Polibky kružnic

Diplomová práce

Miroslav Kotlas

Vedoucí diplomové práce:

RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

České Budějovice 2011

Prohlášení

Prohlašuji, že diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou byly v souladu s uvedeným stanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 23. listopadu 2011 Miroslav Kotlas

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Pedagogická fakulta
Akademický rok: **2009/2010**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Miroslav KOTLAS**
Studijní program:	**M7504 Učitelství pro střední školy**
Studijní obory:	**Učitelství matematiky**
	Učitelství výpočetní techniky
Název tématu:	**Polibky kružnic**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Práce bude rozdělena do dvou částí. První z nich bude zaměřena na historii věty zvané "Kissing circles theorem," včetně jejích různých důkazů. Druhá, didaktická část práce, bude sbírkou početních a konstrukčních úloh pro žáky středních i základních škol. Úlohy budou zaměřeny na geometrické situace, v nichž se kružnice dotýkají navzájem (v praxi například kružby gotických oken apod.), a bude též ukázána jejich souvislost s výše zmíněnou větou.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: **60 stran**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

Bos, E.-J., Verbeek Th., J.M.M. van de Ven: The correspondence of Rene Descartes 1643, Utrecht University, 2003
http://igitur-archive.library.uu.nl/ph/2005-0309-013011/index.htm
Coxeter, H. S. M.: Introduction to Geometry

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání diplomové práce: **23. listopadu 2009**

Termín odevzdání diplomové práce: **23. dubna 2011**

L.S.

doc. PhDr. Alena Hošpesová, Ph.D.
děkanka

prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 24. listopadu 2009

Anotace

Název:	Polibky kružnic
Vypracoval:	Miroslav Kotlas
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Klíčová slova:	historie matematiky, metody řešení úloh, geometrie, kružnice

Práce se zabývá různými metodami odvození vztahu mezi poloměry čtyř navzájem se dotýkajících kružnic a historií, jak byl tento vztah odvozován. Didaktická část práce obsahuje sbírku řešených úloh mezi něž je zahrnuta i tématika apolloniovských fraktálů, gotické klenby a úlohy o vzájemně se dotýkajících kružnicích.

Abstract

Title:	Kissing circles
Author:	Miroslav Kotlas
Supervisor:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Key words:	history of mathematics, problem solving strategies, geometry, circles

My thesis deals with various methods of solving the correlation of the diametres of four mutually tangent circles. It also deals with the history of the derivation of mathematical property. The didactic part contains a book of solved tasks. It involves the topic of Apollony fractals, gothic vaults, examples of mutually tangent circles and set of exercises for practising different solutions of the various cases.

Poděkování

Děkuji RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za vedení diplomové práce a také za trpělivost, cenné rady, diskuze a pomoc při vypracovávání této diplomové práce.

Rád bych také poděkoval své rodině, přítelkyni a všem, kteří v jakékoliv míře přispěli k vypracování této práce.

Obsah

1 Úvod

Matematika je jedna z nejstarších disciplín světa. Již od čtvrtohor, kdy člověk začal používat nástroje k obživě, potřeboval matematiku k životu. Jak se rozvíjela kultura a potřeby člověka, přibývaly nové a nové matematické objevy. Některé byly pro lidstvo důležité v každodenním životě, některé fascinovaly lidi svojí složitostí a jiné byly zapomenuty. V průběhu věků se proto často stávalo, že i matematici objevili již dávno objevené a pokládali to za zcela nové.

Ve své práci se budu zabývat vztahem známým jako „Descartes Circle Theorem“, jenž jako první nalezl René Descartes. Descartes, jako jeden ze zakladatelů analytické geometrie, se pokoušel řešit tradiční úlohy zcela novým způsobem. Napadlo jej řešit Apolloniovu úlohu analytickou metodou a zadal tento problém jako cvičení princezně Alžbětě Falcké. Ukázalo se však, že obecné řešení je náročné. Společně nakonec dospěli ke vztahu pro poloměry čtyř vzájemně se dotýkajících kružnic. Vztah nepublikovali, a tak upadl do zapomnění.

V roce 1826 tento vzorec znovu odvodil švýcarský geometr Jakob Steiner a krátce po něm v roce 1842 také angličan Phillip Beecroft. Ani poté nepronikl do podvědomí veřejnosti. Nesmrtelnost tomuto objevu přinesl až anglický chemik Frederick Soddy. Ačkoliv se Soddy zabýval převážně chemií, za níž dostal v roce 1921 Nobelovu cenu, věnoval se také matematice. V roce 1936 napsal článek, v němž odvodil vzorec pro poloměry dotýkajících se kružnic. Článek zakončil básní s názvem „The Kiss Precise“ (česky „Vypočtený polibek“), která vzbudila velký ohlas. Domníval se, že matematický vztah uvedený v básni objevil jako první.

Soddy napsal původně tři verše. V prvních dvou poeticky popisuje daný problém a odhaluje rovnici pro výpočet poloměru. Třetí je rozšíření problému do prostoru. Do redakce časopisu chodilo mnoho ohlasů na tuto báseň. O půl roku později v lednu 1937 se čtenáři dočkali pokračování. Čtvrtý verš, který zobecňoval daný problém do n-rozměrného prostoru, v němž se líbají n-rozměrné koule, zaslal anglický právník a amatérský matematik Thorold Gosset.

Diplomová práce je rozdělena do třech základních kapitol. První se zaobírá historií. René Descartes řešil tuto úlohu společně s Alžbětou Falckou. Ve třech dopisech z roku 1643 je popsán celý problém a překážky, které museli Descartes i Alžběta překonat, než nalezli zmíněnou matematickou větu. V druhé části uvedu několik chronologicky seřazených důkazů této věty. Poslední kapitola je sbírkou řešených příkladů, v nichž se kružnice vzájemně dotýkají.

The Kiss Precise[1]
by Frederick Soddy

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

Vypočtený polibek[2]
Frederick Soddy

Když ústa k sobě přilnou,
v hlavě může být prázdno.
Chtějí-li se však políbit
čtyři kruhy navzájem,
pak jen geometrův výpočet
je k tomu dovede.
Jsou dvě varianty, obě pěkné:
tři v jednom, jeden mezi třemi.
Tři v jednom pak zevnitř
přitahovány jsou ke gigantu.
Jeden mezi třemi
líbá všechny zvenku.

[1] Původní znění básně The Kiss Precise od Fredericka Soddyho
[2] Překlad z knihy Geometrická rapsódie od Karla Levitina [14]

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

In Nature, June 20, 1936

The Kiss Precise (Generalized)
by Thorold Gosset

And let us not confine our cares
To simple circles, planes and spheres,
But rise to hyper flats and bends
Where kissing nmultiple appears,
In n-ic space the kissing pair
Are hyperspheres, and Thruth declares -
As n + 2 such osculate
Each with an n + 1 fold mate
The square of the sum of all bends
Is n times the sum of their squares.

In Nature, January 9, 1937

2 Historie objevu Descartesovy věty o kružnicích

2.1 René Descartes a Alžběta Falcká

Alžběta Falcká (1618 - 1680) byla dcerou Fridricha V. Falckého a Alžběty Stuartovny. Po svržení svého otce vyrůstala v Berlíně v péči své babičky Juliany [19]. V deseti letech byla poslána do holandského Leidenu k dokončení základního vzdělání. Zde se učila klasickým i moderním jazykům, výtvarnému umění a literatuře. Projevily se u ní mimořádné sklony ke studii filozofie a vysloužila si přezdívku „La Grecque“ (Řekyně) převážně díky jejím ohromujícím znalostem klasických jazyků. Po dokončení studia se přestěhovala ke svým rodičům do Haagu [10]. Alžběta byla velice vzdělaná. Kromě jazykových a filozofických dovedností projevovala veliký talent v matematice a přírodních vědách. Matematiku se pravděpodobně učila z knihy „Algebra ofte Nieuve Stel-Regel“ od holandského matematika Johanna Stampionena. Descartes kritizoval Stampionenovy matematické postupy a později Alžbětě vytýkal studium matematiky z jeho knih [9].

V roce 1642 vyšlo v Amsterdamu druhé vydání Descartesovy Meditace o první filozofii [15]. V té době pobýval na královském dvoře v Haagu Alphonse de Pollot. Dvořan knížete Oranžského byl Descartesovým dobrým přítelem a právě on ho nejspíše upozornil na princeznu. Poté, co si Alžběta přečetla Meditaci o první filozofii, toužila se setkat s autorem knihy osobně. Descartes rád přijal pozvání z dvora a od této doby se stal princezniným filozofickým rádcem.

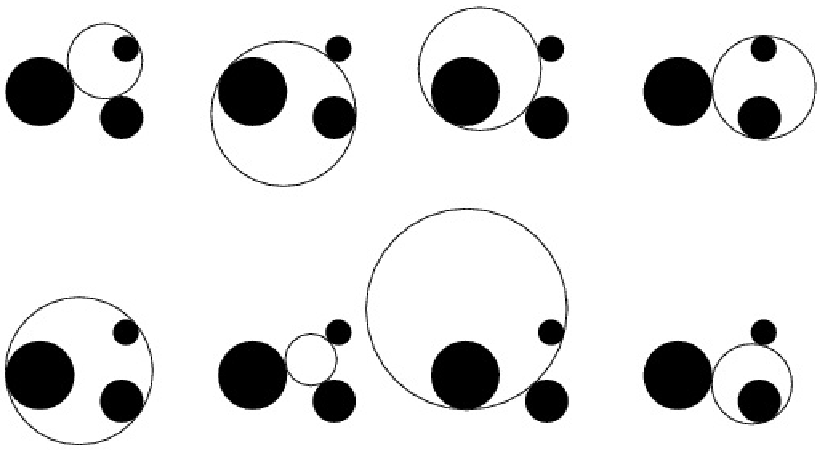
V květnu 1643 Descartes opouští Haag a stěhuje se do holandského Egmond op den Hoef. Pravidelné návštěvy nahradila korespondence, která trvala plných 7 let. Poslední dopis poslal filozof princezně ze Stockholmu, kde byl na návštěvě u královny Kristiny, v prosinci roku 1649, dva měsíce před svou smrtí. Originály nebo ruční opisy dopisů, které se dochovaly, jsou dnes uloženy v Britské knihovně. Mezi nimi jsou i tři dopisy z konce roku 1643. Dva od Reného Descartese a jeden od princezny Alžběty. Dopisy jsou výjimečné tím, že se v nich neřeší filozofické otázky jako ve většině jiných, nýbrž matematický problém tří kružnic. Korespondence z této doby není úplná, některé dopisy se ztratily. Přesto se někteří vědci pokusili rekonstruovat myšlenky a postupy, které byly v dopisech použity a které vedly k objevu Descartesovy věty o kružnicích. Analýza, kterou dále uvádím, je převzata od Bose J. M. Henka (viz. [4]).

2.2 Analýza tří dopisů z roku 1643

21. října 1643 napsal Descartes Pollotovi dopis, v němž navrhuje princezně Alžběte, aby uplatnila své algebraické dovednosti na úlohu „la question des trois cercles". Obával se však, že úloha pro ni bude příliš složitá. Z dopisů se zdá, že Pollot informoval Descartese o jejím úspěchu. Princezna se domnívala, že nalezla způsob, jak problém vyřešit. Při postupu počítala pouze s jednou neznámou. Descartes nemohl uvěřit, že by na základě použití jediné neznámé mohla princezna uspět. Napsal dlouhý dopis, ve kterém podrobně popsal problém a přiložil i své vlastní řešení. Tento dopis je prvním ze dvou dochovaných dopisů. Descartes ho poslal Pollotovi 17. listopadu 1643 s přáním, aby jeho poznatky předal princezně a přesvědčil ji, zda by byla ochotna pokračovat v jeho pokusech. Pollot vyřídil Descartesovu žádost a dopis předal. Alžběta si ho přečetla a 21. listopadu 1643 Descartesovi odpověděla. Její řešení problému je ztraceno, ale Descartes na něj reagoval dopisem z 29. listopadu 1643. V jejich další korespondenci nejsou žádné další odkazy na problém tří kružnic. Dá se předpokládat, že tento dopis byl poslední, ve kterém se zabývali tímto matematickým problémem.

Popis problému

Problém tří kružnic, častěji nazývaný jako Apolloniův problém, se týká tří kružnic v rovině, k nimž máme nalézt čtvrtou, která má se všemi zadanými společný dotyk. Je možných celkem osm různých řešení (viz obr. 1). Descartes a Alžběta mlčky předpokládali šestou možnost z obr. 1, kde jsou kružnice v trojúhelníkovém uspořádání a každá z nich se nachází vně daných dvou. Hledali jen takovou kružnici, která má se zadanými kružnicemi pouze vnější dotyky.



Obr. 1 : 8 různých řešení

Podle převažujícího názoru té doby na řešení geometrických problémů by řešení Apolloniova problému mělo spočívat v geometrické konstrukci pomocí pravítka a kružítka nebo v popisu posloupnosti kroků, vedoucích k sestrojení středu a poloměru hledané kružnice. Descartes ani Alžběta k takové konstrukci nedospěli. Částečně to bylo díky složitosti problému. Podle Descartesova názoru lze rozhodnout, zda je geometrický problém možno řešit pouze pomocí pravítka a kružítka. V opačném případě je potřeba při konstrukci použít složitějšího matematického myšlení. K tomuto zjištění stačí pouze určit stupeň příslušné rovnice. Pokud je rovnice lineární nebo kvadratická, úlohu lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka. V ostatních případech to nelze. Jak by mohly být konstrukce obecně odvozeny z rovnice, popisuje Descartes ve své Geometrii[1]. Proto tato část řešení pro něj nebyla nová. Podrobnější zpracování konstrukce z rovnice považoval za zbytečné a nudné, jelikož nesloužilo k tréninku mysli, ale pouze k procvičení trpělivosti při řešení některých náročných výpočtů.

Alžbětiným záměrem bylo odvodit pomocí algebry rovnici pro výpočet poloměru hledané kružnice. Tento přístup pravděpodobně zvolila díky matematickému tréninku od Stampionena. Alžběta studovala z jeho knihy[2] vydané roku 1639, v níž poslední část nazval „Odhalení důkazů“ [4]. Zde ukázal, jak důkazy některých vět od Euklida či Vieta mohou být odvozeny pomocí algebry. Descartesovy komentáře k Alžbětiným dopisům ukazují, že používala písmena jako samozřejmost, což ukazuje na značné zvládnutí algebry.

Dopis první
Descartes Alžbětě, Egmond du Hoef, 17. listopad 1643

„Madame, od Pollota jsem se dozvěděl, že Vaše veličenstvo zvážilo řešit problém tří kružnic a že nalezlo způsob, jak úlohu vyřešit pouze za předpokladu jedné neznámé. Myslím, že je mou povinností, abych stanovil důvod, proč jsem navrhl použít několik neznámých veličin a jakým způsobem jsem s nimi pracoval [7].“

Při posuzování problému v geometrii se Descartes obvykle snažil, aby přímky, které používal k nalezení řešení, byly pokud možno rovnoběžné nebo svíraly pravý úhel. Nebral v úvahu žádné jiné věty než: strany podobných trojúhelníků jsou ve stejném poměru a v pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina velikosti přepony rovna součtu druhých mocnin velikostí odvěsen

[1]Podrobně se lze dočíst například v anglickém překladu The Geometry of René Descartes od Davida Eugena Smithe a Marcia L. Lathama

[2]Johan Stampionen, *Algebra ofte nieuwe stel-regel waerdoor alles ghevonden wordt in de wis-kunst, wat vindtbaer*

(Pythagorova věta). Neobával se, že při více neznámých by problém nešel redukovat na takové části, které by záležely pouze na těchto dvou větách. Naopak jich preferoval předpokládat více než méně. Descartes byl přesvědčen, že mnoho proměnných mu pomůže k nalezení nejkratší cesty k dosažení výsledku a vyhne se nadbytečnému násobení. Připouští, že někdo jiný by klidně mohl přidat i jinou přímku a využít dalších vět a jeho výsledek by mohl být kratší. Jak píše přímo ve svém dopise: „Jeden nevidí, co jinému je zřejmé, s výjimkou pokud druhý předvede větu, kterou má právě na mysli [7].“

Po této úvodní části prvního dopisu se konečně dostává k řešení problému tří kružnic. Polemizuje, že k nalezení řešení by stačilo uvažovat jedinou neznámou, kterou by byl poloměr hledané kružnice. Za pomoci věty pro výpočet obsahu trojúhelníka při jeho známých stranách, by šlo problém vyřešit. V dalším textu budeme používat přesné značení, které používal i Descartes (včetně psaní xx místo x^2). Označme písmeny A, B, C středy zadaných kružnic a písmenem D střed hledané kružnice. Tvar a strany trojúhelníka ABC jsou dané. Úsečky AD, BD a CD dostaneme jako součty poloměrů daných kružnic s poloměrem kružnice hledané. Tímto dostáváme všechny tři strany trojúhelníků ABD, ACD a BCD. Lze jednoduše spočítat obsahy těchto trojúhelníků. Jejich součet je roven obsahu trojúhelníka daného body ABC. Pomocí této rovnosti lze nalézt neznámý poloměr x, který je vyžadován pro vyřešení tohoto úkolu. Tento postup se zdál Descartesovi příliš složitý. V dopise uvádí: „Zdá se mi, že tato cesta vede k velmi nadbytečnému násobení. Nemohu zaručit, že bych k řešení dospěl ani v průběhu tří měsíců [7].“ Descartes vždy vyžadoval, aby úsečky, se kterými pracuje, byly navzájem kolmé. Tento způsob řešení však využívá šikmých čar. Odtud můžeme usoudit, že tento postup pravděpodobně použila Alžběta a Descartesovi ho sdělil Pollot.

Dále v dopise ukazuje jiný způsob. Místo k sobě šikmých čar AB a BC vzal tři kolmé úsečky BE (výška trojúhelníku ABC), DG (kolmice na BE) a DF (výška trojúhelníku ACD), viz obr. 2. Nespokojil se jen s jednou neznámou, ale k poloměru x přibyly ještě neznámé pro úsečky $DF = GE$ a DG. Nyní měl označené všechny strany pravoúhlých trojúhelníků ADF, BDG a CDF. Podle Pythagorovy věty dospěl ke třem rovnicím. Poté, co získal tolik rovnic, kolik měl zvoleno neznámých, zvážil, zda může z každé rovnice vyjádřit jednu neznámou v dostatečně jednoduchém tvaru. Pokud to jde, vyřeší soustavu eliminační metodou. Pokud to takovým způsobem nejde, pokusíme se dospět k jedné rovnici jiným způsobem. Například sečtením či odečtením dvou nebo více rovnic. Konečně kdyby ani toto nebylo úspěšné, navrhoval Descartes prozkoumat, zda by nebylo lepší nějakým způsobem výrazy předělat.

Descartes uvažoval pravoúhlé trojúhelníky ADF, BDG a DFC, jejichž přepony jsou:

$$AD = a + x,$$

$$BD = b + x,$$

$$CD = c + x.$$

Následně provedl označení stran pomocí proměnných: $AE = d, BE = e$, $CE = f, DF = GE = y$, $DG = FE = z$, kde E je pata kolmice z bodu B na úsečku AC. Navíc označil ještě části:

$$AF = d - z \text{ a } FD = y,$$

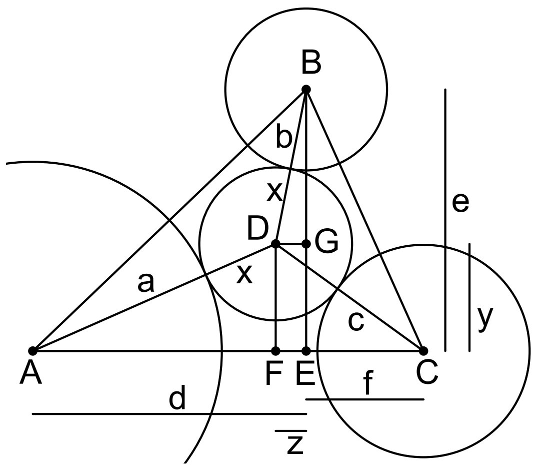
$$BG = e - y \text{ a } DG = z,$$

$$CF = f + z \text{ a } FD = y.$$

Z použitého označení vyplývají Descartesovy neznámé x, y a z. Aplikací Pythagorovy věty na pravoúhlé trojúhelníky AFD, DGB a FCD nalezl tři následující rovnice (v mírně zmodernizovaném zápise):

$$aa + 2ax + xx = dd - 2dz + zz + yy, \tag{1}$$

$$bb + 2bx + xx = ee - 2ey + yy + zz, \tag{2}$$



Obr. 2

$$cc + 2cx + xx = ff + 2fz + zz + yy. \tag{3}$$

Z žádné z rovnic (1) až (3) nelze vyjádřit neznámou, aniž bychom se vyhnuli zapsání odmocniny. To Descrates považoval za dosti závažný problém. Uchýlil se k druhému možnému postupu, kterým je spojení dvou rovnic dohromady. Všiml si, že ve všech rovnicích se objevují členy xx, yy a zz. Odečtením dvou rovnic odstraníme neznámé v druhých mocninách a zůstanou nám rovnice s neznámými v první mocnině. Lze dále zpozorovat, že odečtením rovnice (2) od rovnic (1) nebo (3) získáme rovnici závislou na všech třech neznámých. Když ale odečteme rovnici (1) od rovnice (3), budeme mít pouze neznámé x a z. Z tohoto důvodu si Descartes vybral druhou možnost a dospěl k rovnici:

$$cc + 2cx - aa - 2ax = ff + 2fz - dd + 2dz. \tag{4}$$

Po úpravě a vyjádření neznáme z obdržíme

$$z = \frac{cc - aa + dd - ff + 2cx - 2ax}{2d + 2f} \tag{5}$$

nebo ještě lépe

$$z = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}f + \frac{cc - aa + 2cx - 2ax}{2d + 2f}. \tag{6}$$

Ve druhém kroku odečetl rovnici (2) od rovnice (1):

$$aa + 2ax - bb - 2bx = dd - 2dz - ee + 2ey. \tag{7}$$

Výsledná rovnice obsahuje pouze jedinou neznámou z, kterou můžeme nahradit výrazem, jež jsme dostali z první rovnice a dospějeme k rovnici

$$2ey = ee + aa + 2ax - bb - 2bx - dd + dd - df + \frac{ccd - aad + 2cdx - 2adx}{d+f}. \tag{8}$$

Po úpravě a vyjádření y:

$$y = \frac{1}{2}e - \frac{bb}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{ccd + aaf + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef}. \tag{9}$$

Descartes uvedl, že pokud tyto získané rovnosti pro y a z dosadíme do některé z rovnic (1), (2) a (3), dospějeme k rovnici, kde jedinou neznámou je x v první a druhé mocnině. Tento důsledek je přímo vidět z tvarů výsledných výrazů. Descartes tuto rovnici ve skutečnosti neodvodil, jelikož považoval zbytek výpočtů za pouhé mechanické počítání, které neslouží k pěstování nebo pobavení mysli, ale jen k procvičení trpělivosti při výpočtech. V dopise přímo uvádí: „I tak se obávám, že jsem uvedl sám sebe před Vámi jako nudného, proto jsem přestal psát věci, o kterých víte bezpochyby lépe než já, že jsou jednoduché, ale které jsou nicméně klíčem k mojí algebře [7].“

Fakt, že x se vyskytuje v rovnici nejvýše ve druhé mocnině, ukazuje, že problém je rovinný a lze ho sestrojit pomocí pravítka a kružítka. Ve spise Geometrie[3] Descrates uvádí obecnou metodu, jak z rovnice druhého stupně odvodit konstrukci za pomoci pravítka a kružítka. Nicméně tvrzení, že jeho důkaz sestrojitelnosti zajistil základní odpověď na problém, zakrývá fakt, že Descartes mohl jen stěží odvodit konečnou rovnici [4]. Skutečné odvození rovnice s neznámou x je více než namáhavé. K výpočtu lze dospět například pomocí počítačového programu Derive. Rovnice se skládá z přibližně 87 členů, z nichž každý je součinem šesti činitelů[4]. Je prakticky nemožné použít proceduru použitou v Geometrii. I tak by to bylo jen těžko uspokojivé řešení problému, jehož zadání je natolik jednoduché.

[3]Popis obecné metody je uveden na stranách 374-376.

[4]Výsledná rovnice:

Několik jeho poznámek v dopise naznačuje, že Descrates si byl vědom složitosti problému. Nabízí se otázka, proč ho navrhl Alžbětě. Taková úloha by princeznu spíše odradila od jeho nové analytické metody. Nejpravděpodobnější vysvětlení se zdá takové, že navrhl problém princezně v době, kdy ho sám neřešil. Až později si uvědomil složitost úlohy. Takový průběh událostí by byl zcela v souladu i s jeho obavami, že se princezna ztratí v dlouhých výpočtech.

Dopis druhý
Alžběta Descartesovi, Haag, 21. listopad 1643

V tomto dopise Alžběta Descartesovi sděluje, že se rozhodla poslat mu své původní výpočty, protože jeho vlastní metodu si ještě příliš neosvojila. Žádá jej, aby se s její metodou seznámil a poradil jí, kde udělala chyby. Jejím cílem bylo odvodit větu, který by určovala poloměr hledané kružnice pomocí zadaných veličin. V tomto pokusu selhala. Napsala, že její výsledky jsou nedostatečně přesné, a žádá Descartese o radu.

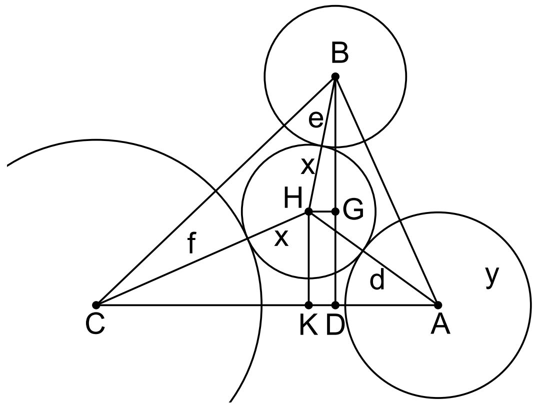
Dopis zřejmě obsahoval princezniny výpočty. Ty jsou však ztraceny a proto se o Alžbětině řešení můžeme dohadovat pouze z Descartesova komentáře obsaženého v následujícím dopise.

$b^4d^2 - 2b^2c^2d^2 + c^4d^2 + a^4e^2 - 2a^2c^2e^2 + c^4e^2 - 2a^2d^2e^2 - 2b^2d^2e^2 + d^4e^2 + d^2e^4 - 2a^2b^2df + 2b^4df + 2a^2c^2df - 2b^2c^2df + 2b^2d^3f - 2c^2d^3f - 2a^2de^2f - 4b^2de^2f - 2c^2de^2f + 2d^3e^2f - 2de^4f + a^4f^2 - 2a^2b^2f^2 + b^4f^2 - 2a^2d^2f^2 + 4b^2d^2f^2 - 2c^2d^2f^2 + d^4f^2 - 2b^2e^2f^2 - 2c^2e^2f^2 + 2d^2e^2f^2 + e^4f^2 - 2a^2df^3 + 2b^2df^3 + 2d^3f^3 + 2de^2f^3 + d^2f^4 + e^2f^4 + 4b^3d^2x - 4b^2cd^2x - 4bc^2d^2x + 4c^3d^2x + 4a^3e^2x - 4a^2ce^2x - 4ac^2e^2x + 4c^3e^2x - 4ad^2e^2x - 4bd^2e^2x - 4a^2bdfx - 4ab^2dfx + 8b^3dfx + 4a^2cdfx - 4b^2cdfx + 4ac^2dfx - 4bc^2dfx + 4bd^3fx - 4cd^3fx - 4ade^2fx - 8bde^2fx - 4cde^2fx + 4a^3f^2x - 4a^2bf^2x - 4ab^2f^2x + 4b^3f^2x - 4ad^2f^2x + 8bd^2f^2x - 4cd^2f^2x - 4be^2f^2x - 4ce^2f^2x - 4adf^3x + 4bdf^3x + 4b^2d^2x^2 - 8bcd^2x^2 + 4c^2d^2x^2 + 4a^2e^2x^2 - 8ace^2x^2 + 4c^2e^2x^2 - 4d^2e^2x^2 - 8abdfx^2 + 8b^2dfx^2 + 8acdfx^2 - 8bcdfx^2 - 8de^2fx^2 + 4a^2f^2x^2 - 8abf^2x^2 + 4b^2f^2x^2 - 4e^2f^2x^2 = 0$

Dopis třetí

Descartes Alžbětě, Egmond du Hoef, 29. listopad 1643

V dopise Descartes hodnotí Alžbětino řešení. Pravděpodobně převzal princeznino vlastní značení za účelem sjednocení jejich přístupů. Na rozdíl od Descartese princezna použila jen jednu neznámou a tou byl poloměr hledané kružnice. Jako dané veličiny zvolila poloměry d, e, f tří zadaných kružnic a strany trojúhelníka ABC, kde $AB = a, BC = b, AC = c$. V závislosti na těchto neznámých se pokoušela odvodit rovnici pro poloměr x dotýkající se kružnice s nadějí, že rovnice by mohla být interpretována geometricky jako věta o kružnici dotýkající se třech zadaných.



Obr. 3

Na základě některých myšlenek z Descartesova dopisu došel Bos Henk k následující hypotéze o Alžbětině výpočtu: Z Pythagorovy věty pro trojúhelníky CHK a AHK na obr. 3 vyjádřila délku AK pomocí veličin c, d, f, x. Analogicky vyjádřila z (porovnáním vztahů pro délku HK^2) trojúhelníků BCD a ABD délku AD pomocí a, b, c. Výšku BD vyjádřila porovnáním vztahů pro obsah trojúhelníku ABC (vztahy uvádím v dnešní symbolice, druhý z nich je Heronův vzorec)

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot BD = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Analogicky vyjádřila výšku HK z trojúhelníku AHC, který má strany délek $d + x, f + x, c$. Z nalezených vztahů pak dosadila do Pythagorovy věty

$$(e + x)^2 = (AK - AD)^2 + (BD - HK)^2$$

pro trojúhelník BHG. Získala tak rovnici obsahující neznámou x a šest daných proměnných a, b, c, d, e, f. Tato rovnice byla jednodušší, avšak obsahovala výrazy s odmocninami. Další úpravy byly tedy zdlouhavé a náročné. Proto nedospěla k optimálnímu výsledku.

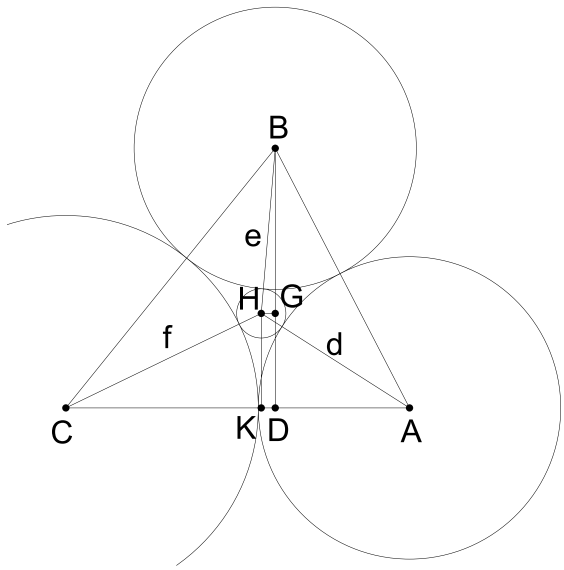
Speciální případ

Po těchto nesnázích, které provázely Descartese i Alžbětu, se rozhodl uchýlit k jednoduššímu a geometricky půvabnému případu problému. Navíc použil Alžbětin přístup a to zřejmě proto, aby ukázal, že komplikace, s kterými se setkala, nejsou nutné, ale jsou způsobené extrémní algebraickou složitostí obecného problému. Vzal si případ, kdy se zadané kružnice navzájem dotýkají (obr. 4). V takovém případě mohou být strany trojúhelníku vyjádřeny pomocí poloměrů kružnic:

$$AB = a = d + e, \tag{10}$$

$$CB = b = e + f, \tag{11}$$

$$CA = c = f + d. \tag{12}$$



Obr. 4 Speciální případ

Jediné neznámé jsou potom d, e, f. Použitím Pythagorovy věty na trojúhelníky CHA a CBA dostaneme rovnice:

$$AK = \frac{dd + df + dx - fx}{d + f}, \tag{13}$$

$$AD = \frac{dd + df + de - fe}{d + f}. \tag{14}$$

Nakonec je vidět, že obě rovnice se liší pouze písmeny x a e. Není však jasné, jak odsud Descartes dospěl k rovnici (15), kterou považoval za výsledek.

$$\begin{aligned} ddeeff + ddeexx + ddffxx + eeffxx = \; & 2deffxx + 2deeffx + 2deefxx + \\ & +2ddeffx + 2ddefxx + 2ddeefx \end{aligned} \tag{15}$$

Jelikož Alžběta hledala matematické tvrzení, Descartes vyjádřil význam rovnice slovy: „Čtyři součty, které jsou dány vzájemným součinem druhých mocnin vždy tří poloměrů kružnic, jsou rovny dvojnásobku šesti součtů, které jsou dány součinem dvou poloměrů v první mocnině a součinem druhých mocnin dvou zbylých [7].“ Tuto větu označil jako obecné pravidlo pro nalezení poloměru kružnice, která leží mezi třemi zadanými a dotýká se jich. V dopise uvedl i příklad pro konkrétní hodnoty: „pokud jsou poloměry tří zadaných kružnic například $d/2, e/3, f/4$ (dnes bychom napsali $d = 2, e = 3, f = 4$), dostávám 576 pro člen $ddeeff$, $36xx$ pro člen $ddeexx$ atd. Z toho vyplývá, že

$$x = \frac{-159}{47} + \sqrt{\frac{31104}{2209}}$$

pokud jsem ovšem neudělal chybu ve výpočtech [7].“

Descartes napsal hledaný vztah pro výpočet poloměru pouze ve tvaru (15). Dnes se nám může zdát divné, že nevyjádřil rovnici ve stručnějším tvaru

$$\frac{1}{dd} + \frac{1}{ee} + \frac{1}{ff} + \frac{1}{xx} = \frac{2}{ef} + \frac{2}{fd} + \frac{2}{de} + \frac{2}{dx} + \frac{2}{ex} + \frac{2}{fx}.$$

Dnes je tento vztah znám v trochu jiné podobě. Neuvažujeme poloměry kružnic, nýbrž jejich křivosti. Křivost kružnice je definována jako převrácená hodnota poloměru. Nahradíme $d = \frac{1}{k_1}, e = \frac{1}{k_2}, f = \frac{1}{k_3}$ a $x = \frac{1}{k_4}$, kde k_1, k_2, k_3 a k_4 jsou křivosti daných kružnic. Po několika algebraických úpravách se dá rovnice (15) přepsat do známějšího tvaru:

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2. \tag{16}$$

V roce 1960 A. Aeppli upozornil na souvislost rovnice (16) s rovnicí (15), kterou Descartes použil ve svém dopise princezně. Od té doby je rovnice pro výpočet křivostí čtyř vzájemně se dotýkajících kružnic známa jako „Descartesova věta o kružnicích“, třebaže Descartes rovnici ve tvaru (16) pravděpodobně neznal.

Shrnutí

Dva Descartesovy dopisy obsahovaly mnoho pasáží, které byly na nejlepší cestě k přiblížení ke geometrickým problémům. Tyto pasáže jsou velmi zajímavé, neboť princeznino úsilí v řešení problému tří kružnic Descartese natolik ovlivnilo, že dokonce upravil své názory. Hlavní téma bylo, jak nejlépe přeložit geometrické problémy do algebry a zejména, jak vybrat neznámé a proměnné tak, aby algebraické výpočty byly co nejjednodušší.

Zdá se, že v jejich raných diskuzích řešení geometrického problému Descartes zdůraznil výhody zavedení více než jedné neznámé. Přesto Alžběta použila jen jednu. V jeho prvním dopise, napsaném po obdržení této informace skrze Pollota, vysvětlil důvody pro preferování více než jedné neznámé a také pro vybrání neznámých a proměnných podle dvou kolmých směrů. Tímto způsobem tvrdil, že by použil jen nejjednodušší geometrické věty (jmenovitě podobnost trojúhelníka a Pythagorovu větu) k překladu geometrického problému do algebraických výrazů. Všechny neznámé až na jednu by mohly být odstraněny jednoduchými algebraickými úpravami. Pracování pouze s jednou neznámou a s vzájemně nekolmými směry by zahrnovalo použití složitějších úprav.

V prvním dopise Descartes ilustroval myšlenky, o kterých si pravděpodobně myslel, že by je Alžběta převzala. Tento přístup (viz. obr. 2) spočíval v zavedení poloměru x dotykové kružnice jako neznámé a ve výpočtu obsahů čtyř trojúhelníků ABC, ADC, ADB, BDC pomocí Heronova vzorce (Descartes nezmiňuje Heronův). Vzorec tvrdí, že trojúhelník se stranami a, b, c má obsah $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Strany čtyř trojúhelníků lze snadno vyjádřit pomocí výrazů obsahujících poloměry d, e, f, stran a, b, c trojúhelníka ABC, a neznámého poloměru x hledané dotykové kružnice. Součet obsahů tří malých trojúhelníků je roven obsahu trojúhelníka ABC. Touto úvahou dostáváme rovnici zahrnující pouze neznámou x. Descartes varoval, že tento přístup by vedl k mnoha zbytečným násobením. K odvození konečné rovnice by bylo skutečně potřeba při výpočtech odstranit čtvrtou odmocninu, což enormně komplikuje výpočet. Tato obtíž se nevyskytuje v Descartesově vlastním přístupu (jak předvídal, aniž by skutečně došel ke konci) a komplikace zahrnuté v přístupu Alžběty by nejspíše k podobným obtížím vedly.

Descartesovo preferování výběru úseček k použití rovností podél dvou kolmých směrů je v jeho přístupu evidentní. Jak je zmíněno výše, vybral úsečky AE, EB, EC jako proměnné raději než, jako je v přístupu založeném na Heronově vzorci, šikmé strany AB, BC, CA trojúhelníka ABC. Dalo by se poznamenat, že jeho výběr je ekvivalentní položení počátku pravoúhlé soustavě souřadnic do E, kde úsečky AE, EC, EB, FE a FD jsou ve skutečnosti souřadnice středů tří zadaných kružnic a jedné hledané.

Descartes formuloval názory zmíněné výše v jeho prvním dopise, kdy jediná věc, kterou věděl o Alžbětině přístupu, byla, že použila jednu neznámou. Když obdržel její dopis a výpočet, byl dojat. Dokonce změnil svůj pohled na volbu proměnných. Druhý dopis je opravdu psán v jiném duchu nežli první. Alžběta je od nynějška oslovována jako kolega matematik spíše než žák, jak bychom očekávali. Dopis je plný chvály a pozitivního překvapení. Descartes je potěšen, že Alžbětin počet je zcela podobný tomu jeho. Chválil její trpělivost při počítání a její techniky reprezentování komplikovaných výrazů pomocí jednoduchých písmen.

Dopis poskytuje mnoho detailů o Alžbětiných výsledcích k usouzení, že Descartesova pozitivní reakce byla spíše než ze zdvořilostních důvodů adresována vzdělané osobě. Kupodivu neshledal Alžbětin přístup s výběrem pouze jedné neznámé jako nevhodný. Navíc zvolila jako proměnné strany trojúhelníka ABC. Tento výběr Descartes v prvním dopise odmítal, jelikož nebyl podél kolmých směrů. Po obdržení princeznina výpočtu si uvědomil důležitou výhodu tohoto výběru. Výsledná formule byla symetrická v a, b, c respektive v d, e, f. To změnilo jeho názor a v tomto ohledu potvrdil nadřazenost jejího přístupu. Opravdu vzorec v jeho vlastním postupu (rovnice (9), (6)) výrazně postrádá symetrii, protože vybral proměnné AE, BE, CE asymetricky. V dalším řešení zjednodušeného problému vlastně upozornil na symetričnost rovnice (15) a rovnic (13) a (14).

Descartes uznal Alžbětin postup k odvození věty jako správnou alternativu k jeho vlastnímu cíli stanovení zkonstruovatelnosti problému. Taková věta, jak napsal, může sloužit jako obecné pravidlo pro řešení mnoha problémů stejného druhu. Na konci dopisu prezentuje oba cíle jako ekvivalentní přístupy. Jeden podaný Alžbětou s jednou neznámou a symetrickým výběrem proměnných, ten druhý je jeho vlastní s více než jednou neznámou a proměnnými podél dvou kolmých směrů. Tato finální formulace dvou různých přístupů naznačuje, že dialog s princeznou pozitivně přispěl k Descartesovu vlastnímu porozumění vztahu mezi cíli a technikami řešení geometrických problémů pomocí algebry.

3 Různá odvození věty o kružnicích

Zavedené značení:

Ve všech důkazech vycházíme ze situace, kde tři kružnice k_1, k_2, k_3 se středy O_1, O_2, O_3 a poloměry r_1, r_2, r_3 (resp. křivostmi k_1, k_2, k_3) se po dvou vně dotýkají. Kružnice dotýkající se všech tří může být dvojího typu. Buď má se všemi kružnicemi k_1, k_2, k_3 vnější dotyk nebo má se všemi třemi kružnicemi vnitřní dotyk. Menší z obou kružnic označme k_4 se středem O_4 a poloměrem r_4 (rep. křivostí k_4), větší označme k se středem O a poloměrem r (resp. křivostí k).

Znaménková konvence:

Pokud jsou dvě ze tří navzájem se dotýkajících kružnic vepsány do kružnice třetí (tzn., že s ní mají vnitřní dotyk) přiřadíme poloměru (a křivosti) třetí kružnice znaménko „–“.

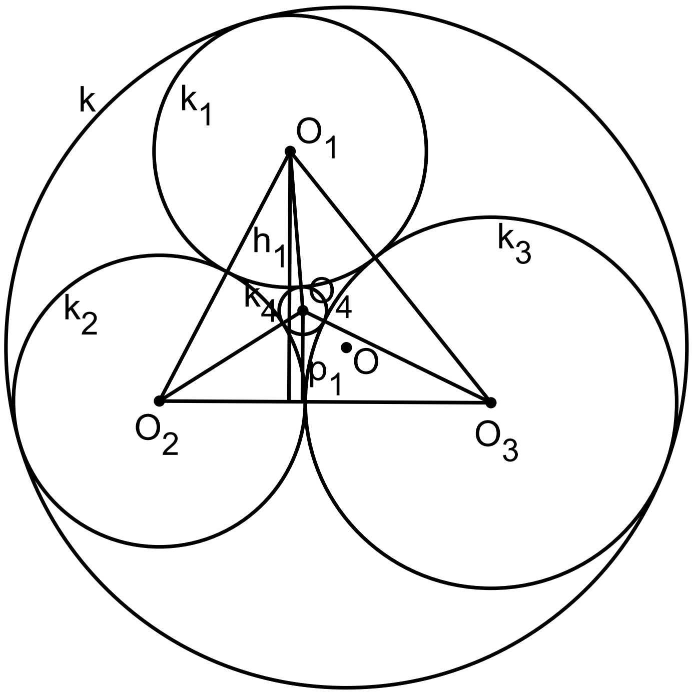
3.1 Jakob Steiner (1826)

Jakob Steiner (1796 – 1863) byl švýcarský matematik, který je považován za jednoho ze zakladatelů moderní syntetické a projektivní geometrie. Narodil se v roce 1796 v Utzenstorfu ve Švýcarsku a zemřel v roce 1863 v Bernu. Ve své první větší práci z roku 1826 s názvem Einige geometrische betrachtungen [16] uvádí originální odvození Descartesovy věty.

Středy kružnic k_1, k_2, k_3 tvoří trojúhelník. Označme h_1 výšku trojúhelníku $O_1O_2O_3$ na stanu O_2O_3. Obdobně označme p_1 výšku trojúhelníku $O_2O_3O_4$ na stranu O_2O_3 (viz. obr. 5). Poté platí rovnost[5]

$$\frac{p_1}{r_4} = \frac{h_1}{r_1} + 2$$

[5] Tento vztah je Steinerovým zobecněním vztahu z Pappovy Sbírky, kniha 4. Nebudeme jej zde dokazovat.



Obr. 5

a po vynásobení výrazem r_4/h_1 z ní dostaneme

$$\frac{p_1}{h_1} = \frac{r_4}{r_1} + \frac{2r_4}{h_1}.$$

Další dvě rovnice získáme, použijeme-li výšky trojúhelníků na strany O_1O_3 a O_1O_2. Dostaneme celkem tři rovnice:

$$\frac{p_1}{h_1} = \frac{r_4}{r_1} + \frac{2r_4}{h_1},$$

$$\frac{p_2}{h_2} = \frac{r_4}{r_2} + \frac{2r_4}{h_2},$$

$$\frac{p_3}{h_3} = \frac{r_4}{r_3} + \frac{2r_4}{h_3},$$

které dávají po sečtení rovnici

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = r_4\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3}\right). \tag{17}$$

Nyní ukážeme, že levá strana rovnice (17) je rovna 1. Označme obsahy trojúhelníků $O_1O_2O_3, O_2O_3O_4, O_1O_3O_4$ a $O_1O_2O_4$ postupně S, S_1, S_2 a S_3. Platí

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

a po vydělení obsahem S

$$1 = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}.$$

Vypočítáme obsahy trojúhelníků a po dosazení získáme

$$1 = \frac{\frac{1}{2}(r_2 + r_3)p_1}{\frac{1}{2}(r_2 + r_3)h_1} + \frac{\frac{1}{2}(r_1 + r_3)p_2}{\frac{1}{2}(r_1 + r_3)h_2} + \frac{\frac{1}{2}(r_1 + r_2)p_3}{\frac{1}{2}(r_1 + r_2)h_3},$$

což po úpravě dává

$$\sum \frac{p_i}{h_i} = 1.$$

Levá strana rovnice (17) je tedy rovna jedné, a tak po úpravě platí

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3}. \tag{18}$$

Využijeme Heronova vzorce pro obsah trojúhleníku a vyjádříme výšky h_1, h_2, h_3 pomocí poloměrů kružnic:

$$\frac{1}{2}(r_2 + r_3)h_1 = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1r_2r_3}$$

odtud

$$h_1 = \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_2 + r_3},$$
$$h_2 = \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_1 + r_3},$$
$$h_3 = \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_1 + r_2}.$$

Dosadíme do (18) a běžnými úpravami dostáváme

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2\sqrt{\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2r_3}},$$

kterou přepíšeme pomocí křivostí na tvar

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 + 2\sqrt{k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2}.$$

Nalezli jsme rovnici pro výpočet křivosti menší z obou hledaných kružnic. Pro výpočet křivosti větší kružnice můžeme použít stejný postup. Nyní budeme uvažovat trojúhelníky tvořené body O_1, O_2, O_3 a O. Výšky trojúhelníků z bodu O na strany O_2O_3, O_1O_3 a O_1O_2 označme P_1, P_2 a P_3. Nyní platí rovnost

$$\frac{-P_1}{r} + 2 = \frac{h_1}{r_1}.$$

Analogicky jako v prvním případě dostaneme rovnice

$$\frac{P_1}{h_1} = \frac{2r}{h_1} - \frac{r}{r_1},$$

$$\frac{P_2}{h_2} = \frac{2r}{h_2} - \frac{r}{r_2},$$

$$\frac{P_3}{h_3} = \frac{2r}{h_3} - \frac{r}{r_3},$$

které po sečtení dávají

$$\frac{P_1}{h_1} + \frac{P_2}{h_2} + \frac{P_3}{h_3} = r\left(\frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right).$$

Jelikož levá strana rovnice je rovna 1, lze ji upravit na tvar

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + 2\sqrt{\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2r_3}},$$

která pomocí křivostí vypadá

$$-k = k_1 + k_2 + k_3 - 2\sqrt{k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2}. \tag{19}$$

Rovnice (19) pro výpočet křivosti větší kružnice má díky zavedené znaménkové konvenci z úvodu kapitoly tvar

$$k = k_1 + k_2 + k_3 - 2\sqrt{k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2},$$

který je až na znaménko před odmocninou stejný jako tvar rovnice pro výpočet křivosti menší kružnice. Křivosti hledaných kružnic jsou tedy rovny kořenům

$$x_1 = k_1 + k_2 + k_3 + 2\sqrt{k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2},$$
$$x_2 = k_1 + k_2 + k_3 - 2\sqrt{k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2}$$

kvadratické rovnice

$$x^2 - 2(k_1 + k_2 + k_3)x + [(k_1 + k_2 + k_3)^2 - 4(k_2k_3 + k_1k_3 + k_1k_2)] = 0.$$

Rovnici jednoduše upravíme na tvar

$$x^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 2k_1x + 2k_2x + 2k_3x + 2k_1k_2 + 2k_2k_3 + 2k_1k_3.$$

K oběma stranám přičteme výraz $x^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ a dospěli jsme ke vztahu (16):

$$2(x^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = (x + k_1 + k_2 + k_3)^2.$$

3.2 Philip Beecroft (1842)

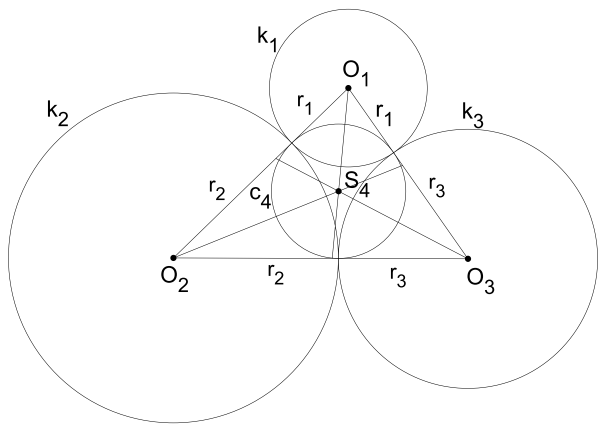
Philip Beecroft (1818 - 1862) byl anglický amatérský matematik. Jeho postup je znám z dnes téměř neznámého časopisu Lady's and Gentleman's Diary 1842. Kopii tohoto článku zaslal dr. Leon Bankoff z Los Angeles Coxeterovi a v této práci je Beecroftův postup převzat z Coxeterova článku [6].

Vzájemný dotyk tří kružnic k_1, k_2, k_3 může být dvou typů. Buď se každé dvě z nich dotýkají vně (obr. 6) nebo dvě z těchto kružnic leží uvnitř třetí (obr. 7). V obou případech leží dotykové body kružnic ve vrcholech trojúhelníku, kterému lze opsat tzv. doplňkovou kružnici c_4. Její poloměr ρ_4 (resp. křivost c_4) je určena poloměry r_1, r_2, r_3 (resp. křivostmi k_1, k_2, k_3) daných kružnic. Uvažujme nejprve situaci na obr. 6. Vztah mezi zmíněnými poloměry určíme z podmínky, že součet obsahů trojúhelníků $O_1O_2S_4, O_2O_3S_4$ a $O_1O_3S_4$ je roven obsahu trojúhelníku $O_1O_2O_3$, který vyjádříme pomocí Heronova vzorce:

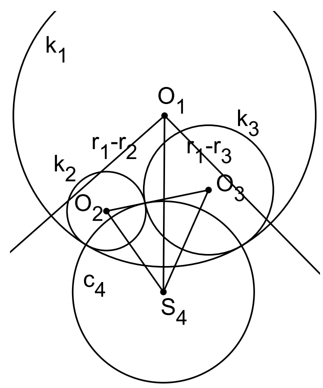
$$\frac{1}{2}(r_1+r_2)\rho_4+\frac{1}{2}(r_2+r_3)\rho_4+\frac{1}{2}(r_1+r_3)\rho_4=\sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}.$$

Odtud po umocnění a běžných úpravách dostaneme

$$\rho_4^2=\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}. \tag{20}$$



Obr. 6



Obr. 7

Pro situaci znázorněnou na obr. 7 platí, že součet obsahů trojúhelníků $O_1O_2S_4$ a $O_1O_3S_4$ zmenšený o obsah trojúhelníku $O_2O_3S_4$ je roven obsahu trojúhelníku $O_1O_2O_3$:

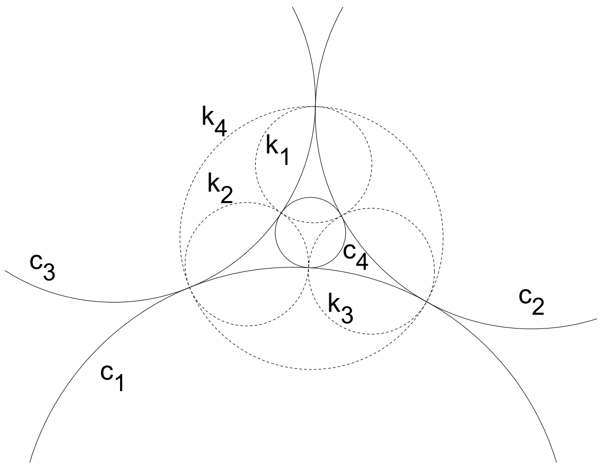
$$\frac{1}{2}(r_1-r_2)\rho_4+\frac{1}{2}(r_1-r_3)\rho_4-\frac{1}{2}(r_1+r_3)\rho_4=\sqrt{r_1r_2r_3(r_1-r_2-r_3)}.$$

Po analogických úpravách dostaneme

$$\rho_4^2=\frac{r_1r_2r_3}{r_1-r_2-r_3}. \tag{21}$$

Vztahy (20) a (21) lze sloučit na vztah jediný. Pro vztah (21) při zavedené konvenci z úvodu kapitoly platí:

$$\rho_4^2=\frac{-r_1r_2r_3}{-r_1-r_2-r_3}=\frac{-r_1r_2r_3}{-(r_1+r_2+r_3)}=\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}.$$



Obr. 8

Pro obě situace vzájemné polohy kružnic tedy platí vztah (20), který můžeme pomocí křivostí přepsat na tvar:

$$c_4^2 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3} = \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_1 r_2} = k_2 k_3 + k_1 k_3 + k_1 k_2.$$

Uvažujme nyní situaci na obr. 8, v níž Soddyho kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 určují čtveřici doplňkových kružnic c_1, c_2, c_3 a c_4. Poslední vztah zřejmě platí pro každou trojici kružnic z množiny $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ a k této trojici doplňkovou kružnici z množiny $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Platí také pro každou trojici z množiny C a k ní doplňkovou kružnici z množiny K:

$$k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1 = c_4^2 \text{ a cykl.} \tag{22}$$

a

$$c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1 = k_4^2 \text{ a cykl.} \tag{23}$$

Pomocí těchto vztahů dále dostáváme

$$\left(\sum c_i\right)^2 = \sum c_i^2 + 2c_1c_2 + \cdots = \sum c_i^2 + \sum k_i^2 = 2k_1k_2 + \cdots + \sum k_i^2 = \left(\sum k_i\right)^2.$$

Je tedy

$$\sum c_i = \sum k_i. \tag{24}$$

Také platí

$$-k_1^2 + (k_2 + k_3 + k_4)^2 = -k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + \underbrace{2k_1k_2 + 2k_2k_3 + 2k_3k_4}_{2c_1^2}.$$

Levou stranu posledního vztahu upravíme podle vzorce pro rozdíl čtverců a za druhé mocniny na pravé straně dosadíme ze vztahů (23). Po úpravě dostaneme

$$(-k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \sum k_i = 2c_1 \sum c_i$$

a odtud po vydělení výrazem $\sum k_i$ a užití vztahu (24) máme

$$-k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2c_1.$$

Když k této rovnici přidáme rovnice, které vzniknou cyklickou záměnou, dostaneme celkem čtyři rovnice. Každou z nich umocníme a rovnice sečteme:

$$4 \sum k_i^2 = 4 \sum c_i^2.$$

Platí tedy

$$\sum k_i^2 = \sum c_i^2$$

a po přičtení $\sum k_i^2$ k oběma stranám rovnice

$$2 \sum k_i^2 = \underbrace{\sum k_i^2 + \underbrace{\sum c_i^2}_{2k_1k_2+\ldots}}_{(\sum k_i)^2}.$$

Odtud získáme hledanou rovnici (16)

$$2 \sum k_i^2 = \left(\sum k_i\right)^2.$$

3.3 H.S.M. Coxeter (1961)

Profesor Harold Scott MaCDonald Coxeter (H.S.M Coxeter) byl kanadský matematik britského původu. Narodil se roku 1907 v Londýně, avšak velice brzy se přestěhoval do severní Ameriky, konkrétně do Toronta. Zde pracoval více než 60 let na místní universitě - University of Toronto. Během svého života vydal celkem 12 knih. Ve své druhé knize z roku 1961 s názvem Introduction to Geometry [5] uvedl mimo jiné i důkaz Descartesovy věty o kružnicích. Zemřel v roce 2003. Je považován ze jednoho z největších geometrů 20. století.

Základem Coxeterova odvození je tvrzení, že pro každé tři úhly $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ platí

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \sin^2 \gamma + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha = 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha. \tag{25}$$

Toto tvrzení je zřejmé, představuje totiž kosinovou větu pro trojúhelník ABC vepsaný do kružnice, jejíž průměr je 1. Strany takového trojúhelníku mají podle sinové věty délky $a = \sin \alpha, b = \sin \beta, c = \sin \gamma$ a po dosazení těchto výrazů do vztahu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

snadno obdržíme (25).

Dále budeme vycházet ze situace na obr. 9. Označme $|\sphericalangle O_2O_4O_3| = 2\alpha$, $|\sphericalangle O_3O_4O_1| = 2\beta, |\sphericalangle O_1O_4O_2| = 2\gamma$.

Pomocí kosinové věty pro trojúhelník $O_2O_3O_4$ dostáváme

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2|O_2O_4| \cdot |O_3O_4| + |O_2O_4|^2 + |O_3O_4|^2 - |O_2O_3|^2}{2|O_2O_4| \cdot |O_3O_4|} =$$

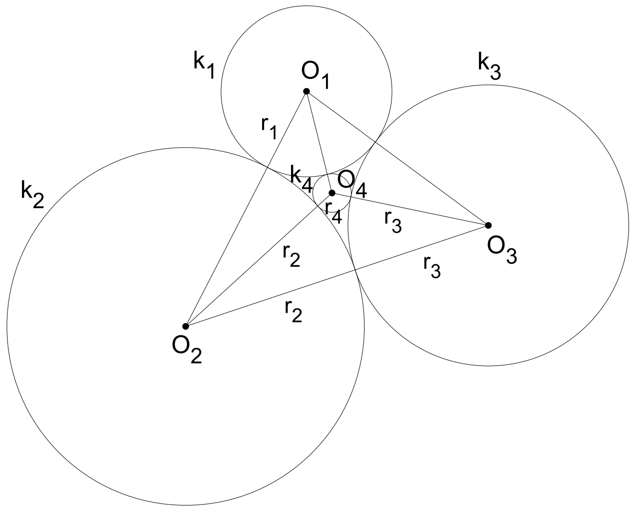
$$= \frac{(|O_2O_4| + |O_3O_4|)^2 - |O_2O_3|^2}{4|O_2O_4| \cdot |O_3O_4|}.$$

Po dosazení $|O_iO_j| = r_i + r_j$ a úpravě pomocí vztahu pro rozdíl čtverců dostaneme

$$\cos^2 \alpha = \frac{(r_2 + r_3 + r_4)r_4}{(r_2 + r_4)(r_3 + r_4)}. \tag{26}$$

Dále s využitím vztahu $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ snadno ověříme, že platí

$$\sin^2 \alpha = \frac{r_2 r_3}{(r_2 + r_4)(r_3 + r_4)}. \tag{27}$$



Obr. 9

Analogické vztahy pro úhly β, γ obdržíme cyklickou záměnou poloměrů r_1, r_2, r_3. Úhly α, β, γ splňují podmínku vztahu (25), z nějž po dosazení obdržíme

$$\frac{r_1 r_3}{(r_1 + r_4)(r_3 + r_4)} + \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)} - \frac{r_2 r_3}{(r_2 + r_4)(r_3 + r_4)} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)} \cdot \frac{r_1 r_3}{(r_1 + r_4)(r_3 + r_4)} \cdot \frac{(r_2 + r_3 + r_4) r_4}{(r_2 + r_4)(r_3 + r_4)}}.$$

Obě strany rovnice vynásobíme součinem $(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)(r_3 + r_4)$ a upravíme na tvar

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 - r_2 r_3 r_4 = 2\sqrt{r_1^2 r_2^2 r_3 r_4 + r_1^2 r_2 r_3^2 r_4 + r_1^2 r_2 r_3 r_4^2}.$$

Po vydělení součinem $r_1 r_2 r_3 r_4$ a umocnění dále dostáváme

$$\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_1}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_3 r_4} + \frac{1}{r_2 r_4} + \frac{1}{r_2 r_3}\right).$$

Obě strany ještě zvětšíme o výraz

$$\frac{4}{r_1 r_2} + \frac{4}{r_1 r_3} + \frac{4}{r_1 r_4}$$

a přepíšeme do tvaru

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_3r_4}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_1r_4}\right),$$

z nějž plyne

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right),$$

neboli

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2.$$

3.4 Důkaz pomocí kruhové inverze

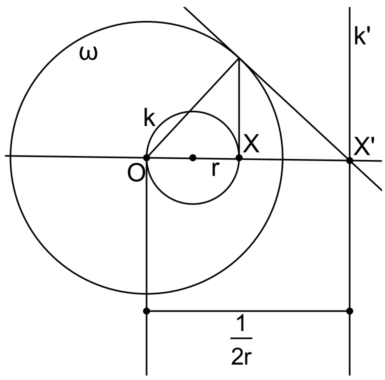
V tomto odstavci se seznámíme s elegantním důkazem Descartesova vztahu na základě vlastností kruhové inverze tak, jak jej uvádí Michal Kieza v časopise Delta [12].

Kruhová inverze

Uvažujme kružnici ω se středem O a poloměrem r. Kruhová inverze se základní kružnicí ω je zobrazení, které každému bodu $P \neq O$ přiřazuje bod P' ležící na polopřímce OP a splňující podmínku $|OP||OP'| = r^2$. Body na základní kružnici jsou samodružné. Střed základní kružnice se zobrazí do tzv. Möbiova bodu ležícího v nekonečnu. Dále si připomeňme, že obrazem kružnice k, která neprochází středem inverze, je kružnice k', která také neprochází středem inverze, a obrazem kružnice k, která prochází středem inverze, je přímka k', která neprochází středem inverze. Kruhová inverze je konformní zobrazení, to znamená, že zachovává úhly přímek a kružnic. Kružnice ortogonální k základní kružnici ω je v inverzi samodružná.

Na obrázku 10 je ukázáno, jak sestrojit obraz kružnice k o poloměru r jdoucí středem základní kružnice ω (pro jednoduchost volíme poloměr základní kružnice 1). Víme, že obrazem je přímka k' kolmá na spojnici středu základní kružnice a bodu $X \in k \cap \rightarrow OS (X \neq O)$, kde S je střed kružnice k.

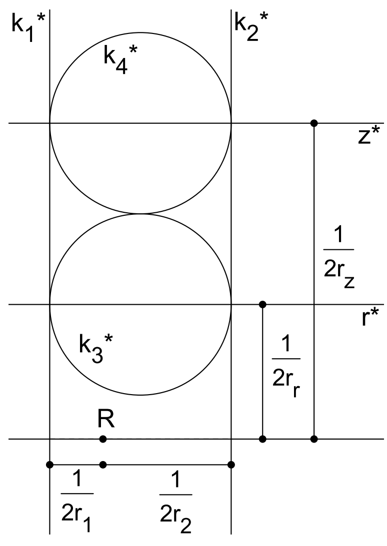
Bod X má totiž největší vzdálenost od bodu O a podle vztahu $|OX||OX'| = 1$ je obraz X' bodu X nejbližší bod přímky k' od bodu O. Jelikož $|OX| = 2r$, dostáváme $|OX'| = \frac{1}{2r}$, což je vzdálenost přímky k' od středu kružnice ω.



Obr. 10

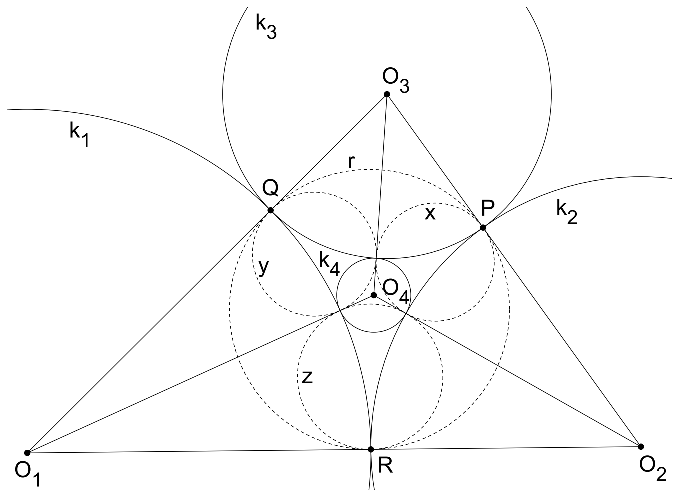
Důkaz vztahu (16)

Množina čtyř vzájemně se dotýkajících kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 generuje další množinu čtyř vzájemně se dotýkajích doplňkových kružnic r, x, y, z, které jsou ortogonální k příslušným kružnicím z množiny $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$. Kružnice r je vepsaná trojúhelníku $O_1O_2O_3$ a prochází body dotyku kružnic k_1, k_2, k_3. Doplňkové kružnice x, y, z jsou po řadě kružnice vepsané trojúhelníkům $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$ a procházejí body dotyku kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 (viz. obr. 12).



Obr. 11

Uvažujme kruhovou inverzi se středem v bodě R a poloměrem 1. Nalezneme obrazy kružnic k_1, k_2, k_3, k_4, r, z v této kruhové inverzi. Kružnice k_1, k_2 se zobrazí



Obr. 12

na dvojici rovnoběžných přímek k_1^*, k_2^* vzdálených od středu inverze $\frac{1}{2r_1}, \frac{1}{2r_2}$. Kružnice k_3 a k_4 se zobrazí na kružnice k_3^*, k_4^*. Navíc platí, že obě kružnice se dotýkají přímek k_1^*, k_2^* i sebe samých. Z toho vyplývá, že průměry kružnic k_3^*, k_4^* jsou stejné. Nakonec nalezneme ještě obrazy kružnic r, z. Obě kružnice prochází středem inverze, tudíž se zobrazí na dvojici rovnoběžných přímek. Kružnice z musí procházet společnými body přímek k_1^* a k_2^* s kružnicí k_4^*. Obdobně platí stejná úvaha pro kružnici r. Přímka z^* má vzdálenost od středu inverze $\frac{1}{2r_z}$ a přímka r^* má vzdálenost $\frac{1}{2r_r}$. Přímky r^*, z^* jsou kolmé na přímky k_1^*, k_2^*. Jelikož průměry kružnic k_3^*, k_4^* jsou stejné, je útvar omezený přímkami k_1^*, k_2^*, r^*, z^* čtverec (viz. obr. 11). V takovém případě platí rovnost

$$\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} = \frac{1}{2r_z} - \frac{1}{2r_r},$$

která má po vynásobení dvěma a přepsání pomocí křivostí tvar

$$k_1 + k_2 = k_z - k_r. \tag{28}$$

Při zavedené konvenci z úvodu kapitoly platí:

$$k_1 + k_2 = k_z + k_r.$$

Vezmeme-li nyní střed kruhové inverze v bodě P a využijeme stejného postupu jako v předchozí části, dostáváme

$$k_2 + k_3 = k_x + k_r. \tag{29}$$

Nakonec využijeme stejné úvahy i pro kruhovou inverzi se středem v bodě Q. Po nalezení obrazů kružnic k_2, k_4, k_1, k_3, x, z dostaneme rovnici

$$k_x + k_z = k_2 + k_4. \tag{30}$$

Sečteme rovnice (28), (29), (30) a vyjádříme neznámou křivost k_4

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 - 2k_r. \tag{31}$$

Dále vyjádříme křivost k_r pomocí křivostí k_1, k_2 a k_3. Když porovnáme obsah trojúhelníka $O_1O_2O_3$ vypočítaný pomocí Heronova vzorce a vzorce pro obsah trojúhelníka obsahující závislost obvodu a poloměru kružnice vepsané, dostáváme

$$\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)} = (r_1 + r_2 + r_3)r_r.$$

Úpravou a přepsáním pomocí křivostí získáme rovnici

$$k_r^2 = k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1. \tag{32}$$

Připomeňme si, že $k_r < 0$ a dosaďme do rovnice (31), dostaneme

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 + 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}. \tag{33}$$

Pro křivost kružnice k opsané kružnicím k_1, k_2 a k_3 dostáváme tutéž rovnici jen s opačným znaménkem před odmocninou. Na neznámé křivosti k_4 a k pak můžeme pohlížet jako na kořeny

$$x_1 = k_1 + k_2 + k_3 + 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1},$$

$$x_2 = k_1 + k_2 + k_3 - 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1},$$

kvadratická rovnice

$$x^2 - 2(x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

z níž po dosazení za x_1 a x_2 dostáváme

$$x^2 - (2k_1 + 2k_2 + 2k_3)x + [(k_1 + k_2 + k_3)^2 - 4(k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1)] = 0.$$

Rovnici dále ještě upravíme do tvaru

$$x^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 2k_1 k_2 + 2k_2 k_3 + 2k_1 k_3 + 2k_1 x + 2k_2 x + 2k_3 x.$$

K oběma stranám přičteme výraz $x^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ a dospěli jsme ke vztahu (16):

$$2(x^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = (x + k_1 + k_2 + k_3)^2.$$

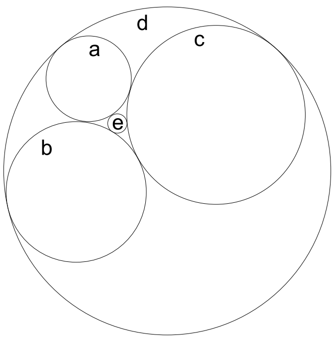
4 Sbírka řešených příkladů

Závěrečná kapitola obsahuje řadu řešených příkladů, v nichž se objevuje vzájemný dotyk kružnic. Mohou být využity při práci se studenty středních i základních škol. Předpokládáme, že žáci neznají Descartésův vztah a že budou úlohy řešit na základě výpočtu většinou s využitím poznatků známých ze školy. Velká část úloh je zaměřena na aplikaci Pythagorovy věty. U příkladů označených D si může student provést kontrolu správnosti výpočtem pomocí Descartesova vztahu. Příklady jsou rozdělené do tří částí a seřazené podle obtížnosti (od snadnějších k těžším) dle názoru autora. Očekává se, že čtenáři učitelé si zpracují podrobnější metodiku podle svých představ.

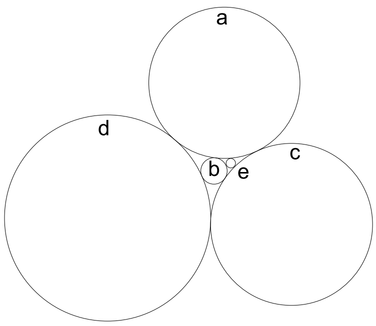
V první části se seznámíme s fraktály, které lze dostat opakovanou aplikací Descartesovy věty o kružnicích. Druhá podkapitola je věnovaná gotickému slohu a zahrnuje úlohy inspirované gotickým slohem trénující přesnost rýsování. V této části je ukázána spojitost mezi geometrií (soustředíme se na vzájemný dotyk kružnic) a praktickým využitím v architektuře. Poslední částí je sbírka početních příkladů, kdy nám nejde o samotné zkonstruování problému, ale převážně o výpočet neznámého poloměru hledané kružnice, popřípadě o dokázání nějaké souvislosti mezi objekty. U příkladů vybraných z matematických olympiád je převzané i řešení, neboť toto řešení je precizně zpracované a nemělo by smysl ho předělávat.

4.1 Apolloniovské fraktály

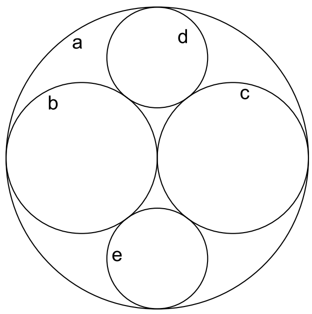
Vzájemná poloha tří kružnic a, b, c, z nichž každá se dotýká zbývajících dvou je (až na umístění v dané rovině) určena jejich křivostmi a, b, c. V zájmu stručnosti budeme i v této kapitole křivosti označovat stejnými písmeny jako uvažované kružnice. Descartesův vztah (16) takovým kružnicím a, b, c jednoznačně přiřazuje právě dvě kružnice d, e, které jsou vepsány do tzv. mezer mezi kružnicemi a, b, c, viz obr. 13 až 15. Mají-li kružnice a, b, c všechny dotyky vnější, tvoří jednu mezeru oblast ohraničená menšími oblouky kružnic s krajními dotykovými body. Druhou mezerou je doplněk útvaru ohraničeného většími oblouky kružnic v dané rovině. V libovolné trojici vybrané z množiny $M = \{a, b, c, d, e\}$ se každá kružnice dotýká zbývajících dvou a v libovolné čtveřici z množiny M se každá kružnice dotýká zbývajících tří. Takové kružnice se nazývají Soddyho kružnice. Trojice, resp. čtveřice Soddyho kružnic (nebo jejich křivostí) budeme též stručně zvát Soddyho trojice, resp. čtveřice.



Obr. 13



Obr. 14



Obr. 15

Každá trojice množiny M jednoznačně určuje celou množinu. Známe-li například křivosti a, b, c, jsou podle Descartesova vztahu křivosti kružnic d, e určeny jako kořeny rovnice

$$(x + a + b + c)^2 = 2(x^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

kterou běžnými úpravami převedeme na tvar

$$x^2 - 2(a + b + c)x + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac) = 0. \tag{34}$$

Tato normovaná kvadratická rovnice má diskriminant

$$D = 16(ab + bc + ac)$$

a kořeny

$$d = x_1 = a + b + c + 2\sqrt{ab + bc + ca}, \tag{35}$$

$$e = x_2 = a + b + c - 2\sqrt{ab + bc + ac}. \tag{36}$$

Snadno ověříme, že platí

$$x_2 = 2(a + b + c) - x_1. \tag{37}$$

Soddyho trojice $\{a, b, c\}$ tedy jednoznačně určuje Soddyho zbývající kružnice d, e. S výjimkou množiny $\{a, b, c\}$ vytváří trojice vybraná z množiny $\{a, b, c, d, e\}$ dvojici mezer, z nichž jedna má již vepsanou kružnici a druhá je prázdná. Pomocí vztahu (37) určíme křivost kružnice, jíž lze do této mezery vepsat. Postup vepisování kružnic je nekonečný a vzniká přitom fraktál, který budeme nazývat Apolloniova síť[6].

Každá Soddyho trojice $\{a, b, c\}$ určuje právě jednu Apolloniovu síť. Jestliže jsou navíc křivosti a, b, c i kořeny rovnice (34) celá čísla, má každá kružnice sítě celočíselnou křivost, jak plyne ze vztahu (37). Existují různé typy Apolloniových sítí. Jejich vytváření ukážeme na několika příkladech.

Příklad 1. *Vytvářejte Apolloniovu síť určenou trojicí* $\{-6, 11, 14\}$ *(obr. 16).*

Řešení

1. krok

Pomocí (35) a (36) dostáváme pro křivosti x_1, x_2 kružnic vepsaných do mezer v trojici $\{-6, 11, 14\}$ vztahy

$$x_{1,2} = (-6 + 11 + 14) \pm 2\sqrt{-6 \cdot 11 + 11 \cdot 14 - 6 \cdot 14}.$$

[6]V angličtině existuje několik pojmenování pro tento fraktál: Apollonian circle packing, Apollonian packing, Apollonian gasket, Apollonian net

Odtud

$$x_1 = 19 + 4 = 23 \quad \text{a} \quad x_2 = 19 - 4 = 15.$$

V prvním kroku přibyly dvě kružnice, získali jsme množinu $\{-6, 11, 14, 15, 23\}$.

2. krok

Trojice $\{-6, 11, 15\}$ vytváří dvě mezery, v jedné z nich je vepsána kružnice s křivostí 14. Užitím rekurentního vztahu (37) určíme křivost kružnice v dosud prázdné mezeře:

$$\{-6, 11, 15\}_{14} \rightarrow x_3 = 2(-6 + 11 + 15) - 14 = 26.$$

Analogicky pro zbývající mezery v množině $\{-6, 11, 14, 15, 23\}$ dostáváme:

$$\{-6, 11, 23\}_{14} \rightarrow x_4 = 2(-6 + 11 + 23) - 14 = 42$$

$$\{-6, 14, 15\}_{11} \rightarrow x_5 = 2(-6 + 14 + 15) - 11 = 35$$

$$\{-6, 14, 23\}_{11} \rightarrow x_6 = 2(-6 + 14 + 23) - 11 = 51$$

$$\{11, 14, 23\}_{-6} \rightarrow x_7 = 2(11 + 14 + 23) + 6 = 102$$

$$\{11, 14, 15\}_{-6} \rightarrow x_8 = 2(11 + 14 + 15) + 6 = 86$$

celkem vznikne 6 nových kružnic. Dohromady bude $5 + 6 = 11$ kružnic.

3. krok

Tento soubor 11 kružnic má 18 nezaplněných mezer. Z toho plyne, že ve třetím kroku vznikne 18 nových kružnic. Dohromady budeme mít soubor 29 kružnic.

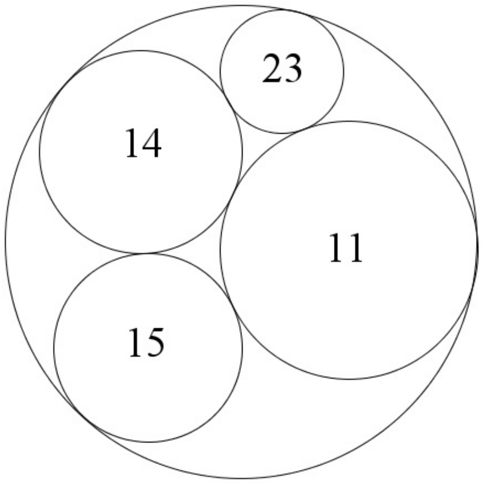
Každým dalším krokem narůstá počet nových kružnic následovně:

4. krok: 54 nových (83 všech)
5. krok: 162 (245)
6. krok: 486 (731)
7. krok: 1 458 (2 189)

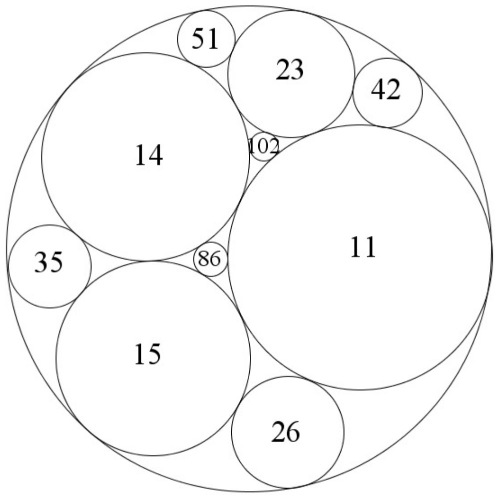
8. krok: 4 374 (6 563)

$\vdots$

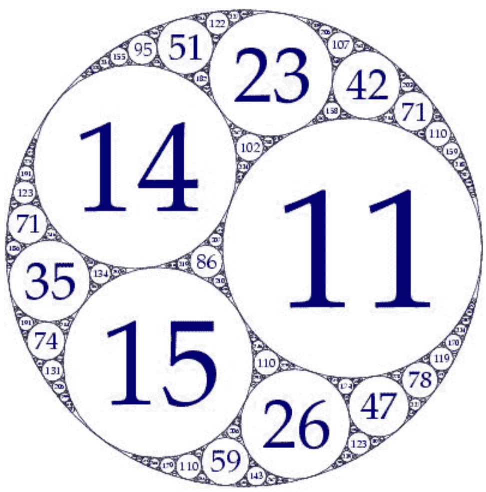
n. krok: $2 \cdot 3^n$ $(2 + 3^{n+1})$.



Obr. 16 : První krok



Obr. 17 : Druhý krok



Obr. 18 : Fraktál, (převzato z [1]).

Úloha 1. *Vytvářejte Apolloniovu síť určenou počáteční trojicí* $\{-3, 5, 8\}$.

(řešení viz. obr. 19)

Úloha 2. *Vytvářejte Apolloniovu síť určenou počáteční trojicí* $\{-3, 4, 12\}$.

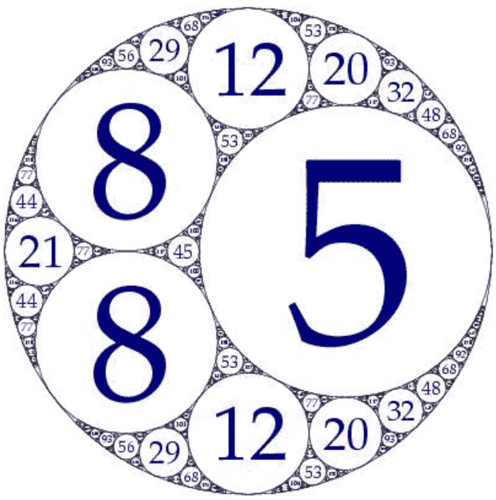
(řešení viz. obr. 20)

Úloha 3. *Vytvářejte Apolloniovu síť určenou počáteční trojicí* $\{-1, 2, 3\}$.

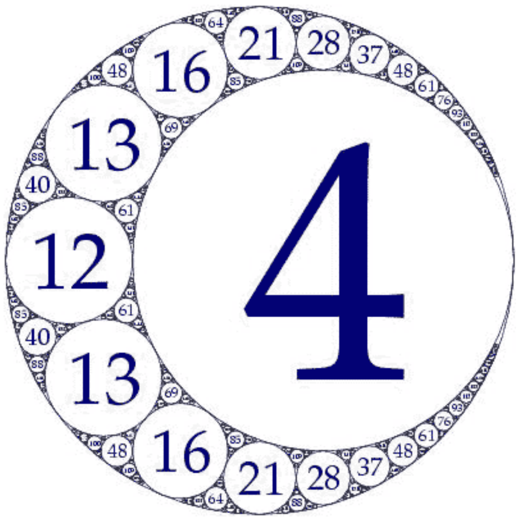
(řešení viz. obr. 21)

Úloha 4. *Vytvářejte Apolloniovu síť určenou počáteční trojicí* $\{1, 1, 4\}$.

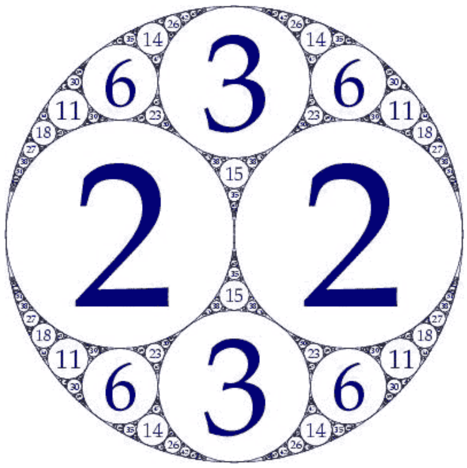
(řešení viz. obr. 22)



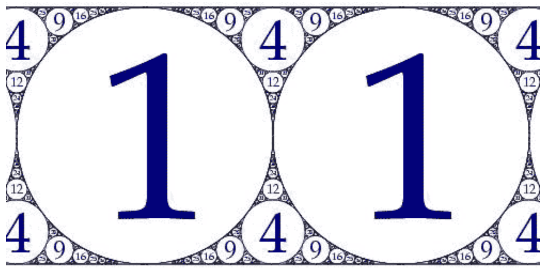
Obr. 19 : (-3, 5, 8), (převzato z [1]).



Obr. 20 : (-3, 4, 12), (převzato z [1]).



Obr. 21 : (-1, 2, 3), (převzato z [1]).



Obr. 22 : (1, 1, 4), (převzato z [1]).

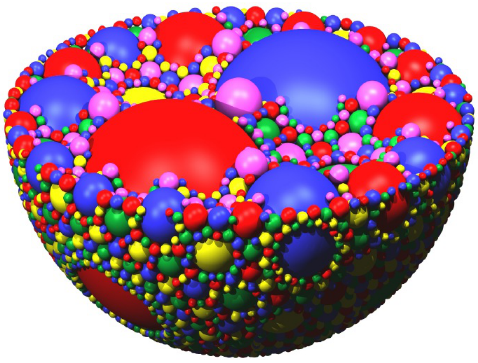
Při tvorbě takovýchto fraktálů se ovšem nemusíme omezit pouze na rovinu. Postup můžeme zobecnit i do vyšších dimenzí. Zobecnění Descartesovy věty se někdy nazývá jako Soddyho-Gossetova věta, ačkoli byla objevena R. Lachnanem v roce 1886 [13]. V n-dimenzionálním Euklidovském prostoru je maximální počet vzájemně se dotýkajících sfér $n + 2$. V trojrozměrném prostoru to znamená, že maximální počet koulí, které se mohou vzájemně dotýkat, je 5. Zobecněný vztah pro křivosti n-rozměrných sfér zní:

$$\left(\sum_{i=1}^{n+2} k_i\right)^2 = n \sum_{i=1}^{n+2} k_i^2.$$

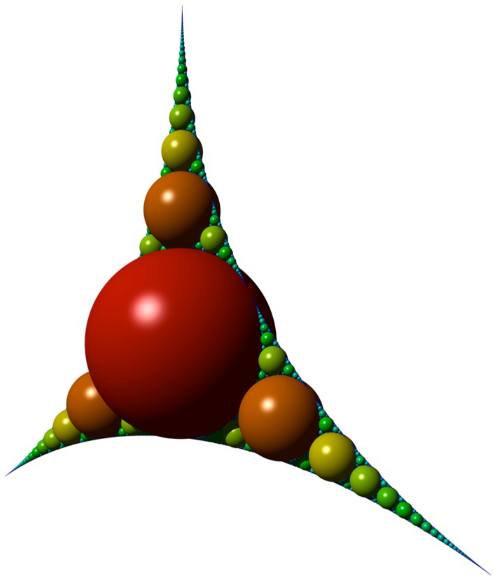
Pro $n = 3$ má rovnice tvar

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2 = 3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2).$$

Jelikož zobecnění do prostoru a všech vyšších dimenzí přesahuje rámec této práce, uvedu jen pro ukázku tentýž fraktál v prostoru (obr. 23). Fraktál je obarven 5 různými barvami tak, že žádné dvě koule se stejnou barvou se vzájemně nedotýkají.



Obr. 23 : Apolloniova síť v prostoru, převzato z [3].



Obr. 24 : Apolloniova síť v prostoru, převzato z [2].

4.2 Příklady inspirované gotickým slohem

Od druhé poloviny 12. století začíná vznikat ve Francii nový umělecký sloh nazývající se gotika[7]. Gotické stavby se vyznačují prosvětlením vnitřku. To je významně odlišuje od předchozích [18]. K zajištění dostatku světla je zapotřebí velké množství oken. Samotná okna měla posílit majestátnost těchto budov. Nejčastějším geometrickým prvkem používaným v konstrukcích klenby a oken je oblouk kružnice. Vzájemným dotykem několika kružnic dostaneme ornamenty typické pro gotiku. Jedním takovým charakteristickým symetrickým architektonickým prvkem je gotická kružba vyplňující oblouky oken, arkád, zábradlí a tympanonů[8].

Gotickou kružbou rozumíme rozčlenění části okna. Geometricky členěný kružbový ornament se vytvářel z kamenných profilů. Nejčastěji ho nalezneme v lomeném oblouku okna nebo v kruhovém okně (rozetě) a skládá se z oblouků kružnic, jež jsou konstruovány na základě předem zvolené kostry - osnovy trojúhelníků (triangulace) či čtverců (kvadratura), kde středy kružnic leží ve význačných bodech osnovy, popř. poloměry kružnic mají délky odečtené z nějakých úseček osnovy [17].

Cílem této kapitoly je ukázat na konkrétních příkladech konstrukci některých kružeb. Všechny příklady trénují převážně přesnost rýsování a též demonstrují zručnost a nápaditost dřívějších matematiků a stavitelů. Je ukázána úzká spojitost mezi středoškolskou geometrií a jejím praktickým využitím ve stavitelství.

Zlatý řez

Základní roli měly v architektonických návrzích poměry [18]. Jedním z takových, jež gotičtí mistři využívali při konstrukci, je zlatý řez. Ve stručnosti si ukážeme, co se poměrem zlatého řezu rozumí a jak ho sestrojit.

[7]Původně se tomuto slohu říkalo Opus Francigenum, označení gotika se objevuje až v 16. století. Poprvé ho začal používat Giorgio Vasari.

[8]Prostor ve štítu portálu, nad dveřmi nebo oknem, zpravidla polokruhového nebo trojúhelníkového tvaru.

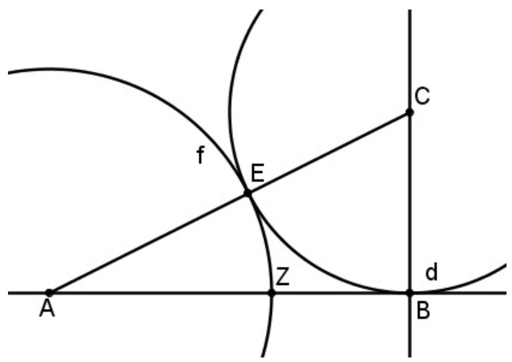
Zlatým řezem úsečky AB rozumíme takové rozdělení úsečky AB bodem Z tak, aby platilo

$$\frac{|AZ|}{|AB|} = \frac{|BZ|}{|AZ|}. \tag{38}$$

Geometrickou konstrukci zlatého řezu popisuje následující konstrukce:

Postup (obr. 25):

- $BC \perp AB$
- $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$
- $d = (C; |CB|)$
- $f = (A; |AE|)$
- $Z = f \cap AB$



Obr. 25 : Zlatý řez

Zdůvodnění konstrukce:

Označme $|AB| = a$ a $|AZ| = x$, pak $|ZB| = a - x$. Z rovnosti (38) dostáváme

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$

a po úpravě

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x} - 1.$$

Provedeme substituci $\lambda = \frac{x}{a}$

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} - 1$$

a po vynásobení λ a úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

s kladným kořenem $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \doteq 0,618$.

Z obrázku 25 platí, že $|AB| = a, |BC| = \frac{a}{2}$. Pomocí Pythagorovy věty $|AC| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Jelikož $|CE| = |BC| = \frac{a}{2}$, pak $|AE| = |AZ| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$. Po vytknutí a a porovnání s vypočítaným λ výše dostáváme, že $|AZ| = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = a\lambda$.

Konstrukci zlatého řezu využijeme na str. 72 při vytváření rozety chrámu sv. Egídia v Bardejově.

Příklad 2. *Vepište kružnici horní části gotického okna, tj. geometrickému útvaru omezenému úsečkou AB a shodnými kruhovými oblouky k_1 a k_2 o středech A a B. Řešte pro $|AB| = 12$ (obr. 26). (Převzato z [8].)*

Řešení

Představme si hledanou kružnici k, která má střed na ose okna TV, dotýká se úsečky AB v jejím středu T a kruhových oblouků v bodech T_1 a T_2. Je-li S střed kružnice, pak T_1 leží na přímce AS a T_2 na přímce BS. Označíme-li velikost hledaného poloměru r, jsou velikosti stran pravoúhlého trojúhelníka ATS:

$$|AT| = 6, |TS| = r, |AS| = |AT_1| - |ST_1| = 12 - r.$$

Použijeme Pythagorovu větu

$$|AS|^2 = |AT|^2 + |TS|^2$$

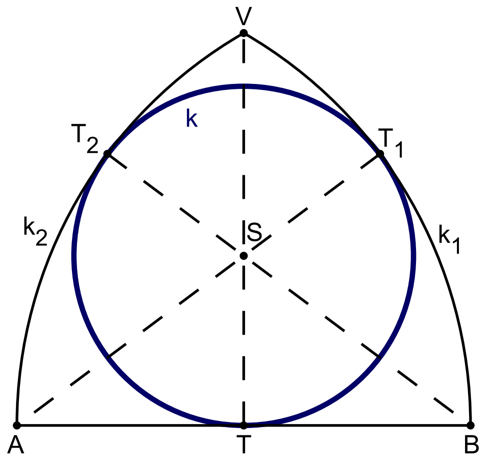
a obdržíme po dosazení rovnici

$$(12 - r)^2 = 6^2 + r^2$$

s řešením $r = 4,5$.

Konstrukce:

- $AB; |AB| = 6$
- $k_1; k_1 = (A; |AB|)$
- $k_2; k_2 = (B; |AB|)$
- $V; V \in k_1 \cap k_2$
- $TV; TV$ je osa úsečky AB
- $S; S \in TV \wedge |ST| = 4,5$
- $k; k = (S; |ST|)$



Obr. 26 : Příklad 2

Zobecnění

Řešíme obecně pro $|AB| = R$. Označme $|ST| = x$. Pak $|AT| = \frac{R}{2}$, $|AS| = = R - x$. Hledané x získáme z trojúhelníku ATS použitím Pythagorovy věty:

$$(R - x)^2 = x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 .$$

Jediným kladným kořenem je $x = \frac{3}{8}R$.

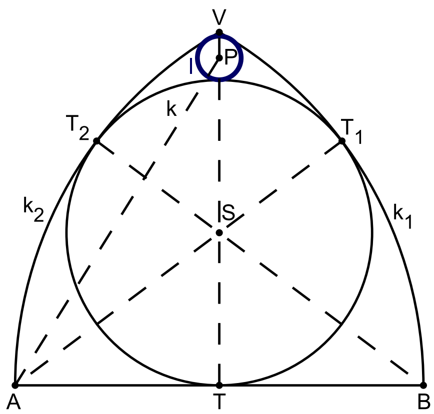
Příklad 3. *Určete poloměr x kružnice l vepsané do mezery při bodu V z příkladu 2.*

Řešení

Využitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ATP dostáváme rovnici

$$\left(\frac{6}{8}R + x\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right) = (R - x)^2$$

s jediným kladným kořenem $x = \frac{3}{56}R$.



Obr. 27 : Příklad 3

Příklad 4. *Vepište do gotického okna z příkladu 2 kružnici dotýkající se půlkružnice k_3 nad průměrem AB (obr. 28). (Převzato z [8].)*

Řešení

Představme si opět hledanou kružnici k, která má střed S na ose okna MV a poloměr r kružnice k se dotýká půlkružnice k_3 v bodě T_3 na spojnici SM a kruhových oblouků k_1 a k_2 v bodech T_1 a T_2 ležících na přímkách AS a BS. Pak jsou velikosti stran pravoúhlého trojúhelníka AMS:

$$|AM| = 6, |MS| = |MT_3| + |T_3S| = 6 + r, |AS| = |AT_1| - |ST_1| = 12 - r.$$

Po zapsání Pythagorovy věty

$$|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2$$

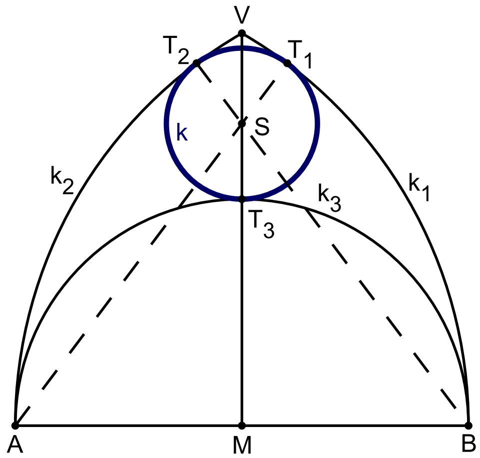
dostaneme dosazením rovnici

$$(12 - r)^2 = 6^2 + (6 + r)^2$$

a jejím řešením $r = 2$.

Konstrukce:

- $MV; MV$ je osa úsečky AB
- $S; S \in MV \wedge |MS| = |MT_3| + 2$
- $k; k = (S; 2)$



Obr. 28 : Příklad 4

Zobecnění

Řešíme obecně pro $|AB| = R$. Hledané r získáme z trojúhelníku AMS použitím Pythagorovy věty:

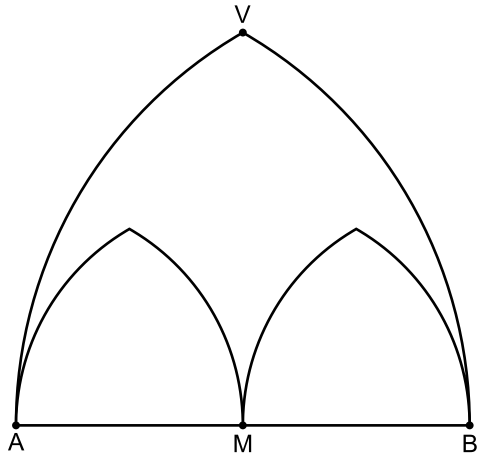
$$(R-r)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}+r\right)^2.$$

Jediným kladným kořenem je $r = \frac{R}{6}$.

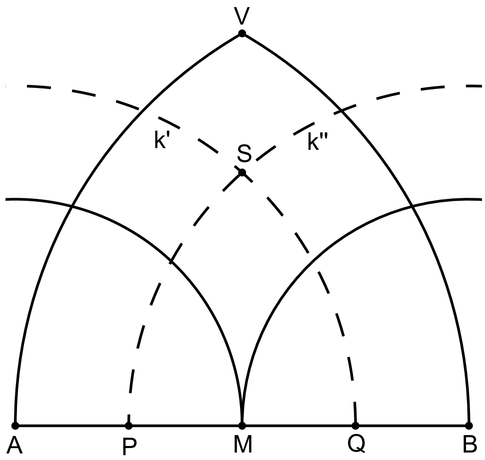
Příklad 5. *Obměnou předchozí úlohy je, že půlkružnice k_3 je nahrazena dvojicemi kruhových oblouků opsaných ze středů A, B, M (obr. 29) s poloměrem $|AM| = |BM|$. (Převzato z [8].)*

Řešení

Při podrobnějším rozboru zadání objevíme, že jde vlastně o úlohu vepsat kružnici křivočarému čtyřúhelníku, který je omezen dvěma dvojicemi soustředných kružnic, jež jsou souměrně položeny podle osy MV a mají středy A, B a poloměry $|AB| = |BA|, |AM| = |BM|$ (obr. 30). Průměr hledané kružnice k se proto rovná šířce mezikruží $|AM| = |BM|$ a její střed S dostaneme jako průsečík kružnic k' a k'' opsaných ze středů A a B s poloměrem $|AQ| = |BP|$, kde P a Q jsou středy úseček AM a BM. Stačí ovšem sestrojit jedinou z těchto kružnic a určit její průsečík S s osou MV (obr. 31). Dotykové body T_1, T_2, T_3 a T_4 hledané kružnice leží na přímkách AS a BS.



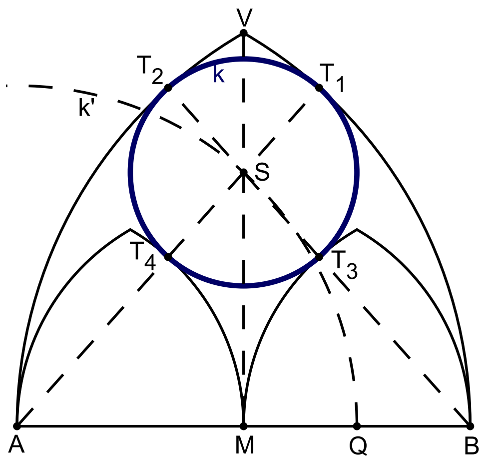
Obr. 29 : Příklad 5 - 1. krok



Obr. 30 : Příklad 5 - 2. krok

Konstrukce:

- $MV; MV$ je osa úsečky AB
- $Q; Q$ je střed úsečky MB
- $k'; k' = (A; |AQ|)$
- $S; S \in k' \cap MV$
- $T_1; T_1 \in AS \cap k_1$
- $k; k = (S; |ST_1|)$

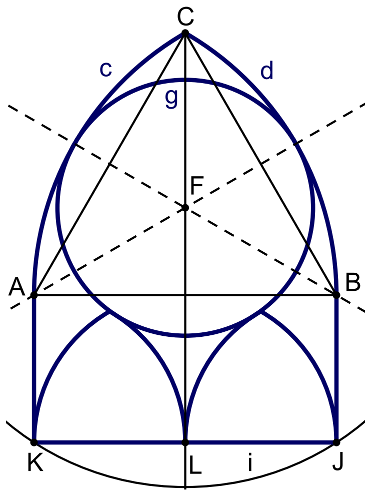


Obr. 31 : Příklad 5 - 3. krok

Příklad 6. *Je dán obyčejný lomený oblouk kružnicemi c, d nad základnou AB, F je těžiště $\triangle ABC$. Je dána kružnice g se středem v bodě F a dotýkající se kružnic c a d. Nalezněte základny pro oba menší lomené oblouky. (Převzato ze [17].)*

Postup (obr. 32):

- rovnostranný $\triangle ABC$
- $F; F$ je těžiště $\triangle ABC$
- $d; d = (A; |AB|)$
- $c; c = (B; |AB|)$
- $g; g$ má střed v F a dotýká se kružnic c, d
- označme h poloměr kružnice g
- $i = (F; h + \frac{1}{2}|AB|)$
- J, K, L
- malé oblouky dostáváme postupným rýsováním kružnic z bodů J, K, L, o poloměru $\frac{1}{2}|AB|$



Obr. 32 : Příklad 6

Zdůvodnění konstrukce:

Výpočtem přesné délky $|AK|$ ukážeme, že konstrukce je pouze přibližná.

Nechť $|AB| = R$, $|AK| = x$. Pak $|KL| = |LJ| = \frac{R}{2}$, $|AF| = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}R$ a $h = R - |AF| = \frac{3-\sqrt{3}}{2}R$. Využijeme kosinové věty pro tojúhelník AKF: $|KF|^2 = |AK|^2 + |AF|^2 - 2|AK||KF| \cos 120°$. Dosazením do této rovnice dostáváme

$$\left(\frac{R}{2} + h\right)^2 = x^2 + \frac{R^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}Rx,$$

po úpravách

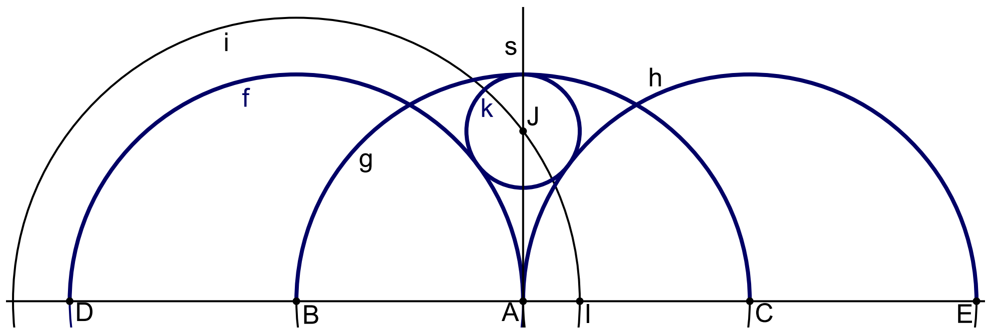
$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{x}{R}\right) - \frac{9}{4} + \sqrt{3} = 0.$$

Jediným kladným řešením rovnice je $x = 0,487R \neq \frac{1}{2}R$, z čehož vyplývá, že konstrukce je pouze přibližná.

Příklad 7. *Do útvaru omezeného kružnicemi* $f = (B; r), g = (A; r), h = = (C; r)$*, které jsou umístěny podle obrázku 33, vepište kružnici* k*. (Převzato z [17].)*

Postup (obr. 33):

- $f; f = (B; |AB|)$
- $h; h = (C; |AB|)$
- $g; g = (A; |AB|)$
- $s; A \in s \wedge s \perp AC$
- $I; |AI| = \frac{1}{4}|AC|$
- $i; i = (B; |BI|)$
- $J; J \in i \cap s$
- k; má střed v J a dotýká se kružnic f, g, h



Obr. 33 : Příklad 7

Zdůvodnění konstrukce:

Označíme-li a poloměr kružnice k, jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníka ABJ : $|AB| = r, |BJ| = r + a, |AJ| = r - a$. Z Pythagorovy věty získáváme rovnici

$$(r + a)^2 = r^2 + (r - a)^2.$$

Kořeny rovnice jsou $r_1 = 0$ a $r_2 = 4a$. Pro poloměr kružnice k platí, že $a = \frac{1}{4}r = |AI|$.

Nosy, jeptišky a rozety v gotické architektuře

Po sérii úvodních příkladů si ukážeme konstrukci tří základních prvků gotického slohu - nosů, jeptišek a rozet. Modře jsou v obrázcích vyznačené části, které tvoří daný architektonický prvek. Závěrečným příkladem je narýsování rozety nacházející se v chrámu sv. Egídia v Bardejově na Slovensku.

a) Konstrukce tzv. „nosů“

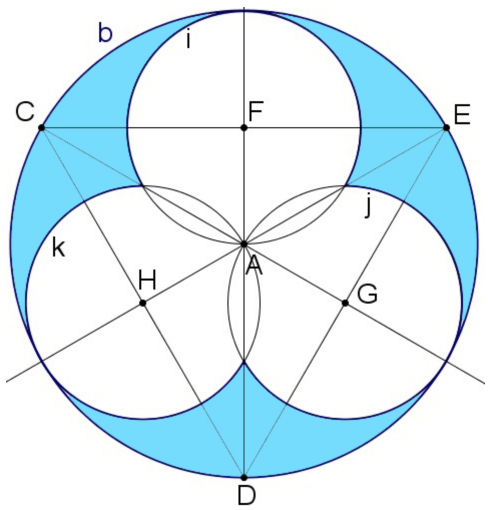
1. Nosy v kružnicích

„Nosem“ nazýváme výčnělek složeného obloukového útvaru vepsaného do nějakého n-úhelníku. Na obr. 34 představuje vybarvená část trojici nosů vepsaných do kruhového okna. Máme dvě možnosti, jak sestrojit nosy v kružnicích. V situacích 1.1 a 1.2 se kružnice protínají. V těchto případech můžeme kružnice zvětšovat a zmenšovat a dostáváme různě veliké nosy. V situaci 1.3 se kružnice dotýkají. Obecně se dá říct, že sestrojujeme-li nosy obsahujícího 5 a více kružnic, využijeme konstrukce z bodu 1.3 (tzn. jednotlivé kružnice se dotýkají).

Konstrukce osnovou

1.1 Popis pro triangulační osnovu: (obr. 34)

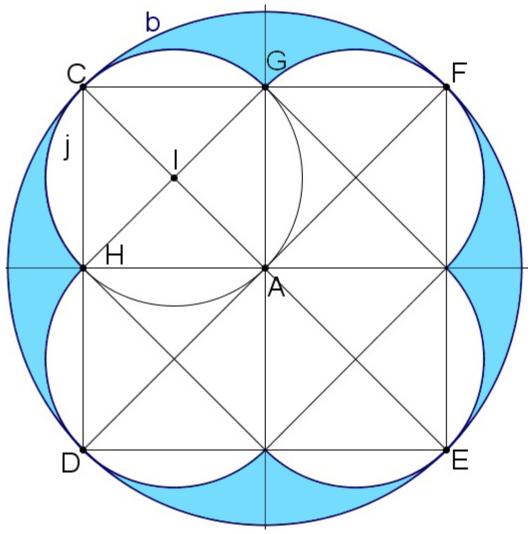
- je zadán rovnostranný trojúhelník CDE
- $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle EAD| = 120°$
- $\leftrightarrow EA$ je osou úhlu CED
- obdobně $\leftrightarrow CA$ a $\leftrightarrow DA$
- b je kružnice opsaná trojúhelníku CDE; $b = (A; |AE|)$
- $F = DA \cap CE$
- i; střed v F a dotýká se kružnice b
- stejným způsobem kružnice j, k



Obr. 34 : Příklad 1.1

1.2 Popis pro kvadrátní osnovu: (obr. 35)

- je zadán $\square\, CDEF$
- $G \in CF \wedge |CG| = |GF|$
- $H \in CD \wedge |CH| = |HD|$
- $I = GH \cap AC$
- $j = (I; |CI|)$
- stejným způsobem zbylé tři kružnice



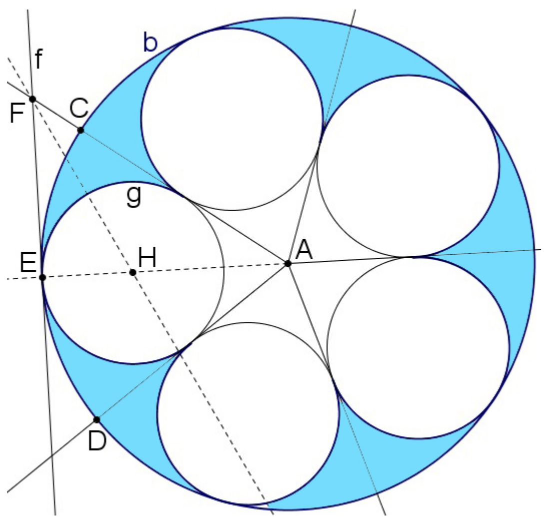
Obr. 35 : Příklad 1.2

1.3 Matematická konstrukce:

Jde o úlohu vepsat do dané kružnice n kružnic o stejném poloměru. (na obrázku 36 pro $n = 5$)(Převzato z [17].)

Popis (obr. 36):

- $b; b = (A; |AC|)$
- $|\sphericalangle CAD| = 360°/n$
- $|\sphericalangle CAE| = 180°/n$
- $f \perp EA \wedge E \in f$
- g je kružnice vepsaná trojúhelníku tvořeného přímkami f, AC, AD
- stejným způsobem zbylé čtyři kružnice



Obr. 36 : Příklad 1.3

2. Nosy ve sférických útvarech

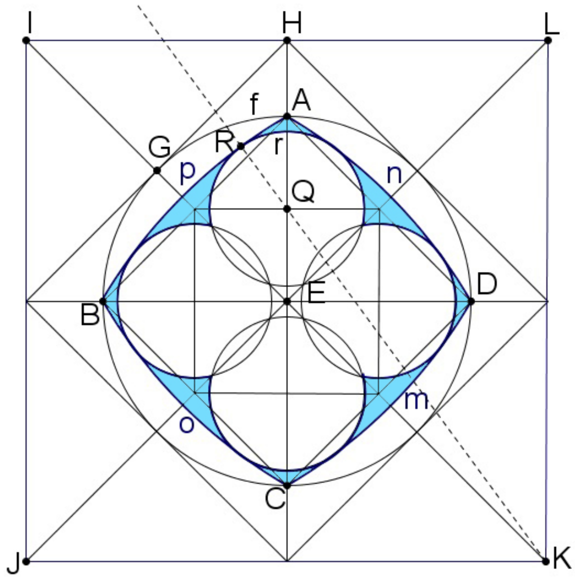
2.1 Sférický čtverec

2.1.1 Konstrukce kvadrátní osnovou

Vychází se ze čtverce $ABCD$, do nějž se osnovou vepisují oblouky m, n, o, p a teprve poté vepisujeme oblouky nosů.(Převzato z [17].)

Popis (obr. 37):

- $\square ABCD, E$ je střed $\square ABCD$
- $f = (E; |AE|)$
- $G \in f, GE \parallel BC$
- $HG \parallel AB$
- $I; IH \parallel BD \wedge IG \parallel BC$
- $\square IJKL$
- $m = (I; |ID|)$
- stejným způsobem kružnice n, o, p
- $Q; Q$ je střed úsečky AE
- r má střed v bodě Q a dotýká se kružnic p, n



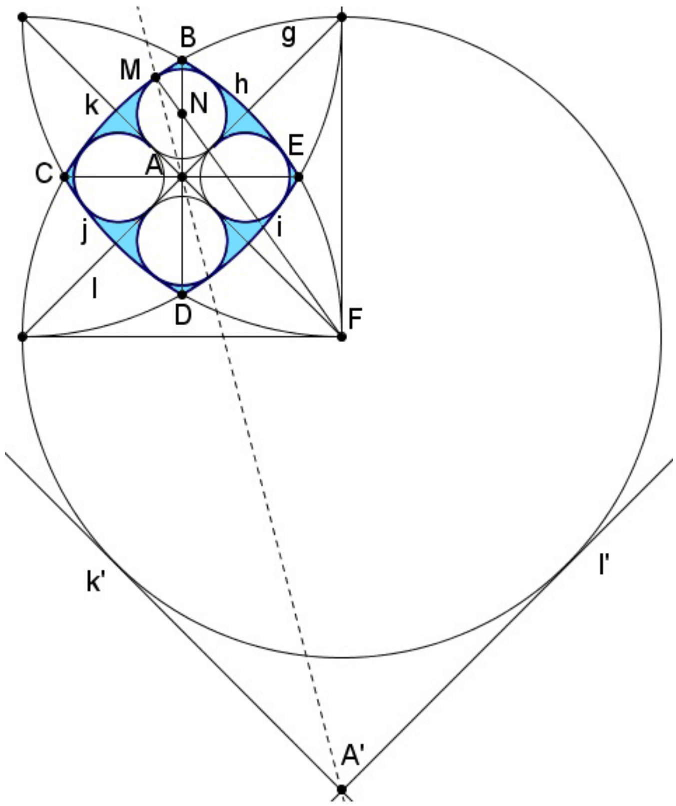
Obr. 37 : Příklad 2.1.1

2.1.2 Matematická konstrukce

Zde vycházíme z nějakého předem daného sférického čtverce. Ke konstrukci využijeme stejnolehlost. (Převzato z [17].)

Popis (obr. 38):

- $\square BCDE$
- oblouky kružnic g, h, i, j jsou dané
- $k \parallel BE, l \parallel BC, A \in k, l$
- snažíme se setrojit kružnici o, která se dotýká přímek k, l a kružnice g
  - hledáme střed stejnolehlosti M, která by zobrazila kružnici o na kružnici g
  - vzor a obraz přímky ve stejnolehlosti jsou rovnoběžky, proto: $k' \parallel k \wedge k'$ je tečna g; $l' \parallel l \wedge l'$ je tečna g
  - $A' = k' \cap l'$
  - $M = \leftrightarrow AA' \cap g$
- $N = MF \cap BD$
- o má střed v N a dotýká se kružnic g a h
- zbylé kružnice dostaneme osovou souměrností podle $\leftrightarrow CE, k$ a l



Obr. 38 : Příklad 2.1.2

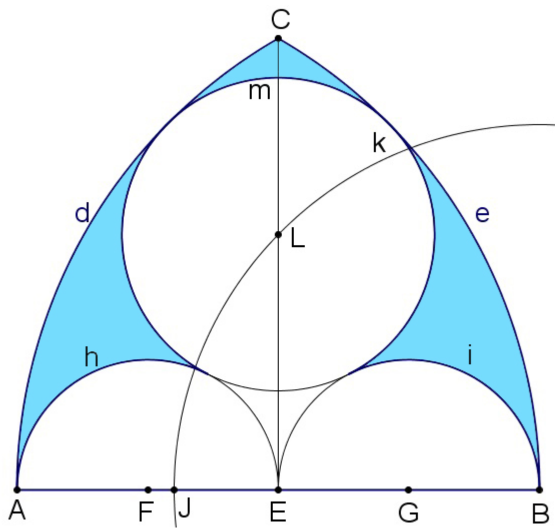
b) Konstrukce tzv. „jeptišek“

„Jeptiškou“ nazýváme složený obloukový útvar vepsaný do lomeného oblouku.

I. typ

Postup (obr. 39):

- úsečka AB
- $E; E$ je střed úsečky AB
- $F; F$ je střed úsečky AE
- $G; G$ je střed úsečky BE
- $d; d = (B; |AB|)$
- $e; e = (A; |AB|)$



Obr. 39 : Jeptiška I. typ

- $h, i; h = (F; |AF|); i = (G; |GB|)$
- $J; |AJ| : |AB| = 3 : 10$
- $k; k = (B; |BJ|)$
- $L; L \in k \cap CE$
- m; m má střed v L a dotýká se kružnic e, d

Zdůvodnění konstrukce:

Označme x poloměr kružnice k. Nejprve vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku LFE. Z Pythagorovy věty dostáváme rovnici

$$|EL|^2 = (x + \frac{a}{4})^2 - (\frac{a}{4})^2.$$

Poté si vezmeme pravoúhlý trojúhelník LBC a opět z Pythagorovy věty získáme rovnici

$$|EL|^2 = (a-x)^2 - (\frac{a}{2})^2.$$

Vidíme, že levé strany obou rovnic se rovnají, tudíž se musí rovnat i pravé strany, kde po umocnění dostáváme rovnost

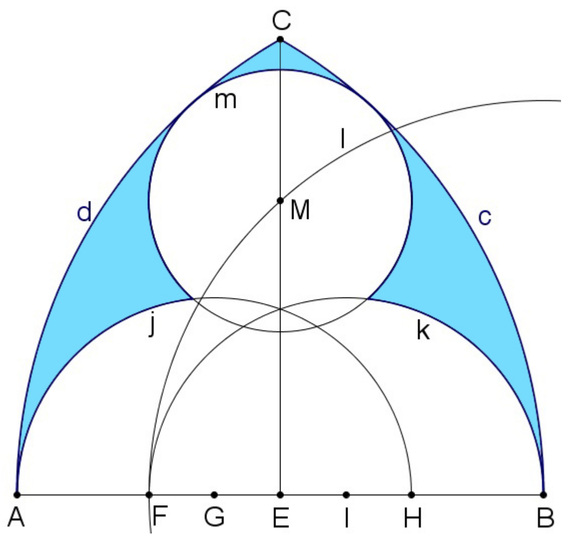
$$x^2 + 2x\frac{a}{4} + (\frac{a}{4})^2 - (\frac{a}{4})^2 = a^2 - 2ax + x^2 - (\frac{a}{2})^2.$$

Po úpravě a vyjádření neznámé x dostáváme, že $x = \frac{3}{10}a$. Odtud plyne konstrukce bodu J a následné nalezení středu kružnice k.

II.typ

Postup (obr. 40):

- AB
- $E; E$ je střed úsečky AB
- $F; F$ je střed úsečky AE
- $H; H$ je střed úsečky EB
- $d; d = (B; |AB|)$
- $c; c = (A; |AB|)$
- $G; G$ je střed úsečky EF
- $I; I$ je střed úsečky EH
- $k, j; k = (I; |IB|); j =$ $= (G; |AG|)$
- $l; l = (B; |FB|)$
- $M; M \in l \cap CE$



Obr. 40 : Jeptiška II. typ

- m; m má střed v M a dotýká se kružnic c, d

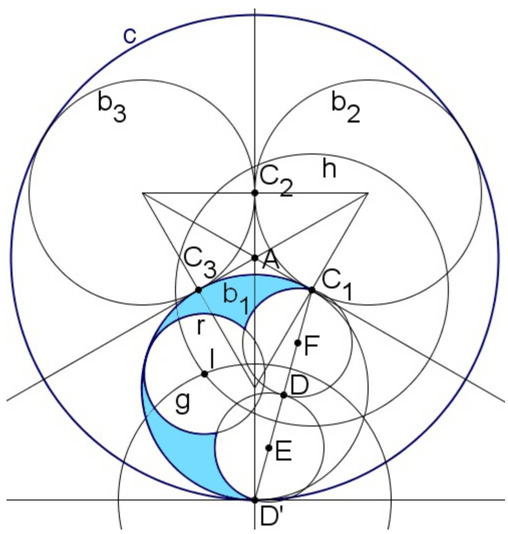
c) Rozety s plaménky

„Rozeta“ je v architektuře označení pro kruhové okno, často velkých rozměrů, umístěné většinou nad vstupním portálem stavby nebo ve štítech příčních chrámových lodí.

Příklad 1. *Sestrojte rozetu s plaménky na obr. 41. (Převzato z [17].)*

Postup (obr. 41):

- $c; c = (A;\text{libovolný})$
- kružnice b_1, b_2, b_3 viz př. 1.3 Nosy v kružnicích
- $D'; D' \in c \cap b_1$
- $C_1; C_1 \in b_1 \cap b_2$
- $D; D$ je střed úsečky C_1D'
- E je střed úsečky DD', F je střed DC_1
- $g; g = (D'; \frac{5}{8}|D'C_1|)$
- $h; h = (C_1; \frac{5}{8}|D'C_1|)$
- $I; I = h \cap g$
- $r; r = (I;$ dotýká se $b_1)$

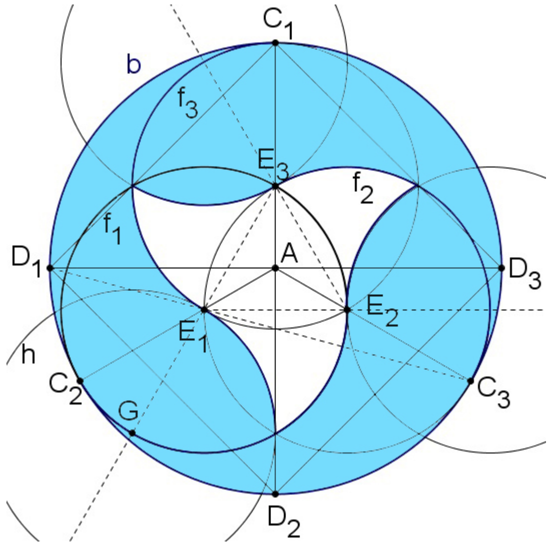


Obr. 41 : Rozety - příklad 1.

Příklad 2. *Sestrojte rozetu s plaménky na obr. 42. (Převzato z [17].)*

Postup (obr. 42):

- $\triangle C_1C_2C_3$ rovnostranný
- $\square C_1D_1D_2D_3$
- $E_1; E_1 = C_2A \cap D_1C_3$
- $f_1; f_1 = (E_1; |E_1C_2|)$
- $G; G = f_1 \cap E_1E_3$
- $h; h = (G; |GE_1|)$

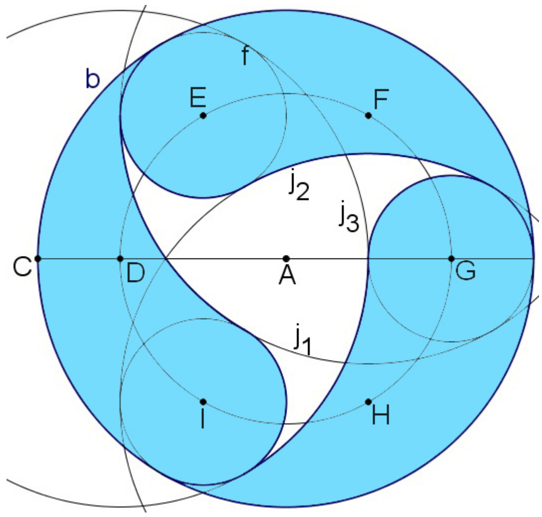


Obr. 42 : Rozety - příklad 2.

Příklad 3. *Sestrojte rozetu s plaménky na obr. 43. (Převzato z [17].)*

Postup (obr. 43):

- $b; b = (A; |AC|)$
- $|CD| = \frac{1}{3}|CA|$
- $DEFGHI$ je pravidelný
- $f; f = (E; |CD|)$
- $j_1; j_1 = (F; |CA|)$
- $j_2; j_2 = (H; |CA|)$
- $j_3; j_3 = (D; |CA|)$

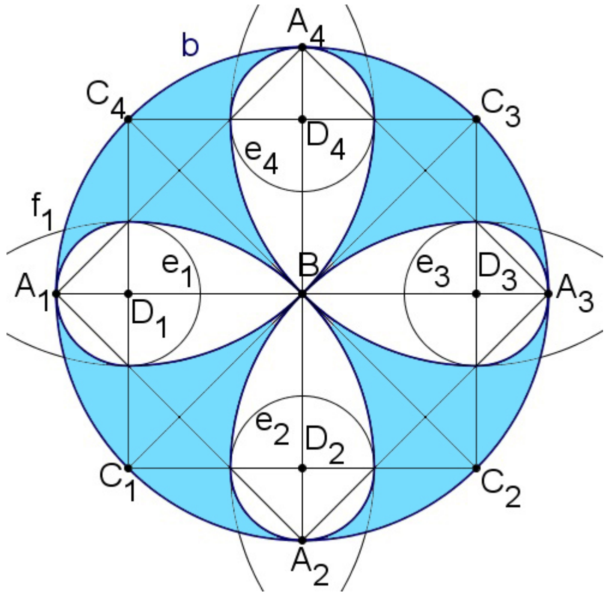


Obr. 43 : Rozety - příklad 3.

Příklad 4. *Sestrojte rozetu s plaménky na obr. 44. (Převzato z [17].)*

Postup (obr. 44):

- $b; b = (B; |BA_1|)$
- $\square A_1A_2A_3A_4$
- $\square C_1C_2C_3C_4 = R_{(B,45°)}(\square A_1A_2A_3A_4)$
- $D_1; D_1 = C_1C_4 \cap A_1A_3$
- $e_1; e_1 = (D_1; |A_1D_1|)$
- $f_1; f_1 = (C_1; |C_1B|)$

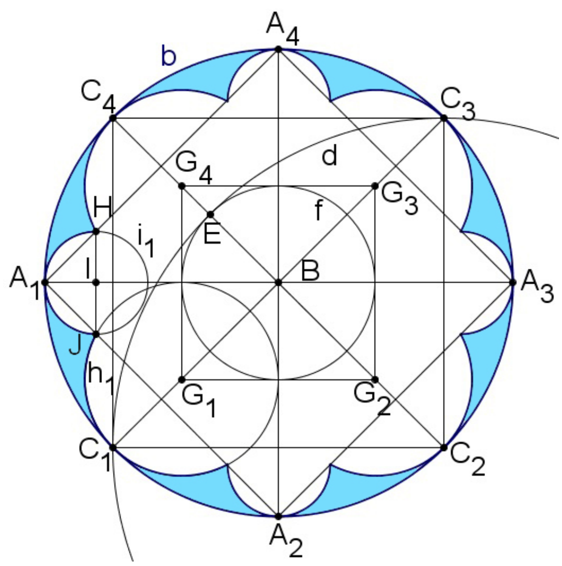


Obr. 44 : Rozety - příklad 4.

Příklad 5. *Sestrojte rozetu s plaménky na obr. 45. (Převzato z [17].)*

Postup (obr. 45):

- $b; b = (B; |BA_1|)$
- $\square A_1A_2A_3A_4$
- $\square C_1C_2C_3C_4 = R_{(B,45°)}(\square A_1A_2A_3A_4)$
- $d; d = (C_2; |C_1C_2|)$
- $E; E \in BC_4 \cap d$
- $f; f = (B; |EB|)$



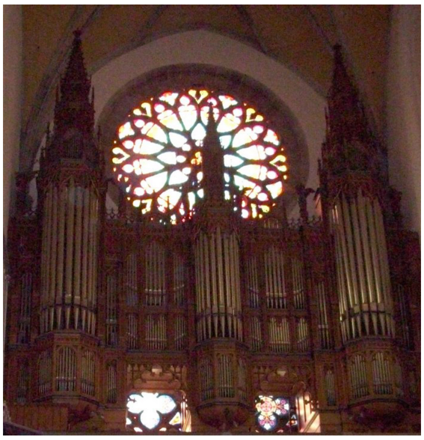
Obr. 45 : Rozety - příklad 5.

- $\square G_1G_2G_3G_4$ je opsaný kružnici $f \wedge G_1 \in BC_1$
- $h_1; h_1 = (G_1; |G_1C_1|)$
- $J; J \in h_1 \cap A_1A_2$
- H; obdobně jako J
- $I; I \in HJ \wedge |IJ| = |HI|$
- $i_1; i_1 = (I; |IA_1|)$

Rozeta chrámu sv. Egídia v Bardejově (Slovensko)

Postup (obr. 47, strana 72):

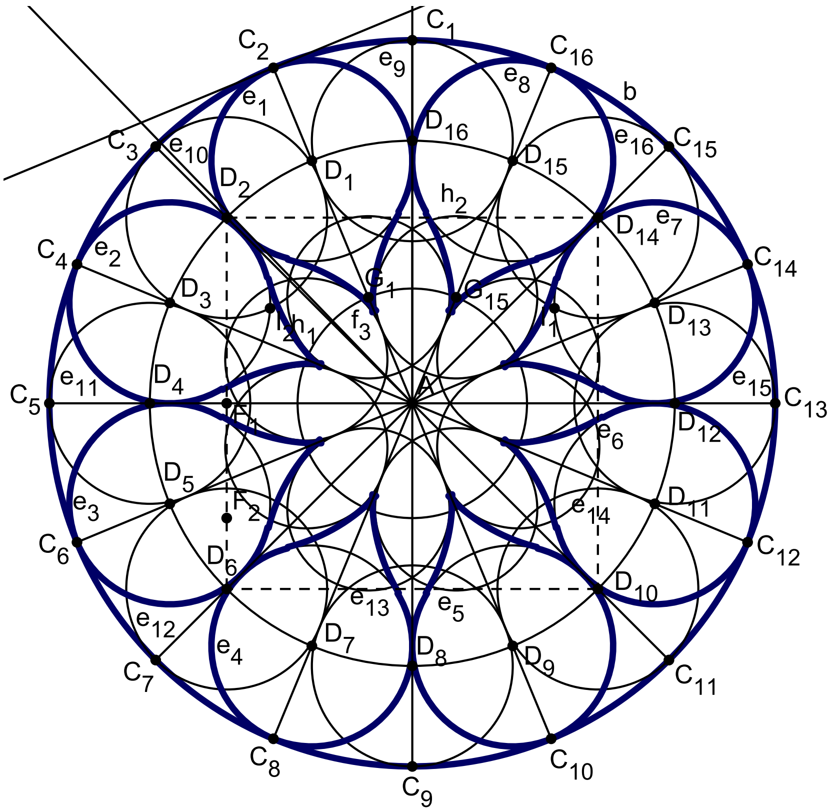
- pravidelný 16-ti úhelník $C_1C_2 \ldots C_{16}$
- D_1 viz. příklad 1.3 nosy v kružnicích
- $k; k = (A; |AD_1|)$
- $D_2 \ldots D_{16}; D_2 \ldots D_{16} \in$ $\in k \cap AC_1, C_3 \ldots C_{16}$
- $e_1; e_1 = (D_1; |D_1C_2|)$



Obr. 46 : Rozeta chrámu sv. Egídia

- $e_2 \ldots e_{16}; e_2 \ldots e_{16} = (D_2 \ldots D_{16}; |D_1C_2|)$
- $\square D_2D_6D_{10}D_{14}$
- $F_1; F_1 \in D_2D_6 \cap AC_5$
- $F_2; F_2$ je zlatým řezem; $|F_1F_2| > |F_2D_6|$
- $f_3; f_3 = (A; |F_1F_2|)$

- $G_1; G_1 \in f_3 \cap D_1A$
- $G_{15}; G_{15} \in f_3 \cap D_{15}A$
- $h_1; h_1$ má střed v G_1 a dotýká se přímky $C_{16}A$
- $h_2; h_2$ má střed v G_{15} a dotýká se přímky C_2A
- $I_1; I_1 \in e_{16} \cap e_7$
- $I_2; I_2 \in e_{10} \cap e_2$
- $j_1; j_1$ má střed v I_1 a dotýká se kružnice e_1
- $j_2; j_2$ má střed v I_2 a dotýká se kružnice e_8



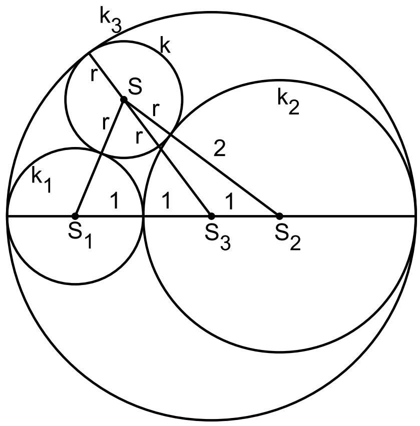
Obr. 47 : Rozeta chrámu sv. Egídia

4.3 Důkazové a početní úlohy

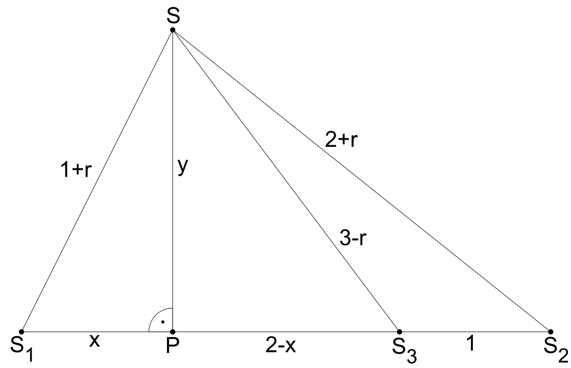
Příklad 1. *(D) Kružnice k_1 o poloměru 1 má vnější dotyk s kružnicí k_2 o poloměru 2. Každá z kružnic k_1, k_2 má vnitřní dotyk s kružnicí k_3 o poloměru 3. Vypočítejte poloměr kružnice k, která má s kružnicemi k_1, k_2 vnější dotyk a s kružnicí k_3 vnitřní dotyk.* (MO54, BII1)

Řešení

Protože se součet průměrů kružnic k_1 a k_2 rovná průměru kružnice k_3, leží jejich středy S_1, S_2 a S_3 v přímce. Existují dvě shodné kružnice, které splňují podmínky úlohy a jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2. Označme k jednu z nich (obr. 48), S její střed a r odpovídající poloměr.



Obr. 48



Obr. 49

Pro velikosti stran trojúhelníku S_1S_2S platí:

$$|S_1S| = 1 + r, |S_2S| = 2 + r, |S_1S_2| = 3, |S_3S| = 3 - r.$$

Pro bod S_3 zároveň platí, že $|S_3S_1| = 2$ a $|S_3S_2| = 1$. Označíme-li P pravoúhlý průmět bodu S na přímku S_1S_2 (obr. 49) a $x = |S_1P|, y = |SP|$, můžeme podle Pythagorovy věty psát:

$$(1 + r)^2 = x^2 + y^2,$$

$$(2 + r)^2 = (3 - x)^2 + y^2,$$

$$(3 - r)^2 = (2 - x)^2 + y^2.$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme $3 + 2r = 9 - 6x$ neboli $2r = 6 - 6x$, odečtením první od třetí $8 - 8r = 4 - 4x$ neboli $2r = 1 + x$. Porovnáním obou důsledků vyjde rovnice $6 - 6x = 1 + x$, odkud $x = \frac{5}{7}$, $r = = 3 - 3x = \frac{6}{7}$.

Poznámka. Se znalostí kosinové věty se obejdeme bez pomocného bodu P. Stačí napsat kosinové věty pro trojúhelníky S_1S_3S a S_1S_2S. Dostaneme tak dvě rovnice

$$(3 - r)^2 = 4 + (1 + r)^2 - 2 \cdot 2(1 + r) \cos \omega;$$

$$(2 + r)^2 = 9 + (1 + r)^2 - 2 \cdot 3(1 + r) \cos \omega;$$

kde $\omega = |\sphericalangle S_2S_1S|$. Po úpravě a vyjádření $(1 + r) \cos \omega$ z obou rovnic dostaneme pro r rovnici $2r - 1 = 1 - \frac{1}{3}r$, z níž plyne $r = \frac{6}{7}$.

Příklad 2. *Kružnice k_2 o poloměru $\frac{1}{2}$ se dotýká zevnitř kružnice k_1 o poloměru 1. Přímka p prochází středy kružnic k_1 a k_2. Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká přímky p a obou dvou kružnic k_1 a k_2.*

Řešení

Vyjdeme z pravoúhlých trojúhelníků PSS_1 a PSS_2 (viz obr. 50). Z Pythagorovy věty dostáváme rovnice

$$(r + \frac{1}{2})^2 = r^2 + (\frac{1}{2} + x)^2$$

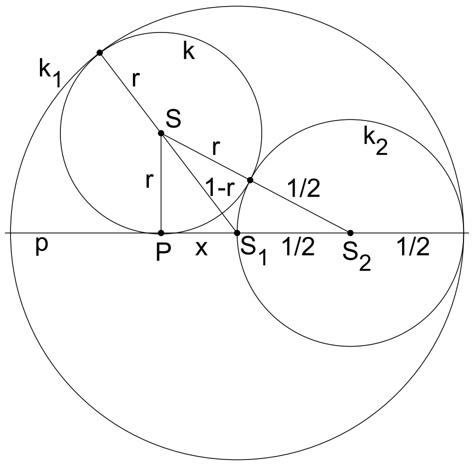
a

$$(1 - r)^2 = r^2 + x^2.$$

Upravíme-li obě rovnice, získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$r = x + x^2 \tag{39}$$

$$1 - 2r = x^2. \tag{40}$$



Obr. 50

Do rovnice (40) dosadíme za r pravou stranu rovnice (39) a dospějeme ke kvadratické rovnici $3x^2 + 2x - 1 = 0$ s kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = \frac{1}{3}$. Zpětným dosazením do rovnice (39) zjistíme, že jediným řešením je $r = \frac{4}{9}$.

Příklad 3. *(D) Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně dvou zbývajících. Kružnice k_1 a k_2 mají stejný poloměr r, kružnice k_3 má poloměr $\frac{8}{5}r$. Všechny kružnice k_1, k_2, k_3 mají vnitřní dotyk s kružnicí k o poloměru 1. Vypočtěte poloměr r.*

Řešení

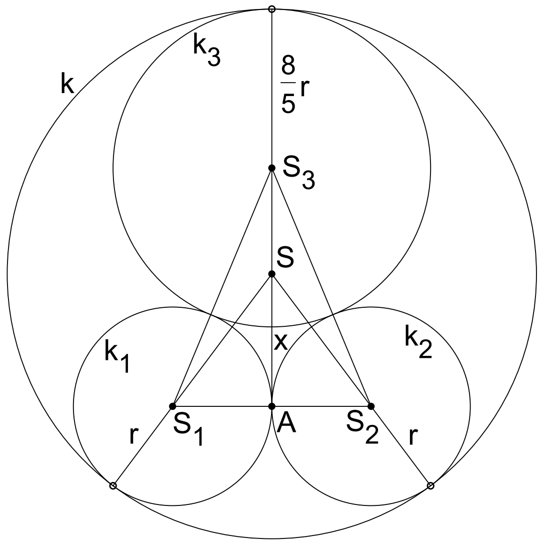
Využijeme pravoúhlých trojúhelníků AS_2S a AS_2S_3 (viz. obr. 51). Označme $x = |AS|$. Platí, že $|SS_3| = 1 - \frac{8}{5}r$, $|S_2S_3| = r + \frac{8}{5}r$ a $|SS_2| = 1 - r$. Z Pythagorovy věty dostáváme rovnice:

$$(1 - r)^2 = x^2 + r^2, \tag{41}$$

$$(r + \frac{8}{5}r)^2 = r^2 + (1 - \frac{8}{5}r + x)^2. \tag{42}$$

Rovnici (41) upravíme do tvaru $x^2 = 1 - 2r$. V rovnici (42) provedeme substituci $y = 1 - \frac{8}{5}r + x$ a postupnými úpravami dostáváme $y = \frac{12}{5}r$. Dosadíme-li zpět za y, dospějeme k rovnici $x = 4r - 1$. Dosadíme vyjádřené

x do rovnice (41) a dojdeme ke kvadratické rovnici s kořeny $r_1 = 0$ a $r_2 = \frac{3}{8}$. Nulový poloměr nevyhovuje, tudíž má úloha jediné řešení $r = \frac{3}{8}$.



Obr. 51

Příklad 4. *(D) Do kružnice k o poloměru r jsou vepsány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice l se vně dotýká kružnic k_1, k_2 a s kružnicí k má vnitřní dotyk. Kružnice m má vnější dotyk s kružnicemi k_2 a l a vnitřní dotyk s kružnicí k. Vypočtěte poloměry kružnic l a m.* (MO54, BI6)

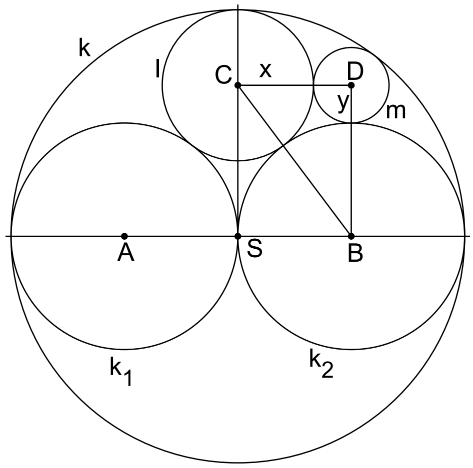
Řešení

Označme S, A, B, C, D středy kružnic k, k_1, k_2, l, m a x, y poloměry kružnic l a m. Bod C leží na přímce, která prochází bodem S a je kolmá na AB (obr. 52). Z pravoúhlého trojúhelníku BCS máme podle Pythagorovy věty

$$(\frac{r}{2} + x)^2 = (\frac{r}{2})^2 + (r - x)^2$$

a odtud $x = \frac{1}{3}r$.

Označme P, Q paty kolmic z bodu D na přímky AB a SC a $u = |SP|, v = = |SQ|$. Jestliže $u \neq \frac{1}{2}r$, je BPD pravoúhlý trojúhelník a podle Pythagorovy



Obr. 52

věty

$$(\frac{r}{2}+y)^2 = v^2 + (u-\frac{r}{2})^2. \tag{43}$$

Tato rovnice platí i v případě $u = \frac{1}{2}r$.

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku QCD (jestliže $Q \neq C$) anebo porovnáním protilehlých stran obdélníku (jestliže $Q = C$) dostaneme

$$(\frac{r}{3}+y)^2 = u^2 + (v-\frac{2r}{3})^2. \tag{44}$$

Navíc z pravoúhlého trojúhelníku SPD máme

$$(r-y)^2 = u^2 + v^2. \tag{45}$$

Odečtením rovnic (44) a (45) dostaneme $\frac{4}{3}r^2 - \frac{8}{3}ry = \frac{4}{3}vr$, tedy $v = r - 2y$. Podobně odečtením rovnic (45) a (43) vyjde $r^2 - 3ry = ur$ a odtud $u = r - 3y$. Dosazením do (45) a úpravou postupně dostaneme

$$(r-y)^2 = (r-3y)^2 + (r-2y)^2,$$

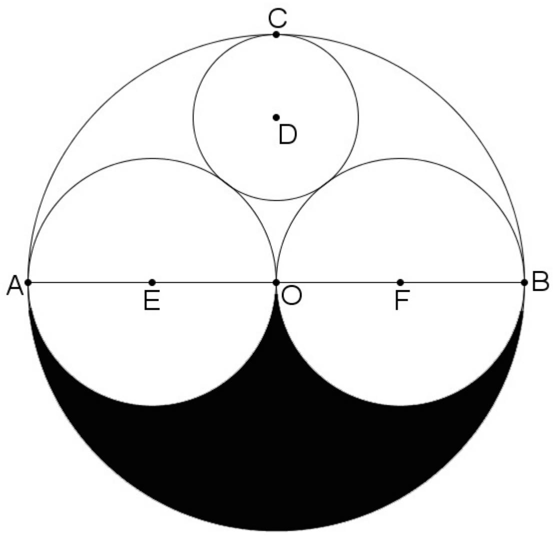
$$r^2 - 8ry + 12y^2 = 0,$$

$$(r-6y)(r-2y) = 0.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{1}{2}r$ nebo $y = \frac{1}{6}r$. Poloměr $\frac{1}{2}r$ má kružnice k_1, poloměr $\frac{1}{6}r$ kružnice m znázorněná na obr. 52. Každá z těchto dvou kružnic se dotýká kružnic k, k_2 a l požadovaným způsobem.

Příklad 5. *(D) Úsečka AB je průměrem kružnice k se středem O, jak je ukázáno na obrázku 53. Dále jsou zakresleny dvě kružnice s průměry AO a OB. Do kružnice se středem O je vepsána kružnice se středem D, která má se zbylými dvěma kružnicemi vnější dotyk a vnitřní dotyk s kružnicí k. Poloměr kružnice se středem D je 8. Najděte velikost úsečky AB. Dokažte, že obsah vyznačené oblasti je roven obsahu kružnice se středem E.*

Řešení



Obr. 53

Označme poloměr $|AE| = x$. Jestliže je $|CD| = 8$, pak $|DE| = |AE| + |CD| = x+8$ a $|DO| = 2x-8$. Použijeme Pythagorovu větu v trojúhelníku DEO, $|EO|^2 + |DO|^2 = |DE|^2$. Získáme kvadratickou rovnici

$$x^2 + (x-8)^2 = (x+8)^2$$

s jediným kladným kořenem $x = 12$. Odtud plyne, že $|AB| = 4x = 48$.

Stačí porovnat obsah kružnice E s obsahem vyznačené oblasti. Obsah kružnice E je roven $S_E = 12^2\pi$. Obsah vyznačené oblasti (označme S_{obl}) spočítáme tak, že od obsahu kružnice O odečteme obsahy kružnic E a F a vydělíme 2.

$$S_{obl} = \frac{24^2\pi - (12^2\pi + 12^2\pi)}{2} = 12^2\pi = S_E$$

$$S_{obl} = S_E$$

Příklad 6. *Tesař chce uříznout čtyři shodné tyče tvaru válce z válcovitého kusu dřeva, jehož obsah je 9π čtverečních stop. Přeje si, aby tyto kusy dřeva byly co možná největší, jaké jdou z takovéto klády vyřezat. Pomozte tesaři a najděte poloměr všech čtyř tyčí.*

(D) Určete velikost poloměru, jestliže se tesař rozhodne místo čtyř kružnic vytesat pouze tři shodné kružnice o maximální velikosti.

Řešení 1. části

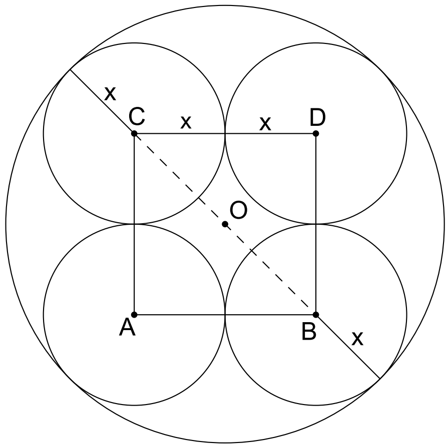
Označme poloměr každé ze čtyř malých kružnic x (obr. 54). Spojením středů dostaneme čtverec, jehož strana je dlouhá $2x$ a uhlopříčka $2x\sqrt{2}$ (lze spočítat pomocí Pythagorovy věty). Průměr klády je roven $2x + 2x\sqrt{2}$. Jeho poloměr pak $x(1 + \sqrt{2})$. Jelikož obsah průřezu klády je 9π, její poloměr je 3. Z toho vyplývá, že $x(1 + \sqrt{2}) = 3$ a

$$x = \frac{3}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ stop.}$$

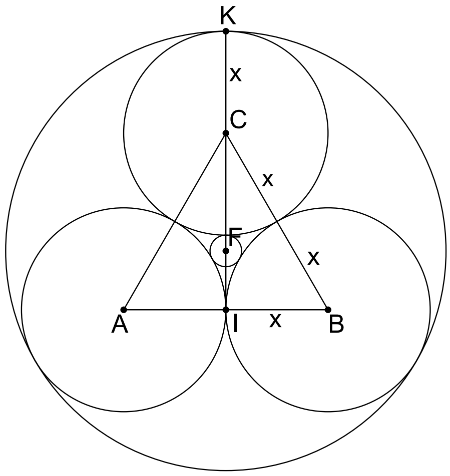
Řešení 2. části

Označme poloměr každé ze tří hledaných kružnic x. Spojením středů dostaneme rovnostranný trojúhelník se stranou $2x$. Zakreslíme si kružnici se středem v bodě F, která má se všemi třemi hledanými kružnicemi vnější dotyk. Její poloměr označme y. Velikost úsečky IF označme z (viz. obr. 55). $|KF| = 3 = x + x + y$. Odtud $y = 3 - 2x$. Z pravoúhlého trojúhelníku AFI dostáváme (podle Pythagorovy věty)

$$z = \sqrt{2xy + y^2}. \tag{46}$$



Obr. 54



Obr. 55

Z pravoúhlého trojúhelníku AIC získáme (Pythagorova věta)

$$|CI| = \sqrt{3}x. \tag{47}$$

Vzdálenost $|CI| = x + y + z$. Porovnáním tohoto vztahu a rovnice (47) získáme rovnost

$$x + y + z = \sqrt{3}x. \tag{48}$$

Dosadíme do rovnice (48) nejprve za z (46) a poté i za y a dospějeme k rovnici

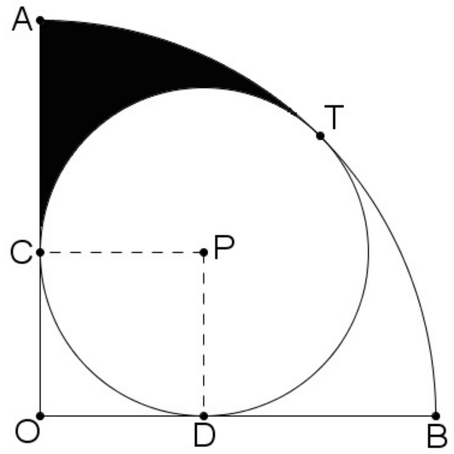
$$x + 3 - 2x + \sqrt{2x(3 - 2x) + (3 - 2x)^2} = \sqrt{3}x,$$

úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$(3 + 2\sqrt{3} + 1)x^2 - 6\sqrt{3}x = 0,$$

jejíž kořeny jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = 3(2\sqrt{3} - 3)$. Je jasné, že kořen x_1 není řešením, tudíž úloha má jediné řešení a to $x = 3(2\sqrt{3} - 3)$.

Příklad 7. *Kružnice je vepsána do čtvrtkruhu o poloměru* 8, *jak je znázorněno na obr. 56. Určete poloměr vepsané kružnice. Jaký je obsah vybarvené oblasti?*



Obr. 56

Řešení 1. části

Nakresleme poloměry PC a PD. Body C a D jsou po řadě společnými body úseček AO, BO a vepsané kružnice (obr. 56). Úhel AOB je pravý, tudíž $PCOD$ je čtverec. Nechť $|PC| = |PD| = r$, pak $|CO| = |DO| = r$ a $|OP| \;= = r\sqrt{2}$, zatímco $|PT| = r$. Proto $|OT| = r + r\sqrt{2} = |OB| = 8$. Tudíž $r + r\sqrt{2} = 8$ a $r = 8(\sqrt{2} - 1)$.

Řešení 2. části

Obsah S vybarvené oblasti spočítáme tak, že od obsahu čtvrtkruhu odečteme nejprve obsah vepsané kružnice. Dále vypočítáme obsah zbylé části při pravém úhlu. Nakonec si uvědomíme, že poslední dvě části mají stejný obsah, tudíž stačí výsledek vydělit dvěma.

Obsah čtvrtkruhu je $\frac{1}{4}64\pi$. Obsah kružnice je $\pi[8(\sqrt{2}-1)^2]$. Obsah části při pravém úhlu spočítáme jako obsah čtverce $ODPC -$obsah malého čtvrtkruhu, $(8\sqrt{2}-8)^2 - \pi(8\sqrt{2}-8)^2$. Platí tedy:

$$S = \frac{16\pi - [(8\sqrt{2}-8)^2 - \pi(8\sqrt{2}-8)^2] - \pi[8(\sqrt{2}-1)^2]}{2}.$$

Odtud dostáváme

$$S = \frac{16\pi - 128\pi + 128\sqrt{2}\pi - 64\pi - 192 + 128\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\pi + 48\pi}{2} =$$

$$= \frac{-128\pi + 96\sqrt{2}\pi - 192 + 128\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{32(-4\pi + 3\sqrt{2}\pi - 6 + 4\sqrt{2})}{2} =$$

$$= 16[4(\sqrt{2} - \pi) + 3(\pi\sqrt{2} - 2)].$$

Jinou možností, jak nalézt obsah vybarvené části, je využít obrázku 54 z příkladu 6 a doplnit čtvrtkruh na celý kruh. Označme x obsah hledané oblasti. Celý kruh se dá poskládat ze tří různých tvarů: čtverce, částí malých kruhů a oblastí označených x. Obsah celého kruhu je roven součtu obsahů těchto částí. Dostáváme rovnici

$$64\pi = 8x + \left((2r)^2 + 4\frac{3}{4}\pi r^2\right). \tag{49}$$

Vypočítáme si poloměr malé kružnice $r = 8(\sqrt{2}-1)$ a dosadíme do rovnice (49). Pak

$$8x = 64\pi - 4 \cdot [8(\sqrt{2} - 1)]^2 - 3\pi[8(\sqrt{2} - 1)]^2,$$

odkud po úpravách dostáváme

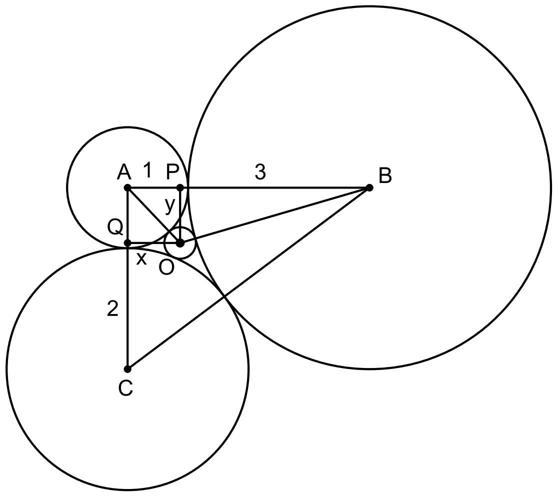
$$x = 16[4(\sqrt{2} - \pi) + 3(\pi\sqrt{2} - 2)].$$

Příklad 8. *(D) Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně zbývajících. Kružnice k_1 má poloměr 1, kružnice k_2 má poloměr 2 a kružnice k_3 má poloměr 3. Vypočítejte poloměry kružnic, které se dotýkají všech třech kružnic k_1, k_2, k_3.*

Řešení

a)

Označme $x = |AP|, y = |AQ|$. Nejprve budeme hledat menší z obou kružnic ($k = (O, r)$). Bod P je pata kolmice z O na AB, Q je pata kolmice



Obr. 57

z O na AC. Využitím Pythagorovy věty dostáváme:

$$\begin{aligned} \triangle APO:&\quad x^2+y^2=(r+1)^2,\\ \triangle CQO:&\quad x^2+(4-y)^2=(r+3)^2,\\ \triangle PBO:&\quad (3-x)^2+y^2=(r+2)^2. \end{aligned} \tag{50}$$

Umocníme druhou rovnici, odečteme od ní první rovnici a dostaneme $y=\frac{2-r}{r}$. To samé provedeme s třetí rovnicí a dostaneme $x=\frac{3-r}{3}$. Jestliže dosadíme za x a y do první rovnice, získáme kvadratickou rovnici

$$23r^2+132r-36=0$$

s kořeny $r_1=\frac{6}{23}$, $r_2=-6$.

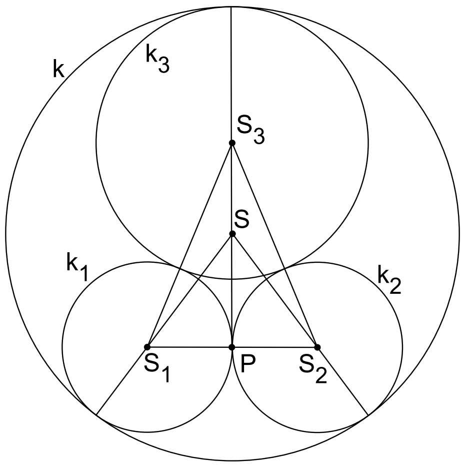
b)

Podíváme se, jak se postup změní, budeme-li hledat větší z obou kružnic. Při stejném označení (akorát místo r budeme používat R) dojdeme k rovnicím:

$$\begin{aligned} \triangle APO:&\quad x^2+y^2=(R-1)^2,\\ \triangle CQO:&\quad x^2+(4-y)^2=(R-3)^2,\\ \triangle PBO:&\quad (3-x)^2+y^2=(R-2)^2. \end{aligned} \tag{51}$$

Když v této soustavě (51) provedeme substituci $R = -r$, dostaneme soustavu (50) z případu a). Stačí tedy vyřešit jen soustavu (50). Kladný kořen $r_1 = r$ je poloměr malé kružnice. Kořen r_2 je záporný, přičemž poloměr velké kružnice bude $R = -r_2$.

Příklad 9. *(D) Kružnice k_1 má vnější dotyk s kružnicí k_2 a obě kružnice mají stejný poloměr r_1. Kružnice k o poloměru r má společný dotyk s kružnicemi k_1 a k_2. Pro poloměry kružnic platí, že $r_1 = l \cdot r$, kde $l \in (0; \frac{1}{2})$. Najděte poloměr kružnice k_3, která má se všemi třemi kružnicemi společný dotyk a leží v horní oblasti omezené těmito kružnicemi (viz obr. 58).*



Obr. 58

Označíme středy kružnic k_1, k_2, k_3, k popořadě S_1, S_2, S_3, S. Vyjdeme z pravoúhlých trojúhelníků S_1S_3P a S_1SP. Pro strany trojúhelníků platí:

$|S_1S_3| = r_1 + r_2, |S_1P| = r_1, |SS_3| = r - r_2, |SS_1| = r - r_1$ a $|SP| = x$.

S využitím Pythagorovy věty dostáváme rovnice

$$(r - r_1)^2 = x^2 + r_1^2,$$

$$(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + (x + r - r_2)^2.$$

Dosadíme do obou rovnic za $r_1 = l \cdot r$ a po úpravě získáme rovnice

$$\sqrt{(1-2l)r^2} = x, \tag{52}$$

$$(r_2 + lr)^2 = l^2 r^2 + (x + r - r_2)^2. \tag{53}$$

Dosadíme do rovnice (53) levou stranu rovnice (52). Po úpravách dospějeme k rovnici

$$r_2 = (l + \sqrt{1-2l} + 1) = (1 - l + \sqrt{1-2l})r,$$

odkud

$$r_2 = \frac{(1 - l + \sqrt{1-2l})r}{1 + l + \sqrt{1-2l}}.$$

Doplňující úloha

Pokuste se nalézt poloměr druhé kružnice, která má s kružnicemi k, k_1, k_2 vnější dotyk a leží ve spodní oblasti ohraničené těmito kružnicemi.

Příklad 10. *Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2$ cm). Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je.* (MO59, BII1)

Řešení

Trojúhelník UST je pravoúhlý. Jeho přepona UT má délku $s + t$, délky odvěsen jsou $|US| = t + 2$, $|ST| = s$ (obr. 59). Podle Pythagorovy věty platí

$$(s + t)^2 = (t + 2)^2 + s^2.$$

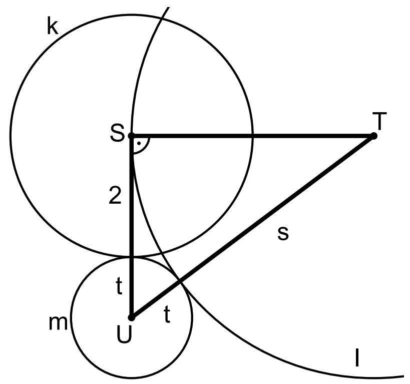
Úpravami postupně dostáváme

$$s^2 + 2st + t^2 = t^2 + 4t + 4 + s^2,$$

$$st = 2t + 2,$$

$$t(s - 2) = 2.$$

Čísla t a $s - 2$ jsou celá, proto t musí být dělitelem čísla 2. Protože t je kladné, jsou jen dvě možnosti; jestliže $t = 1$ cm, potom $s = 4$ cm, a jestliže $t = 2$ cm, potom $s = 3$ cm.



Obr. 59

Příklad 11. *Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je 72 cm^2. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem.* (MO55, CII3)

Řešení

Označme r, s poloměry kružnic k, l (v centimetrech) a K, L jejich body dotyku se stranou AB (obr. 60). Je pak $|AK| = r, |LB| = s$, a jak snadno spočteme z Pythagorovy věty

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$

Pro délky stran obdélníku $ABCD$ platí $|AD| = 2r, |AB| = r + 2\sqrt{rs} + s = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2$. Podle předpokladu má být

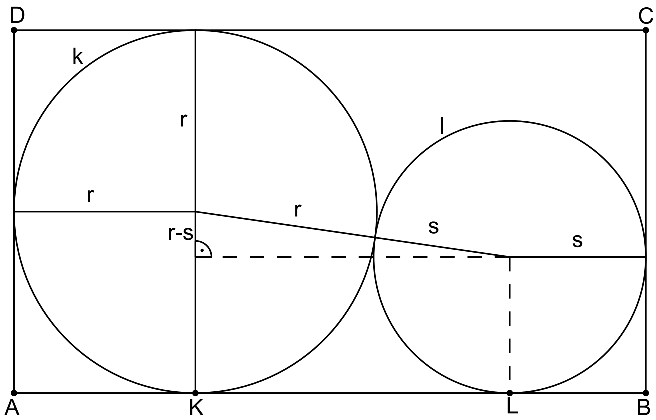
$$2r(\sqrt{r} + \sqrt{s})^2 = 72,$$

neboli po zkrácení dvěma a odmocnění

$$r + \sqrt{rs} = 6.$$

Odtud plyne, že $r < 6$, a pro velikost poloměru s dostáváme vyjádření

$$rs = (6-r)^2,$$



Obr. 60

$$s = \frac{(6-r)^2}{r}. \tag{54}$$

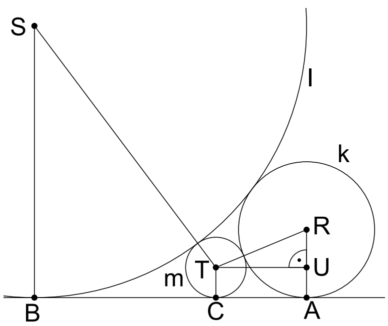
Z podmínek úlohy dále plyne, že s nemůže být větší než r, protože jinak by kružnice l neležela v daném obdélníku, a protože i kružnice k musí ležet v daném obdélníku, musí být $|AB| \geqq |AD| = 2r$. Z nerovnosti $s \leqq r$ podle (54) dostaneme podmínku $36 - 12r + r^2 \leqq r^2$, tj. $r \geqq 3$. Dále z nerovnosti $|AB| \geqq 2r$ pak plyne $72 = |AB| \cdot |AD| \geqq 4r^2$, neboli $r^2 \leqq 18$, což pro celočíselné r znamená, že $r \leqq 4$. Pro poloměr r nám tak vycházejí jen dvě možnosti, $r \in \{3, 4\}$, odpovídající hodnoty poloměru s vypočteme ze vztahu (54).

Úloha má právě dvě řešení: $r = s = 3$ cm a $r = 4$ cm, $s = 1$ cm.

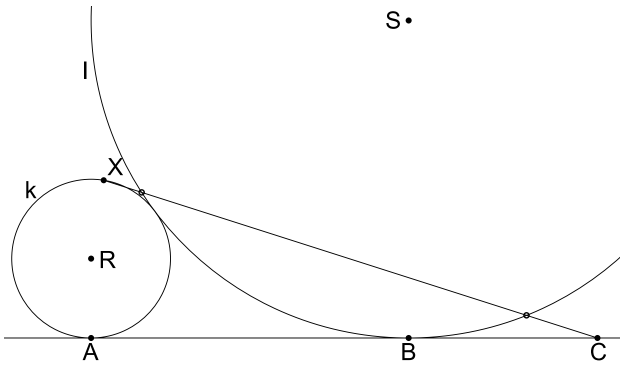
Příklad 12. *(D) Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení.* (MO55, CI2)

Řešení

Označme po řadě R, S, T středy a A, B, C body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně, dále $r = 3, s = 12$ a t jejich poloměry (délky a obsahy budeme počítat bez jednotek kvůli jednoduššímu dosazování). V lichoběžníku (který v případě rovnosti $r = t$ je ovšem obdélníkem) $ARTC$ (obr. 61) je $|RT| = r + t$. Označíme-li U průsečík přímky AR a přímky vedené bodem T rovnoběžně s AC, je $|RU| = |r - t|$. Z pravoúhlého trojúhelníku RUT plyne $|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}$. Analogicky bychom z lichoběžníků $CTSB$ a $ARSB$ dostali vztahy $|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$ a $|AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3 \cdot 12} = 12$.



Obr. 61



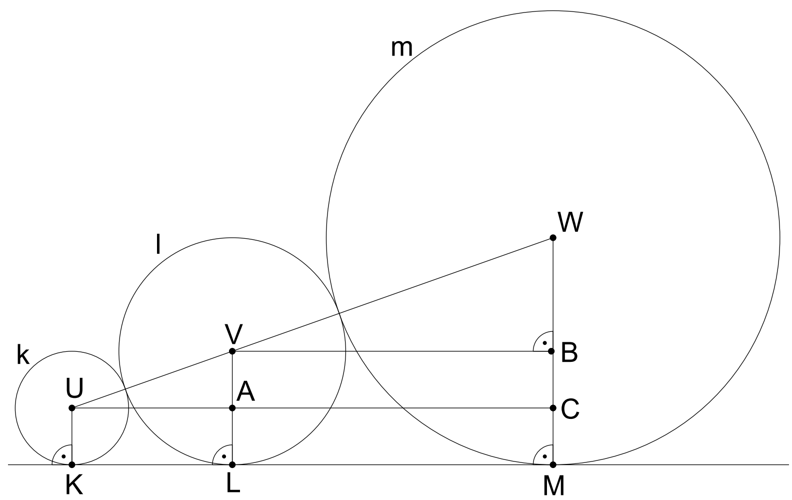
Obr. 62

Uvažujme nejdříve případ, kdy bod C leží mezi body A a B. Je pak $2\sqrt{3t} + 4\sqrt{3t} = 12$, odkud $t = \frac{4}{3}$. Jestliže bod A leží mezi body C a B, dostaneme obdobně rovnici $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkud $t = 12$. Dále rovnice $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$, kterou dostaneme pro polohu bodu B mezi body A a C, nemá zjevně žádné řešení. Že takový případ není možný, je vidět i z obrázku 62, protože každá kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě X různém od A a přitom obsahuje bod C polopřímky opačné k polopřímce BA, musí ve svém vnitřku obsahovat i tětivu kružnice l (vyznačenou na obr. 62), takže se jí nemůže dotýkat. Poloměr kružnice m je tedy $\frac{4}{3}$ cm nebo 12 cm.

Příklad 13. *Kružnice k, l, m se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice k a l stejně jako kružnice l a m mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice l, jestliže poloměry kružnic k a m jsou* 3 *cm a* 12 *cm.* (MO55, CS3)

Řešení

Vzájemná poloha kružnic a jejich společné tečny musejí vypadat jako na obrázku 63, kde jsme písmeny K, L, M označili body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně, U, V, W jejich středy a r poloměr kružnice l (v centimetrech).



Obr. 63

Z pravoúhlých trojúhelníků UAV, VBW, UCW plyne podle Pythagorovy věty

$$|UA|^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r,$$

$$|AC|^2 = |BV|^2 = (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r$$

a

$$|UC|^2 = (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144.$$

Jelikož $|UA| + |AC| = |UC|$, dostaneme z prvních dvou vztahů

$$|UC|^2 = (|UA| + |AC|)^2 = |UA|^2 + 2|UA||AC| + |AC|^2 =$$
$$= 60r + 2\sqrt{12r \cdot 48r} = 108r,$$

což spolu s třetím vztahem dává po úpravě pro r rovnici

$$4r^2 - 48r + 144 = 0.$$

Protože $4r^2 - 48r + 144 = 4(r^2 - 12r + 36) = 4(r - 6)^2$, má tato rovnice jediné řešení $r = 6$ a poloměr kružnice l je tedy 6 cm.

Jiné řešení

Můžeme využít vztahu pro vzdálenost dotykových bodů ležících na společné tečně dotýkajících se kružnic, který lze odvodit v příkladu 18. Z tohoto vztahu přímo dostáváme, že $|UA| = 2\sqrt{3r}$ a $|BV| = |AC| = 2\sqrt{12r}$. Dále postupujeme stejně jako v předchozím řešení.

Příklad 14. *Kružnice $k(S; 6$ cm$)$ a $l(O; 4$ cm$)$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l.* (MO59, CS2)

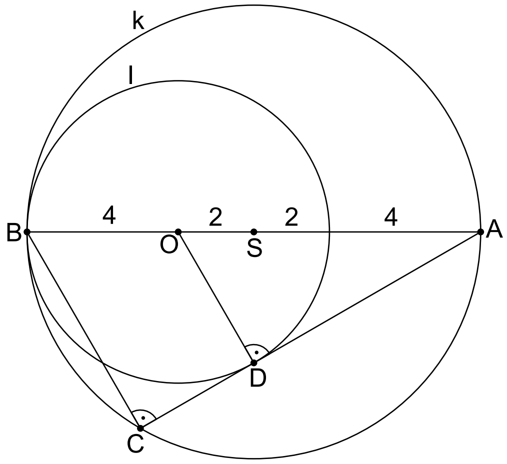
Řešení

Bod dotyku kružnice l s tečnou z bodu A označme D (obr. 64). Z vlastností tečny ke kružnici plyne, že úhel ADO je pravý. Zároveň je pravý i úhel ACB (Thaletova věta).

Trojúhelníky ABC a AOD jsou podobné podle věty *uu*, neboť se shodují v úhlech ACB, ADO a ve společném úhlu při vrcholu A. Z uvedené podobnosti plyne

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{55}$$

Ze zadaných číselných hodnot vychází $|OD| = |OB| = 4$ cm, $|OS| = |SB| - |OB| = 2$ cm, $|OA| = |OS| + |SA| = 8$ cm a $|AB| = 12$ cm.



Obr. 64

Podle (55) je tedy $\frac{|BC|}{4} = \frac{12}{8}$ a odtud $|BC| = 6$ cm. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC nakonec zjistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}$ cm $= 6\sqrt{3}$ cm.

Příklad 15. *V kružnici o poloměru R je veden průměr a na něm bod A ve vzdálenosti a od středu. Určete poloměr kružnice, která se dotýká průměru v bodě A a má vnitřní dotyk s danou kružnicí.*

Řešení

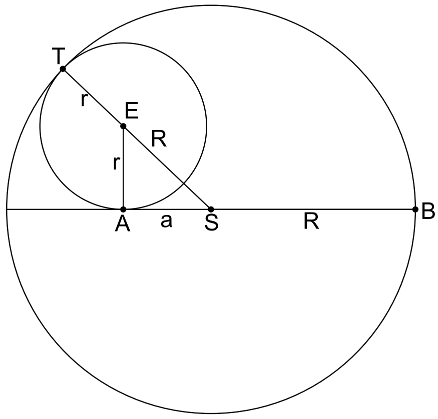
Označme S střed zadané kružnice, T bod dotyku dané a hledané kružnice (obr. 65). V pravoúhlém trojúhelníku EAS platí $|ES| = \sqrt{r^2 + a^2}$ (Pythagorova věta). Dále platí:

$$|TS| = R = |TE| + |ES| = r + \sqrt{r^2 + a^2},$$

$$R - r = \sqrt{r^2 + a^2},$$

$$R^2 - 2rR + r^2 = r^2 + a^2,$$

$$r = \frac{R^2 - a^2}{2R}.$$



Obr. 65

Příklad 16. *Určete poloměry tří kružnic, jejichž středy tvoří vrcholy trojúhelníku se stranami délek a, b, c, a každé dvě mají vnější dotyk.*

Řešení

Označme poloměry kružnic se středy A, B, C postupně r_1, r_2, r_3 (viz. obr. 66). Pro poloměry platí následující rovnice:

$$a = r_2 + r_3 \tag{56}$$

$$b = r_1 + r_3 \tag{57}$$

$$c = r_1 + r_2. \tag{58}$$

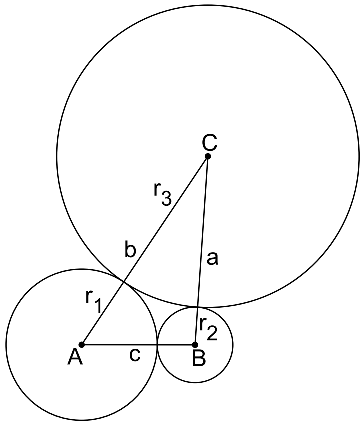
Získáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Odečtením rovnice (58) od rovnice (57) a sečtením výsledné rovnice s rovnicí (56) dostáváme, že

$$r_2 = \frac{a - b + c}{2}.$$

Pro zbylé poloměry platí:

$$r_1 = \frac{c - a + b}{2},$$

$$r_3 = \frac{b - c + a}{2}.$$



Obr. 66

Příklad 17. *Je dána kružnice k o poloměru r a tečna v jejím bodě M. Na této tečně leží body A, B tak, že $|MA| = |MB| = a$ (M je střed úsečky AB). Určete poloměr kružnice l dotýkající se dané kružnice k a procházející body A, B.*

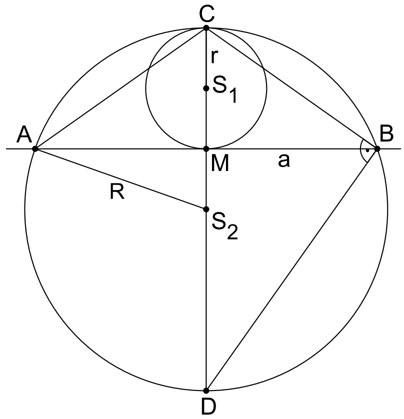
Řešení

Označme R poloměr hledané kružnice a C bod dotyku obou kružnic (viz. obrázek 67). Platí, že $|MC| = 2r$, $|CD| = 2R$ a $|MD| = 2(R - r)$. Trojúhelník CDB je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B (Thaletova věta). Pomocí Euklidovy věty o výšce pro trojúhelník CDB dostáváme

$$2r \cdot 2(R - r) = a^2$$

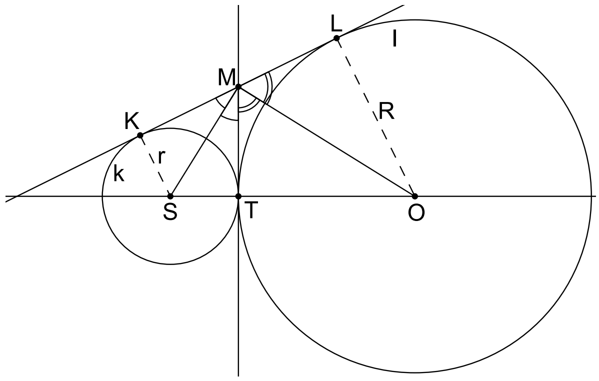
a odtud

$$R = \frac{a^2}{4r} + r = \frac{a^2 + 4r^2}{4r}.$$



Obr. 67

Příklad 18. *Kružnice $k(S;r)$ a $l(O;R)$ se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná tečna v bodě T protíná jejich vnější společnou tečnu v bodě M. Dokažte, že trojúhelník SOM je pravoúhlý, a vyjádřete jeho obsah pomocí poloměrů r, R daných kružnic.* (MO50, CII2)



Obr. 68

Řešení

Označme K, L body dotyku té společné tečny obou kružnic, na které leží také bod M a která je různá od společné tečny v bodě T (obr. 68). Ze souměrnosti podle přímky MS plyne shodnost úhlů KMS a TMS a ze souměrnosti podle přímky OM plyne shodnost úhlů LMO a TMO. Součet těchto čtyř úhlů je 180°, proto $|\sphericalangle SMO| = |\sphericalangle SMT| + |\sphericalangle TMO| = 90°$. Tím je vyřešena první část úlohy.

Užitím Pythagorovy věty pro trojúhelníky SOM, STM a OTM dostaneme pro výšku $v = |TM|$ trojúhelníku SOM rovnost

$$(r+R)^2 = (r^2+v^2) + (R^2+v^2)$$

odkud $v^2 = Rr$. (Tento vztah plyne i přímo z Eukleidovy věty pro trojúhelník SOM.) Obsah trojúhelníku SOM je tedy $\frac{1}{2}(R+r)\sqrt{Rr}$.

Příklad 19. *Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF protľaly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE, BDGF, CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte.* (MO52, AIII2)

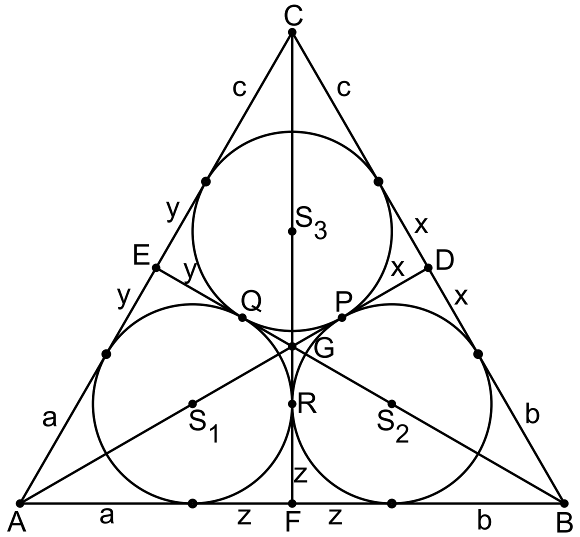
Řešení

Předpokládejme, že zmíněné čtyřúhelníky mají uvedenou vlastnost. Ze souměrnosti tečen z daného bodu k dané kružnici vyplývá, že strany trojúhelníku ABC jsou rozděleny body D, E, F a body dotyku kružnic vepsaných uvažovaným čtyřúhelníkům na úseky délek, jež označíme podle obrázku 69. Jsou na něm rovněž vyznačeny body P, Q, R vzájemného dotyku zmíněných kružnic. Naším cílem je dokázat rovnosti $x = y = z$ a $a = b = c$.

Pro úseky tečen z bodu A ke kružnicím při straně BC platí rovnosti $a + 2z = |AP| = a + 2y$, odkud ihned plyne $y = z$; z důvodů symetrie tudíž skutečně platí $x = y = z$. (Všude dále budu psát x namísto y a z.) Všimněme si nyní trojúhelníků AEG a AFG. Mají společnou stranu AG a shodné strany AF a AE (délky $a + x$). Také jejich třetí strany EG a FG jsou shodné:

$$|EG| = |EQ| + |QG| = x + |RG| = |FR| + |RG| = |FG|.$$

Proto $\triangle AEG \simeq \triangle AFG$ podle věty sss, tudíž úhly BAD a CAD jsou shodné a polopřímka AD je osou úhlu BAC. Jak víme, osa úhlu trojúhelníku protíná



Obr. 69

protější stranu v poměru délek přilehlých stran. V našem případě to znamená, že

$$\frac{a+2x+b}{a+2x+c}=\frac{b+x}{c+x}.$$

Snadnou úpravou dostaneme rovnost $(b-c)(a+x)=0$, ze které vidíme, že $b=c$. Z důvodů symetrie tudíž platí $a=b=c$ a celý důkaz je hotov.

Jiné řešení

Označme S_1, S_2, S_3 středy vepsaných kružnic (obr.69). Stejně jako v předchozím řešení si nejprve všimneme, že platí $x=y=z$ a že trojúhelníky AEG a AFG jsou shodné. K tomu jsme využili rovnost $|GQ|=|GR|$, ze které plyne, že podle věty sss jsou shodné i trojúhelníky S_1QG a S_1RG. Jelikož $R\in S_1S_2$ a $Q\in S_1S_3$, ze souměrnosti podle přímky AD nyní plyne, že přímky AB a S_1S_2 svírají stejný úhel jako přímky AC a S_1S_3, a protože kolmé průměty úseček S_1S_2 a S_1S_3 na odpovídající přímky AB, resp. AC jsou shodné (mají délku $2x$), je $|S_1S_2|=|S_1S_3|$.

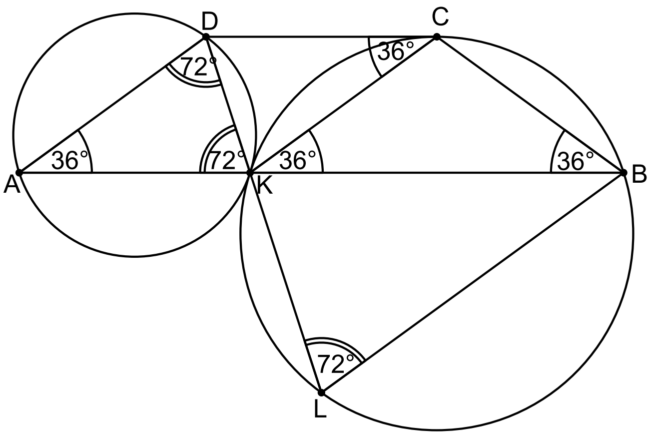
Analogicky $|S_1S_2|=|S_2S_3|$, takže trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný. Odtud pro poloměry r_1, r_2 a r_3 vepsaných kružnic plyne $r_1+r_2=r_2+r_3=$

$= r_3 + r_1$, neboli $r_1 = r_2 = r_3$. Kružnice jsou tedy shodné, takže je $AB \parallel S_1S_2$, $BC \parallel S_2S_3$ a $CA \parallel S_3S_1$ a trojúhelník ABC je rovnostranný.

Příklad 20. *V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk.* (MO53, BI2)

Řešení

V rovnoramenném trojúhelníku AKD známe úhel DAK proti základně KD. Můžeme dopočítat zbylé dva úhly při základně (obr. 70): $|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle AKD| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle DAK|) = 72°$. Čtyřúhelník $AKCD$ má protější strany AK a CD shodné a rovnoběžné, takže se jedná o rovnoběžník, tudíž přímky KC a AD jsou rovnoběžné.



Obr. 70

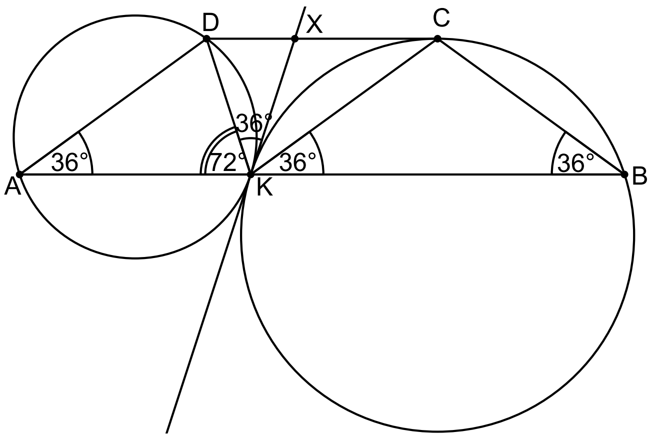
Úhly DAK a CKB jsou tedy souhlasné a úhly CKB a KCD střídavé, proto $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KCD| = 36°$. Úhel DKC doplňuje úhly AKD a CKB do přímého úhlu, jeho velikost je tedy $|\sphericalangle DKC| = 180° - 36° - 72° = 72°$.

Na polopřímce opačné k polopřímce KD zvolme bod L tak, že $|KL| = |AD|$. Potom $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle AKD| = 72°$ a $|\sphericalangle CKL| = |\sphericalangle LKB| +$

$+ \ |\sphericalangle CKB| = 108°$. Dopočítaním úhlů v lichoběžníku $ABCD$ dostáváme $|\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}\,(360° - 2\cdot 36°) = 144°$ a můžeme vyjádřit velikost úhlu BCK : $|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle KCD| = 144° - 36° = 108°$.

Nyní již víme, že $|KL| = |CB|$ a $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle KCB|$, což znamená, že $LBCK$ je rovnoramenný lichoběžník, a lze mu tedy opsat kružnici (shodnou s kružnicí opsanou trojúhelníku KBC). Dále můžeme z lichoběžníku $LBCK$ dopočítat $|\sphericalangle KLB| = \frac{1}{2}(36° - 2\cdot 108°) = 72° = |\sphericalangle KDA|$. Z této rovnosti plyne, že $AD \parallel BL$, takže trojúhelníky ADK a BLK jsou vzájemně stejnolehlé podle středu K. Stejnolehlé jsou potom i kružnice jim opsané. Protože obě procházejí středem K zmíněné stejnolehlosti, mají v tomto bodě vnější dotyk.

Jiné řešení

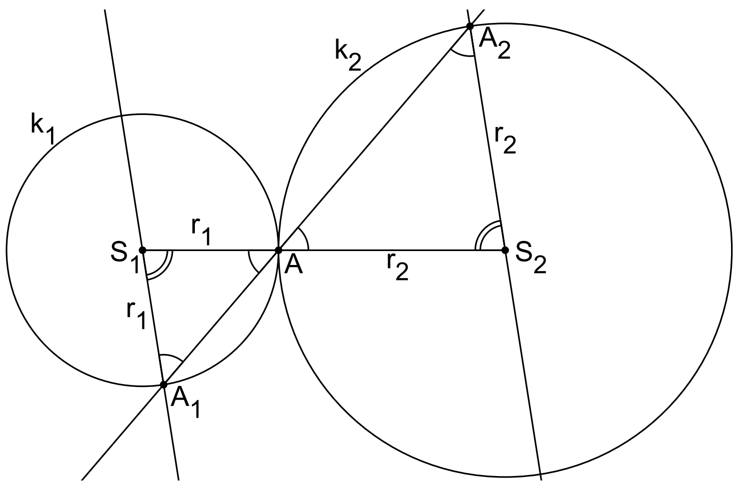


Obr. 71

Stejně jako v prvním řešení zjistíme, že $|\sphericalangle AKD| = 72°$. Čtyřúhelník $AKCD$ je rovnoběžník (obr. 71), takže $|CK| = |AD|$. Z rovnosti $|CK| = |BC|$ v trojúhelníku KBC usoudíme, že $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KBC| = 36°$. Proto na základně CD existuje bod X tak, že $|AKX| = 108°$ ($|\sphericalangle BKX| = 72°$). Pak $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle AKX| - |\sphericalangle AKD| = 108° - 72° = 36°$, a tedy $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle DAK|$, takže úhel DKX je úsekovým úhlem příslušným oblouku DAK v kružnici opsané trojúhelníku AKD, to znamená, že přímka KX je její tečnou. Podobně $|\sphericalangle CKX| = |\sphericalangle BKX| - |\sphericalangle BKC| = 72° - 36° = 36° =$ $= |\sphericalangle KBC|$, takže KX je i tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KBC. Kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají tedy společnou tečnu KX procházející společným bodem K. Obě kružnice se tudíž v tomto bodě dotýkají.

Příklad 21. *Dvě kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se dotýkají v bodě A. Bodem A vedeme přímku, která protíná kružnici k_1 v bodě A_1 a kružnici k_2 v bodě A_2. Dokažte, že přímky S_1A_1 a S_2A_2 jsou rovnoběžné.*

Řešení



Obr. 72

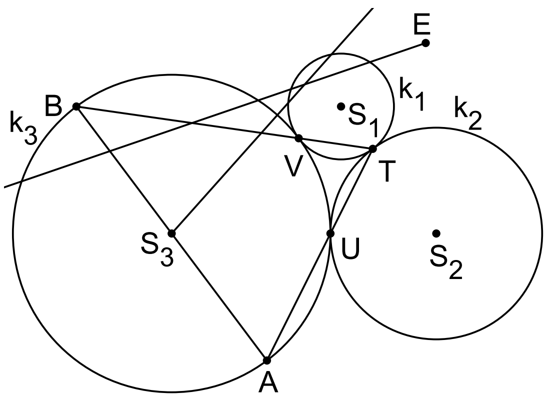
Označme úhel $\sphericalangle S_2AA_2 = \alpha$. Z obrázku 72 je vidět, že úhly $\sphericalangle S_2AA_2$ a $\sphericalangle S_1AA_1$ jsou vrcholové, proto mají stejnou velikost ($|\sphericalangle A_1AS_1| = \alpha$). Trojúhelníky AA_2S_2 a AA_1S_1 jsou rovnoramenné (dvě ramena jsou v obou případech rovna poloměrům zadaných kružnic) Z toho vyplývá, že úhly při vrcholech A_1 resp. A_2 jsou rovny α. Dokázali jsme, že oba trojúhelníky jsou podobné podle věty *sss*. Úhly při vrcholech S_1 resp. S_2 jsou stejné, a proto $A_1S_1 \parallel A_2S_2$.

Jiné řešení

V prvním řešení jsme se omezili pouze na znalosti ze základní školy. Vezmeme-li v úvahu, že řešitel zná stejnolehlost, můžeme postup zjednodušit. Uvažujme stejnolehlost se středem v bodě A a koeficientem $\frac{-r_1}{r_2}$, která zobrazuje kružnici k_1 na kružnici k_2. Potom S_1 se zobrazí na S_2 a A_1 na A_2. Z toho vyplývá, že $A_1S_1 \parallel A_2S_2$.

Příklad 22. *Tři kružnice k_1, k_2 a k_3 se navzájem dotýkají vně. Dokažte, že přímky spojující bod dotyku kružnic k_1 a k_2 se dvěma zbývajícími body dotyku protínají dále kružnici k_3 v bodech ležících na průměru této kružnice.*

Řešení



Obr. 73

Jsou zadány kružnice $k_1 = (S_1, r_1), k_2 = (S_2, r_2)$ a $k_3 = (S_3, r_3)$. Uvažujme stejnolehlosti:

$$\varkappa_1 = \varkappa_{U,\frac{-r_2}{r_3}} : k_3 \to k_2,\ A \to T,$$

$$\varkappa_2 = \varkappa_{T,\frac{-r_1}{r_2}} : k_2 \to k_1,\ T \to T,$$

$$\varkappa_3 = \varkappa_{V,\frac{-r_3}{r_1}} : k_1 \to k_3,\ T \to B.$$

Složením jednotlivých stejnolehlostí dostáváme zobrazení:

$$Z = \varkappa_3\varkappa_2\varkappa_1 = \varkappa_3(\varkappa_2\varkappa_1) = \varkappa_3\varkappa_{E,h},$$

kde $h = \frac{-r_2}{r_3} \cdot \frac{-r_1}{r_2}$. Tudíž stejnolehlost $\varkappa_{E,h}$ má střed v bodě E, koeficient stejnolehlosti $h = \frac{r_1}{r_2}$ a zobrazuje kružnici k_3 na k_1 a bod A na T.

Dále platí, že:

$$Z = \varkappa_3 \varkappa_{E,h} = \varkappa_{S_3,-1}.$$

Zobrazení Z složené ze stejnolehlostí $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ je stejnolehlost se středem v bodě S_3 a koeficientem -1, což znamená, že zobrazuje kružnici k_3 na k_3 a bod A na B. Odtud plyne, že bod B je obraz bodu A v symetrii podle S_3.

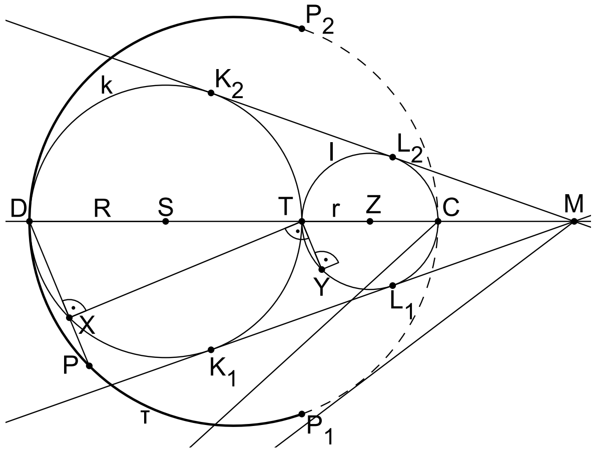
Příklad 23. *Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s.* (MO49, BI4)

Řešení

Označme S, Z středy obou kružnic k, l a R, r jejich poloměry (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r < R$). Označme dále $C(D)$ od T různý průsečík kružnice $l(k)$ s přímkou SZ a K_1, K_2, L_1, L_2 po řadě dotykové body obou společných vnějších tečen ke kružnicím k a l (obr. 74).

Bod M je středem stejnolehlosti h obou kružnic s koeficientem $\frac{R}{r}$. Přitom je například $h(L_1) = K_1, h(Z) = S, h(C) = T, h(T) = D, h(Y) = X$. Odtud plyne, že přímky CY, TX jsou rovnoběžné ($h(CY) = TX$). Protože úhel CYT je pravý podle Thaletovy věty, je také $|\sphericalangle YTX| = 90°$ (TY je příčka rovnoběžek CY, TX). Rovnoběžník $XTYP$ je tedy vždy obdélník.

Zároveň je zřejmé, že body C, Y, P leží v přímce a podobně i body D, X, P leží v přímce. Je tudíž $|\sphericalangle CPD| = 90°$ a bod P leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem CD. Leží na ní i vrcholy P_1, P_2 rovnoběžníků $K_1TL_1P_1$, $K_2TL_2P_2$, protože pro ně můžeme zopakovat předchozí úvahu (jako pro rovnoběžník $XTYP$).



Obr. 74

Nyní už není problém ukázat, že hledanou množinou bodů je větší z oblouků P_1P_2 kružnice vyjma body P_1, P_2 a D (neboť body Y tvoří větší z oblouků L_1L_2 kružnice τ vyjma body T, L_1, L_2).

5 Závěr

Případ, že by se česká princezna zabývala matematikou a svou prací se podílela na objevu pozoruhodného matematického vztahu, je ojedinělý. Přesto jej české publikace téměř nezmiňují, ačkoliv v zahraničí o něm nalezneme řadu informací. Jedním z cílů mé práce bylo tuto mezeru v české literatuře vyplnit.

Jedním z hlavních zdrojů mi byly do angličtiny přeložené originály dopisů mezi René Descartesem a Alžbětou Falckou z roku 1643. V příloze je můžete nalézt jak v anglickém, tak přímo i v originálním francouzském jazyce, jak je napsal Descartes. Jelikož se část Alžbětiných dopisů ztratila, bylo nutno některé myšlenky rekonstruovat jen na základě dochovaných dopisů. Ukazuje se, že již nelze přesně zjistit, jak k některým výsledkům Descartes s Alžbětou dospěli.

Kromě analýzy historických faktů měla práce i didaktické cíle. Podrobný popis různých odvození vztahu (16) v kapitole 3 neplní tedy jen historické cíle, ale má obohatit čtenáře v oblasti metod řešení úloh.

Očekávám, že mezi čtenáři této práce budou hlavně učitelé matematiky. Kapitola 4, která je sbírkou řešených příkladů o vzájemně se dotýkajících kružnicích má proto sloužit jako materiál k dalšímu rozvoji geometrického myšlení čtenáře, i jako podklad pro práci se žáky v zájmové matematice.

Předpokládám, že pro žáky je Descratesova věta naprosto neznámá. Motivačními úlohami mohou být například tvorby Apolloniovských fraktálů. Žáky s touto větou vcelku zábavnou formou nejenom seznámí, ale zároveň mohou u studentů probudit zájem o geometrii a rozvíjet jejich tvořivost.

Literatura

[1] AUSTIN, D. : *When Kissing Involves Trigonometry.* The American Mathematical Society [online]. [cit. 2011-10-04].
Dostupný z WWW: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-kissing

[2] BORKE, P. : An Introduction to the Apollonian Fractal. In *An Introduction to the Apollonian Fractal* [online]. Melbourne, June 2003 [cit. 2011-10-23]. Dostupné z WWW: http://paulbourke.net/papers/apollony/.

[3] BORKOVEC, M. ; DE PARIS, W. : *The Fractal Dimension of the Apollonian Sphere Packing.* Fractals. 1994, Vol. 2, No. 4, s. 521-526.

[4] BOS, J.M. Henk : *Appendix 3, Descartes, Elizabeth and Apollonius' Problem. In T. Verbeek (Ed.), The correspondence of Rene Descartes 1643* (pp. 202-213). In Publications of the Department of Philosophy Utrecht University, Volume XLV, 2003

[5] COXETER, H.S.M. : *Introduction to geometry.* second edition. University of Toronto : John Wiley and Sons, 1989. The Incircle and the Circumcircle, s. 10-16.

[6] COXETER, H.S.M. : *The Problem of Apollonius.* The American Mathematical Monthly. Jan., 1968, Vol. 75 , No. 1, s. 5-15.

[7] DESCARTES, R.; ELISABETH OF BOHEMIA; SHAPIRO, L. : *The correspondence between Princess Elisabeth of Bohemia and René Descartes.* Lisa Shapiro. Chicago : The University of Chicago Press, 2007. 246 s.

[8] DUŠEK, F. : *Matematické zájmové kroužky.* 2. upravené. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1977. 172 s.

[9] GAUKROGER, S. : *An Intellectual Biography* New York: Oxford University Press, 1995

[10] GODFREY, E. : *A sister of Prince Rupert, Elizabeth princess palatine and abbess of Herford.* London, New York : NEW YORK: JOHN LLondon, New York : J. Lane, 1909. 450 s. Dostupné z WWW: ¡http://www.archive.org/details/sisterofprinceru00godf¿.

[11] GRAHAM, R. L.; LAGARIAS, J. C.; MALLOWS, C. L.; WILKS, A. R.; YAN, C. H. : *Apollonian Circle Packings: Geometry and Group Theory I. The Apollonian Group.* Discrete and Computational Geometry 34 (4): 547-585.
Dostupné z www: http://arxiv.org/abs/math/0010298v5

[12] KIEZA, M. : *Czwarty okrag.* Delta. 2010, 6, s. 3-5.

[13] LAGARIAS, J. C. ; MALLOWS, C. L. ; WILKS, A. R. : *Beyond the Descartes Circle Theorem.* The American Mathematical Monthly. Apr., 2002, Vol. 109 , No. 4, s. 338-361.

[14] LEVITIN, K. : *Geometrická rapsódie.* Vyd. 1. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1991. 158 s. ISBN 8003006287.

[15] PIAT, C. : *René Descartes. In The Catholic Encyclopedia.* New York: Robert Appleton Company. Retrieved October 31, 2011 from New Advent: http://www.newadvent.org/cathen/04744b.htm, 1908

[16] STEINER, J. : *Einige geometrische betrachtungen.* Leipzig : Wilhelm Engelmann, 1901. 121 s.

[17] TROJAN, I. : *Kružby gotických oken.* Praha : Fakulta architektury ČVUT Praha, 1999. 18 s.

[18] WALDHAUSER, V. : *Gotická geometrie prostřednictvím počítače.* České Budějovice, 2011. 85 s. Diplomová práce. Jihočeská univerzita. Vedoucí práce PaedDr. Jiří Vaníček, Ph.D.

[19] WALKER, E. : *Historical Portraits 1600–1700*, Read Books, 2007

[20] ZELINKA, I. : *Aplikovaná informatika aneb úvod do fraktální geometrie, buněčných automatů*, 1. vydání, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta technologická ve Zlíně, 1999. ISBN: 80-214-1423-5

Příloha

Tři dopisy Reného Descartese a Alžběty Falcké z roku 1643 v originálním francouzském jazyce

Tři dopisy Reného Descartese a Alžběty Falcké z roku 1643 přeložené do anglického jazyka

58

Descartes, [Egmond aan den Hoef], to Princess Elizabeth, [The Hague] [17 November 1643]

Sources

1. MS copy. London, British Library, Add. 4278 (Birch), fos. 150r–151v (B1). Single sheet folded into two (327x247 mm). Text on fos. 150r–151r. On fo. 151v in the left bottom the note: 'touchant le Probleme des trois cercle donez [sic] trouver le quatrieme qui touche les trois. L⟨ett⟩re 1'.
2. MS copy. London, British Library, Add. 4278 (Birch), fos. 159r–160v (B2).
3. Cle III, 461–465.

Editions

AT IV, 38–42 (Cle); AM VI, 52–56.

The letter was not dated by Descartes on purpose (cf. Letter 57, p. 154, l. 7), but the date of the covering note to Pollot, Letter 57, is [17 November]. As for the text of te letter, next to Cle—the only source available to AT—two copies of the letter are kept in the British Library among the manuscripts collected by Thomas Birch (1705–1766). Add. 4278 contains corrrespondence and papers of John Pell (1610–1685), and the copies were thus made for or acquired by him. Each copy of the letter is paired to a copy of a second letter by Descartes to Elizabeth (Letter 61); each set of letters (fos. 150–151, 153–154 and fos. 157–160) is in a different and unidentified hand. In-between is the English translation of both letters by Pell (fos. 155–156; fo. 154 is blank except for two figures on fo. 154r depicting the same figures as in the letter below—possibly by Pell). Although copy B2 retains much of Descartes' orthography, B1 is preferred here as the principal source text because it contains fewer transcription errors.

Summary

Fearing that Elizabeth will not succeed in solving the problem of the three circles by using only one unknown in her calculations, Descartes explains his reasons for preferring several unknowns. In that way, he claims, one needs only the simplest geometrical theorems in translating a geometrical roblem into algebraic terms, after which all but one of the unknowns can be eliminated. Descartes illustrates this by an approach he thinks Elizabeth might have taken.

Madame, 150r

Ayant sceu de M^{r} de Pallot[1] que V. A. a pris la peine de chercher la question des trois cercles, et qu'elle a trouvé le moyen de la soudre en ne supposant qu'une quantité inconnüe, i'ay pensé que mon debvoir m'obligeoit de mettre icy la raison pourquoy j'en avois proposé plusieurs, et de quelle façon je les demesle.[2]

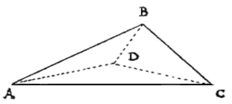
J'observe tousjours en cherchant une question de Geometrie que les lignes, dont je me sers pour la trouver, soient paralleles, ou s'entrecoupent à angles droicts le plus qu'il est possible; et je ne considere point d'autres Theoremes, si non que les costez des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que dans les triangles rectangles le quarré de la baze est egal aux deux quarrez

1 Cf. Letter 57.

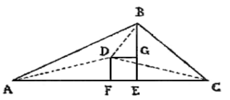
2 For an analysis of Descartes' approach to solve the problem of finding a circle that touches three given circles—also known as Apollonius' problem—see Appendix 3.

des costez. Et je ne crains point de supposer plusieurs quantitez inconnües pour reduire la question à tels termes, qu'elle ne depende que de ces deux theoremes; au contraire j'aime mieux en supposer plus que moins. Car par ce moyen je voy plus clairement tout ce que je fay, et en les demeslant je trouve mieux les plus courts chemins, et m'exempte des multiplications superflues. Au lieu que, si l'on tire d'autres lignes, et qu'on se serve de quelques autres theoremes, bien qu'il puisse arriver par hazard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutefois il arrive quasi tousjours le contraire. Et on ne voit point si bien ce qu'on fait, si ce n'est, qu'on ait la demonstration du Theoreme dont on se sert AT IV, 39
fort presente à l'esprit, et en ce cas on trouve quasi tousjours, qu'il depend de la consideration de quelques triangles rectangles ou qui sont semblables entre eux, et ainsy on retombe dans le chemin que je tiens.

Par exemple, si on veut chercher cette question des trois cercles par l'aide 150v
d'un Theoreme, qui enseigne à trouver l'aire d'un triangle par ses trois costez,[3] on n'a besoin de supposer qu'une quantité inconneüe.[4] Car si A, B, C sont les centres des 3 cercles donnez et D le centre du cherché, les 3 costez du Triangle ABC sont donnez, et les 3 lignes AD, BD, CD sont composées des 3 rayons des cercles donnez, joints au rayon du cercle cherché si bien que supposant x pour ce rayon, on a tous les costez des triangles ABD, ACD, BCD; et par consequent on peut avoir leurs aires, qui jointes ensemble sont egales à l'aire du triangle donné ABC, et on peut par cette equation venir à la connoissance du rayon x qui seul est requis pour la solution de la question. Mais ce chemin me semble conduire à tant de multiplications superflues, que je ne voudrois pas entreprendre de les demesler en trois mois. C'est pourquoy au lieu des deux lignes obliques AB et



BC, je mene les trois perpendiculaires BE, DG, DF, et AT IV, 40
posant trois quantitez inconnues, l'une pour DF, l'autre pour DG, et l'autre pour le rayon du cercle cherché, j'ay tous les costez des 3 triangles rectangles ADF, BDG, CDF, qui me donnent 3 equations, pource qu'en chacune d'eux le quarre de la base est esgal aux deux quarrez des costez.



Apres avoir ainsy fait autant d'equations que j'ay supposé de quantitez inconnües, je considere si par chasque equation j'en puis trouver une en termes assez simples, et si je ne le puis, je tasche d'en venir à bout en joignant deux ou plusieurs equations par l'addition ou soustraction; et enfin lors que cela ne suffit pas, j'examine s'il ne sera point mieux de changer les termes en quelque façon, car en faisant cet Examen avec addresse, on rencontre aisement les plus courts chemins, et on peut essayer une infinité en fort peu de temps.

16 quelques *om. Cle* 20 fort *om. B2* 20 à l'esprit] en l'esprit *Cle* 21 rectangles ... sont] qui sont ou rectangles, ou *Cle* 29 des *B2*,*Cle*] de *B1* 40 le rayon ... cherché] à sçavoir *x add. i.m. B2* 48 j'examine] seulement *add. Cle* 49 les *Cle*] le *B1* des *B2* 50 on peut] on en peut *Cle*

3 Descartes refers to the theorem of Heron assuming that Elizabeth knows it (cf. Appendix 3, pp. 207 and 210).

4 The choice of the example, which introduces a single unknown, shows that Descartes assumes he is following the approach Elizabeth might have taken.

Ainsy en cet exemple je suppose, que les 3 bases des triangles rectangles sont

$$AD = a + x,$$
$$BD = b + x\ ,$$
$$CD = c + x\ ,$$

et faisant $AE = d$, $BE = e$, $CE = f$, DF ou $GE = y$, DG ou $FE = z$, j'ay pour les costez des mesmes triangles: AT IV, 41

$$AF = d - z \text{ et } FD = y\ ,$$
$$BG = e - y \text{ et } DG = z\ ,$$
$$CF = f + z \text{ et } FD = y\ .$$

Puis faisant le quarré de chascune de ces bases esgal au quarré des deux costez, j'ay les trois equations suivantes: 151r

$$aa + 2ax + xx = dd - 2dz + zz + yy\ ,$$
$$bb + 2bx + xx = ee - 2ey + yy + zz\ ,$$
$$cc + 2cx + xx = ff + 2fz + zz + yy\ .$$

Et je voy que par l'une d'elles toute seule je ne puis trouver aucune des quantitez inconnues sans en tirer la racine quarrée, ce qui embarasseroit trop la question. C'est pourquoy je viens au second moyen, qui est de joindre deux equations ensemble, et i'apperçois incontinent que les termes xx, yy et zz estants semblables en toutes trois, si i'en oste une d'une autre laquelle je voudray, ils s'effaceront, et ainsy je n'auray plus de termes inconnus que x, y et z tous simples; je voy aussy que si j'oste la seconde de la premiere ou de la troisieme, j'auray tous ces 3 termes x, y et z, mais que si j'oste la premiere de la troisieme, je n'auray que x et z; je choisis donc ce dernier chemin et je trouve

$$cc + 2cx - aa - 2ax = ff + 2fz - dd + 2dz\ ,$$

ou bien

$$z = \frac{cc - aa + dd - ff + 2cx - 2ax}{2d + 2f}\ ,$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}f + \frac{cc - aa + 2cx - 2ax}{2d + 2f}\ .$$

Puis ostant la seconde equation de la premiere ou de la troisieme (car l'un revient à l'autre) et au lieu de z mettant les termes que je viens de trouver, j'ay par la premiere et la seconde AT IV, 42

$$aa + 2ax - bb - 2bx = dd - 2dz - ee + 2ey\ ,$$

57 des *B2*, *Cle*] les *B1* 69 estants] estant *Cle* 75 *aa*] 2*a Cle* 79 2*ax*] 2*adx B2*

ou bien

$$2ey = ee + aa + 2ax - bb - 2bx - dd + dd - df + \frac{ccd - aad + 2cdx - 2adx}{d + f},$$

ou bien

$$y = \tfrac{1}{2}e - \frac{bb}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{ccd + aaf + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef}.$$

Enfin retournant à l'une des 3 premieres equations et au lieu de z ou y mettant les quantitez qui leur sont esgales, et les quarrez de ces quantitez pour yy et zz, on trouve une equation où il n'y a qu' x et xx inconnus de façon que le probleme est plan et il n'est plus besoin de passer outre; car le reste ne sert point pour cultiver ou recréer l'esprit, mais seulement pour exercer la patience de quelque calculateur laborieux. Mesme j'ay peur de m'estre rendu icy ennuyeux à V. A. pource que je me suis arresté à escrire des choses qu'elle sçavoit sans doubte mieux que moy, et qui sont faciles, mais qui sont neantmoins des clefs de mon Algebre, je la supplie tres humblement de croire que c'est la devotion que i'ay à l'honorer; qui m'y a porté, et que je suis,

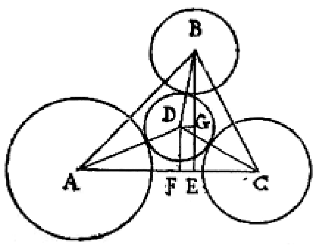
Madame,

de V. A.,

Le tres-humble et tres- obeissant serviteur,

Des Cartes

a — p. 156, l. 43. Clerselier inserted in this paragraph a third figure, displaying both the triangles and the circles, which is not found in the manuscript copies. Pell provides a similar figure in his translation of the letter, with the note 'my scheme' (fo. 155v).



85 $+ dd - df + \frac{ccd-aad+2cdx-2adx}{d+f}$ *B1*] $+ dd - \frac{df+ccd-aad+2cdx-2adx}{d+f}$ *B2* $+ \frac{dd-df+ccd-aad+2cdx-2adx}{d+f}$ *Cle* 88 *z* ou *y*] *y* ou de *z* *Cle* 90 inconnus *Cle*] incon *B1 (ms damaged)* inconnü *B2* 95 des clefs] les clefs *Cle* 100 obeissant *B2*, *Cle*] obeissa *B1 (ms damaged)*

59

Princess Elizabeth, [The Hague], to Descartes, [Egmond aan den Hoef]

21 November [1643]

Source
MS copy. Arnhem, Stichting Vrienden der Geldersche Kasteelen, Library Rosendael Castle, *Recueil de quelques Lettres écrites à Monsieur Descartes*, no. [17]. pp. 92–94.

Editions
First published in: A. Foucher de Careil, *Descartes, la Princesse Élisabeth, et la Reine Christine d'après des lettres inédites* (Paris/Amsterdam: Germer-Baillière/Muller, 1879), pp. 54–56.
Other editions: AT IV, 44–45; AM VI, 68–69.

Summary
In reply to Descartes' letter from [17 November] (Letter 58). Elizabeth thanks Descartes for explaining his method to solve the problem of the three circles, which method she now prefers to the one she was taught. At the demand of Pollot she sends her own solution to Descartes.

Monsieur Descartes,

Si i'avois autant d'habileté à suivre vos avis que d'envie, vous trouveriez déia
les effets de vostre charité au progres que i'aurois fait dans le raisonnement et
dans l'Algebre, desquels à cette heure ie ne vous puis montrer que les fautes.
Mais ie suis si accoutumée de vous en | faire voir qu'il m'arrive comme aux vieux 93
pescheurs d'en perdre tout à fait la honte. Pourquoy i'avois fait dessein de vous
envoyer la solution de la question que vous m'avez donnée par la methode qu'on
m'a enseignée, autant pour vous obliger de m'en dire les manquements, que par
ce que ie ne suis pas si bien versée en la vostre. Car ie remarquois bien qu'il y en
avoit à ma solution, n'y voyant assez clair pour en conclure un théoreme. Mais
ie n'en aurois iamais trouvé la raison sans vostre derniere lettre[1] qui m'y donne
toute la satisfaction que ie demandois, et m'apprend plus que ie n'aurois fait en AT IV, 45
six mois de mon maistre.[2] Ie vous en suis tres redevable et n'au- | rois iamais par- 94
donné à M^{r} de Palloti, s'il en eut usé selon vostre ordre.[3] Toutefois il ne me l'a
voulu bailler qu'à condition que ie vous envoyerois ce que i'ay fait. Ne trouvez
donc point mauvais que ie vous donne une incommodité superfluë, puisqu'il y a

8 enseignée ⟨+au⟩⟨toutefois[?]⟩⟩tant⟩] enseignée autrefois, tant *conj. AT* 12 aurois *corr. FdC*] auroit

1 Letter 58, sent through Pollot (cf. Letter 57).
2 Elizabeth was taught mathematics by Johan Stampioen (see p. 133, n. 4) and her approach to the problem—attempting to derive a theorem—shows that she followed his method. Elizabeth's solution itself, which she sent along with her letter, is lost; however, the letter and Descartes answer (Letter 61) allow us to reconstruct the main characteristics of her approach, see Appendix 3.
3 Cf. Letter 57, p. 154, ll. 5–7.

peu de choses que ie ne ferois pour obtenir ces effets de vostre bonne volonté qui est infiniment estimée de,

Monsieur Descartes,

Vostre tres affectionnée
amie à vous servir,
Elisabeth

Ce 21 de 9bre

61

Descartes, Egmond aan den Hoef, to Princess Elizabeth, [The Hague] 29 November 1643

Sources

1. MS copy. London, British Library, Add. 4278 (Birch), fos. 153r–154v (B1). Single sheet folded into two (325x252 mm). Text on fos. 153r–154r. On fo. 154v the note ‘L⟨ett⟩re 2’.
2. MS copy. London, British Library, Add. 4278 (Birch), fos. 157r–158v (B2).
3. Cle III, 465–468.

Editions

AT IV, 45–50 (Cle); AM VI, 70–73.

The letter is without date in Cle and AT, but two copies of the letter are kept in the British Library, and the second copy (B2) supplies the date 29 November 1643. The English translation of the letter by Pell gives ‘29 Maij 1643’ which is evidently wrong (Add. 4278, fo. 156v). For a description of the source and the choice to take B1 as the principal source, see the introduction to Letter 58.

Summary

In reply to Letter 59 (21 November). Descartes is much impressed by Elizabeth’s investigation of the problem of the three circles. He is pleased to see that Elizabeth’s ‘calcul’ was entirely similar to his own. He praises her patience in calculating, and her technique of representing complicated expressions by single letters. With respect to her choice of indeterminates her approach is even superior to his own. Descartes accepts Elizabeth’s aim of deriving a theorem as a valid alternative to his own aim of determining the constructability of a problem. He illustrates his ideas by elaborating a special (and much simpler) case of the problem of three circles. Because Elizabeth had been searching for a theorem, he expresses the final equation in words.

Madame, 153r

La solution qu’il a pleu à V. A. me faire l’honneur de m’envoyer[1] est si juste, qu’il ne s’y peut rien desirer davantage, et je n’ay pas seulement esté surpris AT IV, 46 d’estonnement en la voyant, mais je ne puis m’abstenir d’adjouster que j’ay esté aussy ravy de joye, et ay pris de la vanité de voir, que le calcul dont se sert V. A. est entierement semblable à celuy que j’ay proposé dans ma Geometrie. L’experience m’avoit fait cognoistre, que la pluspart des esprits, qui ont de la facilité à entendre les raisonnements de la Metaphysique, ne peuvent concevoir ceux de l’Algebre, et reciproquement que ceux, qui comprennent aisement ceux cy, sont d’ordinaire incapables des autres; et je ne voy que celuy de V. A. auquel toutes choses sont esgalement faciles. Il est vray, que j’en avois desià tant eu des preuves, que je n’en pouvois aucunement doubter, mais je craignois seulement

4–5 j’ay esté aussy] i’ay aussy esté *B2* 6 dans] en *B2* 8 ne peuvent] ne peuvent pas *Cle* 11 j’en avois desià tant eu] i’en avois desia tant *Cle* 11–12 des preuves] de preuves *B2*,*Cle*

---

1 Cf. Letter 59. Elizabeth’s actual solution is lost; for its main characteristics as well as a comprehensive discussion of the present letter, see Appendix 3.

que la patience qui est necessaire pour surmonter au commencement les difficultez du calcul ne luy manquast, car c'est une qualité qui est extremement rare aux excellents esprits et aux personnes de grande condition.

Maintenant que cette difficulté est surmontée, elle aura beaucoup plus de plaisir au reste, et en substituant une seule lettre au lieu de plusieurs, ainsy qu'elle a fait icy fort souvent, le calcul ne luy sera pas ennuyeux. C'est une chose qu'on peut quasi tousjours faire, lors qu'on veut seulement voir de quelle nature est une question, c'est à dire, si elle se peut soudre avec la regle et le compas, ou s'il y faut employer quelques autres lignes courbes du premier ou second genre etc. et quel est le chemin pour la trouver, qui est ce de quoy je me contente ordinairement touchant les questions particulieres. Car il me semble, que le surplus AT IV, 47 qui consiste à chercher la construction et la demonstration par les propositions d'Euclide en cachant le proceder de l'Algebre n'est qu'un amusement pour les petits Geometres, qui ne requiert pas beaucoup d'Esprit ny de science. Mais lors qu'on a quelque question, | qu'on veut achever pour en former un Theo- 153v reme, qui serve de regle generale pour en soudre plusieurs autres semblables, il est besoin de retenir jusques à la fin toutes les mesmes lettres qu'on a posées au commencement, ou bien si on en change quelques unes pour faciliter le calcul, il les faut remettre par apres estant à la fin, à cause qu'ordinairement plusieurs s'effacent l'une contre l'autre, ce qui ne se peut voir lors qu'on les a changées. Il est bon aussy alors d'observer, que les quantitez qu'on denomme par les lettres ayent semblable rapport les unes aux autres le plus qu'il est possible, cela rend le Theoreme plus beau et plus court, pource que ce qui s'enonce de l'une de ces quantitez, s'enonce en mesme façon des autres, et empesche, qu'on ne puisse faillir au calcul, pource que les lettres, qui signifient des quantitez, qui ont mesme rapport, s'y doivent trouver distribuées en mesme façon, et quand cela manque, on reconnoist son erreur.

Ainsy pour trouver un Theoreme qui enseigne, quel est le rayon du quatriesme cercle, qui touche les trois donnez par position,[a] il ne faudroit pas en cét exemple poser les trois lettres *a*, *b*, *c*, pour les lignes AD, DC, et DB, mais pour les lignes AB, AC et BC, pource que ces dernieres ont mesme rapport l'une que l'autre aux trois AH, BH et CH, ce que n'ont pas les premieres.Et en suivant le AT IV, 48 calcul avec ces six lettres, sans les changer ny en ajouster d'autres par le mesme chemin qu'a pris V. A. (car il est meilleur pour cela, que celuy que j'avois proposé), on doit venir à une equation fort reguliere, et qui fournira un Theoreme assez court; car les trois lettres *a*, *b*, *c*, y seront disposées en mesme façon, et aussy les trois *d*, *e*, *f*.

Mais pour ce que le calcul en est ennuyeux, si V. A. a desir d'en faire l'essay, 154r | il luy sera plus aisé en supposant que les trois cercles donnez s'entretouchent, et n'employant en tout le calcul que les quatre lettres *d*, *e*, *f*, *x*, qui estant les rayons des quatre cercles ont semblable rapport l'une à l'autre. Et en premier lieu elle trouvera

16 *par. E* 27 former] faire *Cle* 33–34 les lettres] des letres *B2* 40 *par. E* 40–41 quatriesme *om. Cle* 42 et *om. Cle* 43 AC *corr. AT*] AD 45 mesme *om. Cle* 46–47 *no parentheses B1* 48 seront] sont *Cle* 50 *par. E*

$$AK = \frac{dd + df + dx - fx}{d + f}\,, \text{ et } AD = \frac{dd + df + de - fe}{d + f}\,,$$

où elle peut desià remarquer, que x est en la ligne AK comme e en la ligne AD, pour ce qu'elle se trouve par le triangle AHC, comme l'autre par le triangle ABC. AT IV, 49 Puis enfin elle aura cette equation

$$\begin{array}{lcl} ddeeff & & 2deffxx + 2deeffx \\ + ddeexx & & + 2deefxx + 2ddeffx \\ + ddffxx & = & + 2ddefxx + 2ddeefx \\ + eeffxx\,; & & \end{array}$$

de laquelle on tire pour Theoreme, que les quatre sommes, qui se produisent en multipliant ensemble les quarrez de trois de ces rayons, font le double de six, qui se produisent en multipliant deux de ces rayons l'un par l'autre, et par les quarrez des deux autres. Ce qui suffit pour servir de regle à trouver le rayon du plus grand cercle, qui puisse estre descrit entre les trois donnez qui s'entre touchent. Car si les rayons de ces trois donnez sont par exemple $\frac{d}{2}$, $\frac{e}{3}$, $\frac{f}{4}$, j'auray 576 pour *ddeeff*, et 36*xx* pour *ddeexx*, et ainsy des autres; d'où je trouveray

$$x = -\tfrac{156}{47} + \sqrt{\tfrac{31104}{2209}}\,,$$

si je ne me suis trompé au calcul que j'en viens de faire.

Et V. A. peut voir icy deux procedures fort differentes en une mesme question selon les differents desseins qu'on se propose. Car voulant sçavoir de quelle nature est la question, et par quel biais on la peut soudre, je prends pour données les lignes perpendiculaires ou paralleles et suppose plusieurs quantitez inconnües, afin de ne faire aucune multiplication superflue, et voir mieux les plus courts chemins, au lieu que la voulant achever je prends pour donnez les costez AT IV, 50 du triangle, et ne suppose qu'une lettre inconnüe. Mais il y a quantité de questions, où le mesme chemin conduit à l'un et à l'autre, et je ne doubte point, que V. A. ne voye bientost, jusques où peut atteindre l'esprit humain en cette science. Je m'estimerois extremement heureux si j'y pouvois contribuer quelque chose, comme estant porté d'un zele tres particulier à estre,

Madame,

de V. A.,

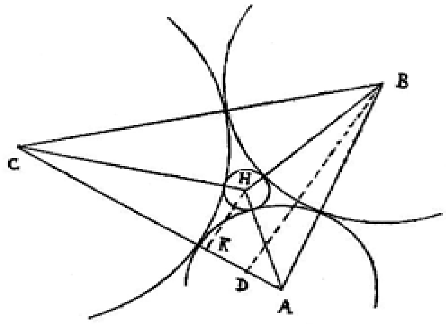
Le tres humble et tres
obeissant serviteur,

Des Cartes

du Hoef, le 29 Nov. 1643

56 en la ligne AK] dans la ligne AK *Cle* 56 en la ligne AD] dans la ligne AD *Cle* 57 ABC] ADC *B2* 59 *ddeeff* [...] 2*ddeefx*] *the signs + before* ddeeff *and* 2deffxx *in B1*,*B2*,*Cle are omitted E* 63 sommes] nommes *B2* 64 de six] des six *B2* 71 au calcul] en calcul *B2* 72 *par. E* 72 en] dans *Cle* 75 autres *add. Cle* 80 en] dans *B2*,*Cle* 82 zele *B2*,*Cle*] zeele *B1* 86–88 obeissant ... 1643] *cut off in B1; partially damaged in B2* (ser⟨viteur⟩ D⟨es⟩ C⟨artes⟩) *; place and date in B2 only*

a — p. 164, l. 41. Clerselier printed here the figure below which is not found in the manuscript copies, and it is therefore not been included in the main text (Cle III, 467):



DESCARTES TO ELISABETH

Egmond, 17 November 1643[17]

Madame,

Having learned from M. de Pollot that your Highness has taken the trouble to consider the problem of three circles,[18] and that she has found the way to solve it by supposing but one unknown quantity, I thought that my duty obliged me to set out here the reason why I had proposed using several unknown quantities and in what way I solve for them. 38

In considering a problem in geometry, I always make it so that the lines which I use to find the solution to the problem are parallel or intersect at right angles as much as is possible; and I do not consider any other theorems but that the sides of similar triangles have a similar proportion between them, and that in right triangles, the square of the base is equal to the sum of the squares of the sides. I do not fear supposing more unknown quantities to reduce the problem to such terms so that it depends only on these two theorems. On the contrary, I prefer to suppose more of them than fewer. For, by this means, I see more clearly all that I do, and in solving for them I do better at finding the shortest paths and avoid superfluous multiplications. On the other hand, if one draws other lines and makes use of other theorems, even though it could

17. Verbeek et al., *Correspondence,* were able to date this letter more precisely from the covering note to Pollot. They also note that the British Library contains two manuscript copies of this and the subsequent letter in the papers collected by Thomas Birch (Add. 4278 [Birch], fols. 150r–151v and Add. 4278 [Birch], fols. 159r–160v. These contain the papers and correspondence of John Pell, and so indicate that Pell had copies made. In between the two copies is Pell's translation.

18. The problem here is to find the radius of a fourth circle whose circumference touches those of three given ones, or what is usually called Apollonius's problem. Elisabeth seems to have learned her geometry from a textbook (*Algebra ofte Nieuwe Stel-Regel*) written by Johan Stampioen, which Descartes had criticized. See Stephen Gaukroger, *Descartes: An Intellectual Biography* (New York: Oxford University Press, 1995), 334–35, 387. After setting this problem, Descartes was concerned that he had set the bar too high. See his letter to Pollot, 21 October 1643, AT 4:26.

still happen that by chance the path one finds is shorter than mine, all the same, it almost always turns out the other way. One does not see what one
39 does as well, except if one has the demonstration of the theorem which one is using fully present to the mind. In this case one finds, almost always, that it depends on the consideration of some triangles that are either right triangles or similar to one another and thus one falls back on the path I take.[19]

For example, in considering this problem of the three circles, we need only suppose one unknown quantity, with the help of a theorem that shows us how to find the area of a triangle by its three sides. For if A, B, and C are the centers of three given circles, and D is the center of the one we are looking for, the three sides of triangle ABC are given, and the three lines AD, BD, and CD are composed of three radii of the given circles, joined to a radius of the circle we are looking for, so that, supposing x for this radius, we have all the sides of the triangles ABD, ACD, and BCD. [See fig. 1.][20] By consequence we can have their areas which, added together, are equal to the area of the triangle given by ABC. And we can by this equation come to know the radius x, which alone is required for the solution of this question. But this route seems to me to lead to so many superfluous multiplications that I would not want to undertake to solve them in three months. This is why, instead of the two oblique lines, AB and BC, I take the three perpen-
40 diculars BE, DG, and DF, and setting three unknown quantities, one for DF, one for DG, and the other for the radius of the circle I am looking for, I have all the sides of the three right triangles ADF, BDG, and CDF, which gives me three equations, for in each of these the square of the base is equal to the sum of the squares of the sides. [See figs. 2 and 3.]

After having made as many equations as I supposed unknown quantities, I consider whether, from each equation, I can find one in simple enough terms. If I cannot do so, I try to arrive at one by joining two or more equations by addition or subtraction. Finally, only if this does not suffice, I examine whether it would be any better to change the terms in some way. For, in making this examination skillfully, one easily comes upon the shortest paths and one can try an infinity of things in very little time.

Thus, in this example, I suppose that the three bases of the right triangles are:

$$\mathrm{AD} = a + x,$$
$$\mathrm{BD} = b + x,$$
$$\mathrm{CD} = c + x.$$

19. Descartes is here reiterating the method he elaborates and demonstrates in the *Géometrie,* published as an essay accompanying his *Discourse on the Method,* in 1637.

20. These figures were inserted by Clerselier.

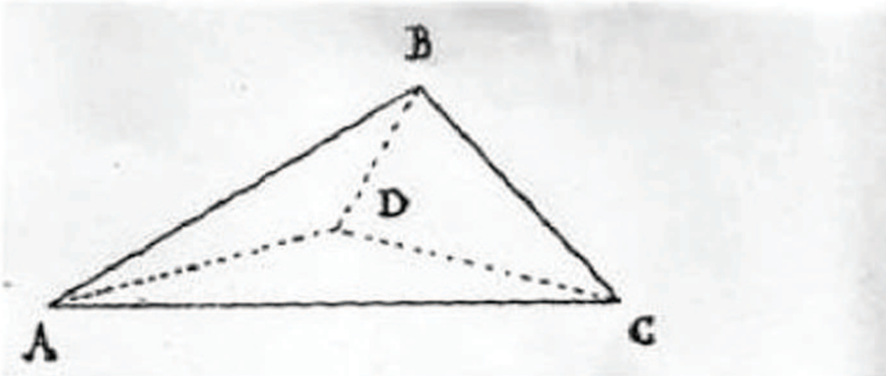


Figure 1

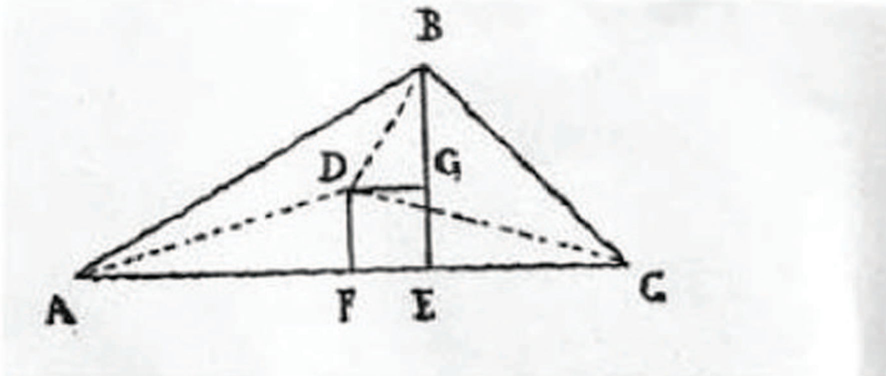


Figure 2

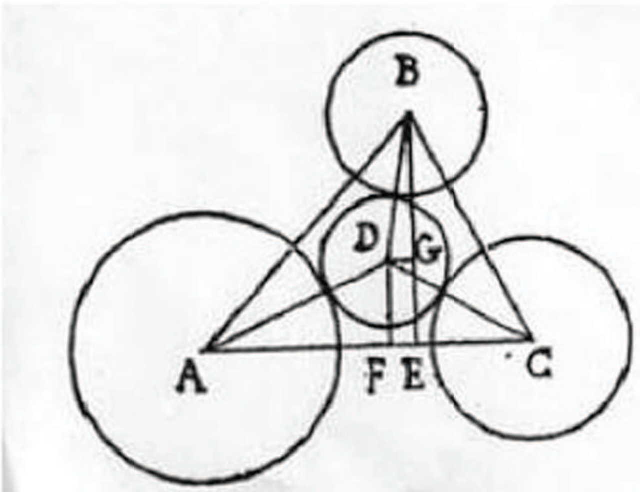


Figure 3

And making AE = d, BE = e, and CE = f,

$$DF \text{ or } GE = y, \; DG \text{ or } FE = z,$$

I have for the sides of the same triangles: 44

$$AF = d - z \;\&\; FD = y,$$
$$BG = e - y \;\&\; DG = z,$$
$$CF = f + z \;\&\; FD = y.$$

Then, making the square of each of the bases equal to the sum of the squares of the two sides, I have the three following equations:

$$aa + 2ax + xx = dd - 2dz + zz + yy,$$
$$bb + 2bx + xx = ee - 2ey + yy + zz,$$
$$cc + 2cx + xx = ff + 2fz + zz + yy,$$

and I see that by one of these alone I cannot find any of the unknown quantities, without drawing the square root, which would complicate the question too much. This is why I come to the second way, which is to join two equations together, and I cannot but perceive that the terms xx, yy, and zz being similarly in all three equations, if I take away the one from the other, as I would like, they cancel one another, and so I would have no unknown terms other than x, y, and z on their own. I see also that if I take away the second from the first or from the third, I would have all these three terms, x, y, and z; but that, if I take away the first from the third, I would have only x and z. Thus, I choose this last path and I find:

$$cc + 2cx - aa - 2ax = ff + 2fz - dd + 2dz$$

or better

$$z = \frac{cc - aa + dd - ff + 2cx - 2ax}{2d + 2f}$$

or better

$$1/2\,d - 1/2\,f + \frac{cc - aa + 2cx - 2ax}{2d + 2f}$$

42 Then, taking the second equation from the first or from the third (since the one reduces to the other) and replacing z with the terms I just found, I have from the first and the second:

$$aa + 2ax - bb - 2bx = dd - 2dz - ee + 2ey$$

or better

$$2ey = ee + aa + 2ax - bb - 2bx - dd + dd - df + \frac{ccd - aad + 2cdx - 2adx}{d + f}$$

or better

$$y = \frac{1}{2}e - \frac{bb}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{ccd + aaf + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef}$$

$$AF = d - z \;\&\; FD = y,$$
$$BG = e - y \;\&\; DG = z,$$
$$CF = f + z \;\&\; FD = y.$$

Finally, returning to one of the first three equations, and in place of y or of z putting the quantities that are their equals, and the squares of these quantities for *yy* and *zz*, we find an equation where only *x* and *xx* are unknown. In this way, then, the problem is planar or of the second degree, and it is no longer necessary to go on. For the rest does not serve to cultivate or entertain the mind, but only to exercise one's patience for laborious calculations. Even so I fear that I have made myself boring to your Highness, because I stopped to write those things that she no doubt knew better than I and that are easy, but which are nevertheless the keys to my algebra. I ask her quite humbly to believe that it is the devotion with which I honor her which has carried me away, and that I am, Madame,

Your Highness's very humble and very obedient servant,

Descartes.

ELISABETH TO DESCARTES AT 4:44

[The Hague] 21 November 1643

M. Descartes,

If I were as adept in following your advice as I have desire to be, you would already find the effects of your kindness in the progress I would have made in reasoning and in algebra, whereas at this time I can show you only faults. But I am so accustomed to showing them to you that like old sinners I have lost all shame. For this reason I had planned to send you the solution to the question you had given me, arrived at by the method they had taught me earlier, as much to oblige you to tell me what is missing as because I am not as well versed in your own method.[21] For I well noticed that there were things missing in my solution, as I did not see it clearly enough to arrive at a theorem. But I would never have found the reason without your last letter, which gives me all the satisfaction that I demanded, and teaches me more 45
than I would have learned in six months with my master. I am very much in your debt for it, and would never have pardoned M. de Palotti[22] if he had used your solution in accordance with your order. All the same, he did not want to give it to me, except under the condition that I send you what I have done. Thus do not mind that I give you an unneeded inconvenience, since there are few things that I would not do to obtain the effects of your good will, which is infinitely esteemed by

Your very affectionate friend at your service,

Elisabeth.

21. See above, note 18.

22. See Descartes to Pollot, November 1643, AT 4:43–44.

At 4:45

DESCARTES TO ELISABETH

Egmond du Hoef, 29 November 1643[23]

Madame,

The solution which it pleased your Highness to do me the honor of
46 sending[24] is so just that it is not possible to desire anything more, and not only was I surprised from astonishment at seeing it, but I cannot stop myself from adding that I was also filled with joy, and I was taken with a bit of vanity in seeing that the calculation which your Highness used is entirely similar to that which I proposed in my *Geometry*. Experience has taught me that most minds who have the facility to understand the reasoning of metaphysics are not able to understand that of algebra, and reciprocally that those who easily understand the latter are ordinarily incapable of other sorts of reasoning.[25] I see no one but your Highness for whom all things are equally easy. It is true that I have had proof enough of this already, so that I could not have any doubts about it, but I feared only that the patience that is necessary to overcome the difficulties at the beginning of the calculation was lacking in her. For this is a quality extremely rare in excellent minds and in persons of great station.

Now that this difficulty has been overcome, she will have much more pleasure in the rest, and in substituting but one letter in place of many, just as she has done here quite often, the calculation will not be tedious to her. One can almost always do this when one only wants to see the nature of a problem, that is, to see if it can be solved with a ruler and compass, or if it is necessary to employ some other curved lines of the first or the second kind, etc., and which is the path for finding the solution. I ordinarily con-
47 tent myself with doing just this with particular problems. For it seems to me

23. Verbeek, et al., *Correspondence*, 60, were able to date this letter more precisely from copies in the British Library.

24. We do not have a record of the letter in which Elisabeth relays her solution.

25. Descartes reiterates this view publicly in the dedicatory letter to his *Principles of Philosophy*: "I have even greater evidence of your powers—and this is special to myself—in the fact that you are the only person I have so far found who has completely understood all my previously published works. Many other people, even those of the utmost acumen and learning, find them very obscure; and it generally happens with almost everyone else that if they are accomplished in Metaphysics they hate Geometry, while if they have mastered Geometry they do not grasp what I have written on First Philosophy. Your intellect is, to my knowledge, unique in finding everything equally clear; and this is why my use of the term 'incomparable' is quite deserved" (AT 8A:4, CSM 1:192).

that what remains—seeking the construction and the demonstration by the propositions of Euclid, and couching the process in algebra—is nothing but an amusement for little geometers, who do not require much intelligence or much knowledge. But when one has some problem which one wants to solve, in order to arrive at a theorem which can serve as a general rule for solving other similar ones, it is necessary to retain all the same letters that one set out at the beginning just up until the end. Or better, if one changes some of them in order to facilitate the calculation, it is necessary to replace them at the end, because, ordinarily, most cancel one another out, which one cannot see when one has changed them.

It is also good to make sure that the quantities one denotes by letters have similar relations to each other, as much as is possible. This renders the theorem more elegant and shorter; for what is evoked by one of these quantities, is evoked in the same manner by the others, and this helps to prevent mistakes in calculations. For those letters signifying quantities that have the same relations, must distribute themselves in the same manner, and when this is missing, one notices one's error.

Thus, in order to find a theorem which shows what is the radius of the circle that touches three given by position, it is not necessary, in this example, to suppose the three letters a, b, c for the lines AD, DC, DB but
for the lines AB, AC, and BC, for these last have the same relation to one 48
another that the three AH, BH, and CH do, and the first set of three do not. In following the calculation with these six letters, without changing them or adding any others to them, along the path which your Highness has taken (for it is better for this than that which I had proposed), one should come to quite a regular equation and one which will furnish a short enough theorem. For the three letters a, b, c are there disposed in the same manner, as the three d, e, f. [See fig. 4.]

Because the calculation of this is tedious, if your Highness has the desire to try it, it will be easier for her to suppose that the three given circles touch one another, and so to employ through the whole calculation only the letters d, e, f, x which, being the radii of the four circles, have a similar relation to one another. In the first place, she will find

$$\mathrm{AK} = \frac{dd + df + dx - fx}{d + f}, \ \& \ \mathrm{AD} = \frac{dd + df + de - fe}{d + f}$$

where she can already notice that x is in the line AK as e is in the line AD,
since it is found by the triangle AHC, as the other is by the triangle ABC. 49
Then finally, she will have this equation:

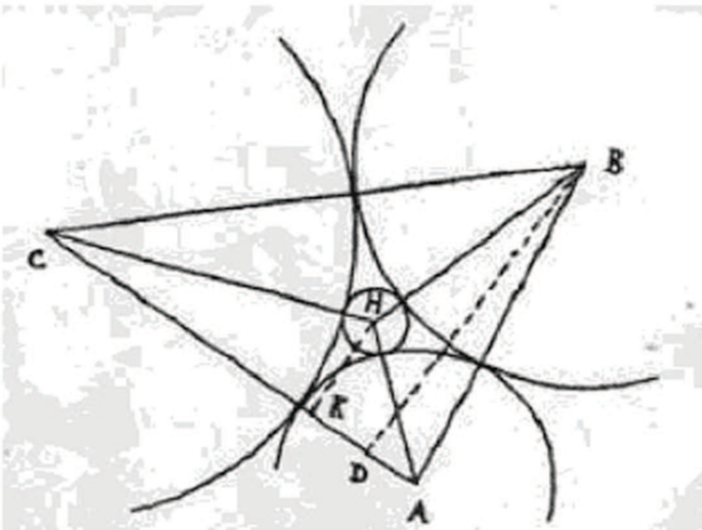


Figure 4

$$ddeeff + ddeexx + ddffxx + eeffxx = 2deffxx + 2deeffx + 2deefxx + 2ddeffx + 2ddefxx + 2ddeefx.$$

From this one draws, as a theorem, that the four sums which are produced by multiplying together the squares of three of these radii are equal to double the six sums which are produced by multiplying two of the radii by one another, and by the squares of the two others. All of which suffices to serve as a rule for finding the radius of the largest circle that can be drawn between three given circles that touch one another. For if the radii of these three given circles are, for example, $d/2$, $e/3$, $f/4$, I will have 576 for $ddeeff$, 36xx for $ddeexx$, and so on for the others. From which I will have

$$x = \frac{-156}{47} + \sqrt{\frac{31104}{2209}}$$

if I am not mistaken in the calculation I just did.

Your Highness can see here two very different procedures for solving one problem, according to the different aims one has. For wanting to know the nature of the problem, and by what device one can solve it, I take as given perpendicular or parallel lines, and suppose more unknown quantities, with the aim of making no superfluous multiplications and seeing more clearly the shortest paths. On the other hand, in wanting to find the solution, I take as given the sides of the triangle and suppose but one unknown letter. But there are a number of problems where the same path leads to the satisfaction of both aims, and I do not doubt that your Highness will soon see just how far the human mind can reach with this science. I would count myself

happy if I could contribute something to it, since I have a great zeal to be, Madame,

Your Highness's very humble and very obedient servant,

Descartes.