všechny prvky množiny B

b) všechny prvky, které nenáleží množině C

c) všechny prvky, které náleží současně množině B *i* C

d) všechny prvky, které náleží současně množině A *i* B *i* C.

Obrázek č. 34: Zadání 3.2.2

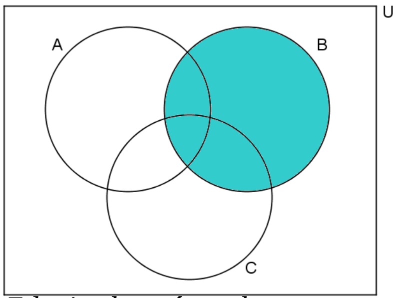


Zdroj: vlastní tvorba

Řešení:

a)

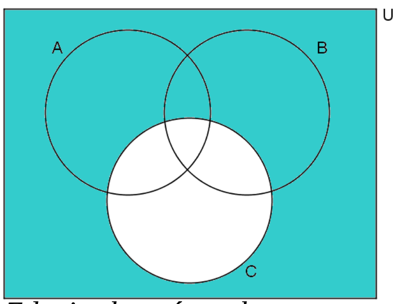
Obrázek č. 35: Řešení 3.2.2a



Zdroj: vlastní tvorba

b)

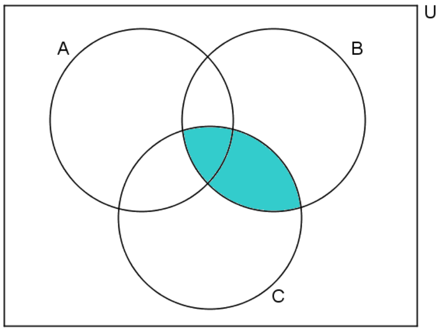
Obrázek č. 36: Řešení 3.2.2b



Zdroj: vlastní tvorba

c)

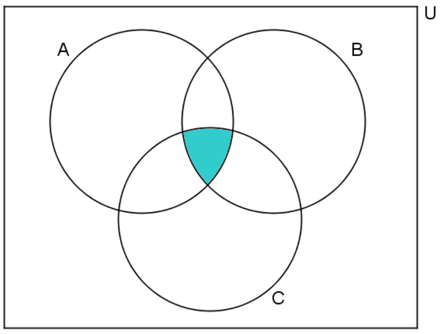
Obrázek č. 37: Řešení 3.2.2c



Zdroj: vlastní tvorba

d)

Obrázek č. 38: Řešení 3.2.2d



Zdroj: vlastní tvorba

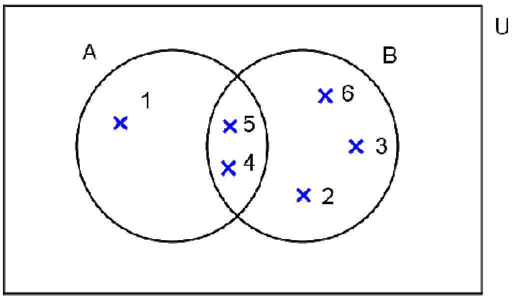
3.3 Zakreslování Vennových diagramů pro dané podmnožiny

Příklad 3.3.1

Do Vennova diagramu pro dvě podmnožiny A, B *základní množiny* U *zakreslete všechny prvky, platí – li:* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Řešení:

Obrázek č. 39: Řešení 3.3.1



Zdroj: vlastní tvorba

Příklad 3.3.2

Nakreslete Vennův diagram pro podmnožiny A, B, C *množiny* U *a zakreslete všechny jejich prvky, jestliže:* $A = \{n \in N; 3 \mid n \wedge n - 10 \langle 0\}$,

$$B = \{n \in N; \mid n - 4 \mid \langle 3\},$$

$$C = \{n \in N; n^2 - 2n - 3 \leq 0\},$$

$$U = \{n \in N; n \leq 10\}.$$

Řešení:

Bušek (1988) navrhuje zprvu určit množiny A, B, C výčtem prvků.

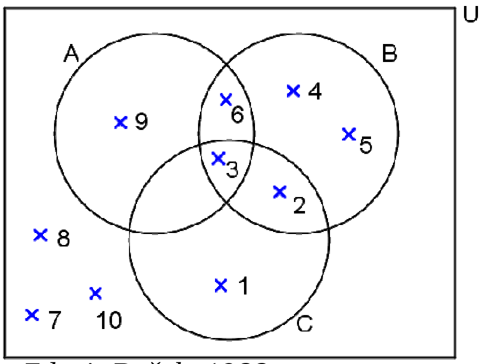
$A = \{3, 6, 9\}$.

Nerovnice $\mid n - 4 \mid \langle 3$ je ekvivalentní s nerovnicemi $1 \langle n \langle 7$. Obor pravdivosti této nerovnice v množině N je $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Kvadratickou nerovnici $n^2 - 2n - 3 \leq 0$ upravíme na tvar $(n+1) \cdot (n-3) \leq 0$, po úpravě dostaneme $-1 \leq n \leq 3$. Obor pravdivosti této kvadratické nerovnice v N je $C = \{1, 2, 3\}$.

Nyní můžeme zakreslit daný Vennův diagram.

Obrázek č. 40: Řešení 3.3.2



Zdroj: Bušek, 1988

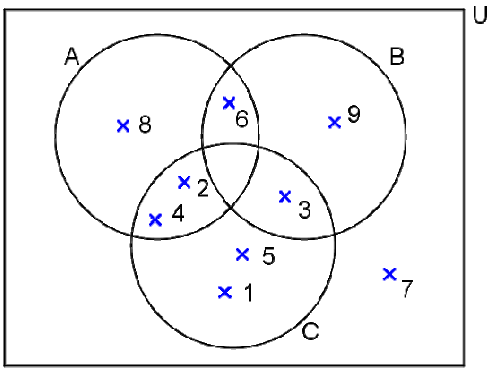
Příklad 3.3.3

Základní množina U je množina všech přirozených čísel menších než 10. A je množina všech sudých čísel z množiny U. B je množina všech čísel z množiny U, která jsou dělitelná třemi. C je množina všech přirozených čísel menších než 6. Zakreslete Vennův diagram pro uvedené množiny a vyznačte v něm všechny prvky množiny U.

(Bušek, Calda, 2004)

Řešení:

Obrázek č. 41: Řešení 3.3.3



Zdroj: Bušek, Calda, 2004

3.4 Množinové operace ve Vennových diagramech

Příklad 3.4.1

Z Vennova diagramu (obrázek č. 42) určete výčtem prvky množin:

a) $A \cap B$

b) A'

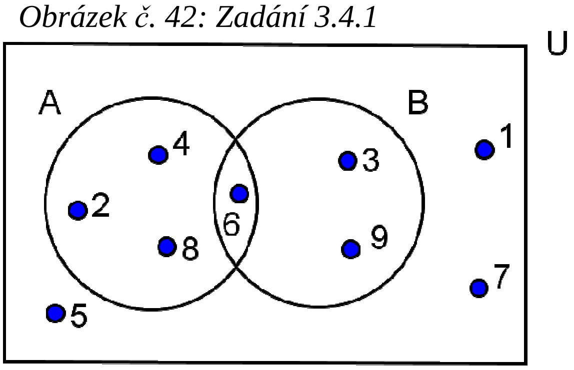
c) $A' \cap B \cup A$

d) $(A \cup B)'$

e) $(A \cup B)' \cap A$

f) B'

Obrázek č. 42: Zadání 3.4.1



Zdroj: Bušek, Calda, 2004

Řešení:

a) $A \cap B = \{6\}$

b) $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

c) $A' \cap B \cup A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

d) $(A \cup B)' = \{1, 5, 7\}$

e) $(A \cup B)' \cap A = \phi$

f) $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

Příklad 3.4.2

Do Vennova diagramu pro tři množiny A, B, C *základní množiny* U *zakreslete dané situace.*

a) $A \cap B \cap C$

b) $(A \cup B) \cap C$

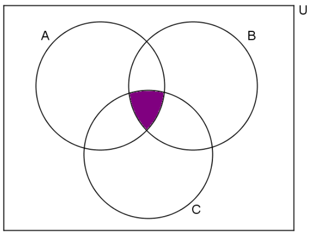
c) $A \cup (B \cap C)$

d) $A \cap B' \cap C'$

Řešení:

a)

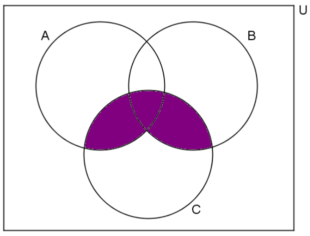
Obrázek č. 43: Řešení 3.4.2a



Zdroj: vlastní tvorba

b)

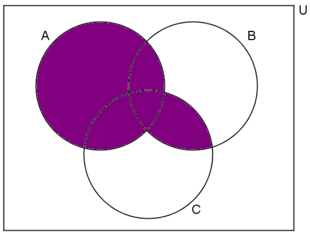
Obrázek č. 44: Řešení 3.4.2b



Zdroj: vlastní tvorba

c)

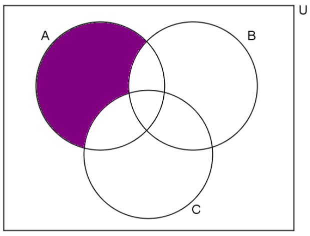
Obrázek č. 45: Řešení 3.4.2c



Zdroj: vlastní tvorba

d)

Obrázek č. 46: Řešení 3.4.2d



Zdroj: vlastní tvorba

Příklad 3.4.3

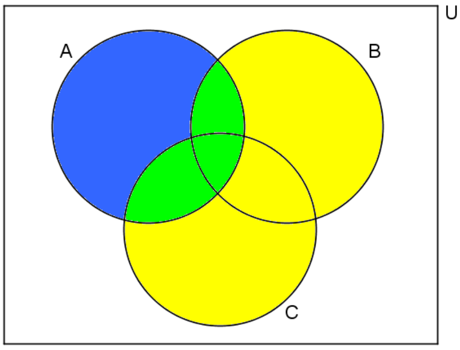
Užitím Vennova diagramu zjistěte, zda platí:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Řešení:

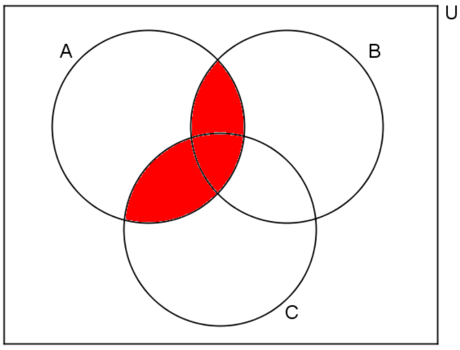
Nejprve si obě situace znázorníme pomocí Vennových diagramů.

Obrázek č. 47: Řešení $A \cap (B \cup C)$



Zdroj: vlastní tvorba

Obrázek č. 48: Řešení $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



Zdroj: vlastní tvorba

Na obrázku č. 47 je modrou barvou vyznačena množina A a žlutou barvou sjednocení $B \cup C$. Výsledným průnikem $A \cap (B \cup C)$ je ta oblast Vennova diagramu, která je vyznačená zelenou barvou.

Na obrázku č. 48 je červeně vyznačeno sjednocení $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Vidíme, že zelená oblast z prvního obrázku je stejná jako červená z druhého. Daná rovnost tedy platí.

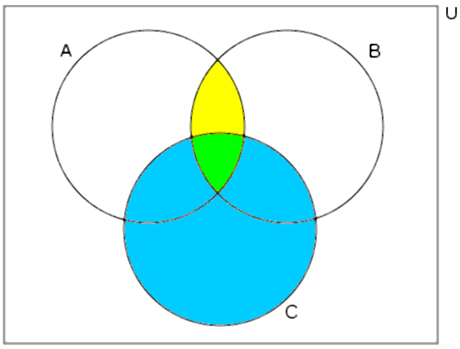
Příklad 3.4.4

Užitím Vennových diagramů dokažte pravdivost asociativního zákonu pro průnik tří množin A, B, C.

Řešení:

Asociativní zákon pro průnik tří množin A, B, C zní $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Obě situace znázorníme.

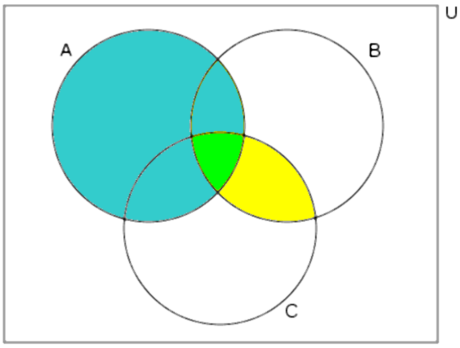
Obrázek č. 49: Řešení $(A \cap B) \cap C$



Zdroj: vlastní tvorba

Průnik množiny A a B je znázorněn žlutě, množina C modře. Konečný výsledný průnik udává barva zelená.

Obrázek č. 50: Řešení $A \cap (B \cap C)$



Zdroj: vlastní tvorba

Množina A je znázorněna modře a průnik množiny B a C žlutě. Konečný výsledný průnik udává barva zelená.

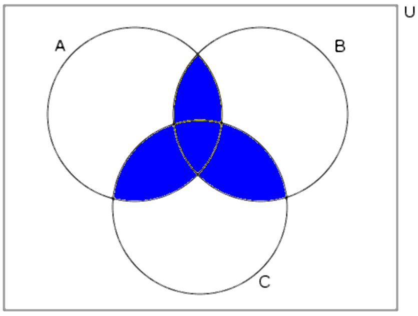
Oba diagramy označují stejný výsledný průnik. Asociativní zákon byl potvrzen.

Příklad 3.4.5

Pomocí známých množinových operací zapište situaci, kterou znázorňuje daný Vennův diagram.

a)

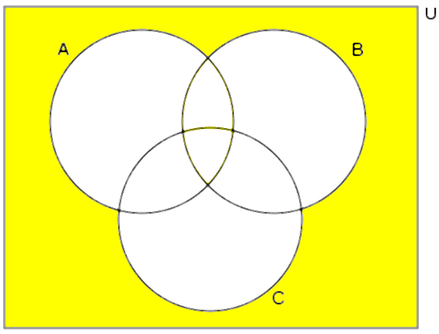
Obrázek č. 51: Zadání 3.4.5a



Zdroj: vlastní tvorba

b)

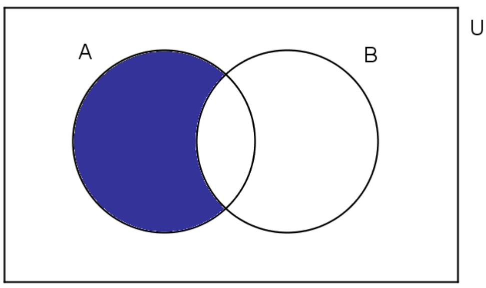
Obrázek č. 52: Zadání příkladu 3.4.5b



Zdroj: vlastní tvorba

c)

Obrázek č. 53: Zadání příkladu 3.4.5c



Zdroj: vlastní tvorba

Řešení:

U příkladů tohoto typu můžeme situaci na diagramu zapsat pomocí jakýchkoliv různě složitých množinových operací, proto nemá úloha pouze jedno řešení. Uvedené řešení jsou jedna z nich.

a) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$

b) $(A \cup B \cup C)'$

c) $A - B$

Příklad 3.4.6

Zjednodušte následující množinový zápis: $[A \cup (C \cap A)] \cup [C \cup [B \cap (C \cup B)]]$.

Řešení:

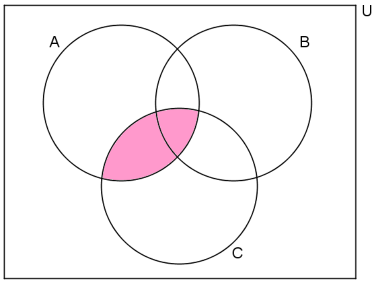
Úlohy tohoto typu se dají řešit postupnými úpravami dle pravidel pro operace s množinami. Další možností pro řešení příkladu je úvaha. Nyní si ukážeme, jak je možno takový příklad vyřešit pomocí Vennova diagramu.

Výsledek zadaného množinového zápisu znázorníme pomocí Vennova diagramu. Poté z výsledného diagramu odvodíme jednodušší zápis. Jednotlivé množinové operace budeme zakreslovat od nejvnitřnějších závorek.

V množinovém zápise vidíme sjednocení dvou množin zapsaných složitými zápisy. Začneme znázorněním levé strany tohoto sjednocení.

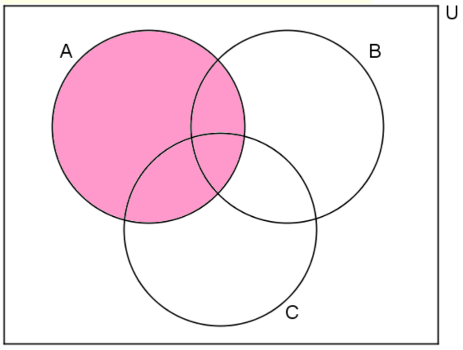
Obrázek č. 54 znázorňuje průnik množin A a C. Poté průnik sjednotíme s množinou A (obrázek č. 55).

Obrázek č. 54: Řešení 3.4.6a



Zdroj: vlastní tvorba

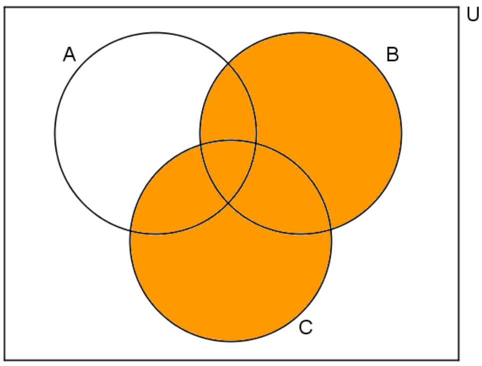
Obrázek č. 55: Řešení 3.4.6b



Zdroj: vlastní tvorba

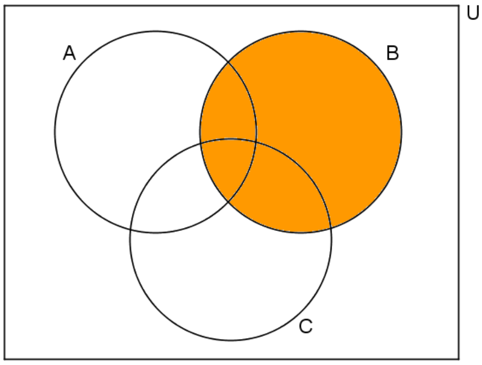
Nyní zakreslíme pravou stranu množinového zápisu. Prvně znázorníme množinu $(C \cup B)$ (obrázek č. 56), poté provedeme průnik s množinou B (obrázek č. 57), nakonec vše sjednotíme s množinou C (obrázek č. 58).

Obrázek č. 56: Řešení 3.4.6c



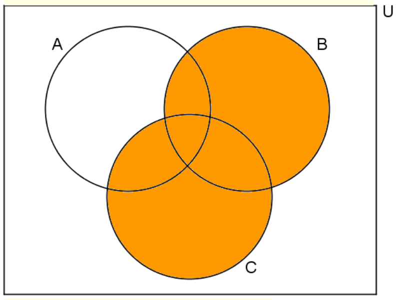
Zdroj: vlastní tvorba

Obrázek č. 57: Řešení 3.4.6d



Zdroj: vlastní tvorba

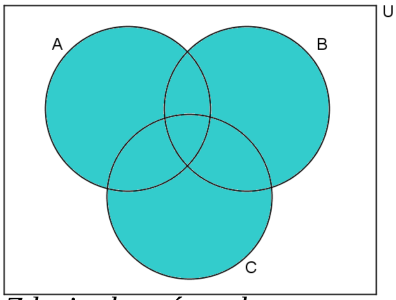
Obrázek č. 58: Řešení 3.4.6e



Zdroj: vlastní tvorba

Máme zakreslenou levou i pravou stranu nejvyššího sjednocení. Nezbývá nic jiného, než sjednocení provést. Následující obrázek (obrázek č. 59) ukazuje konečný výsledek.

Obrázek č. 59: Řešení 3.4.6f



Zdroj: vlastní tvorba

Zadaný složitý množinový zápis jsme znázornili pomocí Vennova diagramu a nyní můžeme odvodit zápis jednodušší. V tomto případě se dá zadaný zápis zjednodušit na zápis: $A \cup B \cup C$.

3.5 Řešení slovních úloh pomocí Vennových diagramů

Příklad 3.5.1

Ze 40 dotazovaných studentů hovoří anglicky nebo francouzsky 38 studentů. Nejvýše jeden z těchto jazyků ovládá 20 studentů. Anglicky mluví o 6 studentů více než francouzsky. Kolik studentů mluví

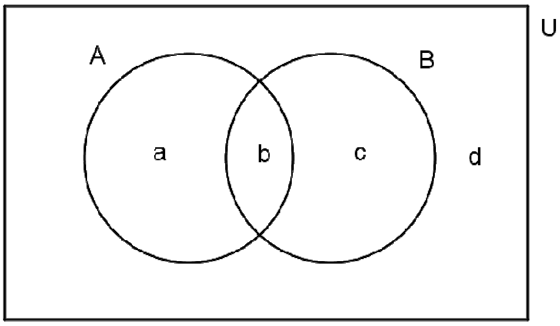
a) jenom anglicky,

b) anglicky i francouzsky?

Řešení:

Písmenem U si označíme množinu všech dotazovaných studentů, písmenem A označíme množinu všech studentů hovořících anglicky a písmenem B francouzsky. Poté můžeme nakreslit Vennův diagram pro dvě množiny A, B (obrázek č. 60). Přidáme označení počtů studentů patřících do jednotlivých polí diagramu: a, b, c, d.

Obrázek č. 60: Řešení 3.5.1



Zdroj: vlastní tvorba

Nyní postupně a pozorně opět čteme zadání úlohy a vyjádříme všechny údaje pomocí proměnných a, b, c, d.

Počet všech dotazovaných studentů je $a+b+c+d=40$.
Anglicky nebo francouzsky hovořících studentů je 38, čili $a+b+c=38$.
Nejvýše jeden z jazyků (nikoliv oba) ovládá 20 studentů, tedy $a+c+d=20$.
Z poslední věty, anglicky mluví o 6 studentů více než francouzsky, dostaneme rovnici
$a+b=b+c+6$.

Tímto postupem jsme získali soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých. Odečtením prvních dvou dostaneme první výsledek: $d=2$. Odečtením 1. a 3. rovnice vypočteme $B=20$ a postupným dalším dosazením dopočítáme $a=12$ a $c=6$.

Zbývá už jen odpovědět na otázky. Jenom anglicky mluví a studentů, což je 12 studentů. Anglicky i francouzsky mluví b studentů, což je 20 studentů.

Příklad 3.5.2

Písemná práce z matematiky obsahovala tři příklady. Třetí příklad vyřešilo 22 žáků, druhý příklad 23 žáků a první také 23 žáků. Žádný z příkladů nevyřešili pouze tři žáci a všechny příklady vyřešilo 7 žáků. První i druhý příklad vyřešilo 15 žáků a 12 žáků vyřešilo první a třetí příklad. Druhý nebo třetí příklad vyřešilo 31 žáků.

Vypočítejte:

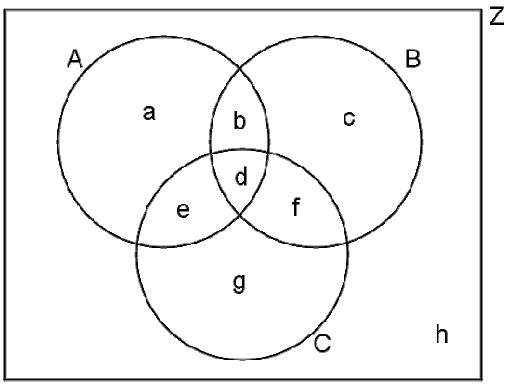
a) *Kolik žáků psalo tuto práci z matematiky?*
b) *Kolik žáků vyřešilo druhý i třetí příklad?*
c) *Kolik žáky vyřešilo první nebo druhý příklad?*

Řešení:

Úlohu vyřešíme opět pomocí Vennova diagramu, tentokrát pro tři množiny. Základní množina Z je množina všech žáků, kteří psali písemnou práci. Množiny A, B, C potom budou znázorňovat první, druhý a třetí příklad.

Nejprve si znázorníme daný Vennův diagram a přidáme označení pro počet studentů od a až po h.

Obrázek č. 61: Řešení 3.5.2



Zdroj: vlastní tvorba

Z textu vyplývají tyto rovnice:

$e + d + f + g = 22$

$a + b + e + d = 23$

$b + c + d + f = 23$

$h = 3$

$d = 7$

$b + d = 15$

$e + d = 12$

$b + c + d + f + e + g = 31$

Dvě rovnice už přímo uvádějí $h = 3$ a $d = 7$. Dosazením do šesté rovnice získáme $b = 8$ a ze sedmé rovnice $e = 5$. Tyto vypočítané údaje můžeme dosadit do druhé rovnice, výsledkem je $a = 3$.

Dosadíme – li prozatímní výsledky do zbylých rovnic, dostaneme po úpravě tyto rovnice:

$f + g = 10$

$c + f = 8$

$c + f + g = 11$.

Z rovnic dopočítáme poslední neznámé, kterými jsou $g = 3$, $f = 7$, $c = 1$.

Nyní již snadno odpovíme na položené otázky. Písemnou práci z matematiky celkem psalo 37 žáků. Druhý nebo třetí příklad vyřešilo 14 žáků. První nebo druhý příklad vyřešilo 31 žáků.

Příklad 3.5.3

Bruslit umí šest dětí. Lyžovat neumí devět dětí. Oba sporty umí pět dětí a jen jeden sport umí také pět dětí. Kolik dětí pouze lyžuje? Kolik dětí neumí bruslit ani lyžovat?

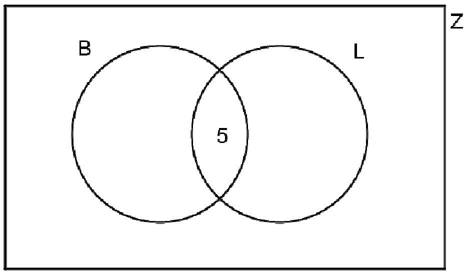
Řešení:

Není nutné vždy z daného příkladu tvořit rovnice a řešit dané neznámé. Princip diagramů už známe a víme, že nám velmi usnadňují představu. Proto můžeme pomocí Vennových diagramů řešit slovní úlohy jednodušším způsobem - kreslením.

Nakreslíme Vennův diagram pro dvě množiny. Množina B označuje děti, které umí bruslit a množina L ty, které umí lyžovat.

Oba sporty umí pět dětí. Přiřadíme číslo 5 do pole pro oba sporty (obrázek č. 62).

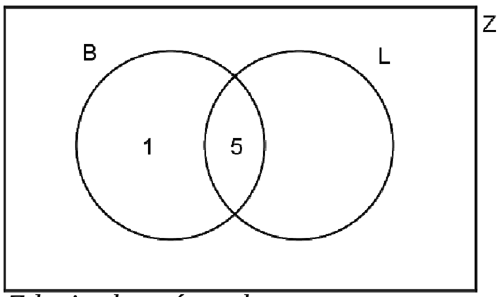
Obrázek č. 62: Řešení 3.5.3a



Zdroj: vlastní tvorba

Bruslit umí šest dětí. Zbývá tedy ještě jedno dítě, které umí bruslit.

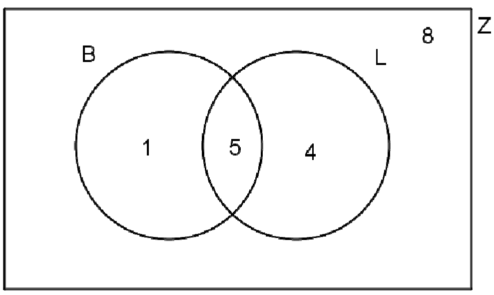
Obrázek č. 63: Řešení 3.5.3b



Zdroj: vlastní tvorba

Jen jeden sport umí pět dětí. Zbývají teda 4, kteří umí jen lyžovat.
Lyžovat neumí devět dětí. Osm dětí tedy neumí nic.

Obrázek č. 64: Řešení 3.5.3c



Zdroj: vlastní tvorba

Nyní můžeme formulovat odpovědi.

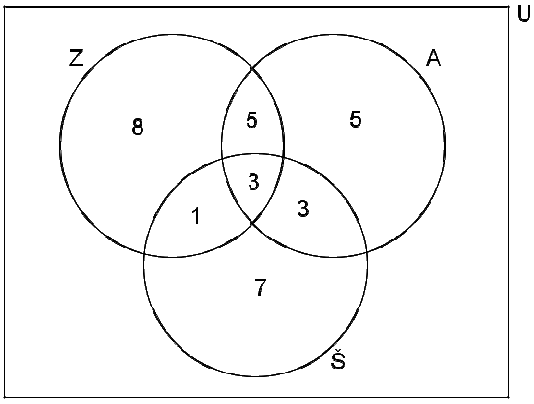
Čtyři děti pouze lyžují. Lyžovat ani bruslit neumí osm dětí.

Příklad 3.5.4

Na škole mohou chodit děti do tří kroužků: zpěv, aerobic a šachy. Každý žák chodí alespoň do jednoho z kroužků. Do zpěvu chodí celkem 17 žáků, na aerobic chodí 16 žáků a do šachového kroužku 14 žáků. Osm žáků chodí současně do zpěvu a na aerobic, šest na aerobic a do šachového kroužku a čtyři do zpěvu a šachového kroužku. Všechny kroužky navštěvují pouze tři žáci. Kolik je žáků ve třídě?

Řešení:

Obrázek č. 65: Řešení 3.5.4



Zdroj: vlastní tvorba

Ve třídě je celkem 32 žáků.

4. ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s Vennovými diagramy a ukázat jejich mnohostranné využití. Dále také upozornit čtenáře na možnost různého grafického ztvárnění Vennových diagramů.

Pro pochopení Vennových diagramů je důležitá určitá znalost množin a množinových operací. Z tohoto důvodu je v teoretické části kladen důraz nejprve na samotné množiny. Postupným poznáváním množin a množinových operací lze volně přejít k již zmiňovaným Vennovým diagramům, které jsou pro zobrazování množinových operací nejužívanější. Cílem práce bylo ukázat čtenářům různé grafické ztvárnění těchto diagramů. Bylo zjištěno, že různorodost grafického ztvárnění je závislá na tom, jakou uzavřenou křivku ke ztvárnění použijeme. Grafické ztvárnění Vennových diagramů bylo procvičováno v druhé části práce.

V praktické části byl splněn hlavní cíl bakalářské práce - stručný přehled úloh zabývajících se využitím Vennových diagramů. Tento přehled se skládá z řešených příkladů, který je podle typů příkladů patřičně rozdělen do pěti podkapitol.

Práce je určena především učitelům matematiky na základních školách. Ti zde mohou čerpat jak teoretické znalosti, tak i typické příklady z uvedeného přehledu. Učitelé 1. stupně základních škol se mohou inspirovat především příklady zabývajícími se zobrazení množin ve Vennových diagramech či množinovými operacemi. Učitelé 2. stupně mohou využít tyto příklady k opakování diagramů a následně navázat úlohami složitějšími, například zobrazováním Vennových diagramů pro více než čtyři množiny či zjednodušováním složitého množinového zápisu. Dále se učitel 2. stupně může inspirovat poslední částí uvedeného přehledu příkladů. Ta se věnuje slovním úlohám o počtech prvků konečných množin. Tyto slovní úlohy vyžadují jistou znalost diagramů a určitou zkušenost.

Problematika množin, množinových operací a Vennových diagramů se probírá také na středních školách. Tato práce tudíž nemusí sloužit pouze jako příručka k přípravě hodin pro učitele matematiky, může naopak posloužit také studentům středních škol při studiu Vennových diagramů či při opakování problematiky Vennových diagramů před maturitní zkouškou.

5. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A OSTATNÍCH ZDROJŮ

KNIŽNÍ PUBLIKACE

[1] BUŠEK, I. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 2. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988, 528 s. ISBN 14-290-88.

[2] BUŠEK, I., CALDA E. *Matematika pro gymnázia*: *Základní poznatky z matematiky*. 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, 2004, 178 s. ISBN 80-7196-146-9.

[3] DRÁBEK, J., (KRIŽALKOVIČ, K., LIŠKA, J., VIKTORA, V.) *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985, 224 s. ISBN 14-521-85.

[4] HRUŠA, K., DLOUHÝ, Z., ROHLÍČEK, J. *Úvod do studia matematiky*. 2. doplněné vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977, 352 s. ISBN 14-644-77.

[5] KINDL, K. *Matematika*: *Přehled učiva základní školy*. 3. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1980, 408 s. ISBN 14-388-80.

[6] KUŘINA, F. *Množiny a relace*: *Základní pojmy elementární matematiky*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970, 120 s. ISBN 17-285-70.

[7] KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, 79 s. ISBN 80-04-23753-3.

[8] NOVÁKOVÁ, M. *Slovník školské matematiky*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981, 240 s. ISBN 14-614-81.

INTERNETOVÉ ZDROJE

[9] A Survey of Venn Diagrams: What is a Venn Diagram?. *The Object Server* [online]. Květen 2005 [cit. 2012-04-15]. Dostupné z: http://www.theory.csc.uvic.ca/~cos/venn/VennWhatEJC.html

[10] *Euler Diagrams* [online]. 2010-07-07 [cit. 2012-02-13]. Dostupné z: http://www.eulerdiagrams.com/

[11] Numb3rs Season 4 Episode 12: Power. *Cornell Mathematics* [online]. Leden 2010 [cit. 2012-03-10]. Dostupné z: http://www.math.cornell.edu/~numb3rs/lipa/power.html

[12] Symmetrical 5-set Venn diagram. *Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 2011-04-02 [cit. 2012-01-01]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Symmetrical_5-set_Venn_diagram.png

[13] Vennovy diagramy. *FYZMATIK* [online]. 2009-10-12 [cit. 2012-02-18]. Dostupné z: http://fyzmatik.pise.cz/8334-vennovy-diagramy.html

[14] Výuka logiky: Množiny. *Matematická sekce MFF UK* [online]. 2011 [cit. 2011-11-13]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/moravecdp/mnoziny.php

6. SEZNAM OBRÁZKŮ