Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU SBÍRKA ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Diplomant: Zdeněk ŽELEZNÝ
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice, duben 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Diferenciální rovnice 1. řádu – Sbírka řešených příkladů jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 25.4.2012 …………………………

Poděkování

Rád bych poděkoval RNDr. Libuši Samkové, Ph.D., vedoucí mé diplomové práce, za vedení, trpělivost, zájem, připomínky a čas, který mi věnovala, a Mgr. Radku Vejmelkovi za věcné připomínky k této práci. Mé poděkování patří také mé rodině a všem přátelům, kteří mne během studia podporovali.

Anotace

Diplomová práce se zabývá řešením diferenciálních rovnic 1. řádu. Práce má sloužit jako učební text (sbírka řešených příkladů) pro studenty učitelství matematiky. Každá kapitola obsahuje shrnutí základních pojmů, řešené modelové úlohy daného tématu řazené dle obtížnosti, a v závěru úlohy určené k samostatnému procvičování studentů. Diplomová práce má studentům předat základní poznatky o způsobech řešení diferenciálních rovnic 1. řádu, včetně praktických dovedností při jejich řešení.

Abstract

This thesis deals with the solution of differential equations of the first degree. The work is intended to serve as a textbook (a collection of exercises) for students of teaching mathematics at lower secondary schools. Each chapter contains a summary of basic concepts, solved task models of the related topic, sorted by difficulty, and finally tasks assigned for independent practicing. This thesis aims to present basic knowledge about ways of solving differential equations of the first degree, including practical skills for their solution.

Obsah

Úvod

Hlavním úkolem této práce je předložit ucelený soubor řešených úloh, které se zabývají problematikou řešení diferenciálních rovnic 1. řádu, a to v rozsahu, který by si měli osvojit zejména studenti pedagogických fakult. Text vychází ze znalostí, které by měli studenti získat v předchozích kurzech matematické analýzy. Celý obsah textu navazuje především na poznatky o vlastnostech funkcí jedné proměnné a o diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné.

Při výběru tématu diplomové práce jsem vycházel z osobního zájmu o matematickou analýzu jako jednu z oblastí matematiky a ze snahy vytvořit pro studenty pedagogických fakult ucelený přehled řešení diferenciálních rovnic 1. řádu. Hlavní důraz je v celé práci kladen na podrobné postupy řešení typových úloh a na grafické znázornění různých řešení rovnic. Ve své práci se snažím zpracovat danou problematiku s ohledem na potřeby studentů učitelství matematiky.

První kapitola se zabývá vysvětlením některých základních pojmů a názvoslovím užívaným v této oblasti matematické analýzy. Druhá kapitola se zabývá řešením diferenciálních rovnic základního typu. Ve třetí kapitole budeme řešit diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Jak vyřešit homogenní diferenciální rovnice si ukážeme ve čtvrté kapitole. Pátá kapitola se zabývá lineárními diferenciálními rovnicemi 1. řádu. V šesté kapitole si ukážeme řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice. Exaktní diferenciální rovnice budou tématem sedmé kapitoly. V osmé kapitole si ukážeme využití integračního faktoru.

Kapitoly jsou členěny na části. V první části je uvedena základní teorie. Studenti se seznámí s pojmy, jejichž znalost je pro daný způsob řešení diferenciálních rovnic nutná. Druhou, hlavní část kapitoly tvoří řešené příklady s podrobným postupem řešení a barevným grafickým znázorněním různých řešení. V závěru každé kapitoly jsou uvedeny neřešené příklady, určené k samostatnému procvičování.

Cílem bylo přiblížit studentům řešení diferenciálních rovnic 1. řádu co nejsrozumitelnějším a co možná nejpřehlednějším způsobem, s velkým důrazem na praktickou stránku řešení, a tím přispět k jejich lepšímu pochopení této problematiky a v neposlední řadě ke vzbuzení zájmu studentů o tuto problematiku.

Při psaní této diplomové práce jsem použil program Microsoft Office Word 2007. Pro znázornění grafického řešení byly použity program Derive a program dynamické geometrie GeoGebra.

1 Základní pojmy

Obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace hledané reálné funkce jedné reálné proměnné.

Parciální diferenciální rovnicí nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje parciální derivace hledané funkce dvou a více proměnných.

Obecný tvar ODR: $F\left(x; y; y'; y''; \dots y^{(n)}\right) = 0$

Řád ODR určuje vždy nejvyšší derivace, která je v rovnici obsažena. My se ale budeme zabývat pouze řešením ODR 1. řádu $F(x; y; y') = 0$

nebo $y' = f(x; y)$

Druhy řešení ODR:

Regulární řešení – v žádném jeho bodě není porušena jednoznačnost řešení.

Singulární řešení – alespoň v jednom bodě je porušena jednoznačnost. Často to bývá bod, který vylučujeme z dalšího řešení, např. jmenovatel, který je roven 0.

Integrální křivka ODR je křivka, která znázorňuje určité řešení ODR.

Obecné řešení – množina všech funkcí, vyhovujících dané ODR, ale lišících se v integračních konstantách $(C_1, C_2, \dots, C_n)$, tato množina funkcí tvoří tzv. soustavu integrálních křivek.

Partikulární (částečné) řešení – je jedno vybrané řešení z množiny všech obecných řešení pro konkrétní hodnoty konstant, které vypočteme nebo zvolíme. Určení partikulárního řešení rovnice $F(x; y; y') = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ nazýváme Cauchyho úloha.

2 ODR základního typu

Základní typ diferenciálních rovnic jsou rovnice tvaru: $y' = f(x)$.

Jsou to rovnice, ve kterých se nevyskytuje y.

Při řešení ODR základního typu nahradíme y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$ a získáme tak rovnici v následujícím tvaru: $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Takovou rovnici pak dál upravujeme s využitím primitivní funkce (neurčitého integrálu). Řešením je rovnice: $y = \int f(x)dx$, včetně konstanty $C \in \mathbb{R}$.

Diferenciální rovnice základního typu tedy mají nekonečně mnoho řešení.

2.1 Řešené úlohy

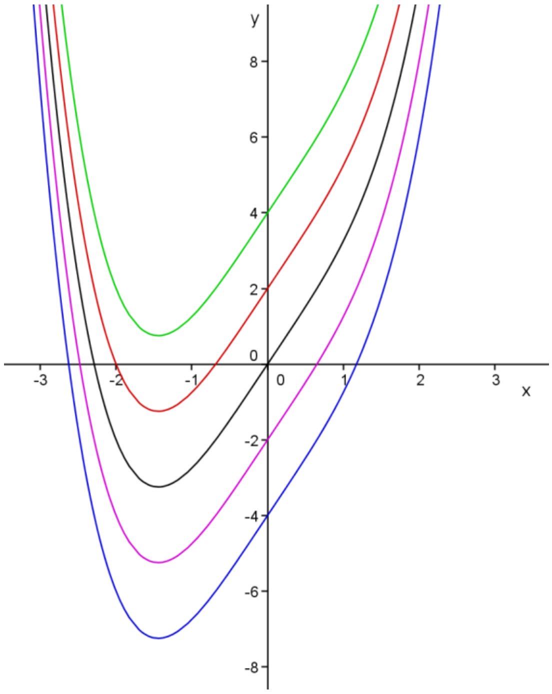
Příklad 2.1 $y' = x^3 + 3$

Řešení DR

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + 3$$
$$\int dy = \int (x^3 + 3)dx$$
$$y = \frac{x^4}{4} + 3x + C$$

kde $x \epsilon \mathbb{R}, C \epsilon \mathbb{R}$.

Grafické řešení DR od zdola pro C = -4, -2, 0, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.2 $y' = e^x - \sin 2x$

Řešení DR

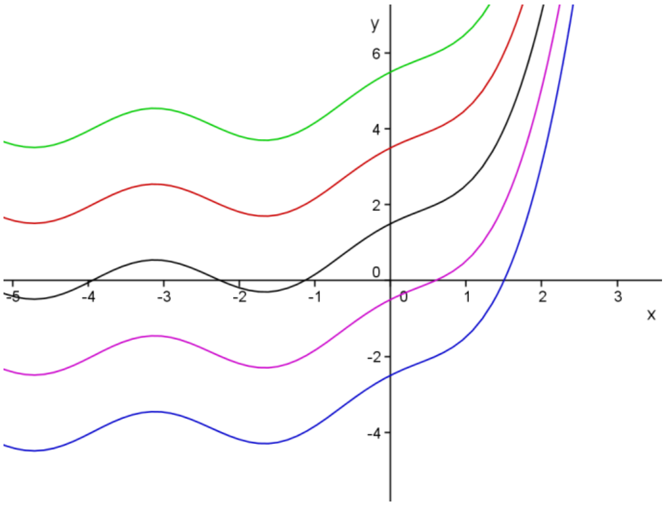
$$\frac{dy}{dx} = e^x - \sin 2x$$

$$\int dy = \int (e^x - \sin 2x)dx$$

$$y = e^x + \frac{\cos 2x}{2} + C$$

kde $x \epsilon \mathbb{R}, C \epsilon \mathbb{R}$.

Grafické řešení DR od zdola pro C = -4, -2, 0, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.3 $y' = \frac{1}{x-2}$

Řešení DR

zde musíme určit podmínku, že $x \neq 2$

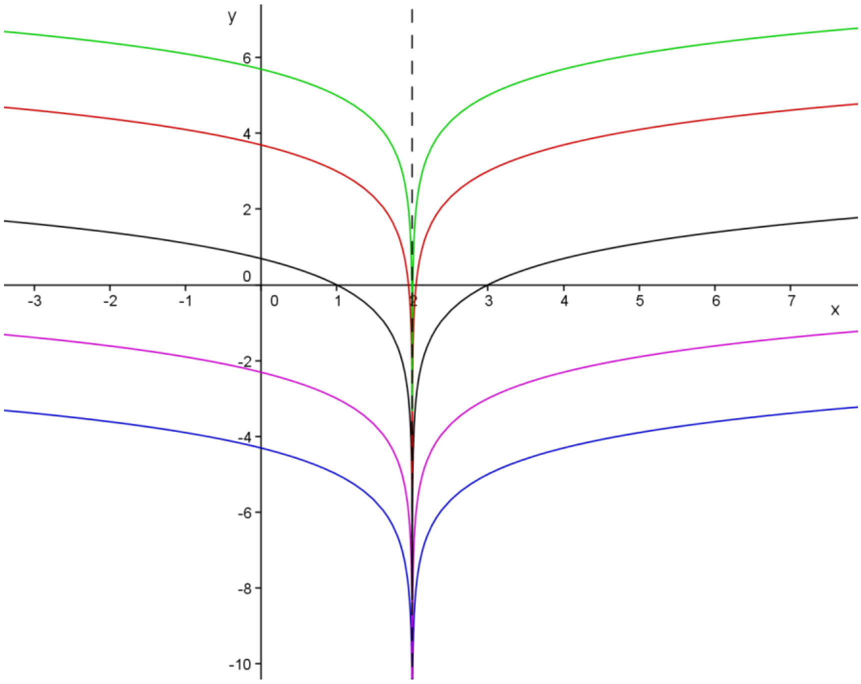
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-2}$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$y = \ln|x-2| + C$$

kde $x \neq 2, C \epsilon \mathbb{R}$.

Grafické řešení DR od zdola pro C= -5, -3, 0, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 2$.

Příklad 2.4 $y' = \sqrt{3x}$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku $x \geq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3x}$$

$$\int dy = \int \sqrt{3x} dx$$

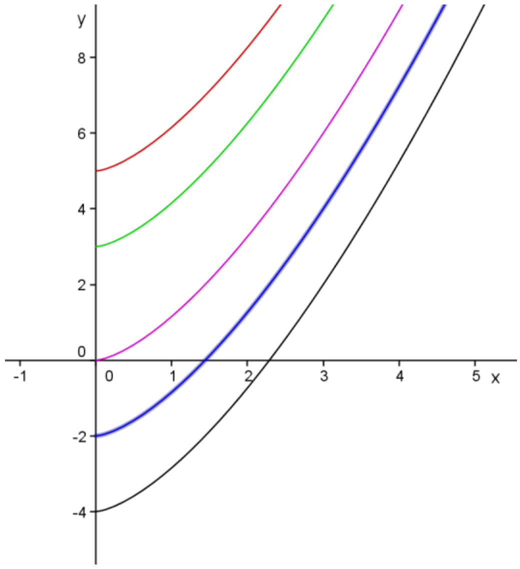
$$\int dy = \sqrt{3} \int \sqrt{x} dx$$

$$y = \sqrt{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{3x^3} + C$$

kde $x \geq 0, C \epsilon \mathbb{R}$.

Grafické řešení DR od zdola pro C= -4, -2, 0, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polorovinu pro $x \geq 0$.

Příklad 2.5 $y' = \frac{1}{2x-6}$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku $x \neq 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-6}$$

$$\int dy = \int \frac{1}{2x-6} dx$$

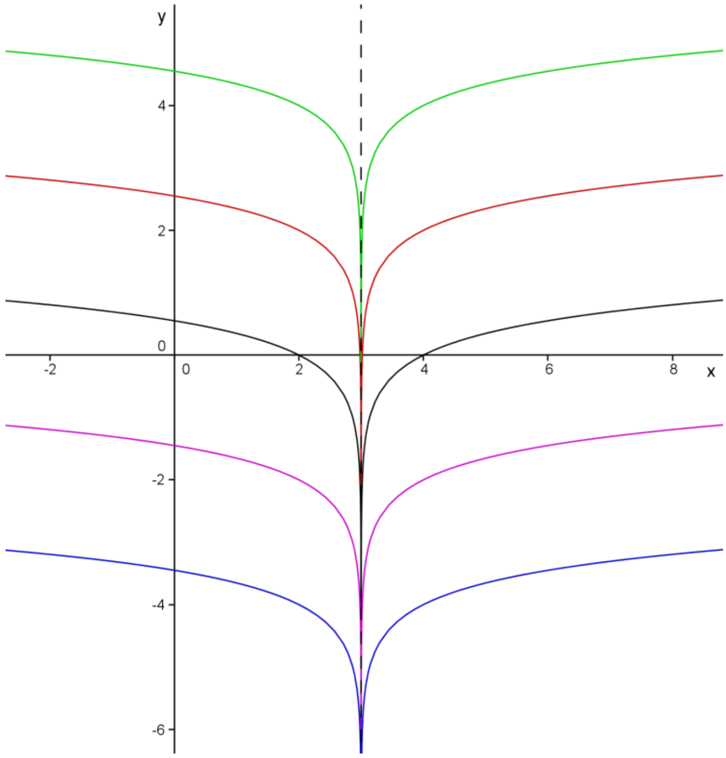
$$\int dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$y = \frac{1}{2} \ln|x-3| + C$$

$$y = \ln \sqrt{|x-3|} + C$$

kde $x \neq 3, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení DR od zdola pro C = -4, -2, 0, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 3$.

Příklad 2.6 $y' = 3x^2 - 4x, y(0) = 1$

Řešení DR

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$\int dy = \int (3x^2 - 4x)dx$$

$$y = x^3 - 2x^2 + C$$

kde $x\epsilon\mathbb{R}, C\epsilon\mathbb{R}$. Nyní zjistíme hodnotu konstanty s využitím počátečních podmínek $x = 0$ a $y = 1$:

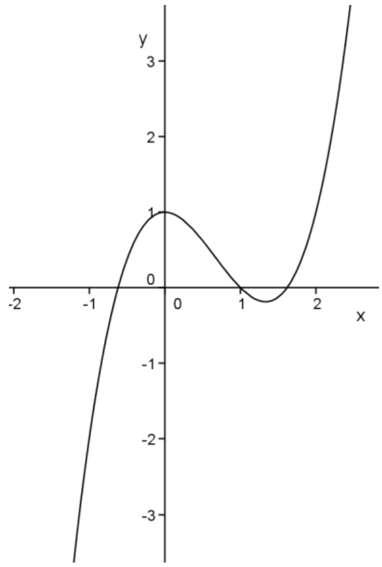
$$y(0) = 1$$

$$0^3 - 2 \cdot 0^2 + C = 1$$

$$C = 1$$

hledané partikulární řešení je $y = x^3 - 2x^2 + 1$

Grafické řešení:



Příklad 2.7 $y' = -2\frac{1}{x^3}, y(0) = 2$

Řešení DR

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{1}{x^3}$$

$$\int dy = \int -2\frac{1}{x^3}dx$$

$$y = \frac{1}{x^2} + C$$

kde $x \neq 0, C\epsilon\mathbb{R}$. Nyní zjistíme hodnotu konstanty s využitím počátečních podmínek $x = 0$ a $y = 2$. Takové řešení však nenajdeme, protože do funkce nelze dosadit $x = 0$. Hledané partikulární řešení neexistuje. Tuto rovnici jsme ani nemuseli řešit, protože je vidět ze zadání podmínka $x \neq 0$ a počáteční podmínka $y(0) = 2$ a takovou úlohu nemá smysl řešit.

2.2 Příklady k procvičení: ODR základní typu

Najděte všechna řešení ODR:

1. $y' = x^4 + 4$
2. $y' = \frac{1}{x^5}$
3. $y' = (3x+1)^4$
4. $y' = \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$

Najděte partikulární řešení DR:

5. $y' = x^6 - 2x, y(1) = 0$
6. $y' = \frac{1}{(x-6)^2}, y(7) = 1$
7. $y' = \frac{1}{x}, y(0) = 5$
8. $y' = \frac{1}{x+3}, y(-2) = 4$

Řešení DR:

1. $y = \frac{x^5}{5} + 4x + C, x\epsilon\mathbb{R}, C\epsilon\mathbb{R}.$
2. $y = -\frac{1}{x^4} + C, x \neq 0, C\epsilon\mathbb{R}.$
3. $y = \frac{1}{15}(3x+1)^5 + C, x\epsilon\mathbb{R}, C\epsilon\mathbb{R}.$
4. $y = -\cos\frac{x}{3} + C, x\epsilon\mathbb{R}, C\epsilon\mathbb{R}.$
5. $y = \frac{x^7}{7} - x^2 + \frac{6}{7}, x\epsilon\mathbb{R}.$
6. $y = -\frac{1}{x-6} + 2, x \in \mathbb{R} - \{6\}.$
7. Neexistuje (nelze dosadit do zadání $x = 0$).
8. $y = \ln|x+3| + 4, x \neq -3.$

3 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými jsou rovnice ve tvaru

$$p(x) + q(y) \cdot y' = 0.$$

Nahradíme-li y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$, pak předchozí rovnici můžeme psát ve tvaru

$$p(x)dx + q(y)dy = 0,$$

odtud pomocí integrace dostaneme

$$\int p(x)dx + \int q(y)dy = C.$$

Také se ale můžeme setkat s tzv. separovaným tvarem

$$p(x) \cdot r(y) + s(x) \cdot q(y) \cdot y' = 0.$$

Za předpokladů, že $s(x) \neq 0, r(y) \neq 0$ lze rovnici upravit takto

$$\frac{p(x)}{s(x)} + \frac{q(y)}{r(y)} \cdot y' = 0$$

a to je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

Pak její obecné řešení zapíšeme takto

$$\int \frac{p(x)}{s(x)} dx + \int \frac{q(y)}{r(y)} dy = C.$$

Poznámka 1: **Nulová funkce**

je funkce, která splňuje $y = y(x) = 0$ a to $\forall x \in \mathbb{R}$. Tuto funkci budeme označovat symbolem $y \equiv 0$. Stejně tak třeba i funkci $y = y(x) = 5$ a to $\forall x \in \mathbb{R}$, budeme označovat symbolem $y \equiv 5$.

Poznámka 2: **Věta o implicitní funkci**

Nechť $F(x, y)$ je libovolná funkce spojitá na množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\exists (x_0, y_0) \in G$: $F(x_0 y_0) = 0$. Nechť F má spojité parciální derivace 1. řádu $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ a zároveň $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0 y_0) \neq 0$. Pak existuje spojité řešení y rovnice $F(x, y) = 0$, které vyhovuje podmínce $y(x_0) = y_0$ a navíc $y' = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial F}}, y = y(x)$.

3.1 Řešené příklady

Příklad 3.1 $$y' = 6x^2 + 10x - 6$$

Řešení DR

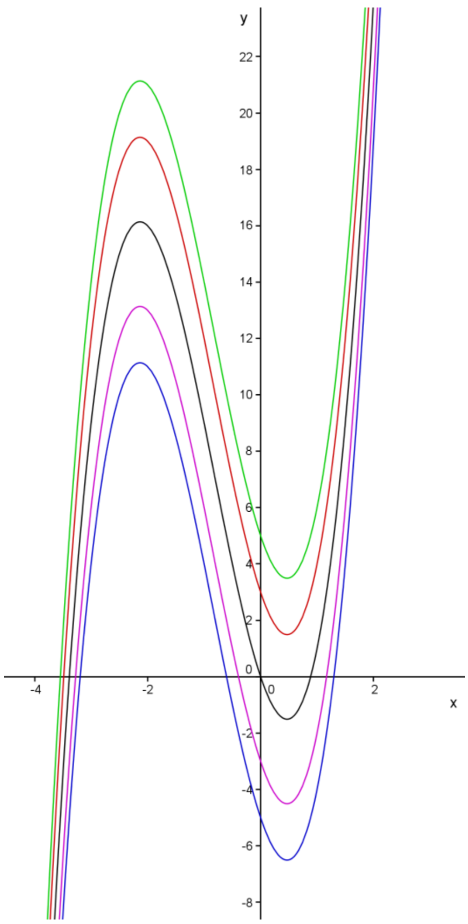
$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 10x - 6$$

$$\int dy = \int (6x^2 + 10x - 6)dx$$

$$y = 2x^3 + 5x^2 - 6x + C$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -5, -3, 0, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.2 $y^2y' = x - 2$

Řešení DR

$$y^2\frac{dy}{dx} = x - 2$$

$$\int y^2 dy = \int (x-2)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 6x + 3C$$

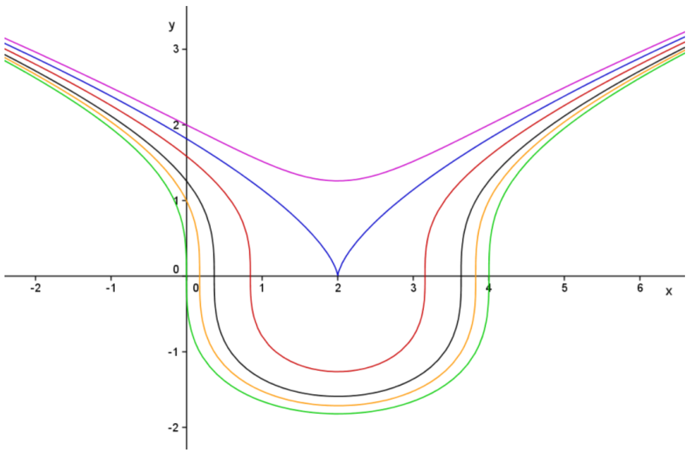
$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 6x + 3C}$$

protože konstanta vynásobená reálným číslem je opět konstanta, budeme psát jednodušeji místo $3C$ pouze konstantu C. (U dalších příkladů již budu rovnou přecházet ke konstantě C, bez dalších komentářů.)

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 6x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $C = 0, 1, 2, 4, 6, 8$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.3 $\frac{y\prime}{y} = 4x$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 4y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 4x dx$$

$$\ln|y| = 2x^2 + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{2x^2+C}$$

$$|y| = e^{2x^2+C}$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{2x^2}$$

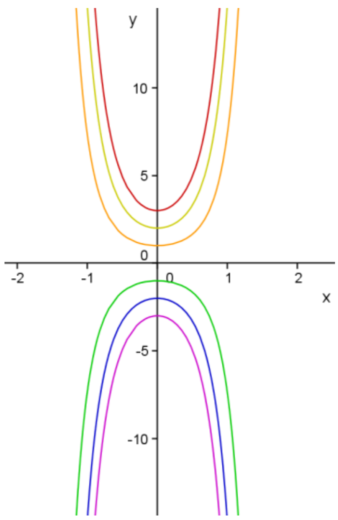
kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, protože $C \in \mathbb{R}$, $e^c \in (0; \infty)$ a $-e^c \in (-\infty; 0)$, pak konstanta K nabývá hodnot $K \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \Rightarrow K \neq 0$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

pak $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K =$-3, -2, -1, 1, 2, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

Příklad 3.4 $y' = 4xy$

Řešení DR

$$\frac{y'}{y} = 4x$$

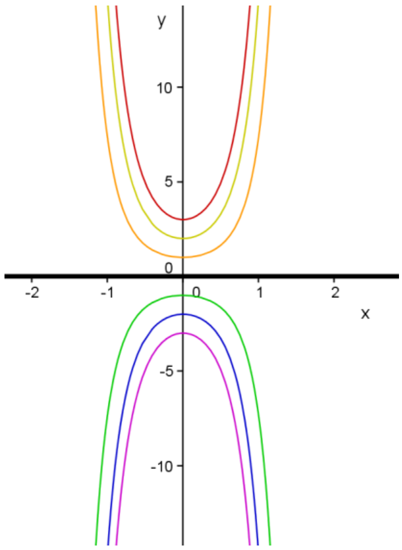
V předchozím kroku jsme dělili rovnici y a musíme stanovit podmínku $y \neq 0$, tím se připravíme o jedno řešení (singulární řešení) – nulovou funkci. (Derivace nulové funkce je rovna nule, $y = 0$ a $y' = 0$ rovnici $y' = 4xy$ vyhovují.)

Řešení upravené rovnice je totožné s řešením př. 2, vyšlo nám $y = K \cdot e^{2x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Nyní se podíváme, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{2x^2}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

pak $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.5 $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

Řešení DR

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy = \int dx$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = x + C$$

$$y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

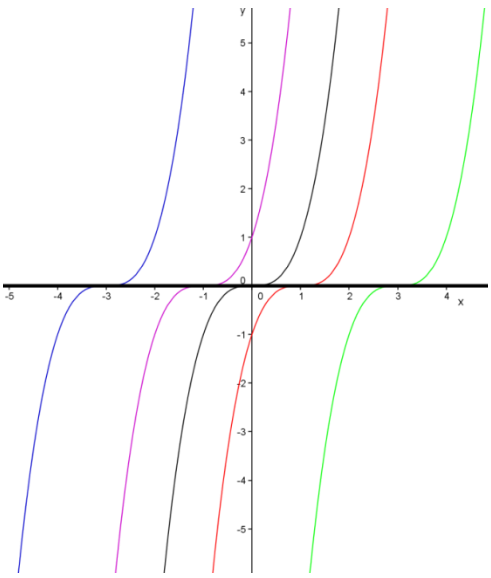
$$y = (x + C)^3$$

protože řešení $y = 0$ nedostaneme žádnou vhodnou volbou konstanty C musíme jej připsat zvlášť. Řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = (x + C)^3 \text{ a } y = 0$$

pak $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C =-3, -1, 0, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.6 $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$

Řešení DR

musíme určit podmínku, že $x \neq 1$ a vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x-1| + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x-1|+C}$$

$$|y| = e^C \cdot e^{\ln|x-1|}$$

$$y = \pm e^C \cdot (x-1)$$

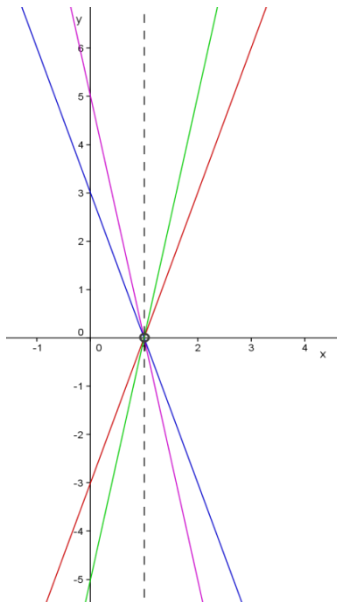
kde $x \neq 1$, $C \in \mathbb{R}$.

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$

$$y = K \cdot (x-1)$$

pak $x \neq 1$, $K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K =$-5, -3, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $y = 0$ a $x = 1$.

Příklad 3.7 $y^2y' = \cos x$

Řešení DR

$$y^2\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\int y^2 dy = \int \cos x\, dx$$

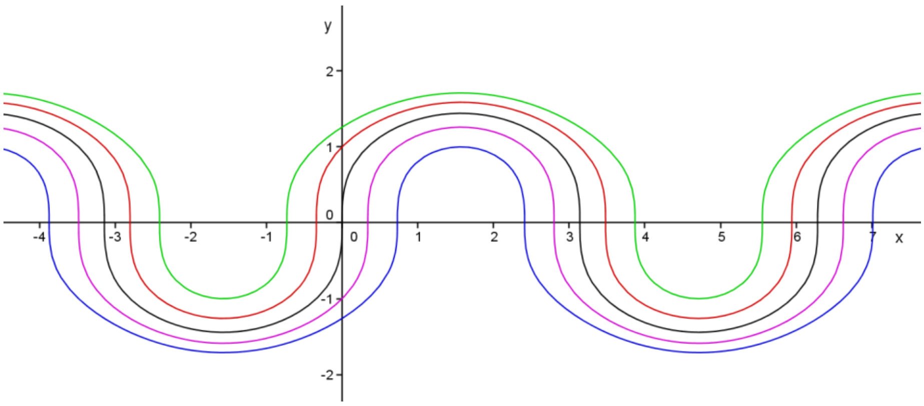
$$\frac{y^3}{3} = \sin x + C$$

$$y^3 = 3\sin x + C$$

$$y = \sqrt[3]{3\sin x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C =-2, -1, 0, 1, 2



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.8 $e^y y' = 1$

Řešení DR

$$\int e^y dy = \int dx$$

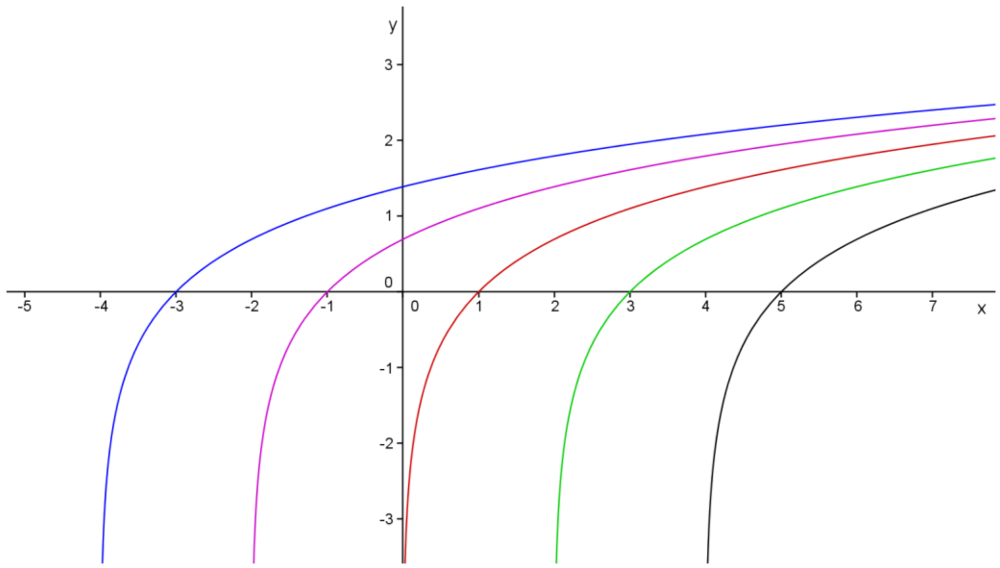
$$e^y = x + C$$

$$\ln e^y = \ln(x + C)$$

$$y = \ln(x + C)$$

kde $x > -C, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C =-4, -2, 0, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.9 $y' = y$

Řešení DR

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$

$$\ln|y| = x + C$$

$$y = \pm e^{x+C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{x}$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$, ale zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$

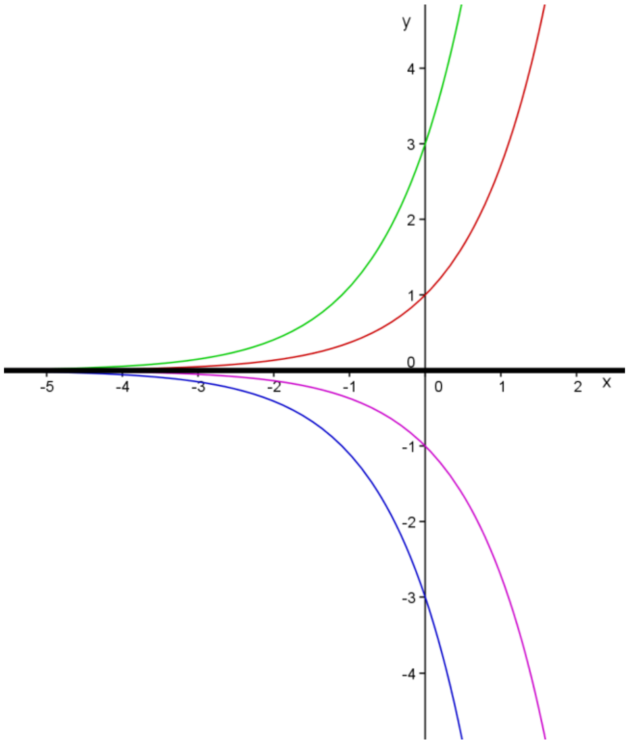
$$y = K \cdot e^{x}$$

podíváme se zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{x}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = K \cdot e^{x} \text{ a } y = 0$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C =-3, -1, 0, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.10 $\frac{1}{y}y' = -2$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -2$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -2dx$$

$$\ln|y| = -2x + C$$

$$y = \pm e^{-2x+C}$$

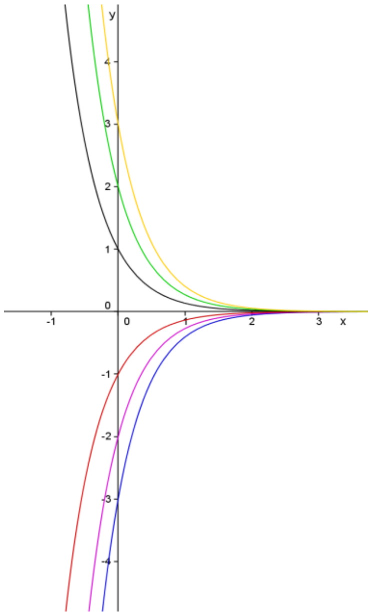
$$y = \pm e^{C} \cdot e^{-2x}$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$, ale zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = K \cdot e^{-2x}$$

pak $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Grafické řešení pro K =-3, -2, -1, 1, 2, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

Příklad 3.11 $xy' - y = 0$

Řešení DR

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$ a přibude podmínka $x \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

$$|y| = Cx$$

$$y = \pm Cx$$

kde $x \neq 0, C \neq 0$, ale zvolíme novou konstantu $K = \pm C$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = Kx.$$

Protože ze zadání neplyne, že $x \neq 0$ ukážeme, že řešení $y = Kx$ vyhovuje všem $x \in \mathbb{R}$. Dosazením řešení do původní rovnice ověříme řešení $x = 0$:

$$x(Kx)' - Kx = 0$$

$$Kx - Kx = 0$$

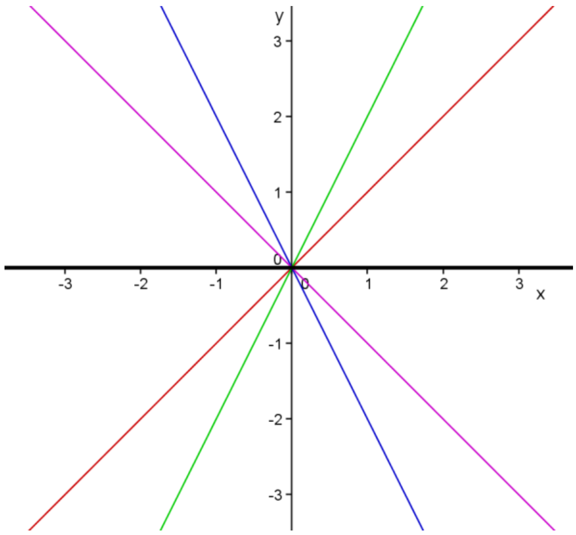
$$0 = 0.$$

Nyní se podíváme zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{2x^2}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = Kx$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -2, -1, 0, 1, 2



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.12 $\frac{y'}{4\sqrt{y}} = 6x^2$

Řešení DR

zde naše řešení musí vyhovovat podmínce $y > 0$

$$\frac{1}{4\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 6x^2$$

$$\frac{1}{4}\int y^{-\frac{1}{2}} dy = 6\int x^2 dx$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{y} = 2x^3 + C$$

$$\sqrt{y} = 4x^3 + 2C$$

nyní musíme stanovit podmínku pro x:

$$4x^3 + 2C > 0$$

$$4x^3 > -2C$$

$$x^3 > -\frac{2C}{4}$$

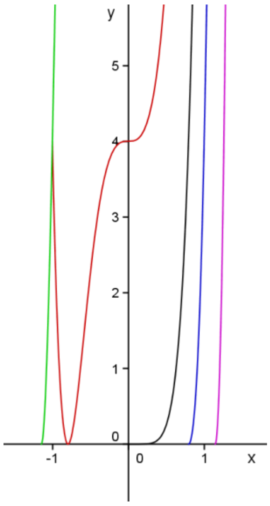
$$x > \sqrt[3]{-\frac{C}{2}}$$

řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = (4x^3 + 2C)^2$$

kde $x \in \left(\sqrt[3]{-\frac{C}{2}}; \infty\right)$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -3, -1, 0, 1, 3:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polorovinu pro $y > 0$.

Příklad 3.13 $\frac{y\prime}{y^2} = e^x$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int e^x dx$$

$$-\frac{1}{y} = e^x + C$$

řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

nyní musíme stanovit podmínku ($e^x + C \neq 0$)

$$e^x + C \neq 0$$

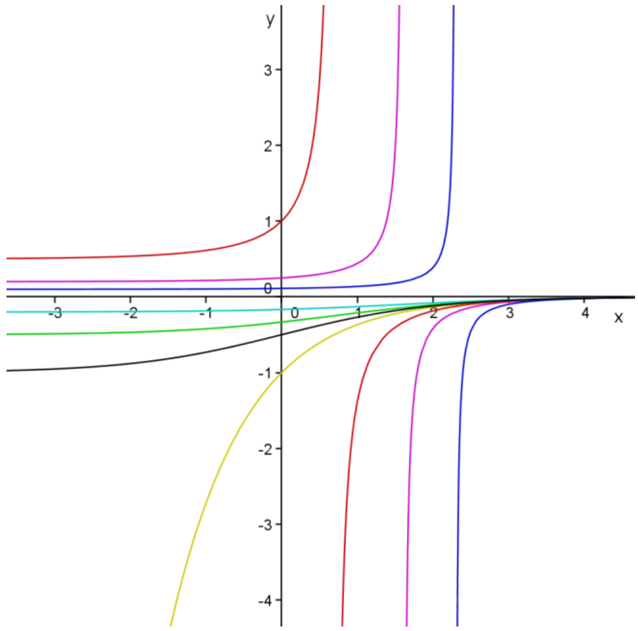
$$e^x \neq -C$$

pro $C \geq 0$ je podmínka vždy splněna a pro $C < 0$ existuje jedno x, pro které řešení $y = -\frac{1}{e^x + C}$ není definováno $x = \ln(-C)$, řešením pak jsou všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$ pro $C \geq 0$, nebo $x \in \mathbb{R} - \{\ln(-C)\}$ pro $C < 0$.

Grafické řešení pro C = -10, -5, -2, 0, 1, 2, 5:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

Příklad 3.14 $y^4 y' = 2x^4$

Řešení DR

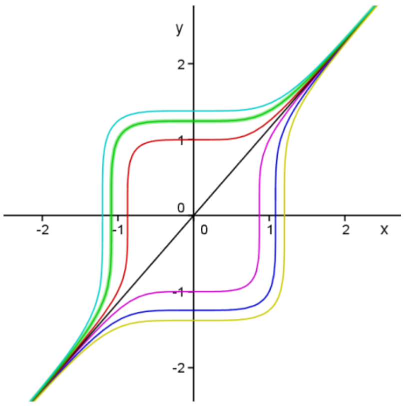
$$y^4 \frac{dy}{dx} = 2x^4$$

$$\int y^4 dy = \int 2x^4 dx$$

$$\frac{y^5}{5} = \frac{2x^5}{5} + C$$
$$y^5 = 2x^5 + C$$
$$y = \sqrt[5]{2x^5 + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.15 $\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x}$

Řešení DR

zde musíme určit podmínku, že $x \neq 0$ a vyřadit funkci $y = 0$

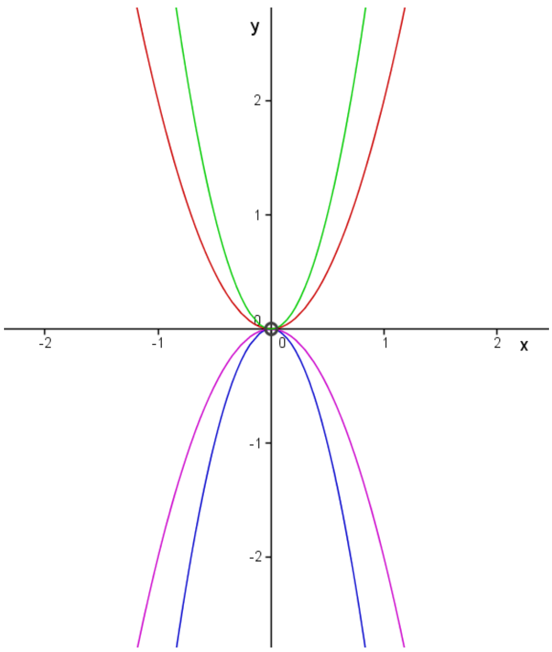
$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$$
$$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx$$
$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$$
$$|y| = x^2 \cdot C$$
$$y = \pm C \cdot x^2$$

zvolíme novou konstantu $K = \pm C$ a $K \neq 0$, pak řešením jsou všechny funkce:

$$y = K \cdot x^2$$

kde $x \neq 0$, $K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K =$ -4, -2, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x = 0, y = 0$.

Příklad 3.16 $\quad 2yy' = -\sin x$

Řešení DR

$$2y\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$2\int ydy = \int -\sin x\,dx$$

$$2\frac{y^2}{2} = \cos x + C$$

$$y^2 = \cos x + C$$

$$y = \pm\sqrt{\cos x + C}$$

nyní musíme rozvést diskuzi o řešitelnosti vzhledem ke konstantě C:

1. $C < -1$ rovnice nemá řešení $\cos x + C < 0$ vždy

2. $C = -1$ má rovnice právě jedno řešení $y = 0$ pro $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (diskrétní funkce)

3. $C \in (-1; 1)$ má rovnice řešení pro $x = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle -\arccos(C) + 2k\pi; \arccos(C) + 2k\pi \rangle$

ukážeme řešení pro $C = -\frac{1}{2}$

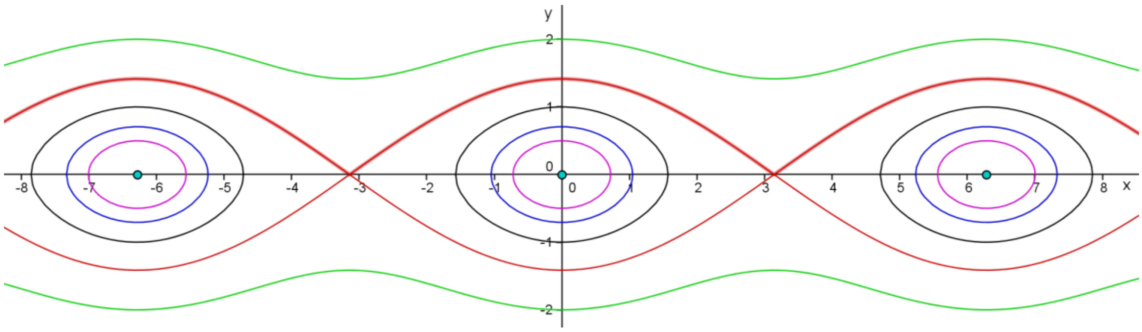
$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

4. $C \geq 1$ má rovnice řešení $y = \pm\sqrt{\cos x + C}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $C =$ -1, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.17 $2y'\sqrt{x} = y$

Řešení DR

zde musíme určit podmínku, že $x \geq 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

protože výraz $\sqrt{x}$ je ve jmenovateli, rozšíříme podmínku o $x \neq 0$, úpravou bychom přišli o jedno (singulární) řešení ($y = 0$)

$$\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$|y| = e^{\sqrt{x}+C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{\sqrt{x}}.$$

Nyní zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$, kde $K \neq 0$. Řešením budou všechny funkce:

$$y = K \cdot e^{\sqrt{x}}.$$

Podíváme se zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{\sqrt{x}}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

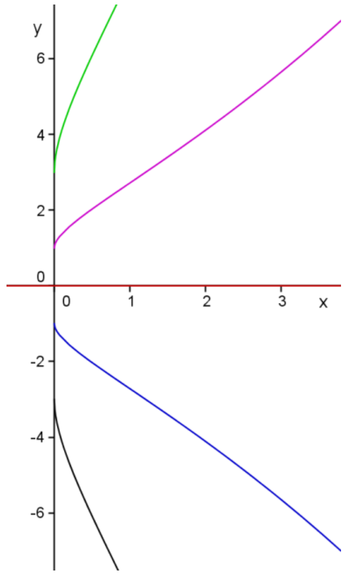
$$y = K \cdot e^{\sqrt{x}}.$$

Protože ze zadání neplyne podmínka, že $x \neq 0$ je nutné ji ověřit (viz příklad 3.11- nechť čtenář ověří sám), po ověření $\Rightarrow x = 0$ a řešením jsou všechny funkce:

$$y = K \cdot e^{\sqrt{x}}$$

kde $x \geq 0, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -3, -1, 1, 3, 0



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polorovinu pro $x \geq 0$ a přímku $y = 0$.

Příklad 3.18 $xy' - \frac{y}{x+1} = 0$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku pro $x \neq -1$

$$xy' = \frac{y}{x+1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x+1)}$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$, musíme určit tyto podmínky $x \neq 0$ a $x \neq -1$ a pravou stranu rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = Ax + A + Bx$$

x^0: $\quad 1 = A$

x^1: $\quad 0 = A + B$

$\quad\quad 0 = 1 + B$

$\quad\quad B = -1$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{Cx}{x+1}\right|$$

$$|y| = \frac{Cx}{x+1}$$

$$y = \pm \frac{Cx}{x+1}$$

nyní zvolíme novou konstantu $K = \pm C$, kde $K \neq 0$. Řešením budou všechny funkce:

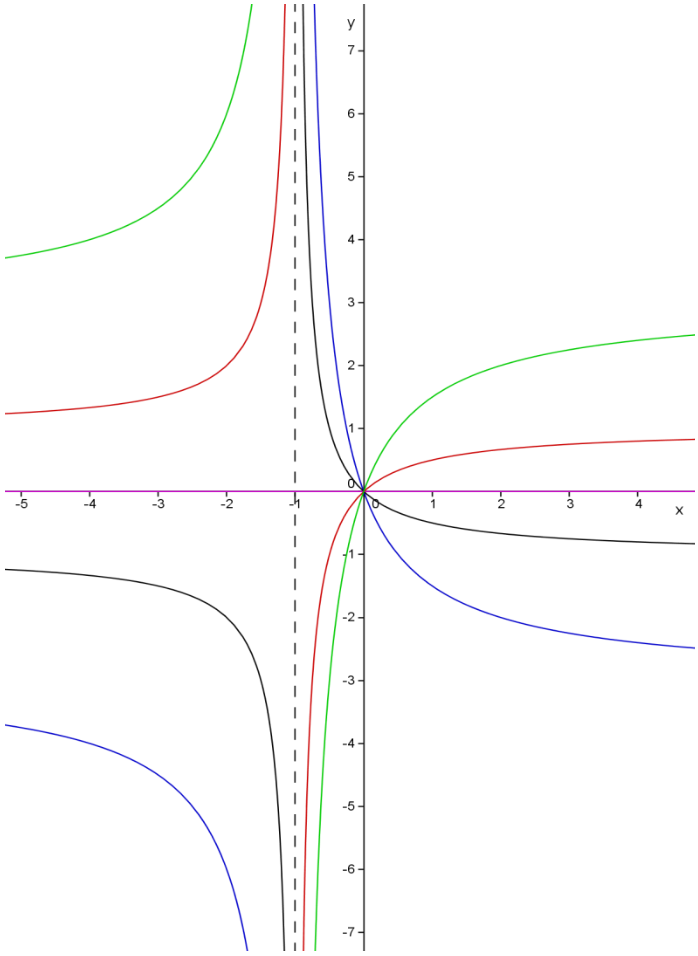
$$y = \frac{Kx}{x+1}.$$

Podíváme se, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = \frac{Kx}{x+1}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Protože ze zadání neplyne podmínka, že $x \neq 0$ je nutné tuto podmínku ověřit (viz příklad 3.11- nechť čtenář ověří sám), po ověření $\Rightarrow x = 0$ a řešením jsou všechny funkce

$$y = \frac{Kx}{x+1}$$

kde $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -3, -1, 1, 3, 0



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = -1$.

Příklad 3.19 $\quad xy' + y + y^2 = 0$

Řešení DR

$$xy' = -y - y^2$$

$$y' = -\frac{y + y^2}{x}$$

$$\frac{y'}{y(1+y)} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y(1+y)} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

při této úpravě bychom přišli o dvě (singulární) řešení $y = 0$ $y = -1$, určíme podmínku $x \neq 0$ a levou stranu rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}$$

$$1 = A + Ay + By$$

x^0: $\quad 1 = A$

x^1: $\quad 0 = A + B$

$\quad 0 = 1 + B$

$\quad B = -1$

$$\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{1+y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| - \ln|1+y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\left|\frac{y}{1+y}\right| = \frac{C}{x}$$

$$\frac{y}{1+y} = \pm\frac{C}{x}$$

nyní určíme novou konstantu $K = \pm C$ a $K \in \mathbb{R}$

$$\frac{y}{1+y} = \frac{K}{x}$$

$$y = \frac{K}{x} + \frac{K}{x} y$$

$$y - \frac{K}{x} y = \frac{K}{x}$$

$$y\left(1 - \frac{K}{x}\right) = \frac{K}{x}$$

$$y = \frac{K}{x\left(1 - \frac{K}{x}\right)}$$

$$y = \frac{K}{x - K}.$$

Podíváme se, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = \frac{K}{x-K}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$, ale vhodnou volbou konstanty K nezískáme řešení $y = -1$, připíšeme jej zvlášť. Protože ze zadání neplyne, že $x \neq 0$ ukážeme, že řešení $y = \frac{K}{x-K}$ vyhovuje všem $x \in \mathbb{R}$. Dosazením řešení do původní rovnice ověříme řešení $x = 0$:

$$x\left(\frac{K}{x-K}\right)' + \frac{K}{x-K} + \left(\frac{K}{x-K}\right)^2 = 0$$

$$x\left(\frac{-K}{(x-K)^2}\right) + \frac{K}{x-K} + \frac{K^2}{(x-K)^2} = 0$$

$$\frac{-xK}{(x-K)^2} + \frac{xK - K^2 + K^2}{(x-K)^2} = 0$$

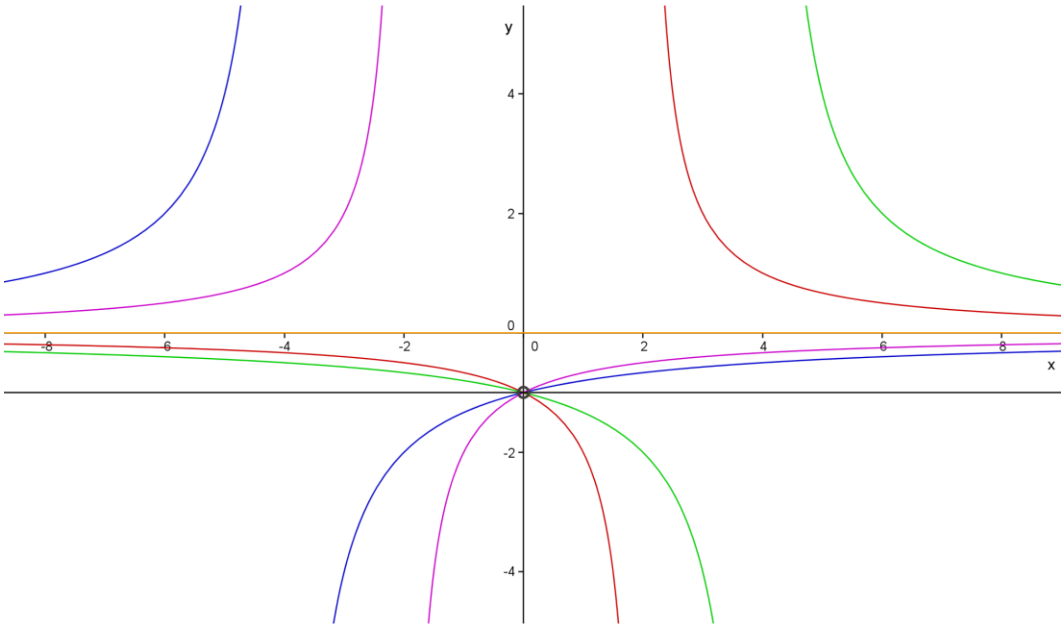
$$0 = 0$$

řešením jsou všechny funkce:

$$y = \frac{K}{x-K} \text{ a } y = -1$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $x \neq K$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro K = -4, -2, 2, 4, 0



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.20 $\frac{1}{y+1}y' = \operatorname{cotg} x$

Řešení DR

ze zadání vidíme, že je nutné vyřadit funkci $y = -1$ z řešení

$$\frac{1}{y+1} \cdot \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \int \operatorname{cotg} x dx$$

Vsuvka: $\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$

$$\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln|C|$$

$$|y+1| = C \sin x$$

$$y + 1 = \pm C \sin x$$

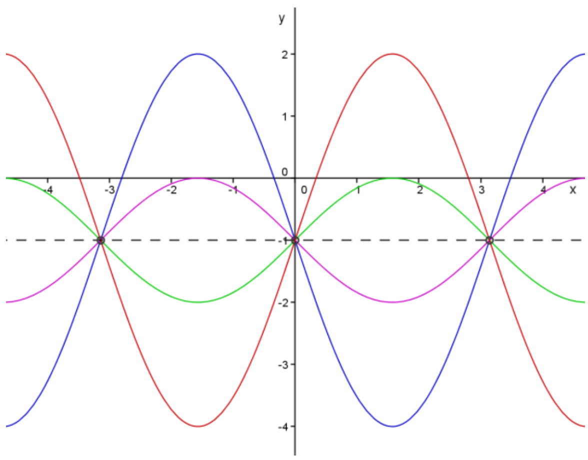
nyní zvolíme novou konstantu $K = \pm C$.

$K \neq 0$, protože bychom dostali funkci $y = 0 \cdot \sin x - 1$ a po úpravě funkci $y = -1$, to je podmínka ze zadání. Určíme podmínku $x \neq k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, řešením jsou všechny funkce:

$$y = K \sin x - 1$$

kde $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K =$ -3, -1, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = -1$.

3.2 Příklady k procvičení: ODR separace proměnných:

Najděte všechna řešení DR:

1. $3y^2y' = 2\cos\frac{x}{2}$
2. $\frac{1}{y-3}y' = 6x^2$
3. $\frac{1}{y}y' = -4$
4. $y' = -2xy$

Řešení DR:

1. $y = \sqrt[3]{\sin\frac{x}{2} + C}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. $y = K \cdot e^{2x^3} + 3$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$.
3. $y = K \cdot e^{-4x}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$.
4. $y = K \cdot e^{-x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$.

4 Homogenní diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice $F(x, y, y') = 0$ se nazývá homogenní, jestliže pro $x \neq 0$ lze upravit do tohoto tvaru

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Homogenní DR upravíme substitucí $y = ux$, kde $u = u(x)$ je funkcí proměnné x, na DR se separovanými proměnnými pro novou neznámou funkci $u(x)$.

Pozor! Nesmíme však zapomenout nahradit derivaci y'. Derivováním $y = ux$ dostaneme $y' = u'x + u$.

Obecně tedy

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = f(u)$$

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

po úpravách pak dostaneme

$$u = g(x, C)$$

řešením budou všechny funkce

$$\frac{y}{x} = g(x, C)$$

$$y = g(x, C) \cdot x.$$

4.1 Řešené úlohy

Příklad 4.1 $xy' = 2x + y$

Řešení DR

$$y' = 2 + \frac{y}{x}$$

za předpokladu, že $x \neq 0$ zavedeme substituci $u = \frac{y}{x}$ a dostáváme tedy

$$u'x + u = 2 + u$$

$$u' = \frac{2}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}$$

$$\int du = 2\int \frac{1}{x} dx$$

$$u = 2\ln|x| + \ln|C|$$

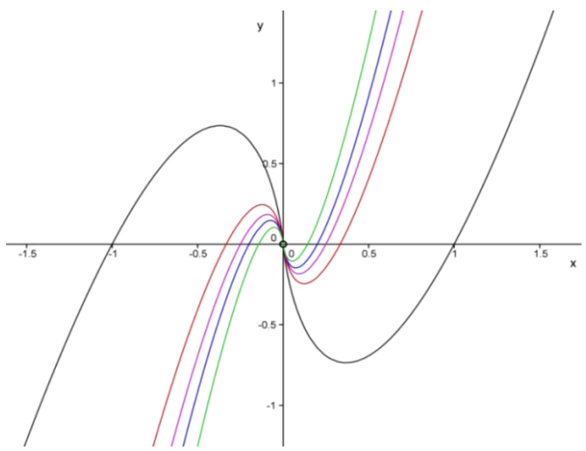
$$u = 2\ln|Cx|$$

$$\frac{y}{x} = 2\ln|Cx|$$

$$y = 2x\ln|Cx|$$

kde $x \neq 0$, $C \neq 0$.

Grafické řešení pro $C =$ -5, -1, 3, 4, 7



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Příklad 4.2 $xy' = y \ln \frac{y}{x}$

Řešení DR

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

za předpokladu, že $x \neq 0$ zavedeme substituci $u = \frac{y}{x}$ a dostáváme:

$$u'x + u = u \ln u$$

$$u'x = u \ln u - u$$

$$u' = \frac{u(\ln u - 1)}{x}$$

$$\frac{u'}{u(\ln u - 1)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{u(\ln u - 1)} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \int \frac{1}{x} dx$$

tuto úpravu můžeme provézt za předpokladu, že $u \neq 0$ a $u \neq e$ a zavedeme substituci:

$$\ln u - 1 = t$$

$$\frac{1}{u} du = dt$$

$$du = u dt$$

pak tedy

$$\int \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|t| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|t| = \ln|Cx|$$

$$|t| = Cx$$

$$t = \pm Cx$$

nyní zvolíme novou konstantu $K = \pm C$. Jako jedno z řešení uvažujeme i nulovou funkci, a proto $K \in \mathbb{R}$. Dosadíme za t výraz $\ln u - 1$

$$\ln u - 1 = Kx$$

$$\ln u = Kx + 1$$

$$u = e^{Kx+1}$$

$$\frac{y}{x} = e^{Kx+1}$$

$$y = xe^{Kx+1}$$

ještě nesmíme zapomenout na funkce $u = 0, u = e$ a po dosazení funkce:

$$y = xe$$

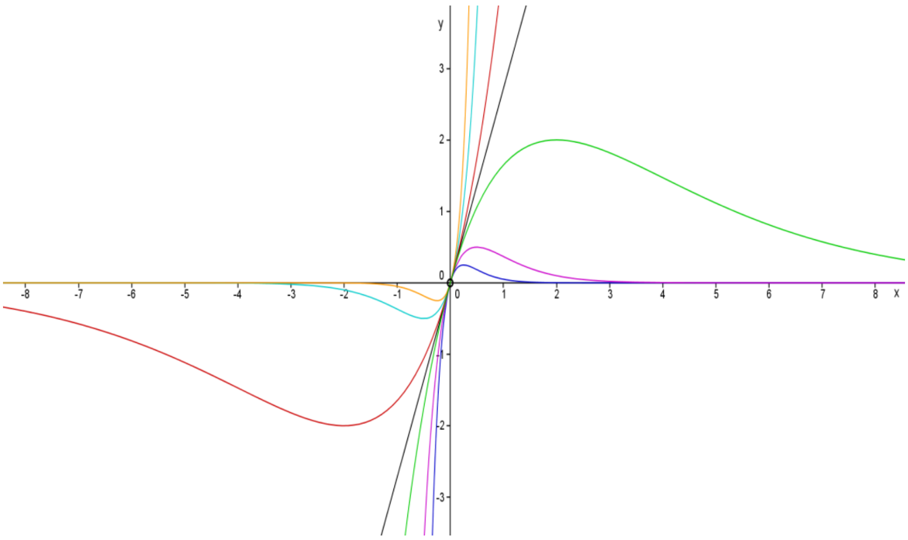
$$y = 0,$$

které jsou také řešeními původní rovnice, což snadno zjistíme dosazením. Podívejme se, zda vhodnou volbou konstanty K získáme tato singulární řešení. Volbou $K = 0$ získáme řešení $y = xe$. Řešení $y = 0$ však žádnou takovou volbou nezískáme, proto jej uvedeme zvlášť. Řešením původní DR jsou všechny funkce tvaru

$$y = xe^{Kx+1}$$

kde $x \in \mathbb{R} - \{0\}\ K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $K =$ -4, -2, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Příklad 4.3 $y' = \frac{x}{y}$

Řešení DR

$$y' = \frac{1}{\frac{y}{x}}$$

za předpokladu, že $x \neq 0$, $y \neq 0$ zavedeme substituci $u = \frac{y}{x}$ a dostáváme

$$u'x + u = \frac{1}{u}$$

$$u'x = \frac{1}{u} - u$$

$$u' = \frac{\frac{1-u^2}{u}}{x}$$

$$\frac{u}{1-u^2}u' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{u}{1-u^2} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{u}{1-u^2}du = \int \frac{1}{x}dx$$

tuto úpravu můžeme užít za předpokladu $u \neq \pm 1$ a zavedeme substituci

$$1 - u^2 = t$$

$$-2udu = dt$$

$$du = -\frac{1}{2u}dt$$

pak tedy

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|t| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|t| = -2\ln|Cx|$$

$$\ln|t| = \ln\frac{1}{C^2x^2}$$

$$t = \frac{1}{C^2x^2}$$

nyní dosadíme za t výraz $1 - u^2$

$$1 - u^2 = \frac{1}{C^2x^2}$$

$$u^2 = 1 - \frac{1}{C^2x^2}$$

vrátíme se k substituci $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{C^2x^2}$$

$$y^2 = x^2 - \frac{1}{C^2}$$

to je rovnice rovnoosé hyperboly se středem $[0; 0]$, pak hledané funkce jsou:

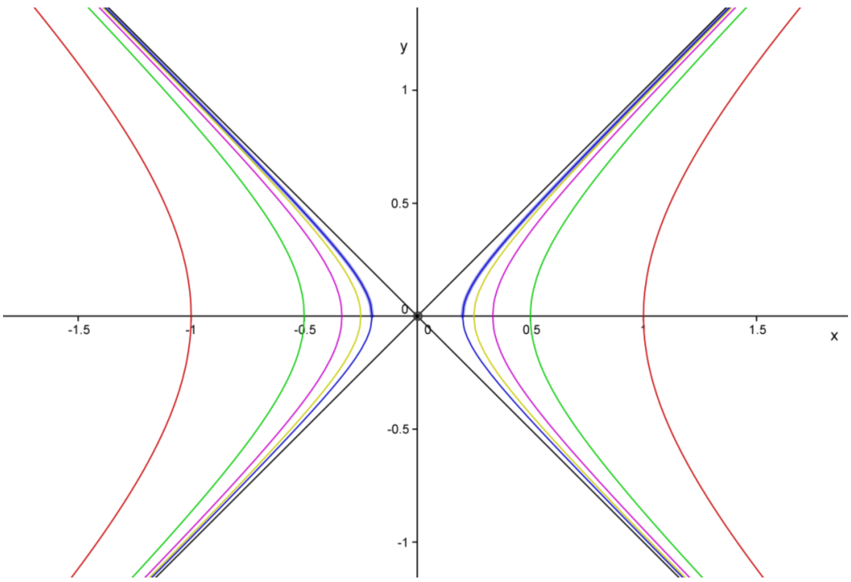
$$y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{1}{C^2}}$$

určíme podmínku $x^2 - \frac{1}{C^2} \geq 0$, pak tedy $|x| \geq \frac{1}{C}$ a $C \neq 0$

a nesmíme zapomenout na funkce $u = \pm 1$, po dosazení:

$$y = \pm x.$$

Grafické řešení pro $C =$ -5, -3, -1, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily část roviny, kde platí $y < |x|$.

Příklad 4.4 $xy' + y = x$

Řešení DR

$$xy' = x - y$$
$$y' = \frac{x - y}{x}$$
$$y' = 1 - \frac{y}{x}$$

za předpokladu, že $x \neq 0$ zavedeme substituci $u = \frac{y}{x}$ a dostáváme

$$u'x + u = 1 - u$$
$$u'x = 1 - 2u$$
$$u' = \frac{1 - 2u}{x}$$
$$\frac{1}{1 - 2u}u' = \frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{1 - 2u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{1}{1 - 2u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

tuto úpravu můžeme užít za předpokladu $u \neq \frac{1}{2}$ a zavedeme substituci

$$1 - 2u = t$$
$$-2du = dt$$
$$du = -\frac{1}{2}dt$$

pak tedy

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{x} dx$$
$$-\frac{1}{2}\ln|t| = \ln|x| + \ln|C|$$
$$\ln|t| = -2\ln|Cx|$$
$$\ln|t| = \ln\frac{1}{C^2x^2}$$
$$t = \frac{1}{C^2x^2}$$

nyní dosadíme za t výraz $1 - 2u$

$$1 - 2u = \frac{1}{C^2x^2}$$

$$2u = 1 - \frac{1}{C^2x^2}$$

$$2u = \frac{C^2x^2 - 1}{C^2x^2}$$

$$u = \frac{C^2x^2 - 1}{2C^2x^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{C^2x^2 - 1}{2C^2x^2}$$

$$y = \frac{C^2x^2 - 1}{2C^2x^2}x$$

$$y = \frac{C^2x^2 - 1}{2C^2x}$$

nesmíme zapomenout na případ, kdy $u = \frac{1}{2}$, po dosazení získáme:

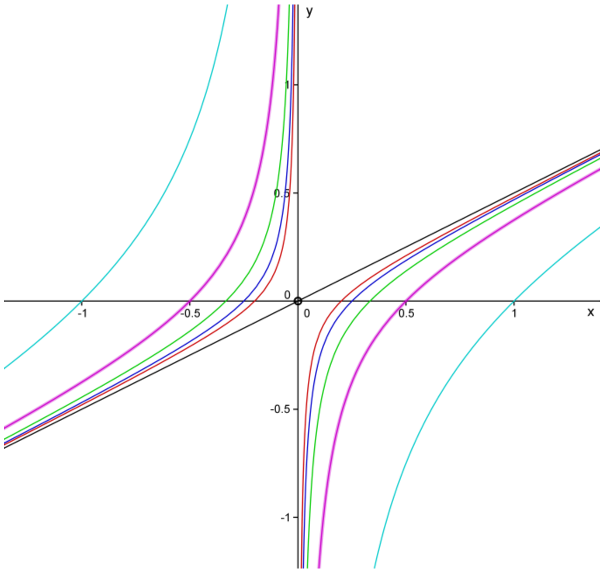
$$y = \frac{1}{2}x$$

což je také řešení původní DR, řešením jsou všechny funkce:

$$y = \frac{C^2x^2 - 1}{2C^2x} \text{ a } y = \frac{1}{2}x$$

kde $x \neq 0$, $C \neq 0$.

Grafické řešení pro $C =$ -4, -2, 1, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily části roviny, ve kterých platí $\left(x < 0 \wedge y > \frac{1}{2}x\right) \vee \left(x > 0 \wedge y < \frac{1}{2}x\right)$.

4.2 Příklady k procvičení: Homogenní DR

Najděte všechna řešení DR:

1. $x^2 + y^2 = 2xyy'$
2. $yy' = 2y - x$
3. $xy'^{(2x+y)} = xy + y^2$
4. $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$

Řešení DR:

1. $y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{x}{C}}$ a $y = \pm x$, kde $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ a platí podmínka $x^2 - \frac{x}{C} \geq 0,\ C \neq 0.$
2. $e^{\frac{x}{y-x}} = K(y - x)$ a $y = x$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$.
3. $y^2 \cdot e^{\frac{y}{x}} = C \cdot x$ a $y = 0$, kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.
4. $\sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}$, kde $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ a platí podmínka $\frac{C}{x} > 0,\ C \neq 0.$

5 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu (LDR) nazýváme každou diferenciální rovnici tvaru

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

kde $p(x), q(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Je-li $q(x) \equiv 0$, mluvíme o zkrácené LDR (ta má separované proměnné).

Je-li $q(x) \neq 0$, mluvíme o úplné LDR.

LDR můžeme řešit dvěma metodami:

1. Lagrangeova metoda variace konstant

Nejprve určíme obecné řešení zkrácené LDR $y' + p(x) \cdot y = 0$, označíme ho $\tilde{y} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Pak obecné řešení úplné LDR hledáme ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$, kde $C(x)$ je funkce.

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x)$$

dosadíme do zadání $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K$$

$$y = \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K \right) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

2. Bernoulliova substituce

Předpokládejme, že obecné řešení zkrácené LDR $y' + p(x) \cdot y = 0$ má tvar $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Toto obecné řešení a jeho derivaci $y' = u'v + uv'$ dosadíme do zadání

$$u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot p(x) = q(x)$$

$$u' \cdot v + [u \cdot v' + u \cdot v \cdot p(x)] = q(x)$$

$$u' \cdot v + u \cdot [v' + v \cdot p(x)] = q(x)$$

zavádí se volitelná podmínka $v' + v \cdot p(x) = 0$.

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$u = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K$$

$$y = \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + K\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Můžeme si všimnout, že v obou postupech jsou počítané integrály stejné.

5.1 Řešené úlohy

Příklad 5.1 $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

Řešení DR

zkrácená LDR

$$y' - xy = 0$$

to je DR se separovanými proměnnými

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\tilde{y} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

to je obecné řešení zkrácené LDR, nyní nalezneme obecné řešení úplné LDR

$$y = C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

derivace bude:

$$y' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + xC(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

dosadíme do zadání

$$\left[C'(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+xC(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right]-xC(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}=e^{\frac{x(x+2)}{2}}$$

$$C'(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}=e^{\frac{x^2+2x}{2}}$$

$$C'(x)=e^{\frac{2x}{2}}$$

$$C'(x)=e^{x}$$

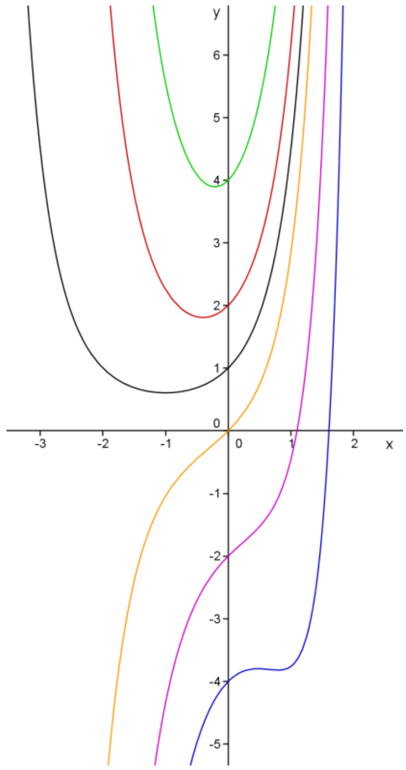
$$C(x)=\int e^{x}dx=e^{x}+K$$

provedeme dosazení $C(x)$ do $y=C(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ a dostaneme

$$y=(e^{x}+K)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

kde $x\in\mathbb{R}, K\in\mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -5, -3, -1, 0, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 5.2 $y' + 2y = 4x$

Substitue: $y = uv$

$y' = u'v + uv'$

Řešení DR

$$u'v + uv' + 2uv = 4x$$

$$u'v + u(v' + 2v) = 4x$$

volitelná podmínka $v' + 2v = 0$

$$v' = -2v$$

$$\int \frac{1}{v} dv = \int -2dx$$

$$\ln|v| = -2x$$

$$v = e^{-2x}$$

$$u'e^{-2x} = 4x$$

$$u' = 4xe^{2x}$$

$$\int du = \int 4xe^{2x} dx$$

$$u = \int 4xe^{2x} dx = \begin{vmatrix} a = 4x & b' = e^{2x} \\ a' = 4 & b = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = 2xe^{2x} - 2\int e^{2x} dx =$$

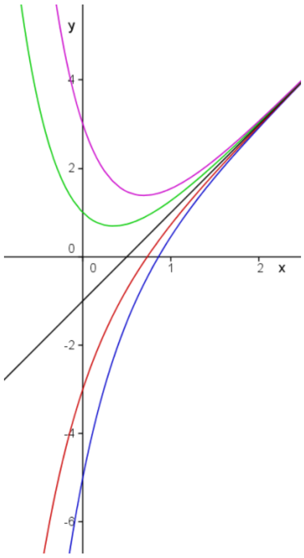
$$= 2xe^{2x} - e^{2x} + C$$

$$y = (2xe^{2x} - e^{2x} + C)e^{-2x}$$

$$y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -4, -2, 0, 2, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 5.3 $y' \cdot \tan x - y = 1$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

zkrácená LDR

$$y' \cdot \tan x - y = 0$$

to je DR se separovanými proměnnými

$$y' = \frac{y}{\tan x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln y = \ln \sin x + \ln C$$

$$\tilde{y} = C \sin x$$

toto je obecné řešení zkrácené LDR, nyní nalezneme obecné řešení úplné LDR

$$y = C(x) \cdot \sin x$$

derivace bude

$$y' = C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x$$

dosadíme do zadání

$$[C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x] \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - C(x) \sin x = 1$$

$$C'(x) \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 1$$

$$C(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + K$$

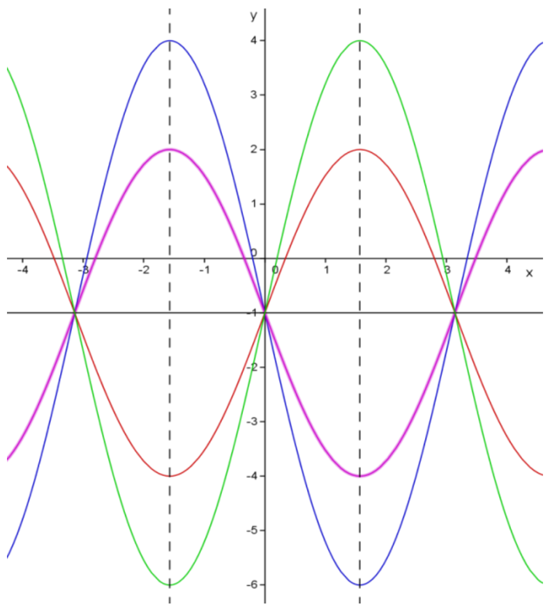
provedeme dosazení $C(x)$ do $y = C(x) \cdot \sin x$ a získáme

$$y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K\right) \cdot \sin x$$

$$y = K \cdot \sin x - 1$$

kde $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $K =$ -5, -3, 0, 3, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Příklad 5.4 $x^2y' - 2xy = -3$

Substituce: $y = uv$

$y' = u'v + uv'$

Řešení DR

$$x^2(u'v + uv') - 2xuv = -3$$

$$x^2u'v + (x^2uv' - 2xuv) = -3$$

$$x^2u'v + u(x^2v' - 2xv) = -3$$

volitelná podmínka $x^2v' - 2xv = 0$

$$xv' = 2v$$

$$\int \frac{1}{v} dv = 2\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln v = 2\ln x$$

$$v = x^2$$

$$x^4u' = -3$$

$$u' = -\frac{3}{x^4}$$

$$\int du = \int -\frac{3}{x^4} dx$$

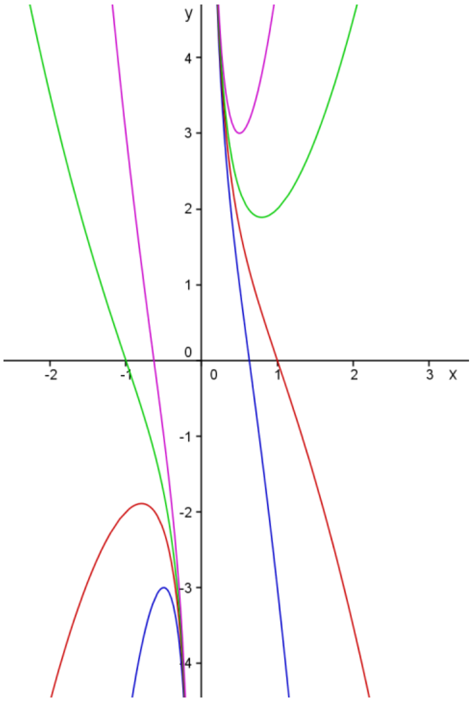
$$u = \frac{1}{x^3} + C$$

$$y = \left(\frac{1}{x^3} + C\right)x^2$$

$$y = \frac{1}{x} + Cx^2$$

kde $x \neq 0, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -4, -1, 1, 4



Kdybychom vykreslili všechny řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu až na přímku $x = 0$.

5.2 Příklady k procvičení: Lineární DR 1. řádu

Najděte všechna řešení DR:

1. $y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x$
2. $y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x$
3. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

Řešení DR:

1. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x}$, kde $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, C \in \mathbb{R}$.
2. $y = \frac{x}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2} + \frac{K}{\cos x}$, kde $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $K \in \mathbb{R}$.
3. $y = (x + K)(1 + x^2)$, kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

6 Bernoulliova diferenciální rovnice

Jako Bernoulliovu diferenciální rovnici označujeme každou diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = y \cdot p(x) + y^n q(x),$$

kde $n \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, funkce $p(x), q(x)$jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$

a zároveň $q(x) \neq 0$.

Beroulliovu diferenciální rovnici nejprve upravíme:

$$y' = y \cdot p(x) + y^n \cdot q(x) \qquad /: y^n$$

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{y \cdot p(x)}{y^n} + q(x)$$

$$y^{-n} y' = y^{1-n} \cdot p(x) + q(x) \qquad \text{označme (*)}$$

a nyní ji převádíme substitucí $z = y^{1-n}$ na lineární diferenciální rovnici

$$z = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n) y^{-n} \cdot y'$$

$$y' = \frac{z'}{(1-n) y^{-n}}$$

po dosazení do (*) dostaneme rovnici ve tvaru

$$\frac{z' y^{-n}}{(1-n) y^{-n}} = z p(x) + q(x)$$

$$z' = z(1-n)p(x) + (1-n)q(x)$$

a to je lineární diferenciální rovnice.

Poznámka: - Je-li $n > 0$, pak funkce $y = 0$ je jedním jejím řešením.

- Podobně jako u lineárních diferenciálních rovnic řešení můžeme hledat oběma způsoby.

- Bernoulliovy DR lze též řešit přímo substitucí $y = u \cdot v$.

6.1 Řešené příklady

Příklad 6.1 $\mathrm{y}' + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}+1} = -\frac{1}{2}(\mathrm{x}+1)^3\mathrm{y}^3$

Substituce: $y = uv$

$y' = u'v + uv'$

Řešení DR

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3u^3v^3$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x+1}\right) = -\frac{1}{2}(x+1)^3u^3v^3$$

volitelná podmínka $v' + \frac{v}{x+1} = 0$

$$\int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$\ln|v| = -\ln|x+1|$$

$$v = \frac{1}{x+1}$$

$$u'\frac{1}{x+1} + u\left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}(x+1)^3u^3\frac{1}{(x+1)^3}$$

$$\int \frac{1}{u^3}du = -\frac{1}{2}\int (x+1)dx$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C$$

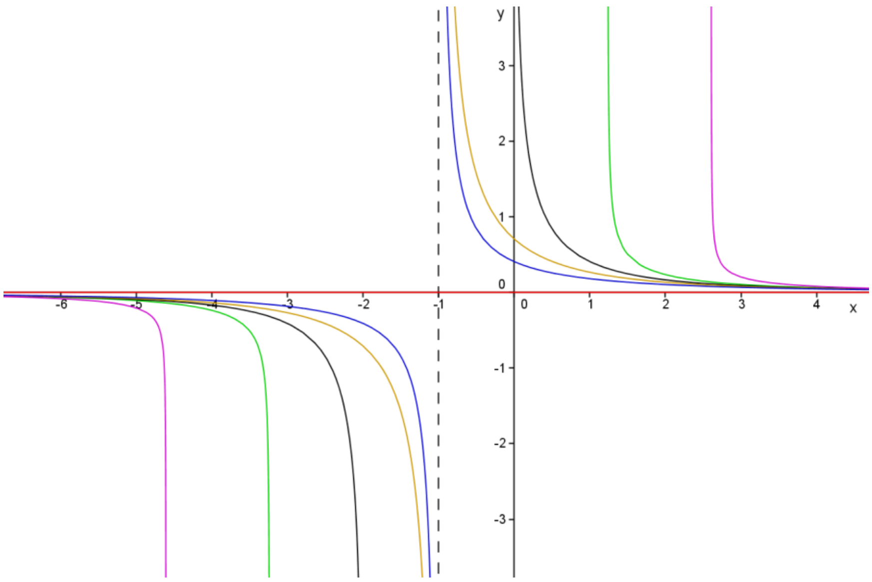
$$\frac{1}{u^2} = \frac{x^2}{2} + x - C$$

$$u = \sqrt{\frac{2}{x^2+2x-C}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{x^2+2x-C}} \cdot \frac{1}{x+1} \quad \text{a} \quad y = 0$$

kde $x \neq -1$, $C \in \mathbb{R}$. za podmínky, že $\frac{2}{x^2+2x-C} \geq 0$.

Grafické řešení pro C = -3, -1, 0, 1, 3



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = -1$.

Příklad 6.2 $\quad xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku $y \geq 0$

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y} \quad /:\sqrt{y}$$

$$x \cdot \frac{y'}{\sqrt{y}} - 4\sqrt{y} = x^2$$

zavedeme substituci

$$z = \sqrt{y}$$

$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$2z' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$$

dosazením do rovnice získáme LDR a řešíme ji (viz. předchozí kapitola 5.)

$$2xz' + 4z = x^2$$

získáme zkrácenou LDR

$$2xz' + 4z = 0$$

$$2xz' = 4z$$

$$2x\frac{dz}{dx} = 4z$$

$$\int \frac{1}{z}dz = 2\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln z = 2\ln x + \ln C$$

$$\tilde{z} = Cx^2$$

to je obecné řešení zkrácené LDR, nyní nalezneme obecné řešení úplné LDR

$$y = C(x) \cdot x^2$$

derivace bude

$$z' = C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x$$

dosadíme do zadání

$$2x[C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x] - 4C(x) \cdot x^2 = x^2$$

$$2C'(x) \cdot x^3 = x^2$$

$$C(x) = \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln K = \ln K\sqrt{|x|}$$

provedeme dosazení $C(x)$ do $y = C(x) \cdot x^2$ a získáme

$$z = x^2 \ln K\sqrt{|x|}$$

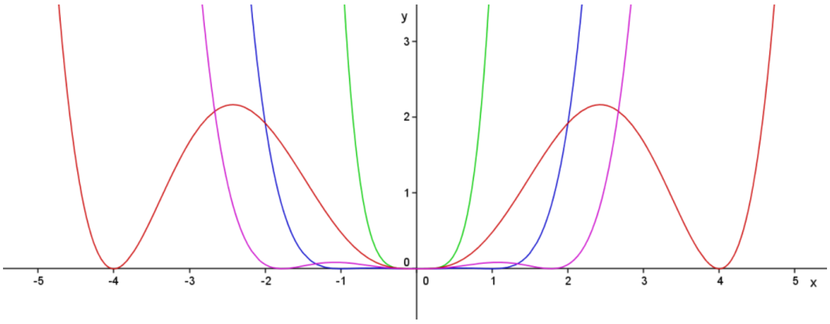
když se vrátíme k substituci $z = \sqrt{y}$, dostaneme

$$\sqrt{y} = x^2 \ln K\sqrt{|x|}$$

$$y = \left(x^2 \ln K\sqrt{|x|}\right)^2$$

kde $x \in \mathbb{R} - \{0\}, K > 0$.

Grafické řešení pro $K = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 8$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polorovinu $y \geq 0$ kromě přímky $x = 0$.

Příklad 6.3 $\qquad x^2y^2y' + xy^3 = 1$

Substituce: $\quad y = uv$

$\qquad y' = u'v + uv'$

Řešení DR

$$x^2u^2v^2(u'v + uv') + xu^3v^3 = 1$$

$$x^2u^2v^3u' + (x^2u^3v^2v' + xu^3v^3) = 1$$

$$x^2u^2v^3u' + xu^3v^2(xv' + v) = 1$$

volitelná podmínka $xv' + v = 0$

$$x\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln v = -\ln x$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$x^2u^2\left(\frac{1}{x}\right)^3 u' = 1$$

$$\int u^2du = \int xdx$$

$$\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$u^3 = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$v = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad v^3 = \frac{1}{x^3}$$

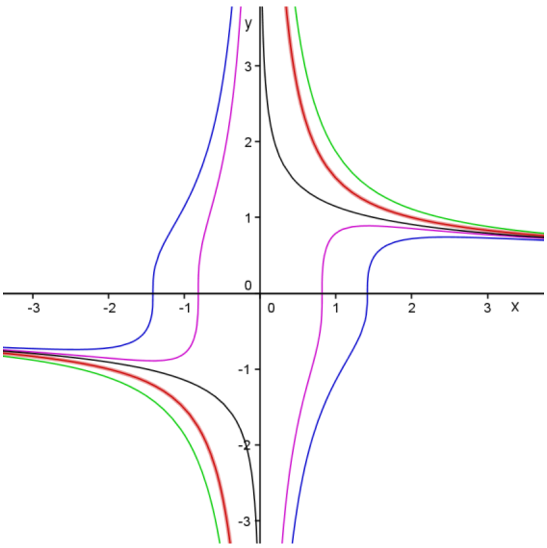
$$y^3 = \left(\frac{3}{2}x^2 + C\right)\frac{1}{x^3}$$

$$y^3 = \frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}} \quad \text{a} \quad y = 0$$

kde $x \neq 0, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -3, -1, 0, 2, 5



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

6.2 Příklady k procvičení: Bernoulliova DR

Najděte všechna řešení DR: 1. $y' + y + y^2 e^x = 0$

2. $x^2 y^2 y' + x y^3 = 1$

3. $x y' + y = y^2 \ln x$

Řešení DR: 1. $y = \frac{1}{e^x (x+C)}$ a $y = 0$, kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$ za podmínky, že $x \neq -C$.

2. $y=\sqrt[3]{\frac{C}{x^3}+\frac{3}{2x}}$ a $y = 0$, kde $x \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$.

3. $y = \frac{1}{Kx + \ln x + 1}$ a $y = 0$, kde $x > 0$, $K \in \mathbb{R}$ za podmínky, že $Kx + \ln x + 1 \neq 0$.

7 Exaktní diferenciální rovnice

Vsuvka: Totální diferenciál

Mějme funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ která je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Pak výraz $\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$ budeme nazývat totálním diferenciálem funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Rozdíly $h = x - x_0 = dx$ a $k = y - y_0 = dy$ nazveme přírůstkem proměnné x a přírůstkem proměnné y funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Diferenciál pak zapíšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k$$

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy$$

Exaktními diferenciálními rovnicemi nazýváme rovnice ve tvaru:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

pouze je-li levá strana totálním diferenciálem funkce $F(x, y)$. Funkci $F(x, y)$ nazýváme **kmenová funkce**.

Postačující podmínkou pro exaktnost nám bude Schwarzova věta o rovnosti smíšených derivací

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Určení kmenové funkce:

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$

$$\text{označme} \quad U(x, y) = \int P(x, y)dx$$

$$F(x, y) = U(x, y) + \varphi(y)$$

$$Q(x, y) = \frac{dF}{dy} = \frac{dU}{dy} + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y) - \frac{dU}{dy}$$

Obecné řešení pak dostáváme v implicitním tvaru: $F(x, y) = C$.

7.1 Řešené úlohy

Příklad 7.1 $xdx + ydy = 0$

Ověření exaktnosti

$$\frac{dP}{dy} = 0 \quad = \quad \frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{jde o exaktní DR}$$

ověření exaktnosti je nutné u každé DR, u které domníváme, že je exaktní.

Řešení DR

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

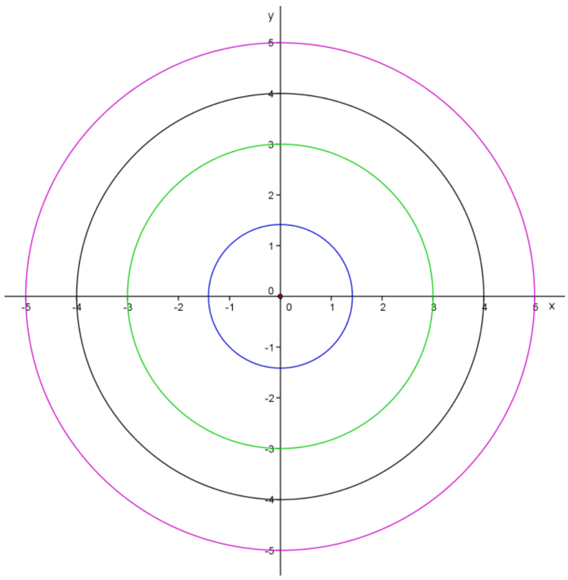
$$\frac{d\varphi}{dy} = y$$

$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$F(x,y): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \geq 0$.

Grafické řešení pro $C = 0, 1, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 7.2 $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

Ověření exaktnosti

$$\frac{dP}{dy} = 12xy \quad = \quad \frac{dQ}{dx} = 12xy \quad \text{jde o exaktní DR}$$

ověření exaktnosti je nutné u každé DR, u které domníváme, že je exaktní.

Řešení DR

Ukážeme si jiný postup výpočtu, nejprve si vypočteme dva integrály:

$$\int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2$$

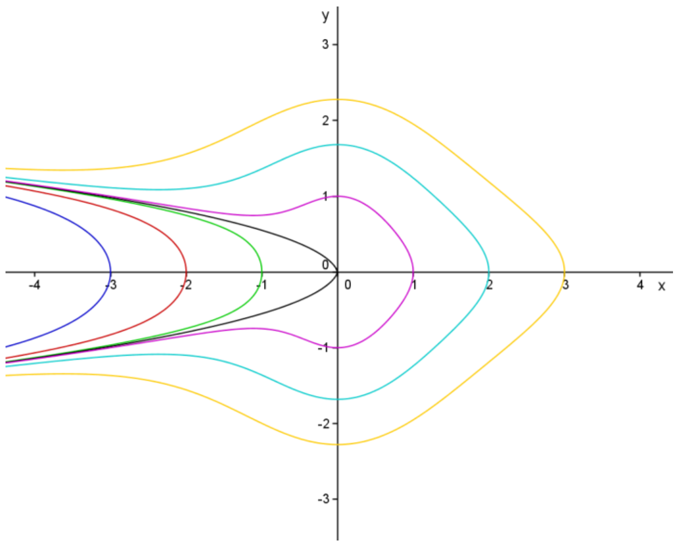
$$\int (6x^2y + 4y^3)dy = 3x^2y^2 + y^4$$

Do kmenové funkce nyní zapíšeme každý člen, který nám vyšel, ale pokud se vyskytuje v obou výsledcích, pak ho zapíšeme jen jednou.

$$F(x,y): x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 7.3 $\cos y\, dx + (e^x + \sin y)dy = 0$

Ověření exaktnosti

$$\frac{dP}{dy} = -\sin y \quad \neq \quad \frac{dQ}{dx} = e^x \quad \text{nejde o exaktní DR}$$

proto tuto DR nebudeme nyní řešit, ale v příští kapitole ji vyřešíme.

7.2 Příklady k procvičení: Exaktní DR

Najděte všechna řešení DR:

1. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2+3x^2}{y^4} dy = 0$
2. $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$
3. $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x \operatorname{cotg} y\, dy = 0$

Řešení DR:

1. $F(x, y)$: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$, kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$ bez přímky $y = 0$.
2. $F(x, y)$: $x \cos y + y \sin x = C$, $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.
3. Nejedná se o exaktní DR.

8 Integrační faktor

Řešíme-li diferenciální rovnici ve tvaru:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

a není-li levá strana totálním diferenciálem funkce $F(x,y)$, zavádíme funkci $\mu = \mu(x,y)$, kterou nazýváme **integrační faktor**.

Aby byla funkce $\mu = \mu(x)$ funkce pouze proměnné x, musí splňovat nutnou podmínku

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

potom

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx$$

a po úpravě dostaneme

$$\ln \mu = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx.$$

Aby byla funkce $\mu = \mu(y)$ funkce pouze proměnné y, musí splňovat nutnou podmínku

$$\frac{P'_y - Q'_x}{-P}$$

potom

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{-P} dy$$

a po úpravě dostaneme

$$\ln \mu = \int \frac{P'_y - Q'_x}{-P} dy.$$

Integračním faktorem vynásobíme danou DR a dále ji řešíme jako exaktní DR.

8.1 Řešené úlohy

Příklad 8.1 $\cos y\, dx + (e^x + \sin y)dy = 0$

Řešení DR

$$\frac{dP}{dy} = -\sin y \quad \neq \quad \frac{dQ}{dx} = e^x \quad \text{nejde o exaktní DR}$$

proto se pokusíme nalézt integrační faktor

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx = \frac{-\sin y - e^x}{e^x + \sin y} dx = -dx$$

$$\ln \mu = -x$$

$$\mu = e^{-x}$$

nyní vynásobíme danou rovnici integračním faktorem

$$e^{-x} \cos y\, dx + (1 + e^{-x} \sin y)dy = 0$$

zjistíme zda jde o exaktní DR

$$\frac{dP}{dy} = -e^{-x} \sin y \quad = \quad \frac{dQ}{dx} = -e^{-x} \sin y \quad \text{jde o exaktní DR}$$

vypočteme dva integrály

$$\int e^{-x} \cos y\, dx = -e^{-x} \cos y$$

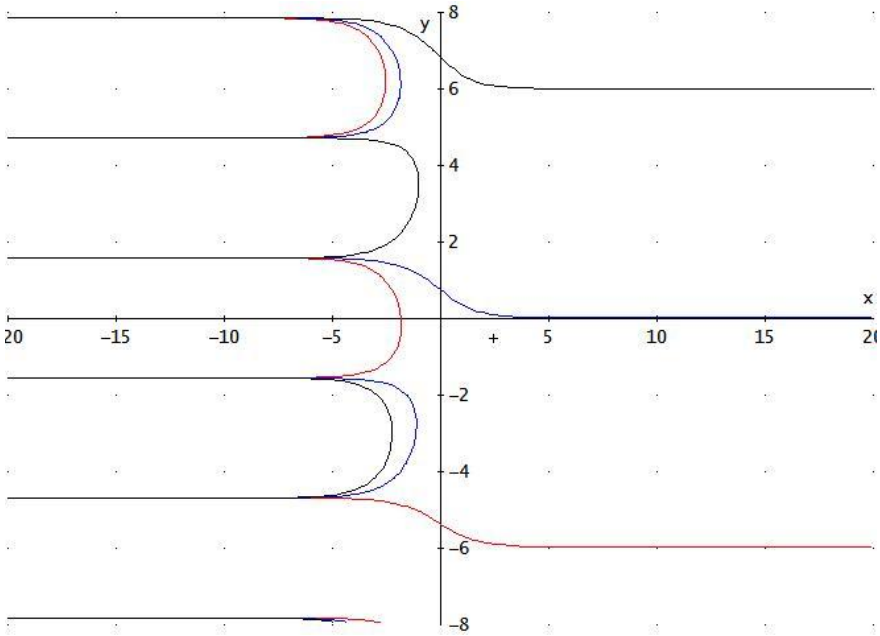
$$\int (1 + e^{-x} \sin y)dy = y - e^{-x} \cos y.$$

Do kmenové funkce nyní zapíšeme každý člen, který nám vyšel, ale pokud se vyskytuje v obou výsledcích, pak ho zapíšeme jen jednou.

$$F(x, y){:}\ y - e^{-x} \cos y = C$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro C = -6, 0, 6



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Kvalita grafického řešení je horší než v předchozích příkladech. Jelikož v programu dynamické geometrie GeoGebra nešlo grafické řešení vykreslit, byl zde použit program Derive. Pro čtenářovu představu bude takto znázorněné řešení postačující.

Příklad 8.2 $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x \operatorname{cotg} y\, dy = 0$

Řešení DR

podmínka ze zadání $y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{dP}{dy} = 3x^2 \cos y \quad \neq \quad \frac{dQ}{dx} = -\operatorname{cotg} y \quad \text{nejde o exaktní DR}$$

proto se pokusíme nalézt integrační faktor

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{-P} dy = -\frac{3x^2 \cos y + \operatorname{cotg} y}{1 + 3x^2 \sin y} dy = -\frac{\operatorname{cotg} y\,(1 + 3x^2 \sin y)}{1 + 3x^2 \sin y} dy =$$

$$= -\operatorname{cotg} y\, dy$$

$$\ln \mu = -\ln \sin y$$

$$\mu = \frac{1}{\sin y}$$

nyní vynásobíme danou rovnici integračním faktorem

$$\left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2\right) dx - x\frac{\cos y}{\sin^2 y} dy = 0$$

zjistíme, zda jde o exaktní DR

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{\cos y}{\sin^2 y} \quad = \quad \frac{dQ}{dx} = - - \frac{\cos y}{\sin^2 y} \quad \text{jde o exaktní DR}$$

vypočteme dva integrály

$$\int \left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2\right) dx = \frac{x}{\sin y} + x^3$$

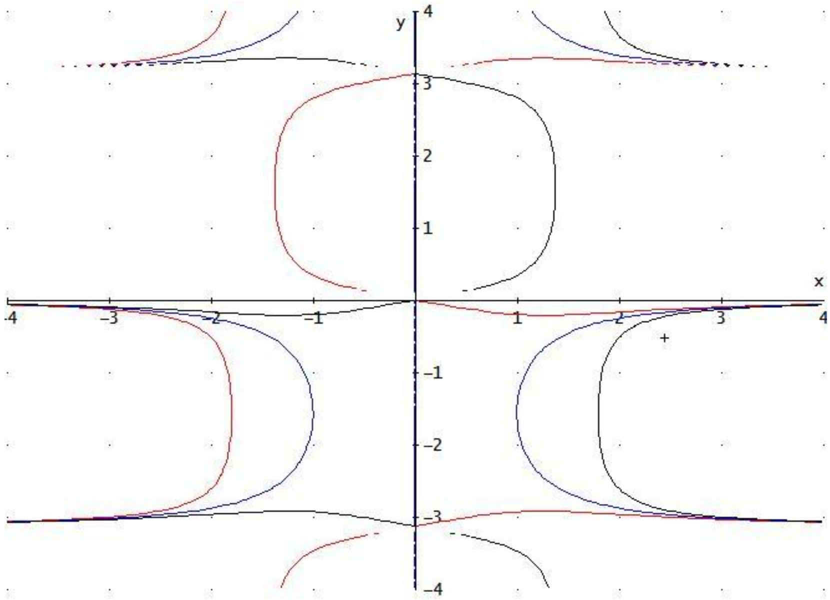
$$\int -x\frac{\cos y}{\sin^2 y} dy = \frac{x}{\sin y}.$$

Do kmenové funkce nyní zapíšeme každý člen, který nám vyšel, ale pokud se vyskytuje v obou výsledcích, pak ho zapíšeme jen jednou.

$$F(x, y)\colon \frac{x}{\sin y} + x^3 = C$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$ za podmínky $y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Grafické řešení pro C = -4, 0, 4



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kvalita grafického řešení je horší než v předchozích příkladech. Jelikož v programu dynamické geometrie GeoGebra nešlo grafické řešení vykreslit, byl zde použit program Derive. Pro čtenářovu představu bude takto znázorněné řešení postačující.

8.2 Příklady k procvičení: Integrační faktor

Najděte všechna řešení DR: 1.$\left(\frac{y}{x^2} - x^{-2}\right) dx + \frac{1}{x} dx = 0$

2. $-\sin(xy)\, dx - \frac{\sin(xy) \cdot x}{y} dy = 0$

3.$\frac{1}{xy} dx + 2\frac{1}{x} dy = 0$

Řešení DR:

1. $\mu = x^2; F(x, y): xy - x = C$, kde $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $C \in \mathbb{R}$.

2. $\mu = y; F(x, y): \cos(xy) = C$, kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$, ale bez přímky $y = 0$.

3. $\mu = xy; F(x, y): x + y^2 = C$, kde $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $C \in \mathbb{R}$, bez přímky $y = 0$.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo zpracovat problematiku řešení diferenciálních rovnic 1. řádu do výukového materiálu v podobě sbírky řešených příkladů.

Výstupem je učební text (sbírka řešených příkladů), který by měl samostatně fungovat jako učební pomůcka při výuce matematické analýzy. Svou úrovní obtížnosti a odbornosti učební text odpovídá zejména požadavkům bakalářských a magisterských oborů studia učitelství matematiky na pedagogických fakultách. Sbírku řešených příkladů však lze použít i na jiných studijních oborech, kde není matematika hlavním předmětem. Pro využití v technických popř. ekonomických oborech by však bylo vhodné doplnit sbírku větším množstvím aplikačních příkladů, které se vztahují k dané odbornosti.

Při tvorbě diplomové práce jsem vycházel ze studia literatury uvedené v seznamu použité literatury. Teorii, která se vztahuje k dané problematice, jsem podal pouze ve zkratce. Zaměřil jsem se hlavně na podrobný popis postupu řešení jednotlivých typů diferenciálních rovnic 1. řádu s využitím různých metod řešení diferenciálních rovnic 1. řádu a na grafické znázornění některých řešení rovnic.

Pokud by se tato sbírka využívala jako učební pomůcka v technických či ekonomických oborech, měla by být rozšířena o kapitolu zabývající se praktickým využitím diferenciálních rovnic v úlohách, které řeší odborné problémy.

Literatura:

[1] Jirásek, F., Čipera, S., Vacek, M.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky II,* Praha: SNTL, 1989

[2] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky II,* Praha: Prométheus, 1995

[3] Samková, L.: *Matematické modelování v biologických disciplínách*, České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011

[4] Samková, L.: *Sbírka příkladů z matematiky*, Praha: ČVUT, 2002

[5] Stará J., Milota, J.:*Diferenciální rovnice pro IV. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku,* Praha: SPN, 1988

[6] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II,* Praha: SNTL, 1986

[7] Tesař, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro fyziky*, České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 1995