

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

GRAFICKÁ PODOBA MATEMATIKY
DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matěj Bína

České Budějovice, prosinec 2011

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

v Českých Budějovicích 1. 12. 2011

Matěj Bína

Anotace

Tato práce rozšiřuje obsah vybraných knih řady učebnic Matematika pro gymnázia o grafický a interaktivní obsah. Je zamýšlena především jako materiál pro učitele matematiky na střední škole, ale díky její těsné provázanosti s výše zmíněnou řadou učebnic je vhodným doplňkem i pro studenty.

Zadání

Diplomová práce

Student: Matěj Bína

M-F/SŠ

P06994

Téma: Grafická podoba matematiky

A graphical approach to mathematics

Zásady pro vypracování:

Teoretická část: Rešeršní práce

Studium doporučené literatury

Praktická část: Na základě teoretické části vytvořit přehled témat ze středoškolské matematiky, ve kterých se dá výrazně využít grafická stránka dané věci,

tedy téma či problém vysvětlit pomocí obrázku/obrázků. Ke každému tématu uvést pro srovnání standardní (formální) podobu výkladu a podobu

„obrázkovou“. Na závěr by bylo vhodné porovnat didaktické významy

obou přístupů. V práci mohou být zařazeny i další kapitoly dle uvážení

studenta (například pracovní listy nebo kapitola věnující se grafickému softwaru).

Seznam odborné literatury:

[1] Půlpán, Kuřina, Kebza: O představivosti a její roli v matematice, Academia, 1992

[2] Kuřina: Umění vidět v matematice, SPN, 1989

[3] učebnice matematiky pro SŠ

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Datum zadání DP: 27.11.2009

Termín odevzdání DP: duben 2011

Obsah

1	Úvod.....	6
2	Matematika v pohybu.....	7
3	Středoškolská matematika – vybraná témata	16
3.1	Základní poznatky z matematiky.....	16
3.2	Rovnice a nerovnice.....	34
3.3	Funkce.....	39
3.4	Posloupnosti a řady.....	55
3.5	Goniometrie.....	58
3.6	Analytická Geometrie.....	68
3.7	Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	89
3.8	Komplexní čísla.....	96
4	Závěr.....	108
5	Seznam obrázků.....	110
6	Seznam tabulek.....	114
7	Literatura.....	115

1 Úvod

Nejčastější otázkou, která se v hodinách matematiky na základních a středních školách ozývá z lavic, je bezpochyby „k čemu nám to bude dobré?“ Jistě, v odpověď lze pohovořit o nesmírném přínosu matematiky všem možným vědním oborům i praktickému životu. Je tu ale ještě odpověď jednoho matematika, původem z Texasu, která se traduje na různých internetových stránkách s matematickými vtipy. Právil (v překladu): „Z téhle otázky je mi zle. To je, jako když někomu poprvé ukážete Grand Canyon a on se vás zeptá ‚a k čemu je to dobré?‘ Co byste udělali? No, skopli byste ho z útesu.“

Grafická podoba matematiky je, krom titulu této diplomové práce, důvod, proč jsem ve studiu matematiky přestal vidět jenom účelný nástroj podřízený studiu fyziky. Nudné vzorce a nekonečné příklady, tím pro mě středoškolská matematika byla. Možná by u toho i zůstalo, nebýt knihy Jazyk matematiky [6], na jejíchž stránkách se praví: „V dnešní době prudkého rozvoje multimédií má matematika šanci se do jisté míry přiblížit i neodborné veřejnosti. ... Ačkoli je laik schopen proniknout tímto způsobem jen do velmi malé části matematiky, přesto může alespoň zčásti zhlédnout něco z krásy a harmonie, kterou odborník při své práci vidí a prožívá.“

Výše citovaná kniha i jiné, kterých je v Česku dostupných až překvapivě velké množství, se zasloužily o pár krátkých náhledů do krás matematiky, které daly podnět tvořivosti, a ta zas dala podobu této práci. Věřím, že materiály zde obsažené dají čtenáři impuls nahlédnout na matematiku v trochu jiném světle, dát jí pohyb tam, kde mnoho let byla vyvedena v černobílé, nepohyblivé podobě – pokud vůbec.

2 Matematika v pohybu

Nároky na středoškolskou matematiku se zvyšují. Ne snad že by se žáci ve světě, který je na matematice prakticky postaven, toho o tomto všudypřítomném vědním oboru měli naučit více – tam je trend spíš opačný. Nicméně současná společnost si žádá, aby se matematika vyučovala lépe, zábavněji, dynamičtěji. Existují výukové filmy a software, které ovšem, jak už jejich název napovídá, zpravidla vyučují: poskytují studentům více či méně zajímavou formou hotové věci.

Při tom nejlepší formou učení je tvorba. Matematikům obvykle stačí myšlenkový model situace, studenti čas od času potřebují model skutečný, nebo alespoň ilustraci. A je-li tento model či ilustrace interaktivní, tím lépe.

Jedním ze způsobů, jak učinit z matematiky interaktivní, grafickou záležitost jsou počítačová prostředí dynamické geometrie (DGE, dynamic geometry environment). Jejich primárním zaměřením je rovinná, u některých i prostorová geometrie, ale vzhledem k množství algebraických poznatků, které lze geometricky interpretovat, už tato možnost stojí za zvážení o zařazení do výuky.

GeoGebra, jeden z nejrozšířenějších DGE programů, nabízí grafické rozhraní pro mnoho matematických činností. Mimo klasického prostředí pro geometrii obsahuje *Algebraické okno*, kde lze vyčíst souřadnice a rovnice mnoha objektů, a nástroj *Tabulka* určený pro grafickou interpretaci dat. Výhodami programu, které bezprostředně nesouvisejí s grafickou podobou matematiky je možnost spustit jej v podobě webového appletu (bez nutnosti instalace) a volná dostupnost pod licencí GPL.

Tato práce zahrnuje velké množství modelů sestrojených v programu GeoGebra. Obrázek, ke kterému je dostupný model, je za svým číslem v popisu označen hvězdičkou (například obrázek 1 dále v této kapitole). Čím se tyto modely liší od těch ve výukovém softwaru? Jednoduše – byly sestrojeny pomocí digitálních ekvivalentů pravítka a kružítka. Každý student si může vytvořit vlastní, má-li k tomu dostatečnou teoretickou přípravu, nebo alespoň fantazii. A často je k takové činnosti i vybídnut.

Většina pohyblivých modelů ovšem zahrnuje transformace, které student nezná ze základní školy: posunutí a otočení. Posunutí potřebuje ke svému fungování vektory, které jsou látkou analytické geometrie, otočení zase pracuje s různými druhy úhlové míry, které jsou hlouběji prozkoumány až v goniometrii. Na druhou stranu jsou tyto dvě

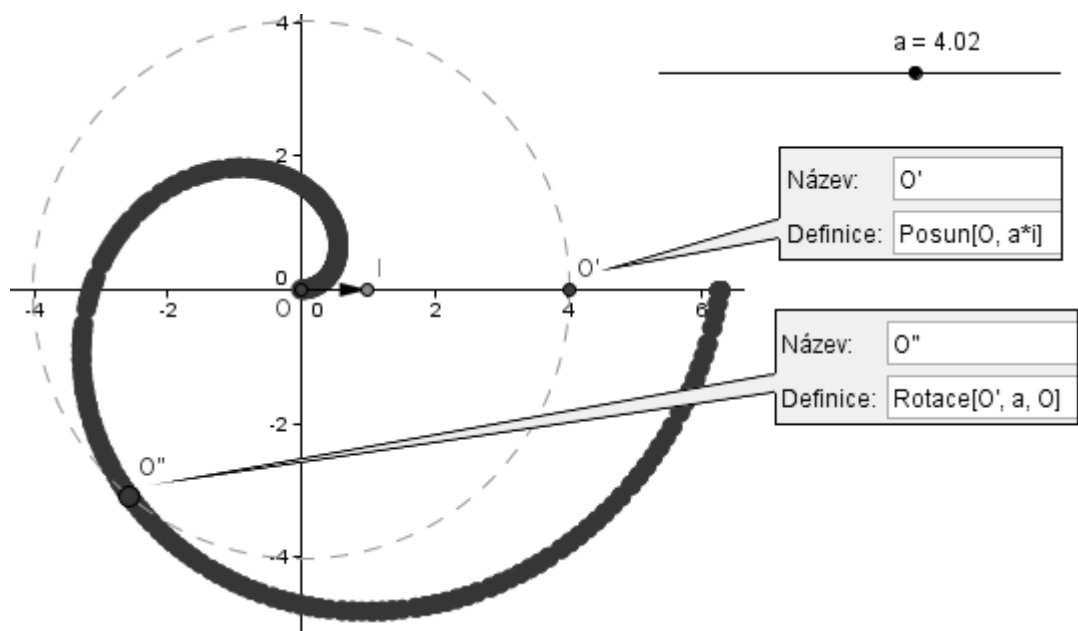
transformace základnější a intuitivnější než osová a středová souměrnost, které látkou ZŠ jsou. Popisují totiž pohyby, z nichž se skládá veškeré dění ve vesmíru: lidé a dopravní prostředky se vesměs posunují, zatímco planety i sluneční soustava obíhají po přibližně kruhových drahách jiná vesmírná tělesa, od hvězd po obří černé díry v jádrech galaxií.

Už v prvním ročníku se studenti ve fyzice učí, že každý pohyb lze složit z posuvného a otáčivého. Hmotný bod, který vykonal pohyb složený z posuvného a otáčivého se nachází v daném okamžiku na tomtéž místě, jako kdyby konal nejprve pohyb posuvný a pak otáčivý, nebo naopak. Matematicky lze toto interpretovat složením transformací, kdy je nejprve vyhodnocena jedna, například posunutí, a následně druhá – otočení.

Jednoduchým příkladem tohoto principu je spirála na obrázku 1 a. Jejím základem je dvojice bodů $O = [0; 0]$ a $I = [1; 0]$ spolu s posuvníkem a . Body O a I definují jednotkový vektor \vec{i} , který sám o sobě znamená „jeden krok v kladném směru osy x .“ Vektor $a \cdot \vec{i}$, kde a je obecně reálné číslo, je tím pádem „ a kroků v kladném směru osy x ,“ přičemž poslední krok lze ukončit v libovolném místě odpovídajícím číslu ze desetinnou čárkou.

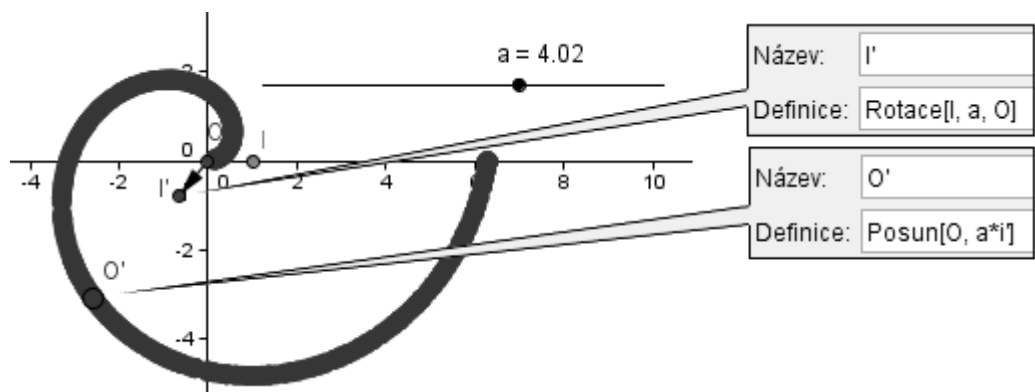
Otočení lze kupodivu definovat na základě stejného čísla a , které nemá stupňovou míru. Ovšem pouze pro pohyb po kružnici s poloměrem 1 (obecněji $|OI|$) platí, že rotace o úhel a (jehož jednotkou jsou radiány; více viz. Kapitola Goniometrie, str. XX) je „ a kroků podél kružnice ve směru proti chodu hodinových ručiček.“

Skutečného vykreslení spirály je dosaženo aktivováním možnosti *Zobrazit stopu* ve vlastnostech příslušného bodu (na obrázku 1 bodu O'') a pohybem posuvníku.



Obr. 1*: Model vykreslující spirálu využívající kombinace posunutí a otočení.

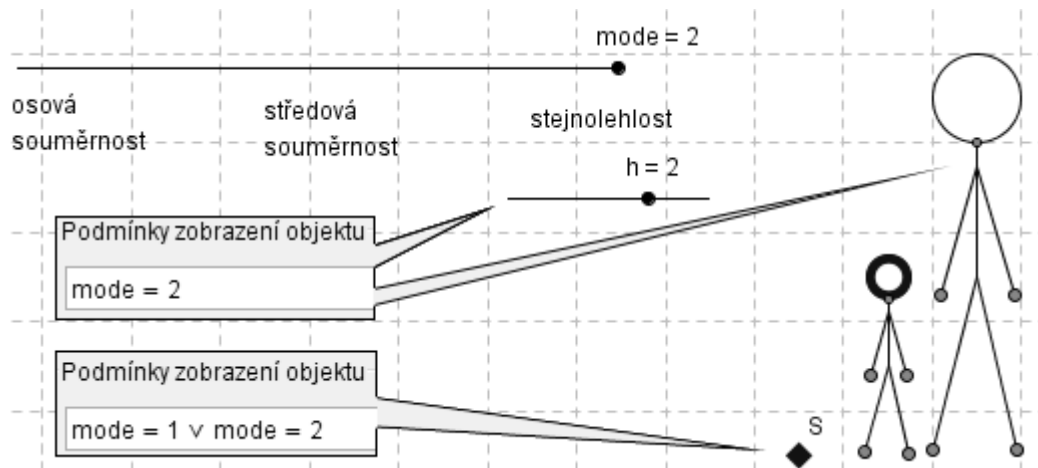
Mimo klasických geometrických nástrojů lze v programu GeoGebra zadávat objekty přímo pomocí příkazového řádku. Syntaxe je shodná s obsahem pole *Definice*. Opačný postup, tedy rotace bodu I kolem O o úhel a (vznikne bod I') a následné posunutí podél vektoru $a \cdot \overrightarrow{OI'}$ vytvoří stopu shodnou s obrázkem 1 (viz. obrázek 2).



Obr. 2*: Model vykreslující spirálu využívající kombinace otočení a posunutí.

Stejně jako mnohé matematické hračky, i modely z obrázků 1 a 2 mají své praktické využití: měřením úhlu $\sphericalangle IOO'$ v modelu na obrázku 2 vznikne převaděč obloukové míry (radiány) na stupňovou. Naopak lze pro některé stupňové hodnoty odečíst jejich velikost v radiánech podle bodů, ve kterých spirála protíná osy: $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad, $180^\circ = \pi$ rad, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ rad, $360^\circ = 2\pi$ rad.

Nástroj *Posuvník* však není neocenitelným pomocníkem jen při animacích pohybu. Program GeoGebra umožňuje nastavit zobrazení určitého prvku v závislosti na podmínkách, které lze řetězit pomocí logických spojek. Posuvník tak může fungovat jako přepínač mezi různými „režimy“ modelu (obrázek 3), nebo postupně zobrazovat konstrukci.



Obr. 3*: Použití posuvníku jako přepínače „režimů“ modelu.

Přepínání režimu se nejlépe realizuje dostatečně širokým posuvníkem opatřeným popiskami. Je dobré mít na paměti, že v programu GeoGebra mají posuvníky automaticky absolutní souřadnice na obrazovce, zatímco texty nikoli. Následně stačí označit všechny objekty týkající se výhradně daného režimu a v jejich vlastnostech na kartě *Pro pokročilé* vyplnit pole *Podmínky zobrazení objektu* příčnou hodnotou posuvníku.

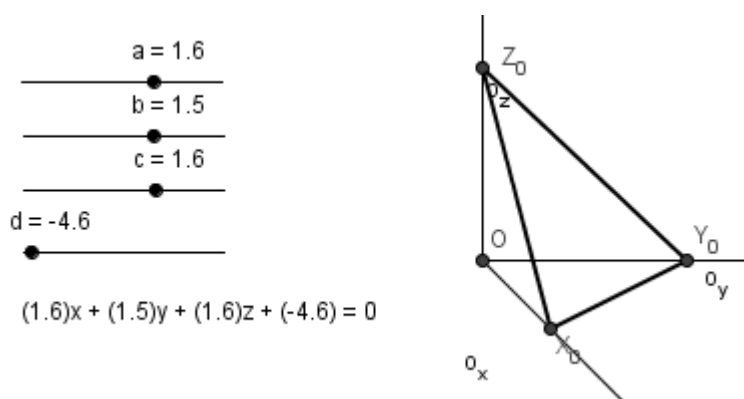
Na obrázku 3 je zachycena i podmínka, kdy jeden a týž bod *S* slouží jako střed středové souměrnosti a stejnolehlosti, a je tedy zobrazen ve více režimech. Ve výše uvedeném případě by toho šlo dosáhnout i podmínkou $\text{mode} \geq 1$, ale pokud by byla pro $\text{mode} = 3$ přidána další možnost, která střed nepoužívá (například posunutí), bylo by potřeba podmínku přepsat nebo dále omezit, například zápisem $\text{mode} \geq 1 \wedge \text{mode} < 3$.

Co se postupného zobrazení konstrukce týče, kromě použití posuvníku a definice viditelnosti objektů pro jeho jednotlivé hodnoty existuje ještě možnost *Zobrazit* \rightarrow *Zápis konstrukce*, kde lze celou konstrukci krok po kroku „přehrát.“ Výhody použití posuvníku jsou nasnadě: v kterémkoli bodě konstrukce lze definovat, které prvky jsou

viditelné, a také lze provést několik kroků najednou – to vše ovšem za cenu větší pracnosti.

Dynamické modely v programu GeoGebra mají však i své stinné stránky, mezi něž patří především změna či ztráta dat při ukládání.

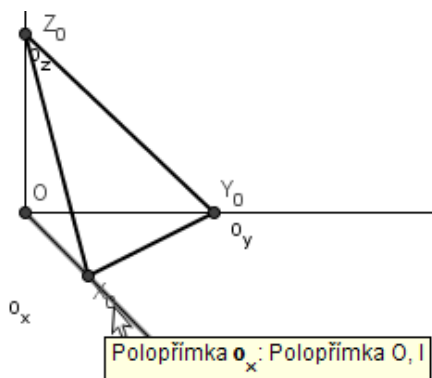
Nejčastějším zdrojem změn dat je závislost modelu na objektu, který má v programu jednu definici, ale více interpretací – například průsečík kružnice a přímky, která je její sečnou, nebo osa úhlu. Čím více takových definic model obsahuje, tím vyšší je pravděpodobnost, že po spuštění bude obsahovat chyby. Příklad velmi citlivého modelu (původem z kapitoly Analytická geometrie) je na obrázku 4. Přestože byl otestován několikanásobným znovuootevřením v tomtéž programu, po otevření na jiném počítači se objevila chyba.



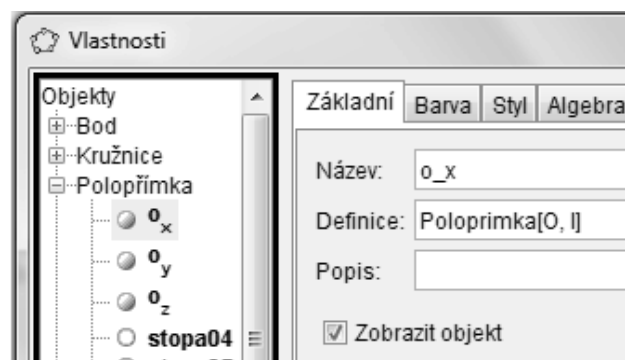
Obr. 4*: Chybné zobrazení modelu polohy rovin.

Nejlepší prevencí vzniku chyb je důsledné používání nástrojů. V případě vícenásobných průsečíků je vhodné vyznačit všechny průsečíky pomocí nástroje *Průsečíky dvou objektů*. Následně je radno ponechat výchozí označení bodů, či alespoň stejné abecední pořadí. Je pak větší pravděpodobnost, že je program po znovuootevření souboru označí správně.

Pokud už se chyba vyskytne, je třeba vypátrat její zdroj. K tomu stačí najet ukazatelem myši nad chybný objekt a zjistit jeho původ (obrázek 5). Pokud nejsou tyto objekty vidět, lze jejich viditelnost změnit buď v algebraickém okně (aktivuje se volbou *Zobrazit* → *Algebraické okno*; zobrazuje všechny objekty, které nejsou definovány jako pomocné) nebo zobrazením vlastností libovolného objektu a přepnutím v levé části, kde jsou vypsány všechny objekty (obrázek 6).



Obr. 6: Zjištění definice objektu.



Obr. 5: Úprava vlastností libovolného objektu či skupiny.

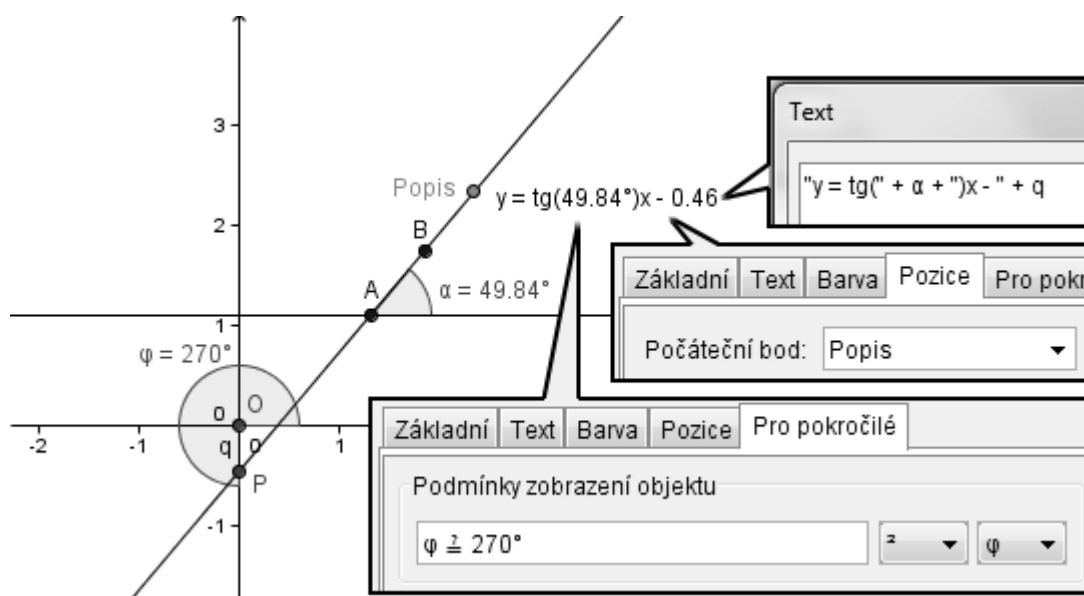
Další postup je zřejmý: je nutné zobrazit všechny objekty, na jejichž základě vzniknul špatně zobrazený útvar, a snažit se najít chybu. Jakmile je tato chyba objevena, je nutné příslušný objekt předefinovat – vytvoření správného objektu a jeho pojmenování názvem zdroje chyby model neovlivní, protože všechny definice obsahující původní chybný zdroj se automaticky předefinují na jeho nové označení. Například vytvoření nového bodu I ve správné poloze neovlivní polopřímku OI z obrázků 4, protože starý bod I se přejmenuje na I' nebo jiný dostupný název, který pak budou obsahovat všechny definice před změnou obsahující bod I .

Pokud tvoří chybný objekt průsečík či jiný útvar, který má běžně dvě a více řešení, tento často nelze předefinovat pouze pomocí změny pole *Hodnota*. Je-li objekt pevný (tedy s ním uživatel nemůže nijak manipulovat), je nejvýhodnější přímo stanovit jeho rovnici či souřadnice. V opačném případě je třeba na citlivost modelu pamatovat a před použitím důkladně prozkoušet jeho funkčnost na všech verzích programu GeoGebra a operačního systému, kde bude tento model používán.

Ztráta dat je obvykle ještě horší než jejich změna. Obvykle k ní dochází u modelů obsahujících objekty, které nejsou v době ukládání definované, například mnohoúhelníky konstruované z bodů, které jsou modelem během animace vytvářeny. Pokud model takové objekty obsahuje, je vhodné je ukládat v takovém místě animace, kde je objekt, jehož ztráta hrozí, definován. Pokud je takových objektů více a tyto se navzájem vylučují (tedy buď existuje právě jeden, nebo druhý), často nezbyvá než na tuto eventualitu pamatovat a před prezentací jeden ze ztracených objektů znova vytvořit.

Jednou ze zajímavých možností programu úzce související s pohyblivými modely je dynamický text. Zatímco u některých objektů lze určité dynamické prvky (souřadnice bodu, velikost úhlu, rovnice křivky) zobrazit přímo vybráním příslušné volby ve vlastnostech daného objektu, některé požadovanou možnost nemají, nebo se jejich popis nachází na nevhodném místě. Oboje tyto situace řeší dynamický text. Je-li to potřeba, je jeho syntaxe u modelů v práci uvedena, v opačném případě ji lze snadno dohledat přímo v daném modelu.

Na obrázku 7 je příklad dynamického textu popisujícího směrnicový tvar přímky AB . Přestože model samotný je nesmírně jednoduchý, jeho popis, tvořený ručně, vyžaduje nejen znalost syntaxe pro dynamický text, ale i matematickou vynalézavost.



Obr. 7*: Tvorba dynamického vzorce pro směrnicový tvar přímky AB .

Jakýkoli text vpsaný na náčrtu pomocí možnosti *Vložit text* se bez použití zvláštní syntaxe vypíše ve své původní podobě. Teprve přidání uvozovek signalizuje programu, že vložený text bude pracovat s jeho proměnnými. Hodnota proměnné, která bude vypsána, odpovídá hodnotě zobrazené v algebraickém okně.

Text vpsaný do uvozovek se zobrazí v té podobě, v níž je zadán. Proměnné, jejichž hodnota je zobrazována, pak musejí být od tohoto textu odděleny značkou $+$. Pro vypsání samotné hodnoty proměnné je pořad nutné použít uvozovky, byť bez obsahu. Textové pole, které má vypsát například hodnotu proměnné a , tak musí mít syntaxi `" + a`. Nakonec pro vypsání uvozovek je nutné použít dvojici apostrofů.

Text lze umístit na určité místo nákresny (případně obrazovky; nastavení lze změnit ve vlastnostech objektu, na záložce *Základní*), nebo přichytit k bodu. Nastavení uchycení se provádí ve vlastnostech objektu na záložce *Pozice*. Je-li uchycen, chová se jako popis příslušného objektu a pohybuje se s ním.

Nakonec, podobně jako pro všechny objekty programu GeoGebra, lze i u textu nastavit podmínky zobrazení.

Možnosti tabulkového procesoru programu GeoGebra zhruba odpovídají ve středoškolské matematice využitelným možnostem kancelářského softwaru, s výjimkou automatického prokládání bodů křivkami.

Důležitou funkcí je výpočet funkčních hodnot. Toho lze dosáhnout snadno: text buňky, která má zobrazit výsledek nějakého výpočtu, stačí zahájit znakem = a dále psát požadovaný vzorec. Hodnotu buňky lze volat zapsáním jejich souřadnic, např. A1. Má-li hodnota buňky A2 být trojnásobkem hodnoty buňky A1, příkaz pro tuto operaci zní: =3*A1.

Program také umí vytvářet posloupnosti zadáním prvních několika členů a „tažením,“ jak naznačuje obrázek 8. Takto lze zadat pouze posloupnosti aritmetické, tedy tvořené opakovaným přičítáním konstanty $k \in \mathbf{R}$.

	A	B	C	D	E
1	1	2			
2					

	A	B	C	D	E
1	1	2	3	4	5

Obr. 8: Tvorba prvních několika členů posloupnosti „tažením.“

Jiné posloupnosti lze vytvořit pomocí vzorce s odvoláním na některý z předchozích členů posloupnosti, přičemž „tažení“ způsobuje postupné načítání souřadnice odpovídající směru pohybu. Pokud by bylo políčko B2 na obrázku 6 definováno: =A1 + 1 a poté „taženo“ (nyní je nežádoucí „táhnout“ i pole A1, protože to obsahuje číslo, nikoli vzorec,) pole C2 by bylo „tažením“ definováno jako =B1 + 1, a tak dále. Výsledek by byl zpočátku stejný, ovšem citlivý na změnu pole A1.

Je-li potřeba určitou souřadnici před tažením „zafixovat,“ aby se výše uvedeným způsobem neměnila, lze toho dosáhnout umístěním znaku \$ před tuto souřadnici.

Zajímavou vlastností programu GeoGebra je, že vytvoření objektu s názvem odpovídajícím souřadnici buňky tabulky má okamžitě za následek vypsání hodnoty tohoto objektu do odpovídajícího políčka tabulky. S takto zadanými body a vektory lze pak v rámci tabulky i pracovat, například je vzájemně sčítat a násobit. Objekty vzniklé pouhým zadáním souřadnic v kulatých závorkách do tabulky jsou body. Podobným způsobem lze vložit i vektor, a to pomocí příkazu =vektor[(x,y)], kde x a y jsou příslušné souřadnice vektoru.

Je samozřejmostí, že na buňky tabulky se lze odvolávat stejně jako na jakékoli jiné objekty programu GeoGebra. Z hlediska dynamických modelů má tabulka v podstatě všechny možnosti posuvníku, jehož hodnoty jsou ovšem nastaveny zadáním určitého čísla ručně. Tabulka je tedy nevhodná pro animace, ale výborná pro rychlé a přesné zobrazení několika zvláštních případů jednoho modelu.

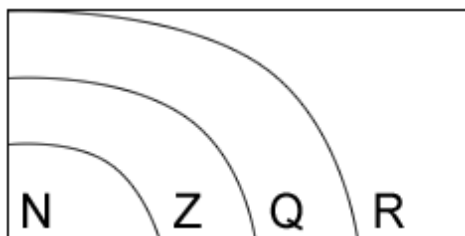
Program GeoGebra prochází neustálým vývojem a je pravděpodobné, že jeho současné chyby budou časem minimalizovány. Jeho dostupnost, široký záběr možných využití a knihovna modelů dostupná přímo na stránkách projektu [27] z něj činí prostředek výuky matematice, který by žádný vyučující neměl nechat nevyzkoušen.

3 Středoškolská matematika – vybraná témata

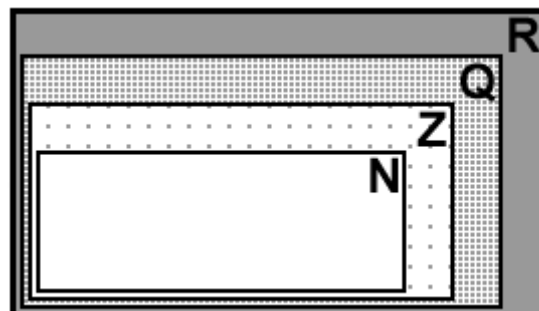
3.1 Základní poznatky z matematiky

První učebnice z řady Matematika pro gymnázia je vesměs souhrnem znalostí, se kterými by žáci měli do studia na vyšším stupni gymnázia vstoupit již ze základní školy. Grafické prvky obsahuje zejména v místech, kde jsou nevyhnutelné (geometrická témata), což je vzhledem k opakovacímu charakteru obsažené látky pochopitelné.

Kniha od samého začátku předpokládá základní znalosti matematických množin a operací s nimi, včetně práce s důležitými grafickými prvky: množinovými diagramy. Konkrétními množinami, s nimiž zde studenti pracují, jsou číselné obory – náplň první kapitoly. Zde je v rámci učebního textu obsažen množinový diagram ilustrující vzájemné vztahy mezi číselnými obory (obr. 9), jehož podoba ovšem není pro pochopení všech důležitých náležitostí ani další práci příliš vhodná.



Obr. 9: Znárodnění číselných oborů množinovým diagramem podle [3].



Obr. 10: Alternativní znárodnění číselných oborů množinovým diagramem s použitím ilustrativního stínování.

Slabší žáci mohou mít s interpretací diagramu na obrázku 9 a problémy. Jeho grafické ztvárnění dostatečně nezvýrazňuje vztahy mezi jednotlivými obory a nepoužívá ani stínování. V úpravě na obrázku 10 jsou jednotlivé plochy uspořádány „krabicovitě“ a odlišeny tečkovaním ilustrujícím „hustotu“ znárodněných čísel: možnosti přirozených čísel při sestupu končí jedničkou. Existence nepřístupné oblasti je proto zvýrazněna nepřítomností stínování. Celá čísla už osazují celou číselnou osu, ovšem řídce. Čísla racionální ji osadí v mnohem větší hustotě, byť ne dokonalé. Spojitosti dosáhnou až čísla reálná.

První podkapitola uzavírá série úloh, z nichž jedna se vyznačuje velkým grafickým potenciálem:

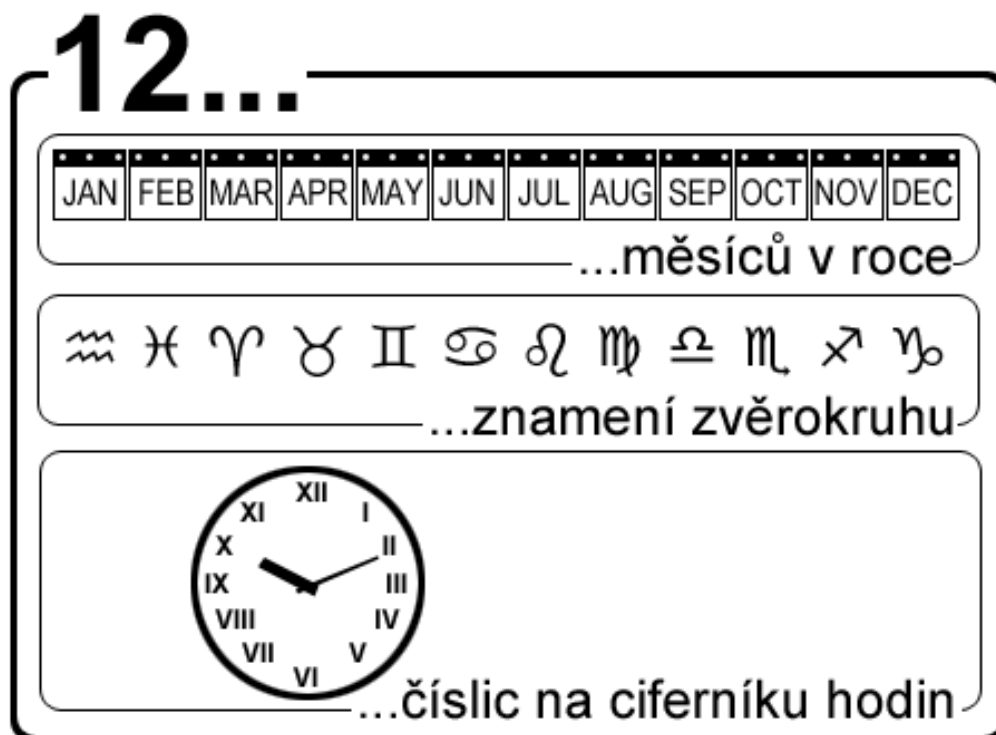
„Překreslete schéma na obrázku 9 a do příslušných částí schématu vepište příklady čísel z jednotlivých číselných oborů.“ ([3], str. 13)

Tato úloha může překročit rámeček grafičnosti a stát se úlohou výtvarnou, aniž by pozbyla svého matematického významu. Úlohou na prověření studentových znalostí, ale i představivosti, může být zakreslení (včetně případného popisu situace) konkrétního objektu tak, aby jeho různé vlastnosti či různé operace s ním prováděné bylo možné interpretovat jako číslo z jednoho z oborů, a každý obor byl využit. Možné řešení takové úlohy ilustruje obrázek 11 využívající oblíbeného matematického modelu „koláče.“ Taková úloha kromě požitku z tvořivé činnosti přinese studentům pochopení, kde mají ta která čísla svůj původ a využití.



Obr. 11: Ilustrace číselných oborů na konkrétním předmětu.

Inspirací k takové činnosti je ilustrace čísla 4 jako „společné vlastnosti“ množin z publikace ([12], str. 42). Podobně význačných čísel se v kultuře objevuje více a často mívají i své vlastní názvy, například tucet (angl. dozen) pro počet odpovídající číslu 12. (Další množiny, jejichž společnou vlastností je číslo 12, jsou na obrázku 12)



Obr. 12: Množiny s číslem 12 jako společnou vlastností.

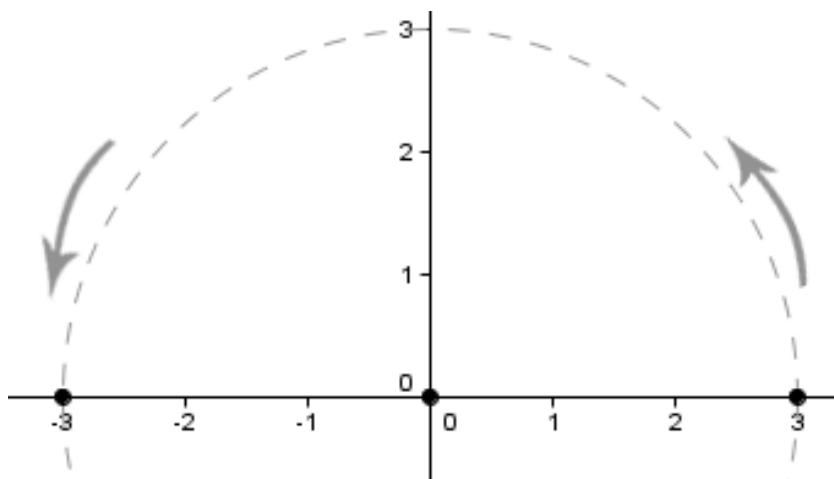
Budou-li mít studenti v úlohách tohoto typu dostatek prostoru pro vlastní úvahy, mohou se objevit i množiny, jejichž „společnou vlastností“ je nekonečno (přirozená čísla, body přímky). To již ovšem není číslem, a dokonce neexistuje ani jediné, „konkrétní“ nekonečno. Například každá z výše uvedených množin čísel je jinak nekonečná – přirozených čísel je spočetně mnoho, bodů přímky, (čísel reálných) nespočetně – a tedy, v jistém slova smyslu, „více.“ Touto problematikou se zabývá teorie množin, popularizovaný výklad lze najít například v ([12], str. 49 – 51).

Příklady a úlohy k oboru celých čísel, zejména ty zaměřené na určení čísel opačných, mohou z grafického hlediska těžit z práce s číselnou osou:

„Opačné číslo k číslu 3 je -3 .“

„Opačné číslo k číslu 0 je 0 (zápis -0 nepoužíváme, píšeme 0).“

„Opačné číslo k číslu -3 je $-(-3)$ a to je 3.“ ([3], str. 17)



Obr. 13: Hledání opačných čísel pomocí číselné osy a kružítka.

Další užitečnou grafickou metodou je hledání racionálních čísel na číselné ose, která bude využitelná i později v klasické, případně deskriptivní geometrii. Úlohy takového typu lze řešit pravítkem a kružítkem, ale je-li k dispozici dostatek počítačů s nainstalovaným programem GeoGebra, mohou studenti jít ještě dál a vytvořit „řešič“ obecnějšího charakteru:

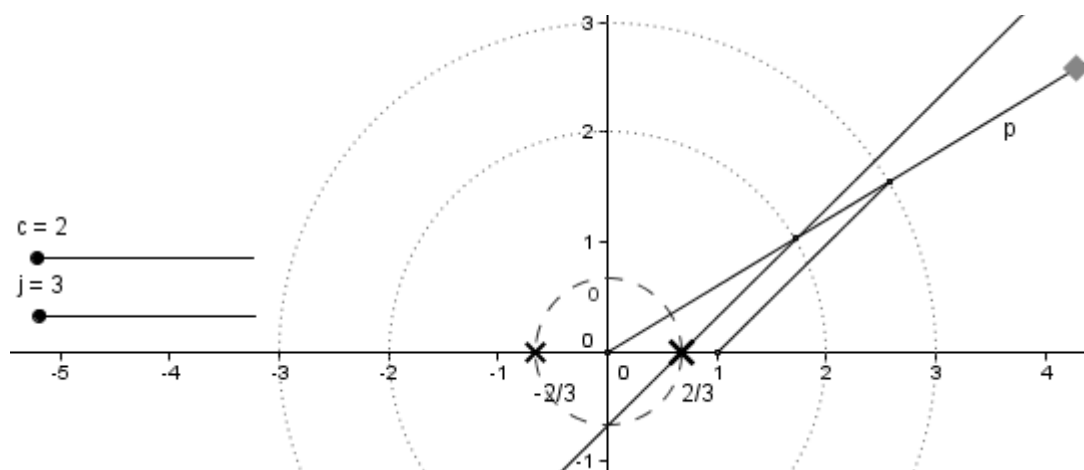
- **Úloha 1:** V programu GeoGebra navrhnete interaktivní nástroj na hledání racionálních čísel s čitateli a jmenovateli od 1 do 100. Dokážete rozšířit obor čísel a) o číslo 0, b) o čísla od -1 do -100 ?

Řešení: Nejprve narýsujeme polopřímku jdoucí z počátku libovolným směrem. (Pro učitele: je vhodné ji nechat neupevněnou, aby se studenti pak manipulací s ní mohli přesvědčit, že výsledek na jejím směru nezáleží – pokud nesplývá s osou; tehdy úloha nemá řešení.) Dále vytvoříme dva posuvníky pro čitatele a jmenovatele. Intervaly nastavíme podle zadání úlohy na 1 až 100, krok na 1. Jejich názvy pak můžeme zadat jako parametr nástroje „kružnice daná středem a poloměrem.“ Ty na zvolené polopřímce vytanou každá po dvojici bodů z nichž pak vedeme potřebné úsečky, případně přímky.

Příklad řešení je na obrázku 14: posuvníky c a j nastavují po řadě čitatele a jmenovatele. Sklon polopřímky p lze měnit tažením zvýrazněného bodu. Zápis

zlomku ve tvaru c/j měnící se v závislosti na obou parametrech je tvořen textem $c + "/" + j$ (resp. $- + c + "/" + j$ pro záporný tvar).

Rozšíříme-li posuvník čitatele (c) o číslo 0, bude náš řešič pořád plně funkční. Rozšíření minima na -100 či jakékoli jiné záporné číslo už ovšem kýžený výsledek nepřinese – nelze totiž narýsovat kružnici o záporném poloměru (nulový poloměr pořád odpovídá kružnici – bodu). Racionální čísla se záporným čitatelem ovšem na číselnou osu vynášet lze, stačí přidat jeden krok konstrukce: kružnici umožňující najít číslo opačné. Tou je na obrázku 14 čárkovaná kružnice o se středem v počátku a procházející bodem odpovídajícím požadovanému zlomku $\frac{c}{j}$ na kladné poloose x . Její druhý průsečík s osou x je pak číslo $-\frac{c}{j}$.



Obr. 14*: Interaktivní nástroj na hledání racionálních čísel v pozici odpovídající číslu $2/3$.

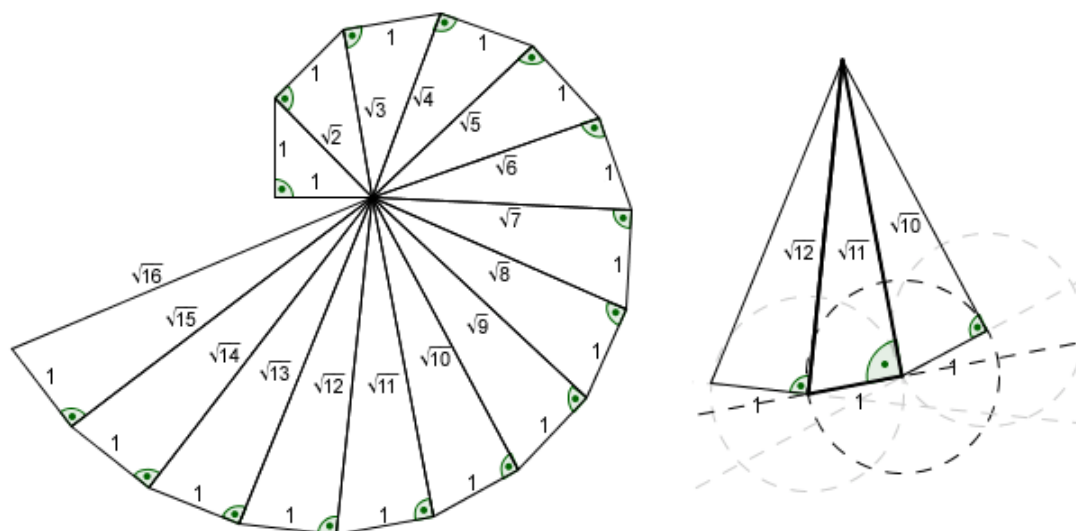
Řešiče tohoto druhu využívají kružnic jako přenašečů vzdálenosti (kružnice je jako *množina bodů stejné vzdálenosti od středu* definována a přesně na tomto principu funguje kružítko). Není to nejúčinnější možnost řešení, protože nedokáže pracovat se zápornými hodnotami, ale studenti ji alespoň v principu dobře znají a pro potřeby úlohy 1 postačuje. Další, o něco pokročilejší „technologie“ bude diskutována u řešiče rovnic s absolutní hodnotou, dále v této kapitole.

„Při grafickém znázorňování racionálních čísel jsme zjistili, že i po znázornění všech racionálních čísel zůstanou na číselné ose ‚neobsazené body,‘ neboť délky některých úseček nejsou racionální čísla.“ ([3], str. 28)

At' už studenti vypracovali příklady z učebnice či zde uvedenou úlohu 1, výše uvedená skutečnost zdaleka nemusí být zjevná. Při hrátkách s řešičem, zejména s vysokými hodnotami jmenovatele, se zdá, že bod racionálního čísla prochází celou číselnou osu plynule. Není-li tomu tak nyní, může student namítnout, lze přeci vždycky zvýšit hodnotu jmenovatele, třeba natolik, aby rozdíly mezi jednotlivými body byly srovnatelné s atomovými (při centimetrovém měřítku by stačilo zvolit jmenovatele 10^{10}).

Zde je tedy nutné přiznat, že grafický přístup, ani s využitím systémů dynamické geometrie, není nejvhodnějším řešením. Ke graficky inspirativnímu vstupu do oboru iracionálních a následně reálných čísel může být použita například „ulita“ z obrázku 15. Jejím základem je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnami jednotkové délky, ostatní pravoúhlé trojúhelníky mají jednu odvěsnu jednotkovou a druhá je tvořena přeponou předchozího trojúhelníka. Posloupnost délek přepon je důsledkem Pythagorovy věty. Následně lze klasickým způsobem dokázat iracionalitu některé z odmocnin, například $\sqrt{2}$. Iracionalnost odmocnin ovšem není pravidlem, i v obr. 15 a jsou tři racionální odmocniny: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ a $\sqrt{16} = 4$.

V nejnovějším 4. vydání učebnice na kapitulu Číselné obory bohužel již nenavazuje kapitola Pravoúhlý trojúhelník, která pomalejším studentům může pomoci konstrukci ozřejmit. Není proto zcela od věci demonstrovat alespoň jeden krok konstrukce (obr. 15 b).



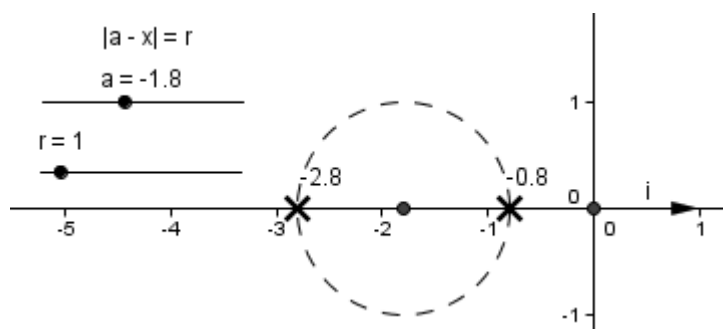
Obr. 15a: Geometrické znázornění řady iracionálních čísel na základě Pythagorovy věty.

Obr. 15 b: Detail konstrukce: kolmice k předchozí přeponě a jednotková kružnice.

Mezi základní poznatky o reálných číslech patří interpretace intervalů jako částí číselné osy. Tento přístup je obzvláště výhodný při řešení nerovnic, zejména těch s absolutní hodnotou. Platí totiž, že „*absolutní hodnota každého reálného čísla je rovna vzdálenosti obrazu tohoto čísla na číselné ose od počátku,*“ ([3], str. 40) a „*vzdálenost obrazů reálných čísel a , b na číselné ose je rovna $|a - b|$.*“ ([3], str. 42)

Protože předchozí věty umožňují grafický přístup k řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou, lze zvážit tvorbu řešiče základních úloh tvaru $|a - x| = r$, podobně jako v úloze 1. Obecný tvar rovnice je volen záměrně tak, aby co nejvíce připomínal tvar $|a - b|$ z věty, a zároveň zmírnil potíže studentů se znaménkem obrazu reálného čísla a na číselné ose, které mohou nastat u standardního tvaru zadání $|x - a| = r$, které je se zde použitým ekvivalentní.

Řešič na obrázku 16, aby mohl obsahovat i záporné hodnoty a , je sestrojen pomocí posunutí. Na rozdíl od poloměrů kružnic totiž mohou vektory, které jsou základem této geometrické transformace, nabývat „záporných hodnot.“ Tam, kde kružnice o poloměru $-a$ (kde a je nezáporné číslo) kolabuje, vektor $-\vec{a}$ má stejnou velikost jako \vec{a} , ale opačný směr. Střed kružnice o poloměru r , určující kořeny rovnice, je obrazem bodu představujícího číslo 0 v posunutí daným a -násobkem jednotkového vektoru \vec{i} mířícího v kladném směru osy.



Obr. 16*: Interaktivní řešič rovnic s absolutní hodnotou v pozici odpovídající rovnici $|-1,8 - x| = 1$.

Vektory už v prvním ročníku střední školy studentům mohou (ale nemusí, jejich výuka není obsažena v RVP G) být známy z fyziky, kde jsou obvykle probírány jejich základní vlastnosti (velikost, směr), skládání (sčítání a odečítání) a násobení skalárem, tedy reálným číslem – vše potřebné ke konstrukcím základních appletů využívajících posunutí.

Množiny teží zejména, jak již bylo řečeno začátkem kapitoly, z diagramů. Množinové operace jsou ilustrovány navzájem se překrývajícími rovinnými obrazy, nejčastěji kruhy, a výsledek operace (někdy včetně dílčích výsledků) je zvýrazněn šrafováním. Šrafování samotné je při tom jen zvýrazňující prvek, obecně nemá s prvky množiny žádnou souvislost.

Nejčastěji užívanými podobami diagramů jsou klasické dvojrozměrné Vennovy diagramy vhodné především k definování množin tvořených objekty tříděné podle vlastností, které nelze vyjádřit čísly (např. barva). Pokud vlastnost množiny číselně vyjádřit lze, obvykle postačí k zakreslení situace intervaly vynášené na číselnou osu. Obě tato témata jsou z grafického hlediska výborně zpracována v učebnici a není tedy nezbytné je dále rozvádět.

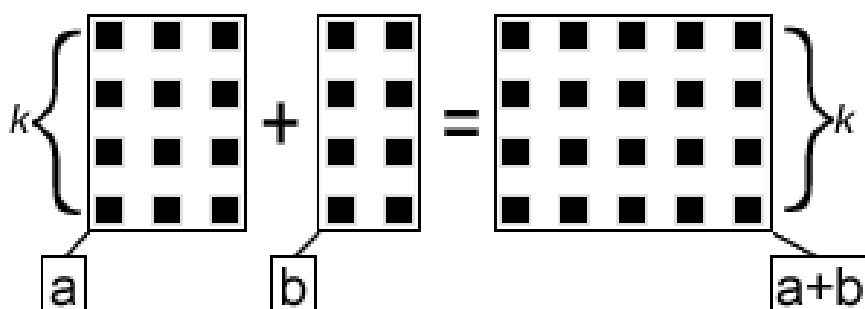
Učivo o výrocích využívá analogie mezi množinovými operacemi a logickými spojkami (viditelné na podobnosti znaků pro některé množinové operátory a logické spojky). Zvláštním grafickým prvkem matematické logiky je do jisté míry tabulka logických hodnot používaná k rozboru složených výroků dostatečně ilustrovaná v učebnici [3].

Důkazy samotných vět formulovaných v podobě výroků grafické být mohou. Je ovšem třeba umět rozlišovat mezi důkazem a ověřením. Obojí, zejména v oblasti geometrických vět, je možné sestavit v systémech dynamické geometrie, které ovšem všechny údaje počítají jen s určitou (velmi vysokou, ale konečnou) přesností. Příklad kontrastu mezi grafickým ověřením a důkazem je ilustrován v závěru kapitoly u problematiky Thaletovy věty.

V elementární teorii čísel je grafika především zprostředkovatelem představy, tedy modelem. Nejčastěji jsou využívány modely skládající se ze souborů uspořádaných čtverečků či kruhů. Takové modely mají svůj původ již v počátcích matematiky, kdy Pythagorejci studovali takzvaná figurální čísla, která měla spojit geometrii s aritmetikou. Jednalo se o přirozená čísla, reprezentovaná v té době kamínky, které byly skládány do různých obrazců. Podle druhu obrazce pak dostalo číslo svůj název, například trojúhelníkové, čtvercové, obdélníkové...

O těchto číslech lze zavést mnohá tvrzení a dokazovat je právě manipulací s modelem tvořeným (či graficky znázorněným) stejnými objekty, s nimiž lze v rámci

možností pomůcky či softwaru libovolně manipulovat. Klasickou ukázkou je jednoduchý důkaz věty $k|a \wedge k|b \Rightarrow k|(a+b)$ podle obrázku 17.

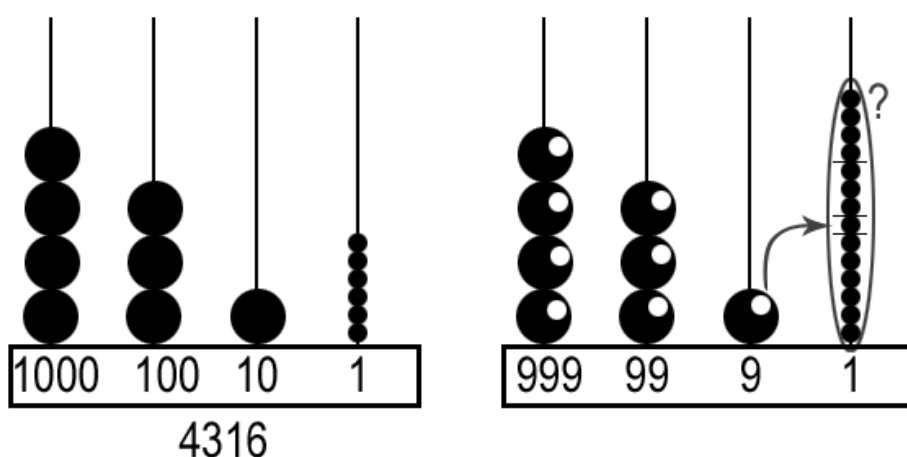


Obr. 17: Ilustrace důkazu věty $k|a \wedge k|b \Rightarrow k|(a+b)$.

Číslo k je společným dělitelem čísel a , b , takže každé z nich lze znázornit obdélníkovým uspořádáním objektů o počtu řádků k . Vhodně provedeným spojením obou obrazců představujících a , b pak vznikne znova obdélníkový útvar „ $a+b$ “ s počtem řádků rovných číslu k .


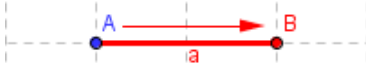
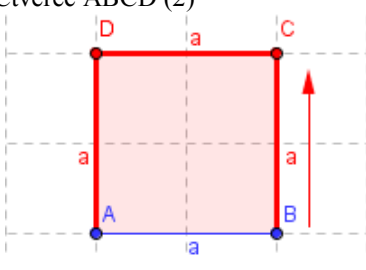
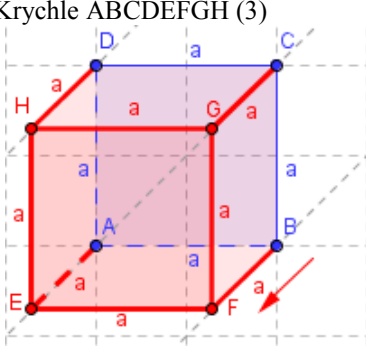
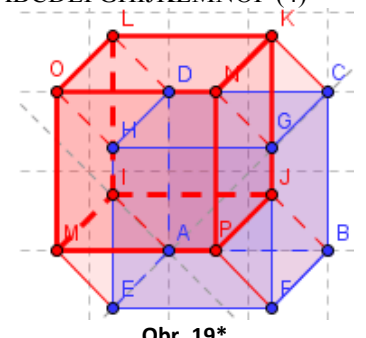
Další možností jsou modely simulující počítadla. Jeden takový model (obr. 18), převzatý z [10], vysvětluje dělitelnost číslem 9, tedy skutečnost, že číslo je dělitelné devíti právě tehdy, je-li v jeho zápisu v desítkové soustavě dělitelný devíti ciferný součet.

„V dalším budeme užívat tzv. řádového počítadla, které je uzpůsobeno tak, že kuličky řádů jednotek jsou malé, kuličky řádů 10, 100, 1 000, ... jsou větší. ... Vymodelujeme-li číslo na řádovém počítadle, můžeme si představit, že od každé jednotky vyššího řádu odečteme číslo jedna (to je na obrázku znázorněno kolečkem s tečkou) a takto vzniklé jednotky přidáme na drát jednotek. Celkový jejich počet je roven cifernému součtu čísla, tj. počtu tisíců, set, desítek a jednotek. A tento součet rozhoduje o dělitelnosti čísla devíti.“ ([10], str. 17)



Obr. 18: Odvození pravidla pro dělitelnost devíti pomocí řádového počítadla. (Zdroj grafiky: [10])

Učivo o mocninách s přirozeným a celým mocnitelem čerpá grafické podněty přímo ze skutečného světa, kde se člověk nepřetržitě setkává s objekty trojrozměrnými (každý reálný předmět) i dvojrozměrnými (průměty, stíny). Druhá a třetí mocnina mají jednoznačnou a snadno znázornitelnou geometrickou interpretaci: plošný čtverec a prostorovou krychli. Tato skutečnost je obzvláště patrná v anglických názvech těchto mocnin, kdy „na druhou“ je „squared“ a „na třetí“ „cubed.“ V češtině je tato skutečnost lépe znatelná u jednotek plochy, resp. objemu, kdy m^2 je „metr čtverečný“ a m^3 „metr krychlový.“ Čtvrtá mocnina už je na představu nesmírně náročná, nikoli ovšem nemožná. Intuitivní postup založený na analogických transformacích a vlastnostech ilustruje tabulka 1.

Útvar (Rozměr)	Jednotka	Vlastnosti
Bod A (0) 	$m^0 = 1$ (bezrozměrná veličina)	Počet vrcholů: 1
Úsečka AB (1) 	m^1 (metr, délka)	Vznikne tažením bodu A o vzdálenost $ a $. Počet vrcholů: 2 Počet hran: 1
Čtverec ABCD (2) 	m^2 (metr čtverečný, plocha)	Vznikne tažením úsečky AB o vzdálenost $ a $ ve směru kolmém na původní úsečku. Počet vrcholů: 4 Počet hran: 4 Počet stěn: 1
Krychle ABCDEFGH (3) 	m^3 (metr krychlový, objem)	Vznikne tažením čtverce ABCD o vzdálenost $ a $ ve směru kolmém k rovině původního čtverce. Počet vrcholů: 8 Počet hran: 12 Počet stěn: 6 Počet buněk: 1
Hyperkrychle (Tesseract) ABCDEFGHIJKLMNOP (4)  Obr. 19*	m^4	Vznikne tažením krychle ABCDEFGH o vzdálenost $ a $ ve směru kolmém k prostoru původní krychle. Počet vrcholů: 16 Počet hran: 32 Počet stěn: 24 Počet buněk: 8

Tab. 1: Rozšiřování rozměrů od nultého po čtvrtý na základě analogie vlastností a transformací.

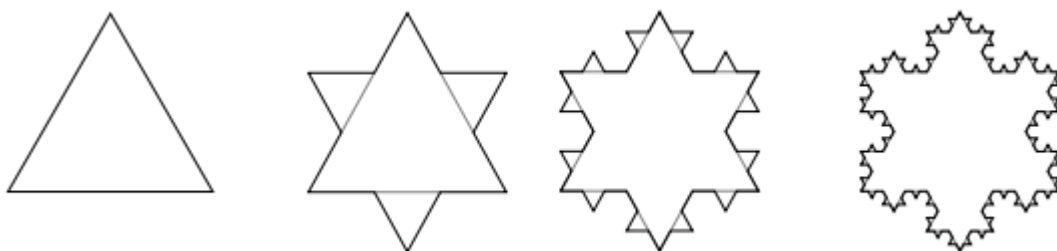
Obrázek 19 navíc nepředstavuje jedinou užívanou představu hyperkrychle. Internet je bohatým zdrojem různých projekcí, z nichž snad vizuálně nejpřitažlivější

jsou Petrieho mnohoúhelníky (Petrie polygons, např. [20]) umožňující zobrazit do roviny nad-krychli rozměru prakticky libovolného.

Mocninu a^n si tedy lze představit jako „objem“ n -rozměrné „krychle“ o hraně délky a . Lze podobnou představu vybudovat i u vzorců pro počítání s mocninami? Jisté možnosti tu jsou, ovšem omezení proveditelných pokusů kladená schopností vnímat a reálně modelovat pouhé tři rozměry prostoru jsou značná. Standardní metody uvedené v učebnici jsou zde účinnější.

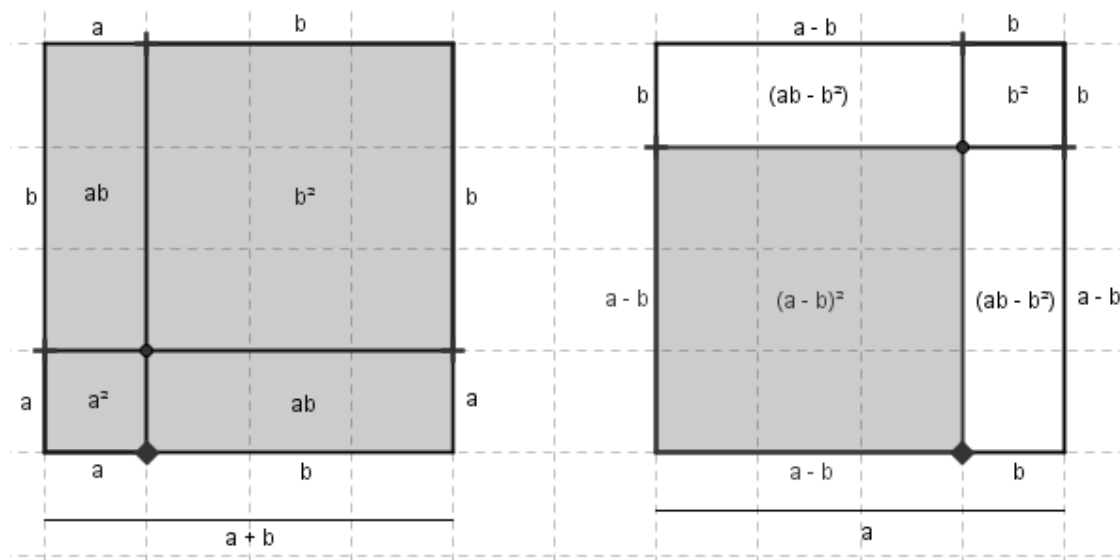
Už jenom grafický pohled na základní vzorce $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ a $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ je nesmírně náročný. Spíše než odvození grafickou metodou je vhodnější vytvořit představu „jak to funguje“ nejprve dosazením například $s = 1$, kterážto situace je studentům již známa, a následně (velmi omezenými) hrátkami s mocniteli. Studenti zkoumají procesy dané levými stranami výrazů již v relevanci s výsledky vpravo. Vědí předem, jaký útvar má vzniknout, úkolem je popsat *jak* a případně stanovit podmínky. Například pro $a^2 \cdot a^2 = a^{2+2} = a^4$ lze provést úvahu analogickou s postupem pro $a^2 \cdot a^1 = a^3$, jen tentokrát nejde o „tažení čtverce po úsečce,“ ale „tažení čtverce po čtverci.“ Úsečka délky a měla jeden koncový bod ve vrcholu čtverce a byla kolmá ke dvěma jeho navzájem kolmým hranám. Aby vzniknul čtyřrozměrný útvar, je nutné čtverec táhnout tak, aby *oba směry* tažení byly současně kolmé k sobě navzájem i k hranám původního čtverce.

Jako zajímavost lze dodat, že dimenze nemusejí být celočíselné. Existují i takzvané zlomkové, neboli fraktálové dimenze navržené matematikem Benoitem Mandelbrotem (1924 – 2010). „Zlomková dimenze nám umožňuje měřit vlastnosti, které jinak nejsou přesně definovány: míru drsnosti, nerovnosti nebo nepravidelnosti objektu... Jednoduchá euklidovská přímka nezabírá vůbec žádný prostor. Avšak Kochova křivka (obr. 20), která je čarou nekonečné délky vměstnanou do konečné plochy, prostor zaujímá. Je to více než přímka a méně než rovina... U Kochovy křivky dává nekonečně se opakující násobení čtyřmi třetinami dimenzi 1,2618.“ ([7], str. 102 – 106)



Obr. 20: „Při konstrukci Kochovy křivky vyjdeme z trojúhelníka o stranách délky 1. Doprostřed každé strany přidáme další trojúhelník třetinové velikosti a postup dále zopakujeme. Délka hranice je $3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \dots$ - a tak dál až do nekonečna. Přesto obsah zůstává menší, než je plocha kruhu opsaného původnímu trojúhelníku. Nekonečně dlouhá čára tedy ohraničuje plochu o konečném obsahu.“ ([7], str. 103) (Zdroj grafiky: [21])

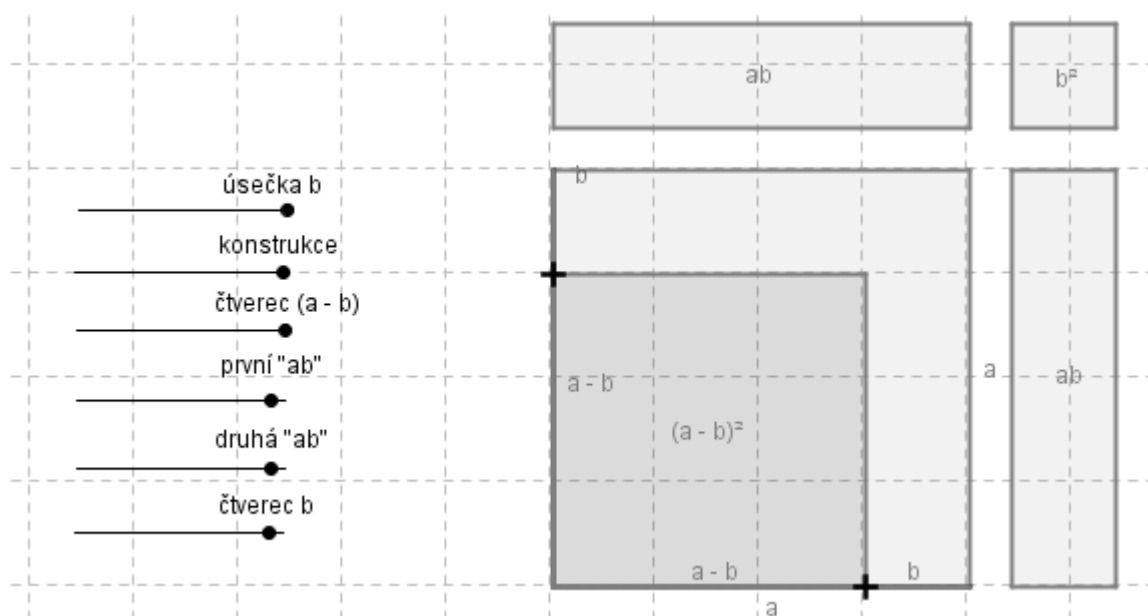
V kapitole Mnohočleny jsou studenti nabádáni, aby výpočtem ověřili správnost vzorců pro druhou a třetí mocninu dvojčlenu. Druhá a třetí mocnina čísla ovšem odpovídá čtverci a krychli se stranou délky odpovídající číslu v daném měřítku. Skutečnost, že je toto číslo výsledkem operace se dvěma jinými čísly (je výsledkem jejich součtu či rozdílu), na tom nic nemění – operace v závorce představuje součet či rozdíl dvojice úseček délek a , b (ještě názorněji úsečka délky a je úsečkou délky b nastavována, či o příslušnou délku krácena) a na výsledku se potom v duchu analogií v tabulce 1 vybuduje požadované těleso. Celý tento proces lze samozřejmě graficky ztvárnit: obrázek 21 ukazuje obvyklé grafické ztvárnění vztahů $(a + b)^2$ a $(a - b)^2$.



Obr. 21*: Odvození vztahů pro čtverce $(a + b)$ a $(a - b)$ „rozřezáním.“

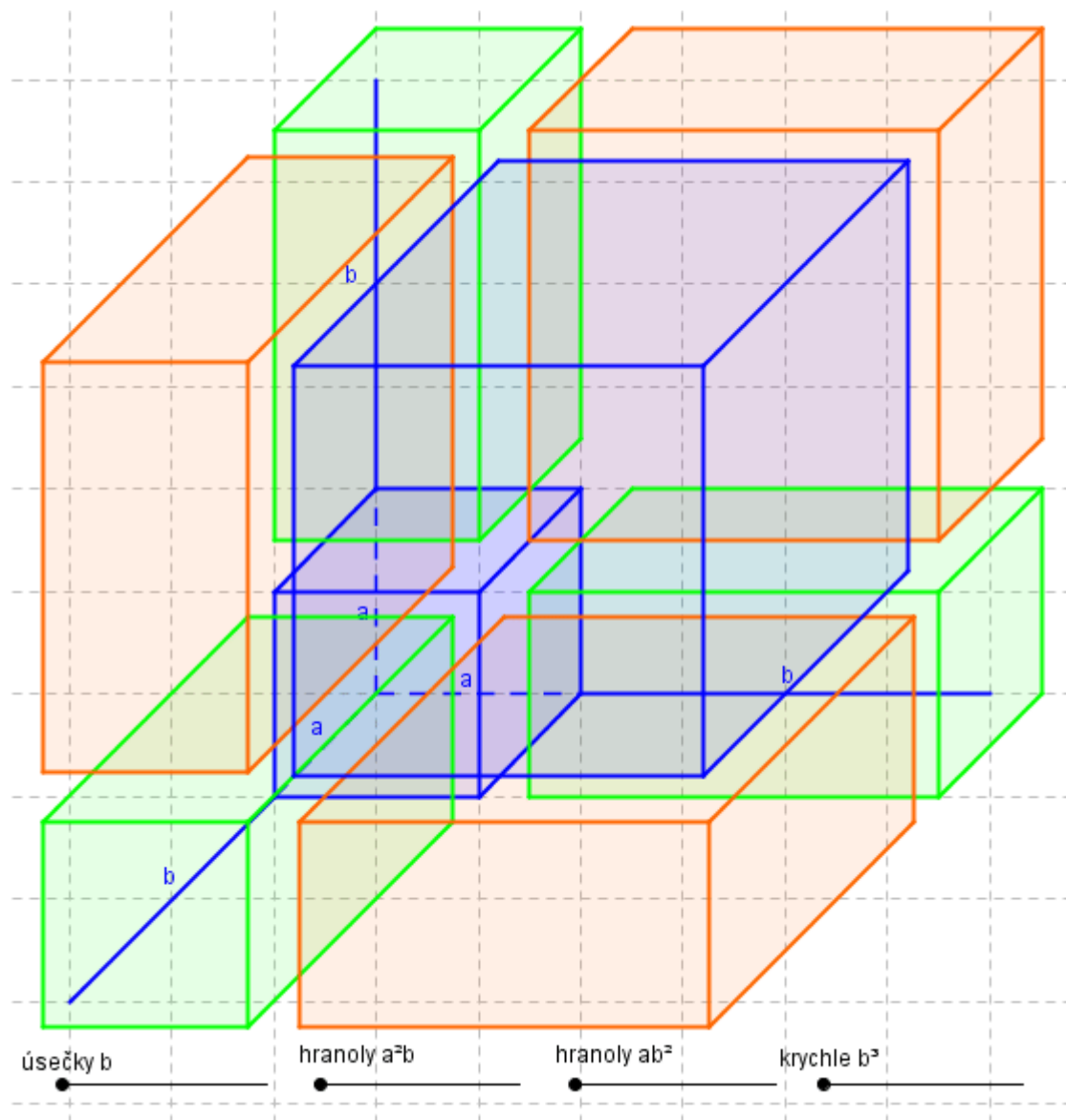
Toto znázornění je ale statické, a zejména u mnohočlenu $(a - b)^2$ mohou mít slabší studenti problém vidět přesný postup. Obrázek 22 ukazuje návrh dynamického modelu postupně rozebírajícího čtverec a : první dva kroky slouží k naznačení, jak původní čtverec rozdělit, aby do něj bylo co nejlépe možné vložit potřebné útvary. Ve třetím kroku je umístěn čtverec, jehož obsah odpovídá vzorci $(a - b)^2$. Zbylé tři posuvníky postupně přidávají útvary o obsahích ab , ab a b^2 , z nichž (a původního útvaru a^2) je složen rozklad vzorce, tedy:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



Obr. 22*: Dynamický grafický model pro rozklad mnohočlenu $(a - b)^2$.

Obdobným způsobem lze vypracovat i dynamické modely „krychlových“ vzorců. Jeden z nich, konkrétně ilustrace vzorce $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, je na obrázku 23: k původní krychli o délce hrany a (objemu a^3) je nejprve připojena trojice úseček b (vzniknou tři hrany budoucí krychle „ $a + b$ “). Následují dvě trojice kvádrů o objemech a^2b (na obr. 23 vyznačeny zeleně) a ab^2 (oranžové) a konečně krychle o délce hrany b . Správným seskládáním těchto osmi těles potom vznikne krychle o objemu $(a + b)^3$, což je účelem demonstrovat.

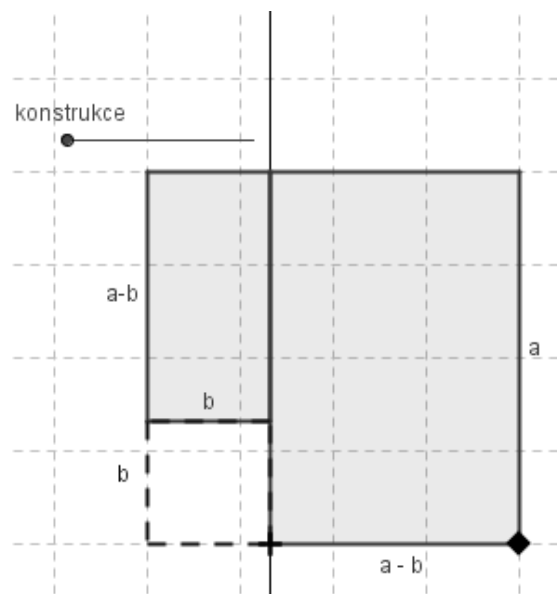


Obr. 23*: Dynamický model pro rozklad mnohočlenu $(a + b)^3$.

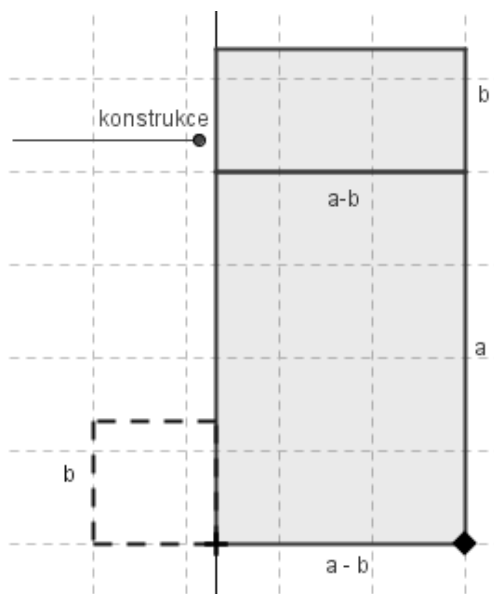
Dynamika těchto modelů je výhodou, ale nikoli podmínkou. Skutečně dynamické úvahy vyžadují až ověření rozkladů mnohočlenů, zahrnující i důležitý vzorec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Algebraické ověření tohoto vzorce je triviální, geometrické již vyžaduje jistou dávku vhledu. Řešitel musí kromě správné geometrické interpretace obou stran rovnice útvary vhodně „rozřezat“ a odpovídajícím způsobem „přeskládat.“ Vrcholem takové činnosti je model, který její průběh a výsledky ilustruje přehlednou transformací původního objektu v nový, názornější.

Příklad takového modelu je na obrázku 24: z rohu čtverce o straně a je „odstřižen“ čtverec strany b (to odpovídá rozdílu obsahů $a^2 - b^2$). Zbýlý útvar je pak

„rozříznut“ přímkou vedenou podél jedné ze stran čtverce b ležící uvnitř původního čtverce a (obr. 24 a). Přeskupením vzniklých dvou částí tak, aby měly hranu délky $(a - b)$ společnou (obr. 24 b), vskutku vznikne obdélník o stranách $(a + b)$ a $(a - b)$.



Obr. 24* a: Grafické znázornění $(a^2 - b^2)$.



Obr. 24* b: Grafické znázornění $(a - b)(a + b)$.

Složitější mnohočleny na první pohled znázornit graficky v podobě těles příslušných rozměrů nelze, neboť běžně sčítají či odečítají navzájem neslučitelné veličiny jako například obsah a délku ($x^2 + x$). Z ekvivalentního zápisu $x^2 + 1 \cdot x$ je už však patrné, že při „doplnění“ všech útvarů nižších dimenzí na útvar nejvyššího rozměru obsaženého v rovnici pomocí jednotkových úseček tento problém mizí. V lineárním případě tento poznatek aplikovat lze: v zásadě se jedná o práci s číselnou osou, na níž se od počátku pokládají úsečky známé a neznámé délky tak, aby jejich součet (resp. rozdíl) dal požadované číslo. Už od poměrně jednoduchého kvadratického polynomu je však výhodnější přístup algebraický.

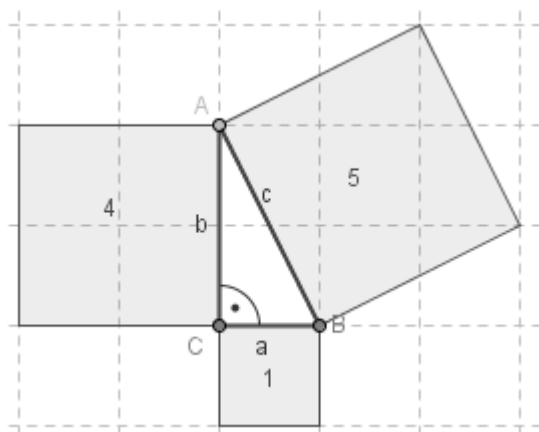
Pravouhlý trojúhelník jakožto geometrické téma nabízí velké množství zadání řešitelných zároveň početně i graficky, navíc často obecně. Základem učiva jsou Pythagorova a Thaletova věta.

Geometrická podstata obou vět dovoluje vstup systémů dynamické geometrie, které lze použít k ověření jejich platnosti. Student ověřující platnost zkonstruuje libovolný model představující situaci větou popsany, načež změnou parametrů modelu

(krom těch vyžadovaných předpoklady věty, například pravost určitého úhlu) zkoumá změnu výstupu, a zda je tento v souladu s tvrzením.

Ověření obecně neklade žádné jiné nároky než schopnost zkonstruovat popsany model v určitém softwarovém prostředí. Nejsložitější částí tohoto úkolu je zajistit bezchybný chod modelu při manipulaci a zároveň co největší volnost pro experimentátora. Tato činnost je pro studenty velmi přínosná, protože obsahuje požadavky na přesnost geometrické konstrukce, které jsou po nich vyžadovány, ale úkol je zároveň relativně snadný, práce s modelem je hravého charakteru, a při manipulaci s ním lze odvodit i další matematické domněnky a dále je zkoumat či dokazovat.

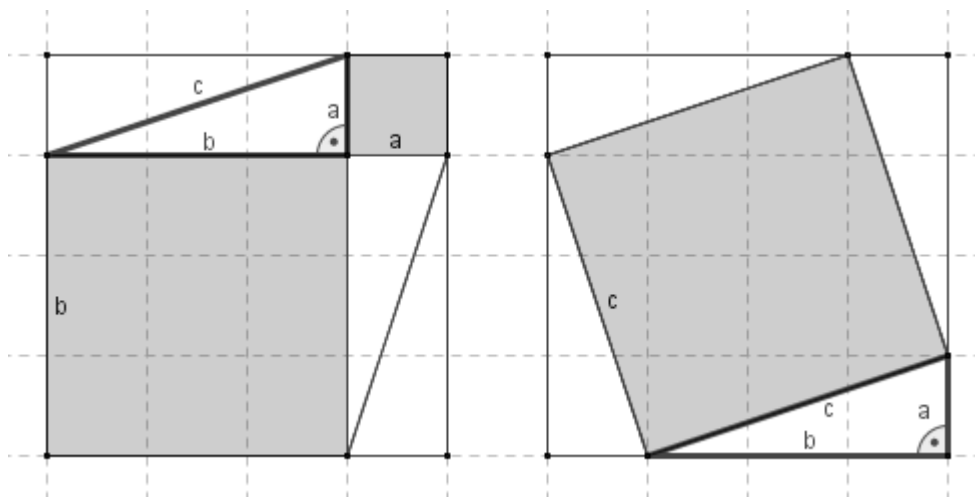
Model pro ověřování Pythagorovy věty je na obrázku 25. Během konstrukce a manipulace je nutné zajistit, aby úhel ACB byl vždy pravý a útvary sestavené nad jeho odvěsnami byly čtverce. Ty mohou studenti sestavit pomocí klasických nástrojů (kolmice, kružnice daná středem a bodem), v matematicky zdatnějších třídách lze představit velkou úsporu práce při konstrukci čtverce použitím transformace otočení jednoho z krajních bodů odvěsny o pravý úhel kolem druhého a naopak. Po zobrazení obsahů (v programu GeoGebra „hodnot“) čtverců lze snadno výpočtem zkontrolovat, že po libovolné transformaci modelu součet obsahů čtverců nad oběma odvěsnami je roven obsahu čtverce nad jeho přeponou.



Obr. 25*: Ověření platnosti Pythagorovy věty pomocí modelu v programu GeoGebra.

Ověření ovšem zdaleka není důkazem. GeoGebra i jiné podobné programy všechny vložené objekty propočítávají s velmi vysokou, ale konečnou přesností, což matematice nestačí. Zdálo by se tedy, že pouhá hra s objekty k důkazu vést nemůže, ale opak je pravdou: obrázek 26 ukazuje důkaz Pythagorovy věty založený právě na

manipulaci se správně zvolenými geometrickými útvary: základním je pochopitelně pravouhlý trojúhelník, dalšími čtverce, pro jejichž obsahy (resp. jejich součty) je dokazována rovnost. Cílem je doplnit útvary na obou stranách rovnice tak, aby bylo možné jednoznačně srovnat jejich obsahy. Nalezením jejich vhodného uspořádání, případně doplnění dalšími útvary (třemi trojúhelníky shodnými s původním), jejichž příspěvky k oběma stranám rovnice jsou stejné, do dvojice čtverců shodné plochy, je věta dokázána.



Obr. 26: Důkaz Pythagorovy věty různým „rozřezáním“ dvou čtverců shodného obsahu.

Postup ověření Thaletovy věty je obdobný. Sestrojení modelu neskrývá žádná úskalí, grafický důkaz využívající dělení a analýzu úhlů trojúhelníků je srozumitelně předveden v učebnici.

Jak již bylo řečeno, první učebnice z řady Matematika pro gymnázia slouží především k opakování, jež ovšem není radno zanedbat. Na základě studentům již známé, nebo alespoň povědomé látky stanovuje od základní školy mírně odlišné postupy, jejichž těžiště se dále posouvá od úkonů výpočetních k logickým. Stručněji řečeno tato učebnice učí studenty, jak se učit středoškolskou matematiku.

Zařazení co nejvíce grafických prvků do tohoto opakování možná zabere více času, ale zmírní šok z přechodu na vyšší obtížnost učiva a dá studentům do rukou velmi mocný nástroj k řešení matematických problémů představou a intuicí, spíše než mechanickým hledáním vzorce, který „nějak dobře vychází.“

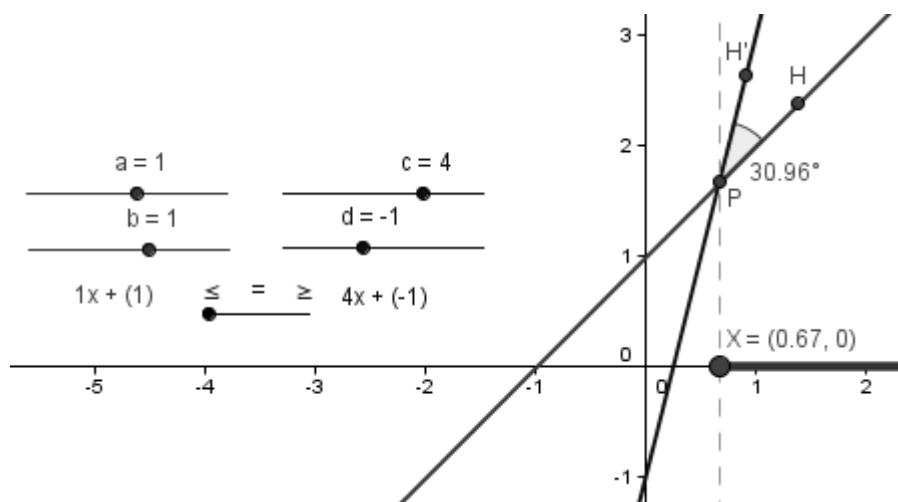
3.2 Rovnice a nerovnice

Z grafického hlediska jsou v látce rovnic a nerovnic předmětem zkoumání průsečíky grafů odpovídajících výrazům na obou stranách rovnice či nerovnice. Právě v nich totiž nastává rovnost a nerovnost je pak záležitostí rozhodnutí, kterým směrem se od bodu rovnosti vydat.

Rovnice a nerovnice na středoškolské úrovni jsou obvykle řešitelné ryze algebraicky a grafická interpretace má především ilustrativní charakter. Také se povážlivě překrývá s grafickou částí učiva funkcí - jde vlastně o zanesení dvou a více funkcí do jediného grafu. Její význam bývá zpravidla snižován, protože odečítání výsledků z modelu, ať už jakkoli přesného, je vždy zatíženo chybou. Na druhou stranu lze grafickou metodou snadno získat alespoň přibližný vhled do výsledku, pokud vůbec nějaký existuje, a přizpůsobit tomu výpočet.

Na rozdíl od hledání průsečíku funkcí může být na rovnici či nerovnici položen další omezující požadavek, například řešení v oboru přirozených čísel. Ten má přitom své praktické opodstatnění, protože existují nejen spojité, ale i diskrétní veličiny, například peníze. Důležitým bodem při řešení lineárních rovnic a nerovnic je tedy uvědomění, zda je řešením část přímky, či množina izolovaných bodů.

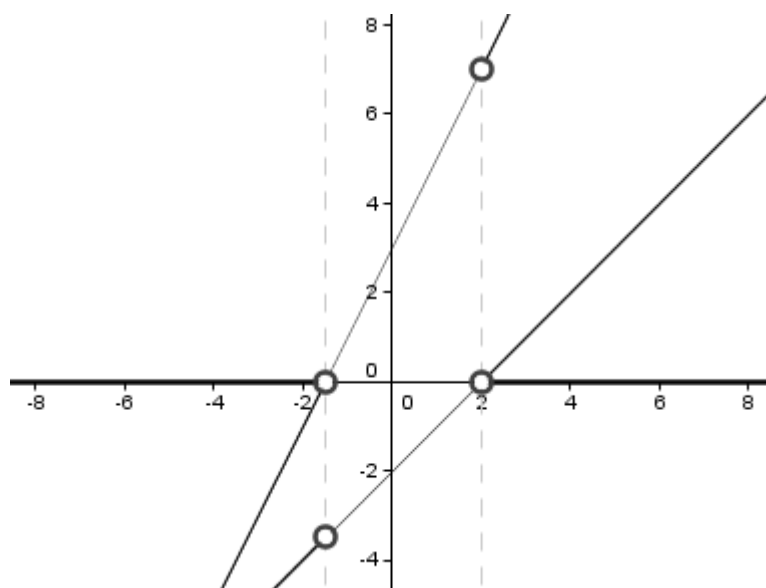
Grafické řešení lineárních rovnic s jednou neznámou bylo v podstatě již představeno v kapitole Funkce. Řešič z této kapitoly lze snadno rozšířit, aby znázorňoval řešení v oboru reálných čísel nejen odpovídající rovnice (kterým není průsečík přímek jako takový, ale jeho kolmý průmět na osu x), ale i nerovnic. Jeho sestavení by mělo být v silách studentů gymnázia, i když „trik“ jak vysvětlit program, která z polopřímek se nachází „nad“ druhou vyžaduje jistou dávku matematické fantazie. Dobrou metodou je například měření úhlu s vrcholem v průsečíku přímek a rameny určenými dvěma body ležícími na porovnávaných polopřímkách (obrázek 27).



Obr. 27*: Dynamický grafický řešič lineárních rovnic a nerovnic v pozici $x+1 \leq 4x-1$.

Nechť je $\sphericalangle HPH' \equiv \alpha$. Pro $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ je polopřímka PH' „nad“ polopřímkou PH a hodnoty funkce, jejíž graf tuto polopřímku obsahuje, jsou od bodu X , kolmého průmětu bodu P na osu x , větší než hodnoty funkce, jejíž graf obsahuje polopřímku PH .

Co se soustav lineárních nerovnic týče, jejich řešením je průnik množin řešení jednotlivých nerovnic. Rovnice, od nichž se tyto nerovnice odvíjejí, bývají zadány ve tvaru $ax + b = 0$, nebo je výhodné tyto na takový tvar upravit, protože výsledkem rovnice je přímo průsečík s osou x . Následně zbývá určit příslušné polopřímky a jejich průnik. Dostatek příkladů včetně grafických znázornění řešení lze najít v učebnici [9]. Zajímavý grafický přístup mají nerovnice v součinovém tvaru. Algebraický zápis příslušné rovnice je $(ax + b)(cx + d) = 0$ a řešení spočívá ve zkoumání, na kterých intervalech x jsou přímky $p: y = ax + b$ a $q: y = cx + d$ buď ve stejné polorovině dané osou x , nebo v polorovinách opačných. Zde je konkrétní příklad převzatý z učebnice ([9], str. 41 - 43): „Řešte nerovnici $(x - 2)(2x + 3) > 0$ Graficky si dvě uvažované soustavy nerovnic můžeme představit takto: $y = x - 2$ a $y = 2x + 3$ jsou rovnice přímek. První z nich protíná osu x v bodě $[2; 0]$, druhá v bodě $[-\frac{3}{2}; 0]$. Výrazy $x - 2$ a $2x + 3$ mají stejná znaménka právě pro ta x , pro která body $[x; x - 2]$, $[x; 2x + 3]$ uvažovaných přímek leží oka nad nebo oba pod osou x .“ Toto ilustruje obrázek 28.



Obr. 28: Grafické řešení příkladu $(x-2)(2x+3) > 0$.

Tímto postupem lze *de facto* graficky řešit kvadratické nerovnice bez znalosti grafů těchto funkcí. Pro rovnice takový postup pozbývá smysl, protože kořeny je možné vyčíst přímo z rozkladu.

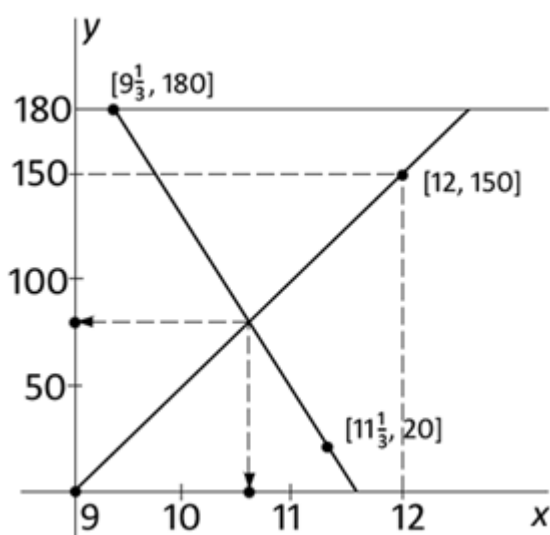
Grafické zacházení s absolutními hodnotami, včetně tvorby jednoduchého řešiče pro rovnici ve tvaru $|a - x| = r$, již popsaly kapitoly Základní poznatky z matematiky a Funkce. Možnost využití absolutních hodnot na libovolný výraz prakticky znemožňuje tvorbu dostatečně obecného řešiče. Přesto lze program GeoGebra využít ke grafickému řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami – stačí zadat obě strany rovnice či nerovnice ve funkčním tvaru $f: y=(\text{výraz})$, najít průsečíky a zjistit jejich x -ovou souřadnici. Příkaz pro absolutní hodnotu je $\text{abs}(x)$.

Lineární rovnice se dvěma neznámými $ax + by = c$ představuje z grafického hlediska tutéž přímku jako rovnice $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, přičemž $b \neq 0$. Pro $b = 0$ má lineární rovnice tvar $ax = c$ a jejím grafickým znázorněním je přímka rovnoběžná s osou y protínající osu x v bodě odpovídajícím číslu $\frac{c}{a}$.

Je nezbytné dodat, že řešením je nyní celá přímka, nikoli jediný bod na ní ležící, jako tomu bylo u lineární rovnice s jednou neznámou. Analogicky řešením lineární nerovnice se dvěma neznámými není v oboru reálných čísel polopřímka, ale polorovina hraničící s přímkou $ax + by = c$, o jejíž inkluzi rozhoduje ostrost nerovnosti. Přidání

neznámé do rovnice či nerovnice má tedy význam přidání dalšího prostorového rozměru.

Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých, pokud taková soustava řešení má, nebo jich nemá nekonečně mnoho, je bod v rovině. Tyto soustavy zadané rovnicemi tvaru $ax + by = c$ lze graficky řešit vynesemím příslušných přímek a hledáním jejich průsečíku. Existují ovšem jiné typy příkladů, zejména slovních úloh o pohybu, které kladou na konstrukci grafického řešení lehce odlišné nároky. Jedna taková úloha je obsažena i v učebnici ([9], str. 98): „Ze stanice A vyjíždí v 9 hodin do stanice B, která je od A vzdálena 180 km, nákladní vlak konstantní rychlostí $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Ze stanice B jede do A po vedlejší koleji rychlík konstantní rychlostí $80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, čas jeho odjezdu z B je 9 hodin 20 minut. V kolik hodin a na kterém místě se vlaky setkají?“ Grafické řešení představuje obrázek 29.



Obr. 29: Grafické řešení úlohy o pohybu. (Zdroj grafiky: [9]).

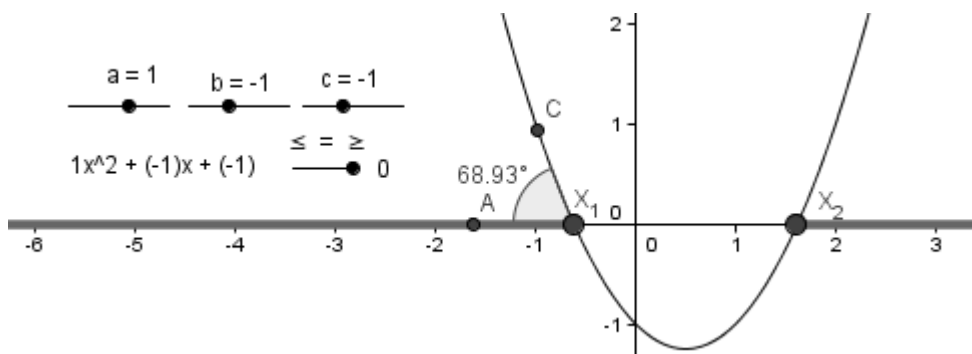
Největší změna leží ve skutečnosti, že počátek jednoho z pohybů není v počátku soustavy souřadnic. Naopak, tento pohyb začíná v „cílové vzdálenosti“ a podle sklonu přímky je vykonáván „zápornou rychlostí“ (rychlost rovnoměrného pohybu je směrnici odpovídající přímky; viz. kapitola Funkce. To je zcela v pořádku, protože rychlosti uvedené v zadání příkladu jsou velikosti, tedy absolutní hodnoty, rychlostí, které jakožto vektorové fyzikální veličiny zahrnují i směr.

Řešení kvadratické rovnice je z grafického hlediska v dostatečné šíři zmíněno v kapitole Funkce. Jediný rozdíl mezi jeho prezentací zde a v učebnici [9] je v přístupu

k řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Kde funkce hledají průsečík paraboly odpovídající rovnici s osou x (přímku s rovnicí $y = 0$), učebnice preferuje hledat průsečíky paraboly $p: y = ax^2$ s přímkou $q: y = -bx - c$. Výhodnost tohoto postupu se projeví především při nedostupnosti výpočetní techniky a v situaci, kdy studenti neznají způsob určení souřadnic vrcholu paraboly s rovnicí tvaru $y = ax^2 + bx + c$.

Parabola $p: y = ax^2$ má totiž vrchol vždy v počátku, její tvar lze přibližně určit vynesemím několika bodů. S vynesemím přímky $q: y = -bx - c$ by žádný student neměl mít problémy.

Mechanismus grafického řešení kvadratických nerovnic je podobný lineárním – jde v podstatě o rozhodování, která část paraboly se nachází pod, resp. nad danou přímkou, kterou může být v duchu výše uvedeného řešení rovnic buď osa x nebo přímka $q: y = -bx - c$. Na zvoleném způsobu také závisí postup případné tvorby interaktivního řešiče, přičemž řešič na bázi rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ (na obrázku 30) lze díky menšímu počtu kroků vedoucích k řešení (kterým je v obou případech podmnožina osy x) sestavit rychleji.



Obr. 30*: Dynamický grafický řešič kvadratických rovnic a nerovnic v pozici $x^2 - x - 1 \geq 0$.

Řešení rovnic a nerovnic představují důležitý krok v matematické abstrakci, protože nutí studenta přejít od známých konstant k neznámým proměnným. Grafické zpracování úloh pomáhá tomuto obtížnému kroku zpřehledněním učiva a přidáním na intuitivnosti postupů.

3.3 Funkce

Učebnice Matematika pro gymnázia: Funkce je z grafického hlediska zpracována velmi kvalitně, byť i zde občas citelně schází barevné zvýraznění grafů či jejich částí. S použitím počítačů, třeba i bez speciálního matematického softwaru (stačí libovolný kancelářský tabulkový procesor), lze ale většinu obrázků sestavit a libovolně s nimi manipulovat.

Už samotná definice funkce na množině $A \subset \mathbf{R}$ jako předpisu, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo, má grafický význam: určitý graf vyjadřuje funkci tehdy, pokud rovnoběžka s osou y vedená libovolným bodem osy x o souřadnici $x \in A$ protne křivku grafu v právě jednom bodě.

S lineárními funkcemi a jejich grafy pracovali studenti ve fyzice při řešení úloh o rovnoměrném přímočarém pohybu. Podobné úlohy obsahuje i matematika a jsou oblíbenou náplní olympiád. Je tedy vhodné již nyní studenty vést k osvojení poznatku, že geometrické obrazce vznikající v grafech (zpravidla více včleněných) funkcí jsou totožné s odpovídajícími geometrickými objekty a pro obojí platí stejná pravidla. U lineárních funkcí jde navíc o přímky, jejich části, či obecně mnohoúhelníky jimi ohraničené; studenti mají k těmto objektům velké množství nástrojů již z předchozího studia, například vzorce k počítání plochy pod lineární funkcí na intervalu (zpravidla lichoběžníka) reprezentujícího určitý integrál.

Chybí sice analytická geometrie, která by studentům umožnila převádět řeč obrazců do algebraických výrazů, ale klíčový poznatek mají na dosah:

- **Úloha 2:** V programu GeoGebra vytvořte dvojici posuvníků a , b a do vstupu zadejte rovnici lineární funkce $y = a * x + b$.
 - a) Zjistěte úlohy parametrů a , b v rovnici lineární funkce a navrhněte pro ně názvy.
 - b) Navrhněte minima, maxima a kroky v intervalech posuvníků a , b tak, aby model byl co nejnázornější. (Rada: zapněte stopu přímky a projed'te všechny hodnoty jednoho z posuvníků. Výsledný obrázek by měl být přehledný, ale přesto obsahovat dostatek údajů pro vyvozování myšlenek a závěrů.)

Řešení: S modelem samotným by studenti neměli mít problémy. U přímky lze zobrazit její algebraické vyjádření v jejích vlastnostech zatržením možnosti *Zobrazit popis* a vybráním položky *Hodnota*. Alternativní možností je vložení textu:

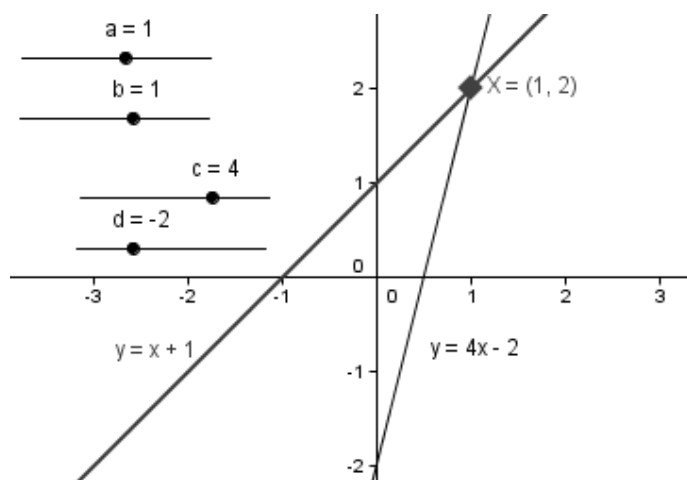
"y = " + a + "x + " + b.

- a) Parametr a se nazývá *směrnice* přímky a určuje její sklon. Při kladném a přímka stoupá, pro $a = 0$ je rovnoběžná s osou x a při záporném a klesá. Spád roste s rostoucí hodnotou a .

Parametr b nemá v matematice žádný konkrétní název. Určuje průsečík přímky s osou y .

- b) Rozumnými hodnotami pro posuvník a je interval do $\langle -10; 10 \rangle$ s krokem 1. Posuvník b může být použit v přednastavené podobě.

Od těchto rovnic a jejich interpretace zbývá poslední krok k nalezení algebraického způsobu hledání průsečíků přímek. Studenti na něj mohou přijít intuitivně či přidáním další lineární funkce do vypracované úlohy 2 a následnou manipulací s oběma přímkami, přičemž si mohou jejich průsečík vyznačit jako bod a zobrazit jeho souřadnice (obr. 31).

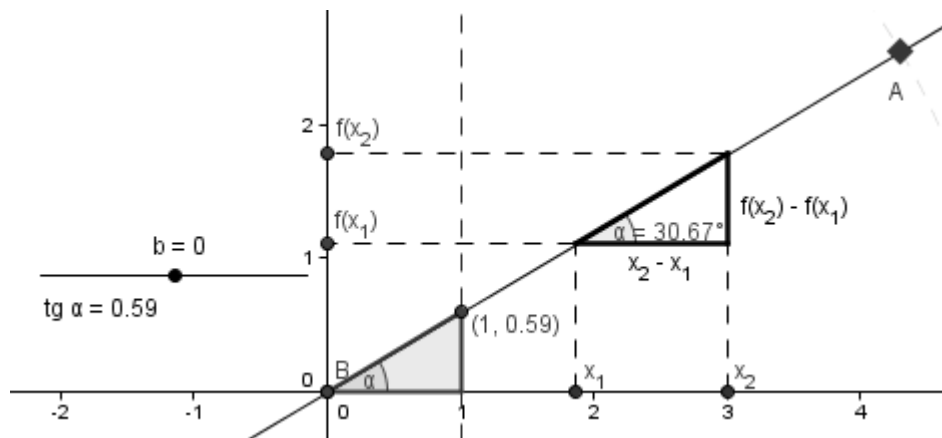


Obr. 31: Experimentální určení průsečíku dvojice přímek daných lineárními funkcemi.

Směrnice a přímky dané funkčním předpisem $y = ax + b$ je rovna tangente úhlu sevřeném touto přímkou a kladnou poloosou x . Tato skutečnost je v učebnici uvedena i graficky znázorněna, ovšem neodkazuje k ní žádná z úloh. Jde o vlastnost klíčovou především v diferenciálním počtu a zmiňovanou v analytické geometrii, v učivu o funkcích je jen dodatkem ke vzorci

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Jedna z možností grafického odvození výše uvedeného vzorce, případně jeho ověření, využívá rovnosti $a = \tan \alpha$, jejíž platnost je předmětem bádání. Druhým klíčovým bodem je volba $x = 1$, s výhodou také $b = 0$. Vzniká pravoúhlý trojúhelník s vrcholem v počátku, jednotkovou odvěsnou přilehlou úhlu α a protilehlou odvěsnou $y = a$ (obr. 32).



Obr. 32: Grafické ověření platnosti $a = \tan \alpha$.

Volba délky odvěsny rovnoběžné s osou x a počátku nijak neohrožuje obecnost důkazu, protože velikost jednotky a počátek soustavy souřadnic lze volit libovolně. Libovolné otáčení soustavy je ekvivalentní změně úhlu α a tedy i parametru a .

Funkce absolutní hodnota má z grafického hlediska jednu velmi zajímavou vlastnost, a sice „zrcadlení“ výrazu v ní uzavřeného podle přímky rovnoběžné či totožné s osou x . To je také jedním z klíčů konstrukce grafů funkcí obsahujících absolutní hodnoty – v nejjednodušších případech typu $y = |f(x)| + C$, kde $C \in \mathbf{R}$ stačí zakreslit graf funkce bez absolutní hodnoty a části grafu v „záporné“ polorovině od přímky $y = C$ podle ní překlopit. Oprávněnost tohoto postupu je pro $C = 0$ zřejmá z definice absolutní hodnoty (viz. např. [3], str. 39), pro $C \neq 0$ stačí ukázat, že přičtením konstanty k libovolné funkci se její graf posune o příslušnou hodnotu podél osy y . Je tedy výhodné (a v praxi se to často používá) nejprve nakreslit graf pro $C = 0$ a pak jej teprve posunout.

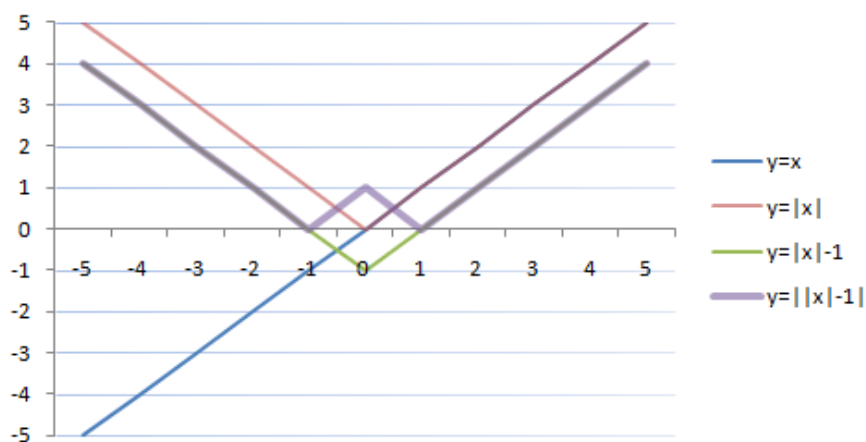
Složitější příklady obsahující absolutní hodnoty jsou v [14] vytvářeny jako mnohočleny obsahující lineární výrazy v absolutních hodnotách. Postup řešení pomocí tabulek intervalů je zde nejnázornější možný – z grafického hlediska nejprve najde

body, v nichž se graf „láme,“ načerť stanoví rovnice lineárních funkcí na příslušných intervalech definičního oboru.

Vedle „řetězení“ absolutních hodnot lze také uplatnit jejich „vnořování.“ Učebnice [14] se nijak nezabývá teorií skládání funkcí, ovšem když už zahrnuje příklady s absolutními hodnotami pod odmocninou, je s podivem, že nezařadila žádnou úlohu na absolutní hodnotu výrazu s absolutní hodnotou. Postup řešení takového příkladu je při tom žákům v podstatě známý – pokud umějí pracovat s obyčejnými závorkami. Tentokrát však nebudou provádět operace početní ale grafické, a sice posunutí podél osy y (přičtení konstanty), „zrcadlení“ části grafu podél určité přímky (absolutní hodnota), jak je popsáno výše. Časem lze případně přidat „převrácení“ celého grafu podle osy x , je-li výraz vynásoben číslem -1 (všechny hodnoty násobeného výrazu změni své znaménko, ale jejich vzdálenost od osy y zůstane zachována). Vzorová úloha pro začátek by mohla vypadat například takto:

- **Úloha 3:** Popište v jednotlivých krocích konstrukci grafu funkce $y = ||x| - 1|$.

Řešení: Nejprve zkonstruujeme graf funkce $y = x$ (krok 1). Absolutní hodnota $|x|$ převrátí jeho „zápornou část“ (v oboru hodnot $(-\infty; 0)$, kterému odpovídá shodný interval definičního oboru) podle osy x (krok 2). Přičtení čísla -1 posune nový graf o 1 v záporném směru osy y (krok 3). Absolutní hodnota $||x| - 1|$ znova převrátí jeho „zápornou část“ (tentokrát v obou hodnot $\langle -1; 0$), s intervalem definičního oboru $(-1; 1)$ podle osy x (krok 4). Výsledek včetně jednotlivých kroků zobrazuje obrázek 33.



Obr. 33: Sestrojení grafu funkce $y = ||x| - 1|$ v jednotlivých krocích.

O počítačem generovaný grafický výstup se tentokrát může postarat program Microsoft Excel či jeho alternativa. Hlavní nevýhoda vynášení grafů některých nestandardních funkcí v tabulkovém procesoru je v diskrétnosti vstupních dat: program vždy prokládá zvolenou křivkou konečný počet definovaných bodů. Konkrétně v úlohách s absolutními hodnotami používajících spojnicové grafy je tedy vhodné zdůraznit přičítání konstant pouze z oboru celých čísel, přičemž koeficient (směrnice) x v lineárním výrazu je roven 1 (případně pokud je koeficient celé číslo, konstanta by měla být jeho celočíselným násobkem). Při nedodržení tohoto doporučení je možné, že program nenajde „bod lomu,“ čímž se celé řešení zkreslí. Navíc, jak vidno z obrázku 33, se zde vyskytují i jiné nežádoucí prvky (posunutí umístění a značení os, zobrazení mřížky) jejichž odstranění, je-li vůbec možné, stojí více úsilí než ruční sestavení grafu na tabuli či v sešitě.

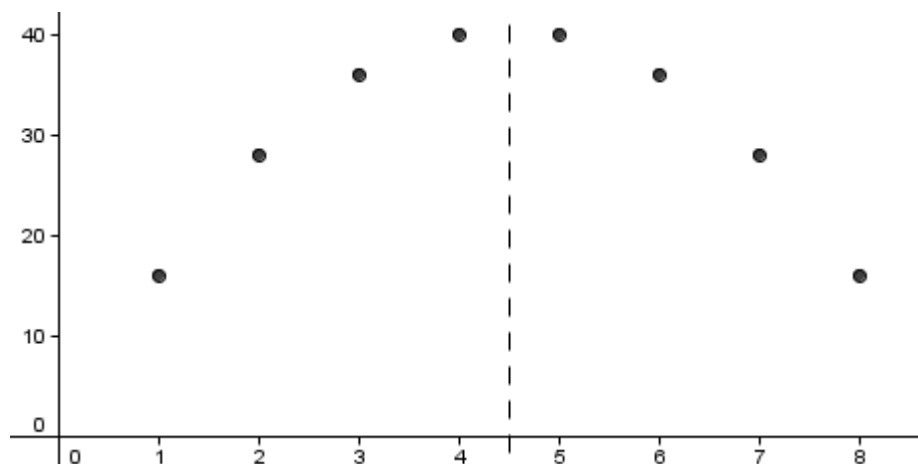
Látka sudých a lichých funkcí je na středoškolské úrovni založená především na grafické interpretaci jejich definic. Skutečnost že graf sudé funkce je souměrný podle osy y a graf liché funkce podle počátku soustavy souřadnic Oxy je snadná k zapamatování a za předpokladu, že studenti mají graf funkce před sebou, je takové řešení také mnohem snadnější.

Zatímco v češtině je označení funkcí „sudá“ a „lichá“ poněkud matoucí (grafy sudých a lichých mocnin x , v nichž má toto názvosloví své zdůvodnění, jsou předmětem studia až v následujících kapitolách), v anglickém překladu „even“ (sudá, ale také rovnoměrná) a „odd“ (lichá, ale také zvláštní) lze už z alternativních významů slov odhadnout, která souměrnost pro kterou funkci platí.

Velmi vděčnými úlohami na sudé a liché funkce jsou neúplné grafy vyžadující dokreslení, aby vznikla funkce požadované parity. Studenti mohou být po jeho vyřešení podníceni, aby zkusili vymyslet vlastní neúplný graf pro své spolužáky, ovšem před takovou činností je vhodné upozornit, že pokud má lichá funkce obsahovat bod se souřadnicí $x = 0$, pak musí v tomto bodě také být $y = 0$. Pokud by tomu tak nebylo, pak lze na základě poznatků o středové souměrnosti snadno nahlédnout, že by zobrazený graf nemohl reprezentovat funkci – pro $x = 0$ by musely existovat dvě různé hodnoty y .

Omezenost funkce se také nejlépe odečítá z grafu, podobně jako maximum a minimum funkce, o čemž jsou čtenáři učebnice [14] přesvědčeni záhy v kapitole

věnované kvadratické funkci: „Obrázek (reprodukováný jako obr. 34) zřetelně ukazuje na symetrické rozložení bodů podle přímky rovnoběžné s osou y a vedené bodem $[4,5; 0]$. Odtud se dá usoudit, že hodnota výrazu $(18 - 2x) \cdot x$ je maximální pro $x = 4,5$.“ ([14], str. 59)



Obr. 34: Odhad maxima funkce $y=(18-2x) \cdot x$ ze symetrie grafu několika vybraných hodnot.

Tento (správný) odhad je dále samozřejmě řádně ověřen výpočtem.

Grafem kvadratické funkce je parabola, jejíž konstrukci pro obecný případ kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ je v učebnici [14] věnována velká pozornost a péče. Postupuje se při tom v krocích: nejprve se zkonstruuje parabola ax^2 a ta se dále posunuje podle určitých pravidel odvozených postupně v průběhu čtyř příkladů.

Didakticky-technickou výhodou kvadratických funkcí je, že parabola, je geometrický objekt vyskytující se stejně jako přímka (graf lineární funkce) definována v programu GeoGebra, který má možnosti tabulkového procesoru a je přeci jen designován pro podporu výuky matematiky, spíše než kancelářský software typu MS Excel. Nevýhodou je možnost zadat parabolu přímo příkazem např. „p: $y=x^2+x+1$ “ což bere studentům motivaci hledat pravidla podoby grafu vlastními silami.

Bylo by účelné prezentovat základy konstrukce grafu kvadratické funkce jediným dynamickým modelem spíše než několika jednotlivými příklady? Vzhledem k nutnosti před začátkem modelování transformovat funkci tvaru $y = ax^2 + bx + c$ na $y = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$, kde koeficient a nastavuje tvar paraboly a bod o souřadnicích $\left[\frac{-b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$ je jejím vrcholem, o tom lze pochybovat.

Učebnice má od začátku stanovený jasný cíl, a sice konstrukci grafu funkce $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ ([14], str. 63). Kroky, které k řešení podniká, jsou zpočátku trochu tajemné, ale samy o sobě dávají dobrý smysl a ve zpětném pohledu po vyřešení posledního příkladu se jejich účel ozřejmí.

Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ různé reálné kořeny x_1 a x_2 , je možné její graf určit alternativním, o něco názornějším způsobem vycházejícím v podstatě ze stejné úvahy jako výpočet využívající obrázku 34. Každá parabola je útvar souměrný podle osy procházející jeho vrcholem. Tato osa je zároveň osou úsečky dané body $[x_1; 0]$ a $[x_2; 0]$ (tedy kořeny rovnice na ose x). Její průsečík s osou x je potom bod $[\frac{x_1+x_2}{2}; 0]$. Dosazením x -ové souřadnice tohoto bodu do funkčního předpisu vypočítáme y -ovou souřadnici vrcholu paraboly, kterou pak lze už relativně přesně načrtnout.

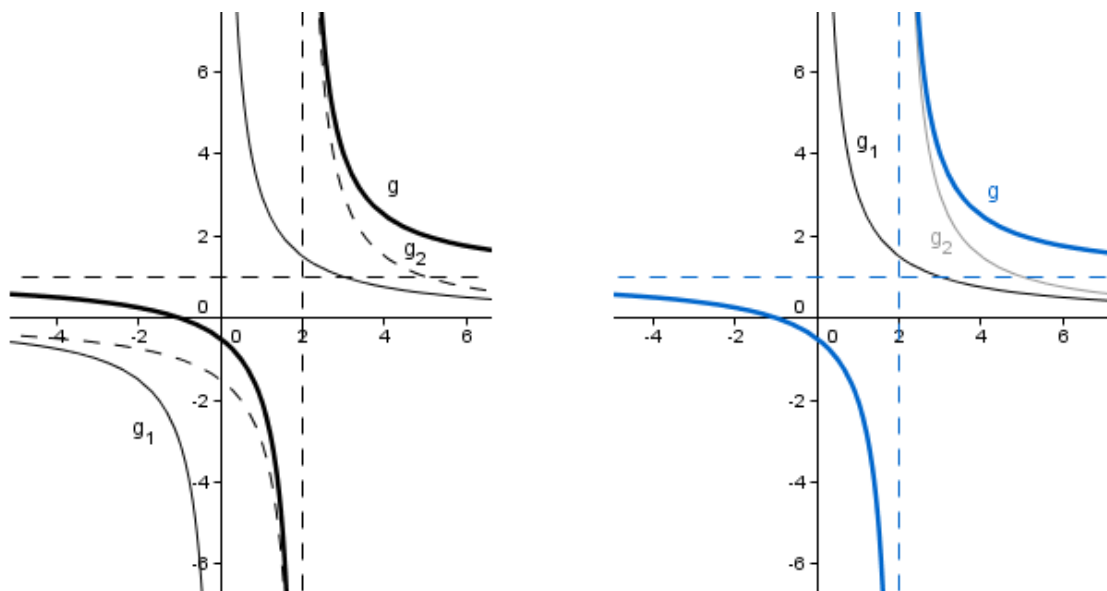
Úpravami s použitím vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ se mohou žáci přesvědčit, že souřadnice vrcholu vyjdou v obecné podobě stejně jako v učebnici.

Nakonec je tento postup také plynulým přechodem k poslední látce kapitoly o kvadratických funkcích, kterou jsou kvadratické rovnice a nerovnice: rovnice jsou z grafického hlediska hledáním průsečíků grafu funkce s osou x , nerovnice zkoumají, které části leží nad, resp. pod osou x .

I kapitola o lineární lomené funkci přináší grafický element do řešení úloh. Výchozím bodem je rovnoosá hyperbola, graf funkce $y = \frac{k}{x}$ kde $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. I tento geometrický útvar má své symetrie: středovou podle počátku soustavy souřadnic (pro definiční obor $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$), což také znamená, že funkce je lichá, a osovou podle přímky $y = x$, kterou lze uplatnit i u jedné osy hyperboly, zejména při bodové konstrukci.

Středová symetrie rovnoosé hyperboly je obzvláště výhodná, protože umožňuje řešit a ilustrovat lineární lomené funkce pomocí jedné z jejích dvou větví, přičemž druhá se dorýsuje právě ve středové souměrnosti (přičemž výrazy složitější než $y = \frac{k}{x}$, od $y = \frac{k}{x} + c$ po $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, zpravidla nemají střed souměrnosti v počátku). Úskalí přístupu jsou zřejmá: někteří studenti mohou pokládat za výsledek právě onu jedinou větev hyperboly, se kterou pracují, a druhou opomíjet. Na druhou stranu ilustrace

v učebnici důsledně zobrazující obě větve hyperboly se (opět také kvůli absenci barevného značení) mohou rychle stát nepřehlednými, jak ilustruje obrázek 35 a. Ten popisuje postupnou konstrukci grafu funkce $g: y = \frac{x++}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$ pomocí dílčích funkcí $g_1: y = \frac{3}{x}$ a $g_2: y = \frac{3}{x-2}$.

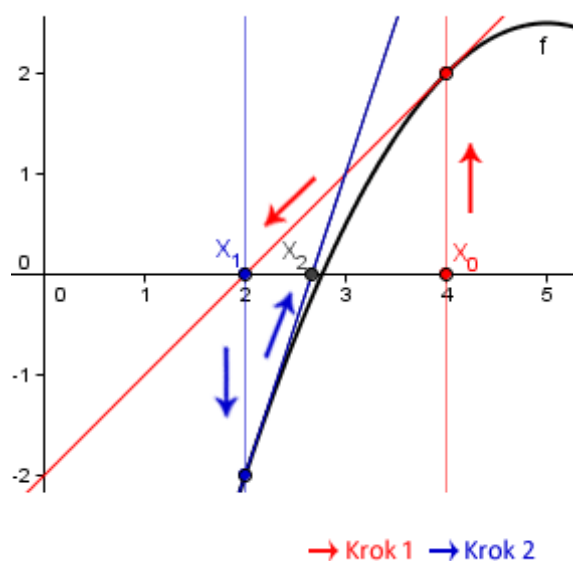


Obr. 35 a: Ilustrace konstrukce grafu funkce $g: y = \frac{x++}{x-2}$ podle ([14], str. 84).

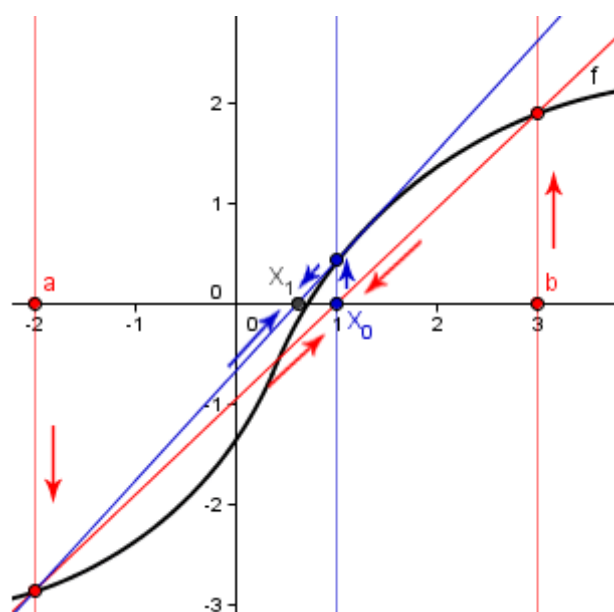
Obr. 35 b: Ilustrace konstrukce grafu funkce $g: y = \frac{x++}{x-2}$ využívající středové souměrnosti a barvy.

Racionální a polynomické funkce doplňují kapitolu lineárních lomených funkcí spíše jako zajímavost než skutečný předmět studia. Vzorce pro hledání kořenů polynomů, pokud vůbec existují, jsou totiž pro středoškoláky nadměru složité. Na druhou stranu právě zde mají šanci vyniknout grafická řešení, tedy buď přímo odečtení přibližné hodnoty z grafu, nebo některé numerické metody, jejichž základ tkví rovněž v grafické interpretaci polynomu.

Numerické metody řešení polynomů vycházejí z grafického předpokladu, že křivka polynomu protíná v nějakém místě osu x (u polynomů, jejichž nejvyšší mocnina x je lichá, toto nastat musí; polynom s nejvyšší sudou mocninou se může celý nacházet v jedné z polorovin určených osou x). Cílem metody je tento bod s určitou přesností vypočítat (iterovat), což je sice záležitostí algebry, ale celý postup lze velmi názorně ilustrovat, jak tomu nasvědčují obrázky 36 (Newtonova metoda tečen) a 37 (metoda regula falsi). Více k tématu viz. [2].



Obr. 36: Grafické znázornění prvních dvou kroků Newtonovy metody hledání kořenů polynomu: $X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)}$, $X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)}$.

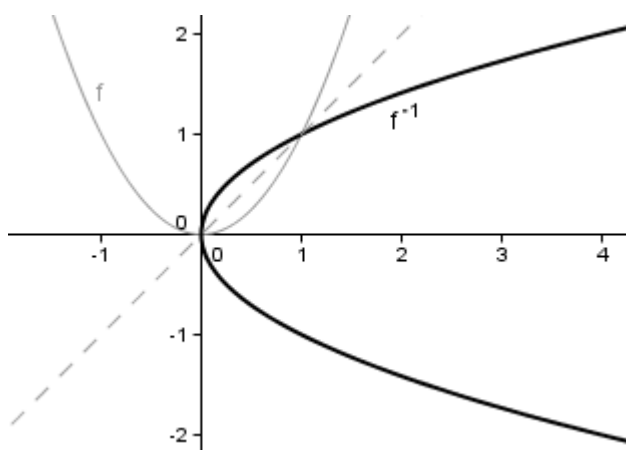


Obr. 37: Grafické znázornění prvních dvou kroků metody hledání kořenů polynomu regula falsi: $X_0 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$, $X_1 = \frac{af(X_0)-X_0f(a)}{f(X_0)-f(a)}$.

V kapitole o mocninných funkcích s přirozeným mocnitelem především vyjde najevo původ názvosloví sudých a lichých funkcí. Tvar jejich grafů (a také grafů mocninných funkcí s celočíselnými mocniteli) je vůbec dobré si uvědomit s ohledem k nadcházející látce zabývající se inverzními funkcemi a následně odmocninami.

Nejzajímavější grafickou vlastností inverzních funkcí je bezpochyby skutečnost, že jejich graf je s grafem původní funkce souměrný podle osy prvního a třetího kvadrantu, tedy $y = x$. Tato vlastnost je zřejmá z definice inverzní funkce ([14], str. 102). Z tohoto poznatku a jiných, které studenti nashromáždili o grafických vlastnostech funkcí, lze na základě pouhé představy odvodit překvapivé množství poznatků o inverzní funkci.

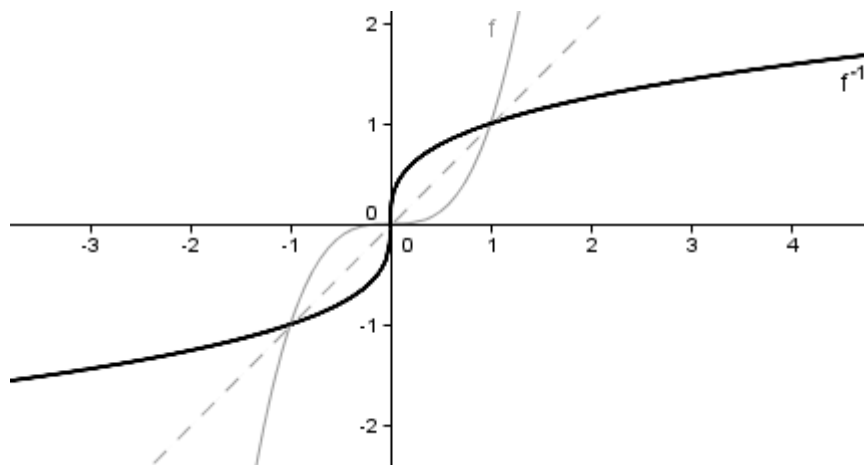
Například právě druhá odmocnina: je inverzní funkcí druhé mocniny a její graf tedy získáme skrz osovou symetrii podle přímky $y = x$ (obrázek 38). Na první pohled je však patrné, že tato nová parabola není grafem funkce, protože mimo $x = 0$ jsou každé další nezáporné hodnotě x přiřazena právě dvě čísla.



Obr. 38: Graf $f^{-1}: x = y^2$ jako inverzní křivky k $f: y = x^2$.

Zde je tedy nutné přistoupit k omezení definičního oboru původní funkce, který se pak stane oborem hodnot funkce nové. Volba tohoto definičního oboru v nezáporných číslech je ryze pragmatická – je-li druhá mocnina čísla plochou čtverce o hraně délky tomu číslu odpovídající, je nepraktické aby druhá odmocnina čísla (plochy) vyjadřovala délku úsečky jako záporné číslo. Z ryze matematického hlediska však takové definici nic nebrání.

Vzhledem k tvaru grafu mocninných funkcí se sudým exponentem je zjevné, že podobně bude nutné omezovat každou sudou odmocninu. Mocninné funkce s lichým exponentem však takovému omezení nečelí, jak ilustruje obrázek 39.



Obr. 39: Graf $f^{-1}: x = y^3$ jako inverzní křivky k $f: y = x^3$.

Proč tedy učebnice zdůrazňuje, že „**nezáporné** číslo b nazýváme *třetí odmocnina z **nezáporného** čísla a ,*“ ([14], str. 105) když z grafu na obrázku 39 lze bez potíží odečíst například třetí odmocninu z čísla -1? Odpovědí je následující definice: „*Pro každé $n \in \mathbf{N}$ je n -tá odmocnina z **nezáporného** čísla a takové **nezáporné** číslo b , pro něž platí $b^n = a$.*“ ([14], str. 105) Potřeba jednotné definice n -té odmocniny pro libovolné přirozené n předčila možnost zahrnout do definičních oborů lichých odmocnin záporná čísla. Více viz. ([14], str. 106).

V této fázi mají studenti k dispozici již celkem široké spektrum tvarů křivek příslušejících základním funkcím a mohou tedy pracovat se složitějšími zadáními. Jedním druhem takových zadání mohou být složené funkce, k nimž je třeba přiřadit odpovídající grafy. Jedno ze zadání je obsaženo v učebnici ([14], str. 122) a reprodukováno zde jako obrázek 40. Tato činnost, kdy je úkolem studenta vypořádat v neznámé křivce něco charakteristického pro křivku známou, je pro vzhled do grafické podoby matematiky velice přínosná.

6.48 Máme dány funkce

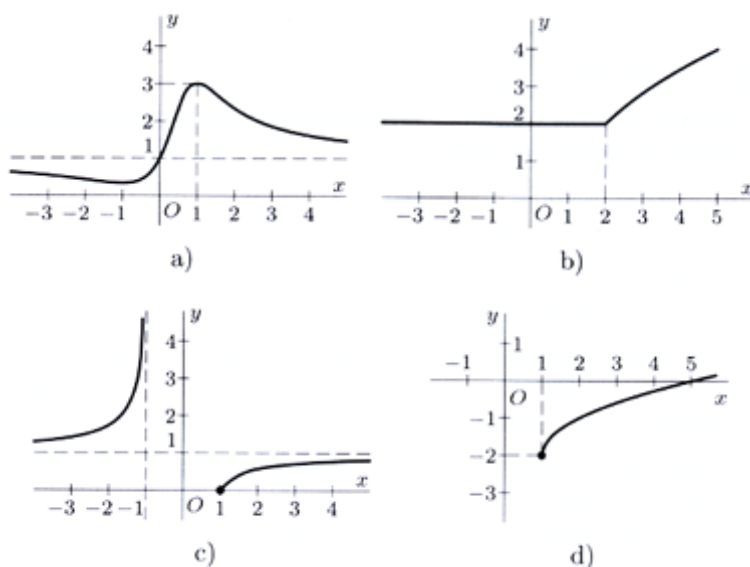
$$f_1: y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$f_2: y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1},$$

$$f_3: y = \sqrt{x-1} - 2,$$

$$f_4: y = \sqrt{2(x + |x-2|)}.$$

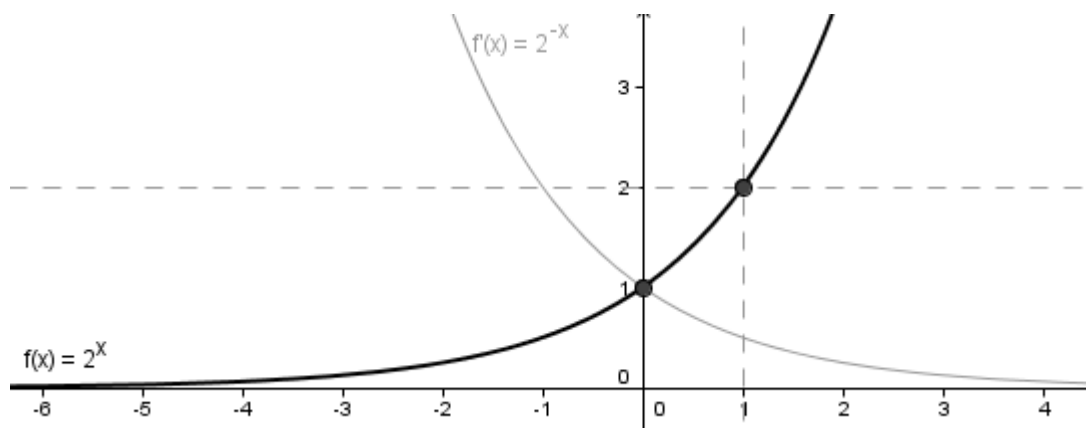
Přiřaďte každé z těchto funkcí příslušný graf z obrázku 6.15.



Obr. 40: Ukázka příkladu přiřazení funkčního předpisu a grafu. (Zdroj grafiky: [14])

Exponenciální funkce se často mohou plést s mocninnými, zejména při prvním pohledu na běžný zápis $y = a^x$ (exponenciální), nebo $y = x^a$ (mocninná). Podnět k sestrojení grafu na základě několika vybraných bodů, jak jsou tomu studenti uvyklí, je dobrým způsobem, jak nenásilně uvést věci na pravou míru.

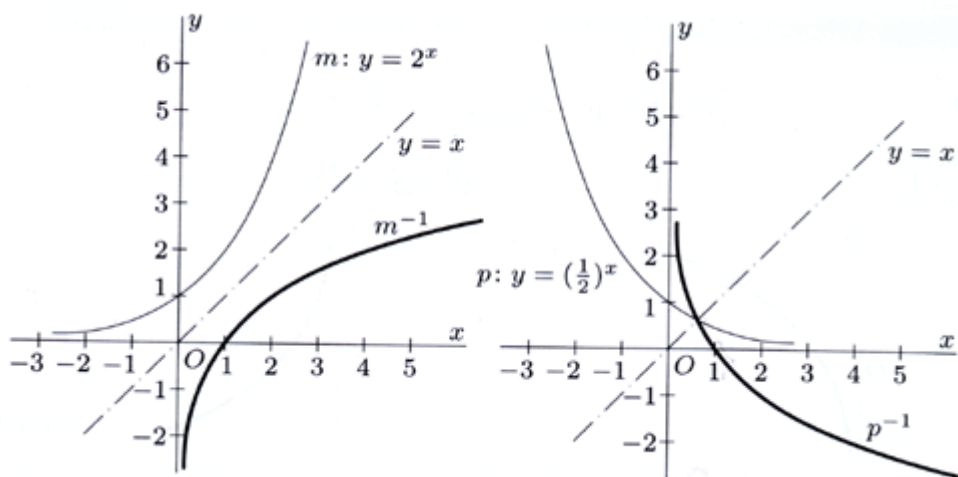
Stejně jako u všech základních funkcí je výhodné znát zákonitosti grafu exponenciální funkce. Pro začátek si lze vystačit se čtyřmi důležitými fakty patrnými na obrázku 41: exponenciální funkce $y = a^x$ nabývá pouze kladných hodnot, je prostá, osu y protíná v bodě 1 (má souřadnice $[0; 1]$) a obsahuje bod $[1, a]$. Doplnkovou zajímavostí je, že graf funkce $y = a^{-x} = a^{\frac{1}{x}}$ je s grafem funkce $y = a^x$ souměrný podle osy y (viz. obrázek 41).



Obr. 41: Graf exponenciální funkce s vyznačenými důležitými body.

Dobrá znalost grafu exponenciální funkce může významně pomoci s užíváním funkce logaritmické, která je k ní inverzní. Zobrazení grafu logaritmické funkce $y = \log_a x$, opět s vyznačením důležitých bodů (tentokrát o souřadnicích $[1; 0]$ a $[a; 1]$) je důležitým krokem vstříc k porozumění této látce, která jinak patří u studentů mezi značně neoblíbené právě pro svou složitost a obskurnost účelu.

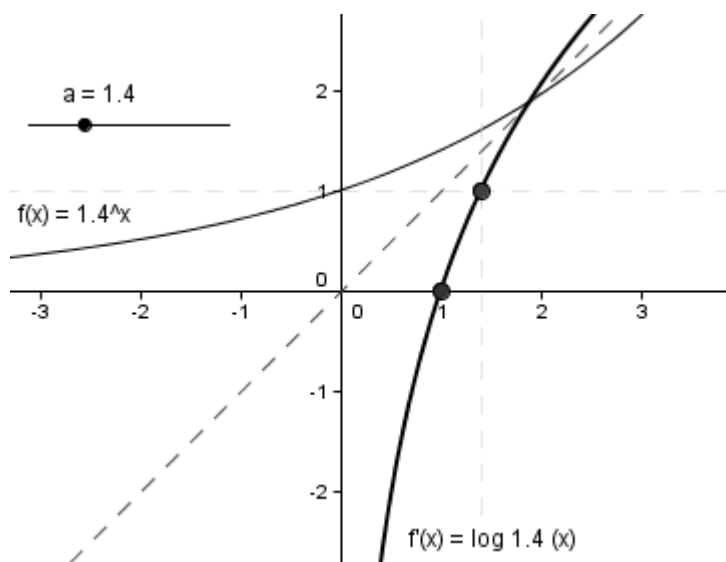
Ilustrace logaritmických funkcí v učebnici ([14], str. 135), zde reprodukováno jako obrázek 42) zdůrazňuje především rozdíl mezi základy $a > 1$ a $0 < a < 1$.



Obr. 42: Zavedení logaritmických funkcí podle učebnice [14].

Je ale zásadní si uvědomit, že neexistují jenom dva tvary logaritmické křivky (přičemž je zajímavé připomenout, že „tvar“ křivek zobrazených v učebnici, tedy $y = \log_2 x$ a $y = \log_{0,5} x$, je stejný, liší se jen jejich poloha vůči grafu; podobně jako jejich inverzní funkce $y = 2^x$ a $y = 0,5^x$ jsou osově souměrné, tentokrát podle osy x).

I tuto skutečnost lze výborně dynamicky ilustrovat pomocí programu GeoGebra: program umí zobrazit exponenciální funkci o libovolném základu, a přestože má definované jen tři funkce logaritmické (o základech 2, e a 10), základní demonstrační model (obrázek 43) si vystačí se zobrazením množiny f' vykreslené bodem X' , který je osově souměrný podle přímky $y = x$ s volně pohyblivým bodem X exponenciální křivky f .

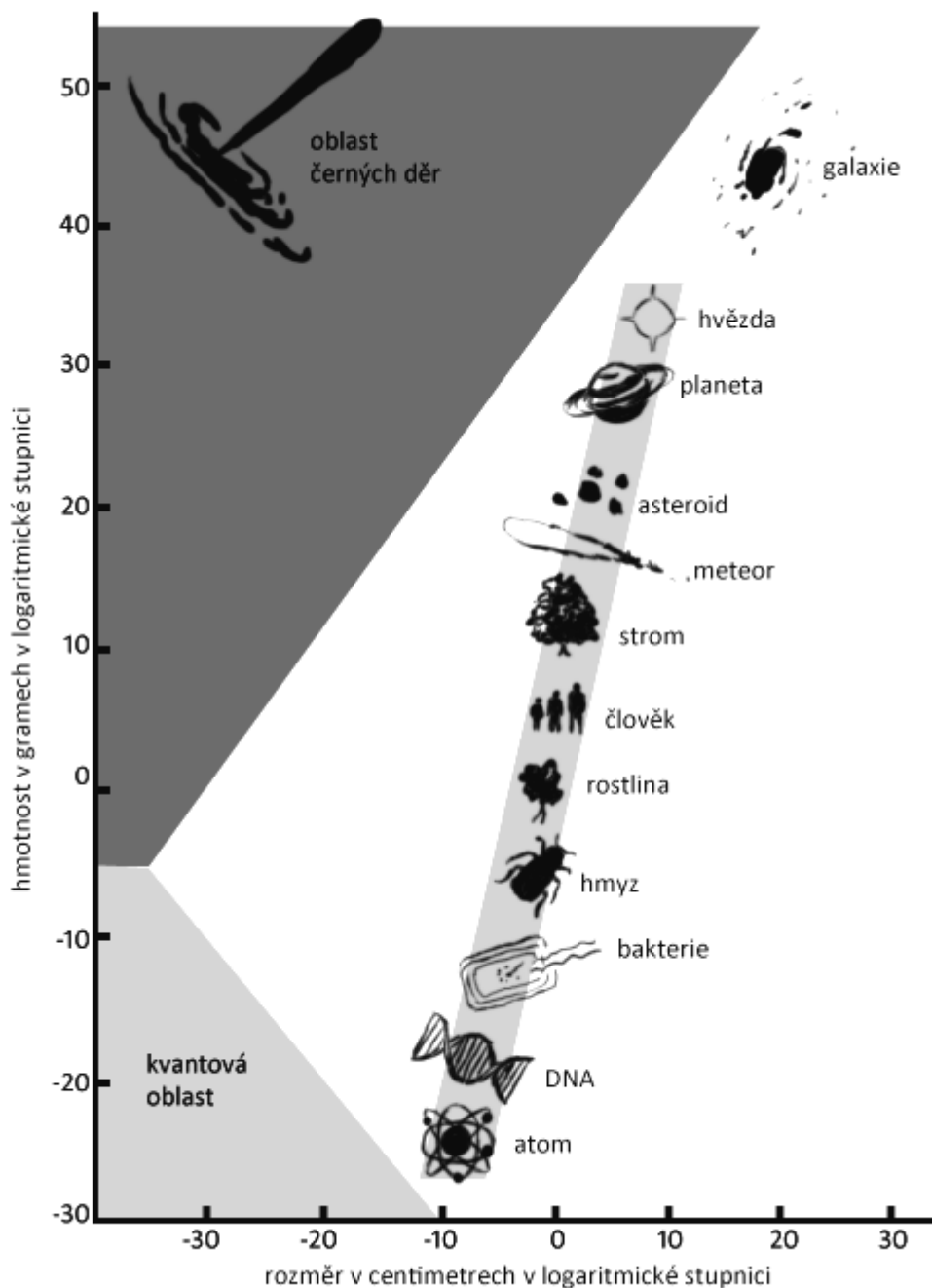


Obr. 43*: Základní dynamický model logaritmické funkce v pozici $a=1,4$.

Rovnici funkce f' lze vložit pomocí textu: " $f(x) = \log$ " + a + " (x)".

Účelem tohoto základního modelu je ozřejmit studentům grafický účel základu logaritmu a : je jím nastavení tvaru křivky, podél které lze dále dohledat logaritmus o tomto základu libovolného (kladného) čísla. Rozšířit k tomuto účelu předchozí model není obtížné, jen je nutné mít na paměti, že program GeoGebra neumí konstruovat průsečíky s množinami bodů a je tedy nutné použít původní exponenciální křivky a osově souměrnosti.

V učebnici nezmíněným grafickým prvkem užívajícím logaritmů je logaritmická stupnice. Používá se v grafech, kde je třeba v jediném grafu srovnat hodnoty rozdílné o několik řádů, jako například atomy, lidi a galaxie, jak ukazuje obrázek 44 podle publikace ([1], str. 51).



Obr. 44: Užití logaritmické stupnice v grafu srovnávajícím různé objekty známého vesmíru. (Zdroj grafiky: [1])

Spíše než jednotky vynáší logaritmická stupnice příslušné exponenty čísla 10. Na horizontální ose grafu v obrázku 44 tedy číslo -10 odpovídá 10^{-10} cm. S každým dílkem osy se jednotka zmenší či zvětší 10^{10} -krát, tedy hmyz je přibližně deset-miliardkrát větší než atom.

Ve většině případů se ale logaritmuje pouze jedna z os. Je-li logaritmická osa x , křivka $y = \log x$ se jeví jako přímka. Naopak je-li logaritmická osa y , „napřímí“ se křivka $y = 10^x$. [19]

Funkce jsou vedle geometrie a stereometrie jedním z nejgrafičtějších témat středoškolské matematiky. Znalost podoby grafu umožňuje odhadovat závislosti ve fyzikálních a jiných měřeních (prokládat získané diskrétní body křivkou, která určuje tvar předpokládané závislosti). Křivky funkcí zkoumá i matematická analýza, s jejíž pomocí jeden z jejích zakladatelů, sir Isaac Newton, provedl svou velkou revoluci ve fyzice.

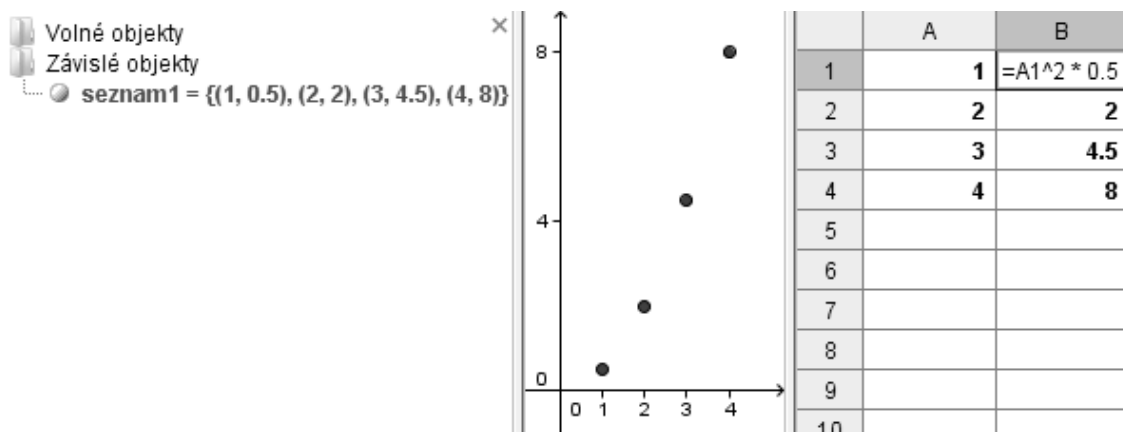
Současná výpočetní technika, ať už jde o software kancelářský či matematický, si umí s grafy funkcí probíraných na střední škole bez problémů poradit. Je však nutno dodat, že každý student by měl být schopen načrtnout tvary všech základních křivek v učebnici a vyznačit její důležité body i z paměti.

3.4 Posloupnosti a řady

„Posloupnosti jsou speciálním příkladem funkcí, a proto budete mít často příležitost využít své znalosti, které jste o funkcích získali.“ ([15], str. 6) Nakolik se toto tvrzení týká grafického pohledu na učivo?

Grafy posloupností jsou v podstatě grafy funkcí, jejichž definičním oborem je množina přirozených čísel, či její neprázdná podmnožina. Místo spojitých křivek charakteristických pro mnoho funkcí je graf posloupnosti tvořen výlučně izolovanými body. Vykreslování grafů posloupností je tak velice snadné a přesné jak ručně, tak pomocí počítače s tabulkovým procesorem.

Možnosti tabulkového procesoru má nyní i program GeoGebra, jehož další výhoda tkví v tom, že je navržen především pro matematiku, zatímco kancelářský software nikoli. Tvorba grafů posloupností je při tom v obou typech softwaru podobně snadná: do tabulky se vypíše definiční obor posloupnosti, obor hodnot je buď rovněž zadán, nebo vypočítán, přičemž místo neznámé (například x) je do buňky vepsána souřadnice příslušného bodu definičního oboru. Vykreslení grafu v programu GeoGebra je pak dosaženo vybráním políček obsahujících souřadnice bodů a možností *Vytvoř seznam bodů*. Konkrétní příklad je na obrázku 45.



Obr. 45: Definice bodů posloupnosti $y = 0,5 \cdot n^2$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ a vytvořený seznam bodů touto posloupností definovaných.

Výhodou počítačového zpracování je i velká názornost rekurentního zadání posloupnosti. Na obrázku 46 je postup pro zpracování prvních 13 členů Fibonacciho posloupnosti ([15], str. 13 – 14) s rekurentním zadáním $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Tento druh tvorby posloupností je při práci s tabulkovými procesory, ať už v rámci matematiky nebo jiného předmětu, pozoruhodně častý. Některé druhy posloupností dokáže program často „odhadnout“ z prvních několika členů (většinou to ale jsou jen posloupnosti aritmetické; viz. dále), jiné je třeba zadat pomocí členů předchozích. Více o tvorbě posloupností pomocí programu GeoGebra obsahuje kapitola Matematika v pohybu.

Aritmetická a geometrická posloupnost jsou v učebnici [15] uvedeny příklady, jejichž řešení má zajímavý „grafický“ prvek – rámeček vyznačující strukturu příslušné posloupnosti. Konkrétní obsah těchto rámečků se však liší; u aritmetické posloupnosti (obr. 46) je zvolena práce s obecnou fyzikální veličinou (rychlost v), zatímco geometrická (obr. 47) pracuje s konkrétními čísly.

$$\begin{array}{l}
 v_1 = 331 \\
 \boxed{
 \begin{array}{l}
 v_2 = v_1 + 0,6 = 331 + 1 \cdot 0,6 \\
 v_3 = v_2 + 0,6 = v_1 + 2 \cdot 0,6 = 331 + 2 \cdot 0,6 \\
 v_4 = v_3 + 0,6 = v_1 + 3 \cdot 0,6 = 331 + 3 \cdot 0,6 \\
 v_5 = v_4 + 0,6 = v_1 + 4 \cdot 0,6 = 331 + 4 \cdot 0,6 \\
 v_6 = v_5 + 0,6 = v_1 + 5 \cdot 0,6 = 331 + 5 \cdot 0,6
 \end{array}
 }
 \end{array}$$

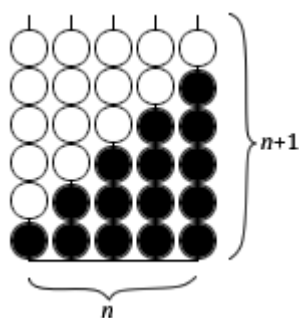
Obr. 46: Příklad aritmetické posloupnosti. (Zdroj: [15]).

$$\begin{array}{l}
 \text{počáteční} \quad \dots \quad 3 \\
 \text{po 20 minutách} \quad \dots \quad 3 \cdot \frac{1}{2} \\
 \text{po 40 minutách} \quad \dots \quad \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 \text{po 60 minutách} \quad \dots \quad \left(3 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 \text{po 80 minutách} \quad \dots \quad \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
 \text{po 100 minutách} \quad \dots \quad \left(3 \cdot \frac{1}{16}\right) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
 \text{po 120 minutách} \quad \dots \quad \left(3 \cdot \frac{1}{32}\right) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6
 \end{array}$$

Obr. 47: Příklad geometrické posloupnosti. (Zdroj: [15]).

Jak je zřejmé z obrázků 46 a 47, použití obecného vyjádření v řešení příkladu je přínosnější, protože nejen zachová velkou část původního smyslu i po vytržení z kontextu, ale zároveň zřetelněji ilustruje strukturu, kterou se snaží vyložit.

Pozoruhodné grafické struktury se objevují v řadách, tedy součtech posloupností. Mnoho posloupností lze modelovat počítadlem, a už na tomto základě se dá objevit mnoho zajímavých vztahů, jak ukazuje obrázek 48 – odvození vztahu pro součet prvních n přirozených čísel.



Obr. 48: Počítadlový model pro součet prvních n přirozených čísel.

Původní řada $1 + 2 + \dots + n$ je na obrázku 48 modelována černými kuličkami. Bílé kuličky modelují stejnou řadu přidávanou na původní vrstvu v opačném pořadí: $n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$. Všechny kuličky dohromady utvoří obdélník o „obsahu“ $n \cdot (n + 1)$ kuliček. Nyní stačí opět odebrat polovinu „obsahu“ a tím odvodit vzorec $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$.

Další příklady grafického přístupu k řešení řad lze nalézt v publikaci [12] a v literatuře jí citované.

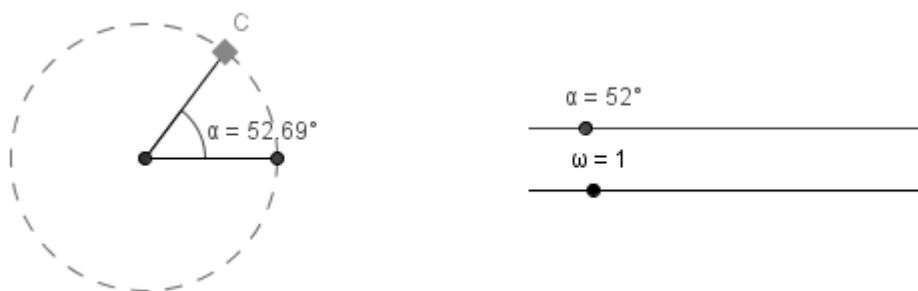
Učivo posloupností má veliký představivostní potenciál v možnosti využití nejrůznější podpůrné techniky, od počítadla po kancelářský i matematický software. Rekurentní vyjadřování posloupností a související strukturace pomáhají žákům nahlédnout do a porozumět velké části látky.

3.5 Goniometrie

Učebnice [16] obsahově relativně úzkého, ale graficky velice obsáhlého tématu využila ilustrací v bohaté míře, od vysvětlujících schémat pro opakované i nově zaváděné pojmy, po náčrtky situací v úlohách. Text ovšem se všemi svými nespornými kvalitami pochází z roku 1994 a pochopitelně tedy neobsahuje reference k využití některých prvků v grafických modelech systémů dynamické geometrie (například velmi rozšířeném programu GeoGebra), které je goniometrie blízkou příbuznou.

Prvním takovým využitím poznatků získaných v učebnici Goniometrie je použití stupňové a především obloukové míry k transformaci posuvného pohybu na rotační. Zatímco program GeoGebra umožňuje posouvání volných či vázaných bodů tažením myši, často je potřeba zajistit, aby tento pohyb byl přesný, plynulý, závislý na parametru či aby současně probíhalo více pohybů, jejichž geometrické provázání by bylo složité. Pro pohyb po přímce či její části je situace jednoduchá, stačí použít vektorů a transformace posunutí, jehož parametrem je lineární kombinace vektorové báze, jejíž skalární koeficienty lze měnit pomocí posuvníku.

Pohyb po kružnici vyžaduje svoji specifickou geometrickou transformaci, otočení. Zde už jsou možnosti „posuvníku“ dvě: ilustrativní kružnice (obr. 49 a) či běžný posuvník úsečkového tvaru (obr. 49 b). Ten je oproti kružnici o něco méně intuitivní, ale lze jej i při malých měřítkách velmi snadno a přesně nastavit, a definuje-li číslo spíše než úhel, lze jej s výhodou využít v úlohách kombinujících posuvný a rotační pohyb. Takovou úlohou může být například konstrukce velmi oblíbené křivky fyziků – cykloidy.



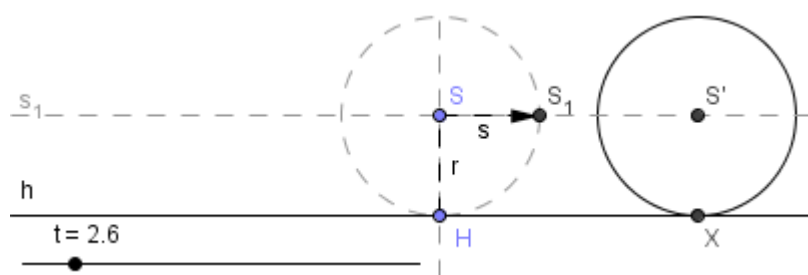
Obr. 49a: Úhlový posuvník α ve tvaru kružnice.

Obr. 49b: Úhlové posuvníky α (stupně) a ω (radiány) ve tvaru úsečky.

- **Úloha 4:** Cykloida je křivka vznikající při pohybu bodu na obvodu kola při jeho kotálení (od toho český název *kotálnice*) po rovné cestě.
 - a) V programu GeoGebra sestrojte model takového kola-kružnice na cestě-přímce, a na něm bod, který se takto bude pohybovat (a zapnutím jeho stopy se tedy vykreslí cykloida).
 - b) Přidejte prvek umožňující vykreslit cykloidu prodlouženou (bod na kole přesahuje do terénu) nebo zkrácenou (bod nedosahuje terénu).

Řešení: Úloha přímo nevyžaduje použití posuvníku, avšak jeho použití ji činí mírně přehlednější.

- a) Prvním krokem je uvědomit si principy funkce modelu a matematizovat je. Každý z bodu kola kotálejšího se po rovině koná pohyb složený z posuvného a rotačního – kromě jednoho: střed takového kola koná pouze pohyb posuvný, což je dobrým výchozím bodem pro konstrukci modelu. Obraz středu kola a tím pádem i kružnice odpovídajícího poloměru, tvořící obrys kola, lze sestrojit posunutím ve směru rovnoběžném s přímkou, po níž kolo kotálíme. Velikost posunovacího vektoru rovněž nemůže být libovolná – musí být rovna poloměru „kola.“ Tuto fázi řešení zachycuje obrázek 50.



Obr. 50: První krok tvorby dynamického modelu vykreslujícího cykloidu: kružnice posunující se podél přímky h v závislosti na parametru t .

Proč má vektor posunutí délku právě poloměru kružnice? Klíčem k rozřešení této otázky je právě oblouková míra. Uvažujme nejprve pro jednoduchost, že naše modelové kolo má poloměr jednoho metru a na něj je navinuta nit, která se při kotálení kola odvíjí. Otočí-li se kolo při svém pohybu o jeden radián, odvine se jeden metr nitě – a střed kola se tím pádem musel posunout o jeden metr podél roviny. Dále si

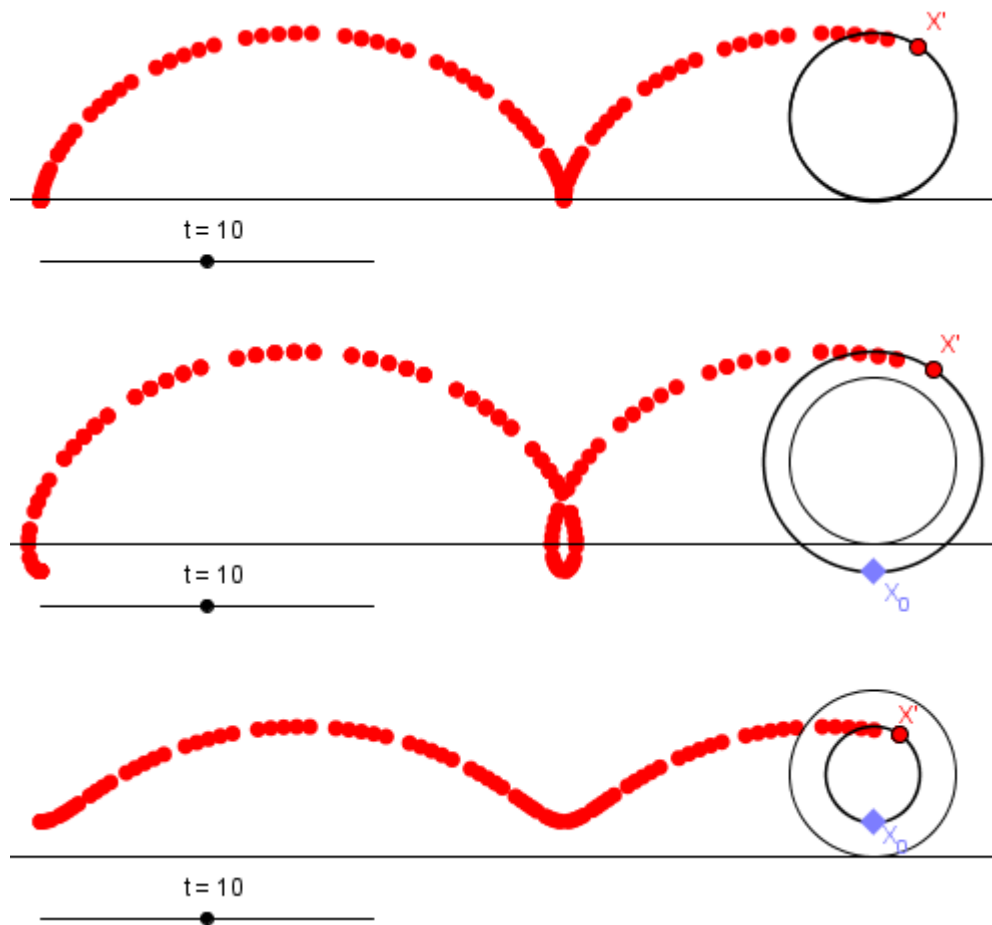
uvědomme, že pokud změním u poloměru kola jednotku metr na například yard, při otočení o jeden radián se odvine zase jeden yard nitě. A tak dále. Při označení podle obrázku 50 se tedy musí pro $t = 1$ (což odpovídá otočení o 1 rad v záporném směru, tedy po směru hodinových ručiček) bod S posunout do bodu S_1 , kterážto vzdálenost odpovídá poloměru pohybující se kružnice.

Otáčející se bod X lze na pohybující se kružnici zvolit libovolný. Parametr otáčení je t , směr záporný.

- b) Možnost vykreslovat prodlouženou a zkrácenou cykloidu lze do již vytvořeného modelu vložit dvěma způsoby: prvním je možnost změny velikosti (nikoli však směru) vektoru posunutí, druhou přidání kružnice o volitelném poloměru pohybující se zároveň s původní, cykloidu-vykreslující kružnicí, přičemž vykreslující bod je samozřejmě předefinován, aby ležel na novém objektu. První model je o něco méně pracný, druhý je z fyzikálního hlediska názornější: s body na kolech přesahujícími do terénu (bod na obvodu kola vlaku či tramvaje) či se terénu nedotýkajícími (libovolný vnitřní bod kola) se studenti mohou setkat doslova na každém rohu.

Příklady nastavení rozšířeného modelu zobrazuje obrázek 51.

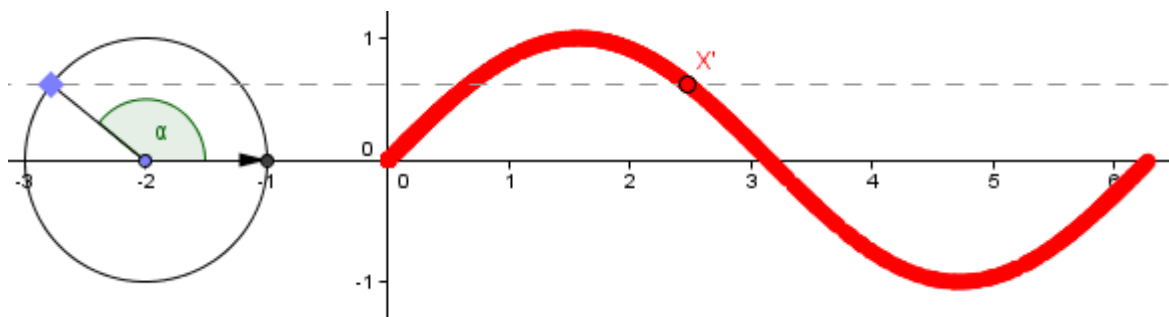
Po takovémto cvičení by nemělo studentům činit problém sestavit model schopný vykreslit kruhovým pohybem ovládacího posuvníku sinusoidu. Jeho jednou didakticky nežádoucí vadou je však zobrazení velikosti úhlu výhradně ve stupních. Zadán jako koeficient v posunutí daném vektorem $\vec{x}' = \alpha \cdot \vec{j}_x$, kde α je úhel a \vec{j}_x pro potřeby modelu jednotkový vektor směřující v kladném smyslu osy x , je tento úhel ale automaticky počítán v radiánech. Za současného stavu tedy není vhodné model zadávat jako žákovskou úlohu. Přesto jím lze efektně „uvést do pohybu“ ilustraci, která je k podkapitole *Grafy funkcí sinus a kosinus* uvedena v učebnici [16].



Obr. 51*: Cykloida, prodloužená cykloida a zkrácená cykloida vykreslené dynamickým modelem.

Samotná konstrukce modelu je s ohledem na uvedené úskalí jednoduchá. Ilustruje ji (včetně výstupu) obrázek 52. Pohyblivým bodem na vhodně umístěné jednotkové kružnici je vedena rovnoběžka s osou x . Bod X' , který sinusoidu vykresluje, je pak posunutím průsečíku této rovnoběžky s osou y o vektor $\vec{x}' = \alpha \cdot \vec{J}_x$, kde α je velikost vynášeného úhlu (programem automaticky přepočítaná na radiány) a \vec{J}_x jednotkový vektor směřující v kladném smyslu osy x .

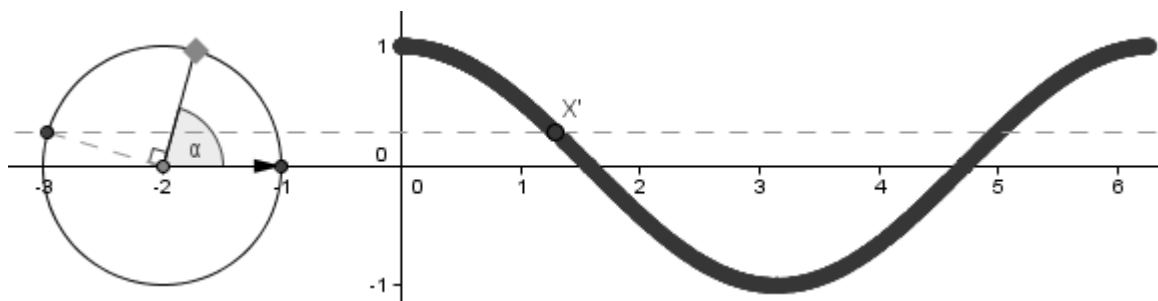
Budiž podotknuto, že tato i všechny dále uváděné goniometrické funkce mají z důvodu nemožnosti „načítat“ otáčky kruhového posuvníku definiční obor $(0; 2\pi)$.



Obr. 52*: Sinusoida vykreslená dynamickým modelem.

Zajímavým problémem je upravení modelu tak, aby vykresloval kosinusoidu. Jsou to opět studenti, kdo mohou takový „trik“ navrhnout, ale jeho zapracování do programu je z výše uvedeného didaktického důvodu opět vhodné nechat pouze na vyučujícím.

Nejjednodušší úprava spočívá v poznatku, že $\cos \alpha = \sin \alpha + \frac{\pi}{2}$. Stačí tedy zkonstruovat obraz bodu definujícího úhel v otočení o $\frac{\pi}{2}$ rad (resp. o 90°) v kladném směru a posunout do něj vodící přímku (tedy přímku rovnoběžnou s osou x , na níž leží vykreslující bod X'). Posunutí již není třeba předefinovávat. Model včetně detailů konstrukce zobrazuje obrázek 53.

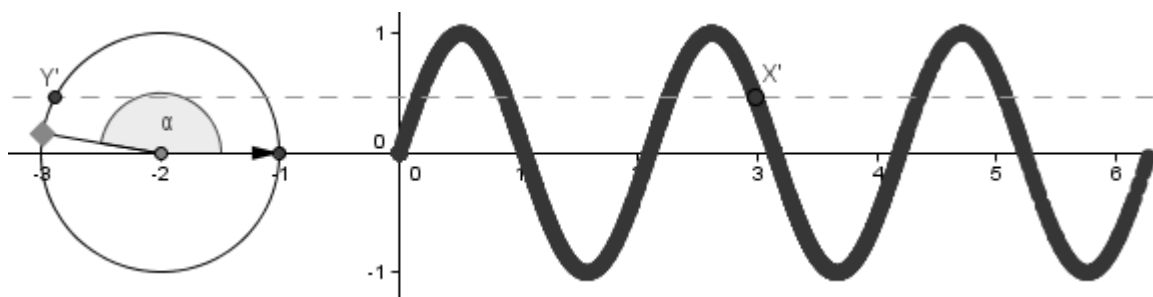


Obr. 53*: Kosinusoida vykreslená dynamickým modelem.

Přirozenou otázkou je, zda lze podobně generovat i další typy modelů, a odpověď je kladná. Úprava modelu vykreslujícího funkci sinus na model vykreslující funkci cosinus lze zobecnit a na jejím základě lze tvrdit, že na podobném principu lze sestavit model vykreslující libovolnou funkci tvaru $y = \sin x + \alpha$, kde α je libovolný úhel.

Podobný princip používají i funkce typu $y = \sin nx$, kde n je libovolné přirozené číslo (kromě nuly). Místo konkrétně zvoleného úhlu se za hodnotu otočení bodu, kterým bude

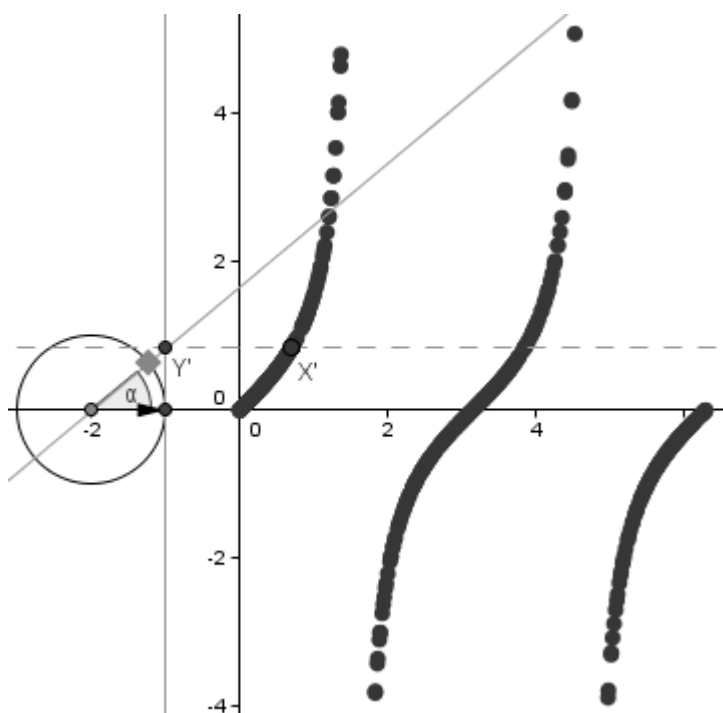
proložena vodící přímka, volí $(n - 1)$ – násobek vstupního úhlu (na obr. 54 je vyobrazena situace pro $n = 3$).



Obr. 54*: Graf funkce $y = \sin 3x$ generovaný dynamickým modelem.

Ke každému z výše uvedených modelů je samozřejmě možné zároveň nechat vykreslovat původní sinusoidu – stačí místo předdefinování vodící křivky a tím pádem vykreslujícího bodu definovat nové.

Modelu pro vykreslování sinusoidy lze použít dokonce pro tangentoidu (obr. 55), stačí postupovat podle ilustrací v učebnici. Klíčem je jako vždy správné uchycení vodící přímky. Posunutí zůstává stejné.



Obr. 55*: Dynamický model generující tangentoidu.

Učebnice nezahrnuje úlohy typu $y = k \sin x$, kde k je libovolné reálné číslo. Jejich grafy samozřejmě generovat lze a stačí k tomu pouze změnit poloměr kružnice

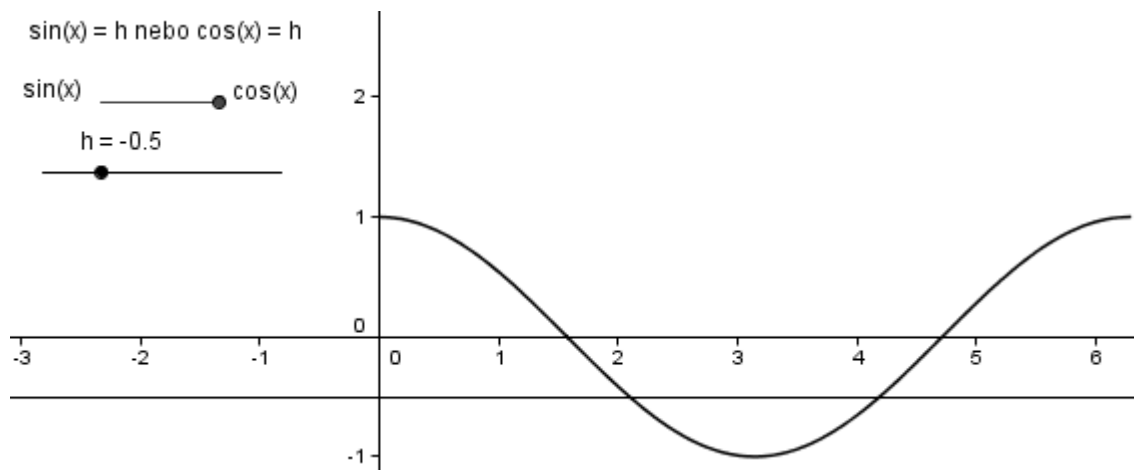
ovladače. Vektor posunutí ovšem musí zůstat jednotkový, jinak by pouze došlo ke změně měřítka grafu.

Program GeoGebra je tedy schopný vykreslit i goniometrické křivky. Otázkou tedy je, zda s těmito křivkami lze i dále pracovat, případně je použít pro účely programů graficky řešících jednoduché rovnice. V současné době je odpovědí bohužel ne. Zatímco GeoGebra dokáže vykreslit křivku nejen jako stopu bodu, ale i jako množinu bodů, nedokáže hledat průsečíky této množiny s jinými objekty, což je schopnost pro řešení rovnic klíčová.

Následující text tedy jenom přibližuje postup tvorby takového řešiče pro rovnice typu $\sin x = h$ nebo $\cos x = h$, kde $h \in \langle -1; 1 \rangle$. Oba typy rovnic lze řešit s pomocí jediného modelu, stačí přidat ovladač převádějící generátor sinusoidy na generátor kosinusoidy. Toho lze docílit vložení ovladače ω se dvěma hodnotami: 0° a 90° a umístěním vodící přímky do bodu vzniklého otočením pohyblivého bodu na generující kružnici právě o úhel ω . Pro první extrém pak vzniká sinusoida, pro druhý kosinusoida.

Jak do modelu včlenit číslo h ? Je-li $h = 0$, hledá rovnice průsečíky grafu s osou x , jejíž rovnice přímky je $y = 0$. Podobně je tomu s libovolným h . Rovnice $\sin x = h$ tedy hledá průsečíky základní sinusoidy s přímkou $y = h$, kterou lze do GeoGebry po vytvoření příslušného posuvníku h s intervalem hodnot od -1 do 1 zadat přímo pomocí vstupu například $y': y=h$.

V této fázi by stačilo již jen zobrazit průsečíky křivky a přímky, jejich hodnoty, a úloha by byla vyřešena. Taková funkce programu je ovšem nedostupná, pravděpodobně kvůli příliš „volné“ definici množiny bodů. Přesto i tento nedokonalý řešič (obr. 56) může sloužit jako zajímavá dynamická pomůcka a základ pro další zdokonalování ve schopnosti řešit stále složitější problémy.

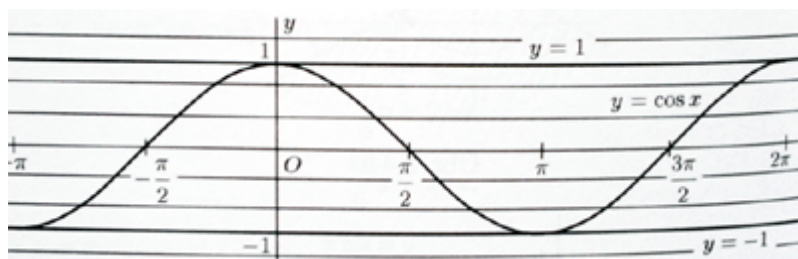


Obr. 56*: Prototyp dynamického řešiče úloh typu $\sin \square x = h$ nebo $\cos \square x = h$ v poloze odpovídající rovnici $\cos \square x = -0,5$.

Goniometrické nerovnice jsou zatíženy tímtož problémem, neboť bez možnosti definovat body neexistuje ani možnost jimi ohraničit úsečku, která bývá řešením nerovnic.

Učebnice obsahuje dost ilustrací zobrazujících grafické postupy řešení goniometrických rovnic a nerovnic, z nichž nejpřehlednější využívají právě grafů. Řešení pomocí odečítání úhlů na jednotkové kružnici musí vměstnat stejné množství údajů na menší plochu a může se stát nepřehledným, či dokonce zavádějícím. Je tedy s výhodou nespoléhat na hotový obrázek a studentům pečlivě předvést jeho sestavení.

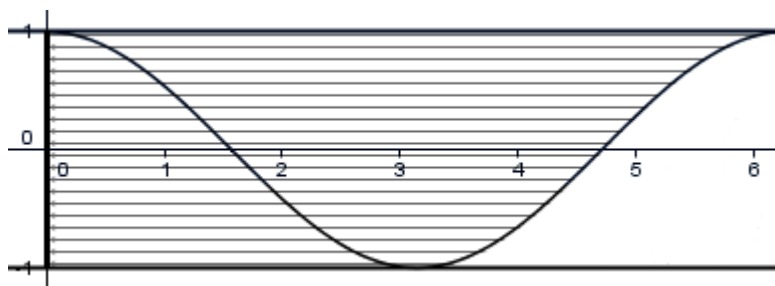
Jako v mnoha učebnicích této řady je i v [16] velkým problémem absence stínování v grafech, kde má grafickým výstupem být množina. Pokud tato množina totiž překrývá velkou část vlastního grafu, nelze dost dobře použít šrafování a je nutné se uchýlit k řešením, která hrozí značným zkreslením výsledku. Příkladem toho je řešení příkladu z ([16], str. 69): „Příklad 3: Zjistěte, pro která $a \in \mathbb{R}$ má základní goniometrická rovnice $\cos x = a$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ neprázdnou množinu kořenů.“ Odpověď má podat ihned obrázek, zde označený 57 a.



Obr. 57a: Původní grafické řešení příkladu 3. (Zdroj grafiky: [16]).

Přímky reprezentující několik vybraných a leží uvnitř i vně pásma vyznačeného silně vytaženými případy pro $a = 1$ a $a = (-1)$. Dokud si nepřečte, že „rovnice $\cos x = a$ má v \mathbb{R} neprázdnou množinu kořenů, právě když $a \in \langle -1; 1 \rangle$. (Tato množina je vždy nekonečná.)“, má zejména slabší žák veškeré právo být z grafického řešení zmaten.

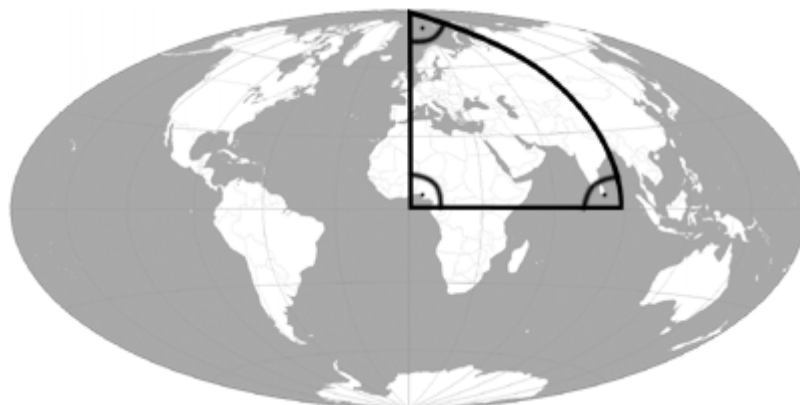
Zatímco tedy stínování přímkami není v zásadě špatný nápad, protože umožňuje vhléd do metody, jakou je úloha řešena, mělo by především zvýraznit řešení a neodvádět od něj pozornost. Obrázek 57 b ukazuje postup řešení na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ - kosinusoida je křivka periodická s periodou 2π , pročež tento interval obsahuje všechna řešení libovolného jiného intervalu. Libovolný bod křivky „promítnutý“ kolmo na osu y (naznačeno šipkami) je jedním z množiny různých $a \in \langle -1; 1 \rangle$.



Obr. 57 b: Alternativní grafické řešení příkladu 3.

Kapitola o trigonometrii zmiňuje „sférické trojúhelníky,“ téma pro střední školu okrajové, ale přesto podnětné k malému rozšíření studentských obzorů. Sférická geometrie se totiž týká Země, a to na vzdálenostech, kde již nelze zanedbat zakřivení jejího povrchu – vzdálenostech překonávaných dnes a denně transkontinentálními spoji. První zajímavý příklad těžící ze znalostí geografie může znít: najděte trojúhelník, který má tři pravé úhly.

Pokud postačí zjednodušená definice úsečky („jdeme pořád rovně z bodu A do bodu B“), lze takový trojúhelník popsat snadno – například: „vyrazíme ze severního pólu směrem na Greenwiche, dojdeme na rovník a podél něj na východ. V Indickém oceánu, na 90° východní šířky, se otočíme o pravý úhel a dojdeme podél poledníku zpět na severní pól. Při naší cestě jsme opsali trojúhelník, jehož všechny úhly jsou pravé (viz. obr. 58).“



Obr. 58: Trojúhelník se třemi pravými úhly ve sférické geometrii na podkladě mapy světa. (Zdroj podkladu: [26]).

Ještě zajímavějším důsledkem sférické geometrie je skutečnost, že pouze pro místa ležící na rovníku lze nejkratší cestu z jednoho do druhého vykonat podél příslušné rovnoběžky. Jinak řečeno, letadlo z Lisabonu do Washingtonu (města leží přibližně na stejné rovnoběžce) ušetří kilometry, pokud poletí „obloukem“ na sever a potom na jih, rovnoběžky (kromě rovníku) totiž nejsou sférické přímky. Příkladem sférických přímek jsou poledníky.

Zeměměřičské úlohy vůbec dominují trigonometrii, dále z ní těží optika. Grafické prvky zde nebývají nijak zvlášť nepřehledné, ani nijak zvlášť netěží z dynamického zpracování.

Učivo pokryté učebnicí [16] tedy těží z grafických prvků v celé své šířce, ale zatímco definice radiánu a vykreslování grafů získají s použitím systémů dynamické geometrie na názornosti, goniometrické rovnice a trigonometrie si vystačí se statickými obrázky, byť i zde je třeba klást důraz na jejich názornost a důsledné zvýraznění důležitých prvků.

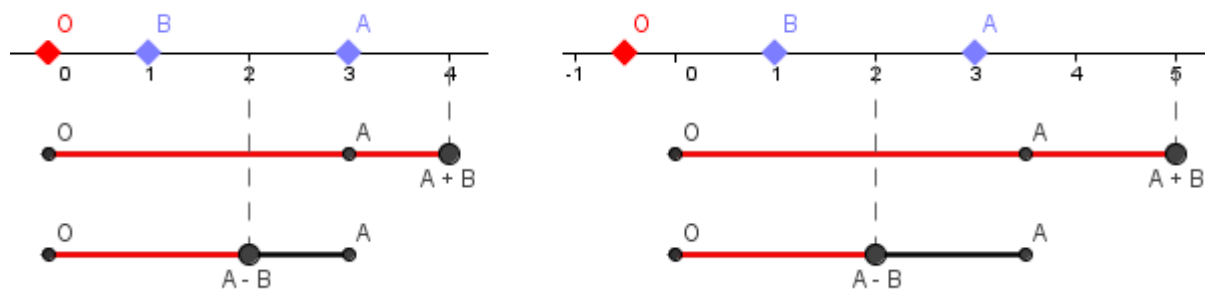
3.6 Analytická Geometrie

Pro výuku analytické geometrie na vyšších stupních gymnázií jsou za standard považovány učebnice [8] a k ní příslušející sbírka úloh. Některá gymnázia ovšem pracují pouze se sbírkami. Důvody k takovému omezení jsou různé, ale bezpochyby mezi ně patří i skutečnost, že ani v nejnovějším vydání učebnice neobsahuje kvalitní ilustrace. Zatímco základní učebnice fyziky téhož nakladatelství používají pro zvýraznění důležitých poznatků a prvků v náčrtcích barvy už řadu let, učebnice matematiky zůstávají černobílé. Rozlišení čar pouze tloušťkou, případně přerušováním, pak činí už i ta nejjednodušší grafická znázornění nepřehlednými.

Jako každá geometrie, i ta analytická na střední škole nepoužívá grafická znázornění jen jako podpůrný prostředek, ale zahrnuje schopnost práce s nimi mezi své cíle. Bez budování představ o významu pojmů a rovnic zůstane z disciplíny provazující algebru s geometrií pouze množství náročných vzorců bez zjevného účelu.

Studium analytické geometrie začíná studentům již důvěrně známou číselnou osou. Tu ovšem dosud používali zejména k uspořádání určitého postupu, například hledání kořenů rovnic s neznámou v absolutní hodnotě. Nyní by na osu měli nahlédnout z geometrického hlediska a osvojit si vazbu mezi čísly a body, jež tato čísla reprezentují. Za tímto účelem je vhodné zopakovat a procvičit základní operace – sčítání, odčítání, násobení, dělení a absolutní hodnotu – a povšimnout si mimo jiné jejich geometrických interpretací.

V této fázi je dobré soustředit pozornost zejména na sčítání a odečítání, které je v podstatě „skládáním“ úseček odpovídající délky, a jeho závislosti či nezávislosti na volbě počátku. Nezávislost, která je v analytické geometrii velmi zásadní vlastností, lze u odečítání bodů demonstrovat jednoduchým modelem podle obrázku 59. Ten obsahuje pro kontrast i součet obou bodů, který se při změně polohy počátku mění.



Obr. 59* a: Úsečkový model sčítání a odečítání čísel na číselné ose.

Obr. 59* b: Úsečkový model sčítání a odečítání čísel na číselné ose pro počátek $O \neq 0$.

Model jako takový hojně využívá transformace posunutí o vektory $\vec{a} = OA$ a $\vec{b} = OB$. V této fázi je možné studentům sdělit tuto jeho podstatu a zvýšit tím jejich motivaci ke studiu vektorů v rámci další kapitoly.

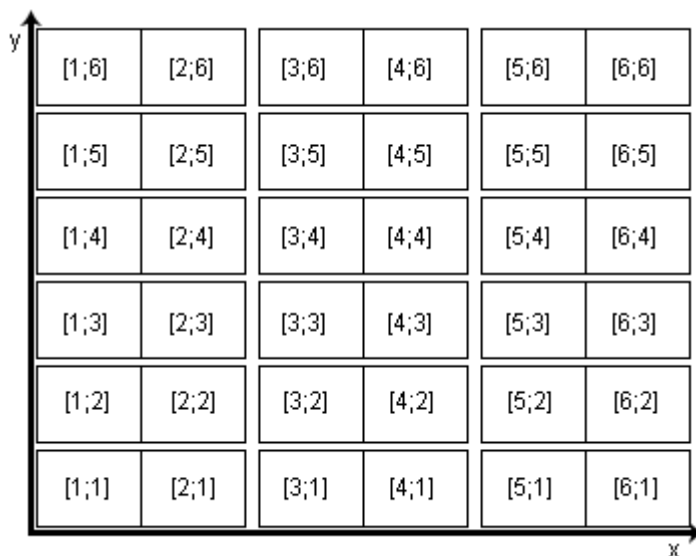
Násobení a dělení bodů číselné osy má také geometrický význam, zejména je-li jedním z činitelů číslo -1 : každé vynásobení tímto číslem otočí jím násobený bod o 180° podle počátku. Tato skutečnost má velký význam ve studiu komplexních čísel, jak bude probráno v příslušné kapitole.

Problematika grafické interpretace absolutní hodnoty je probrána v kapitole Základní poznatky z matematiky.

Analytická geometrie v dimenzích vyšších než 1 pracuje především s kartézskou soustavou souřadnic, jejíž dvourozměrný případ studenti znají ze studia funkcí: představuje pro ně prostředek, kterak z grafu vyčíst funkční hodnotu (souřadnici y) v požadovaném bodě (souřadnice x). Avšak zatímco možnosti křivek funkcí jsou omezeny definicí funkce (viz. kapitola Funkce), analytická geometrie zkoumá prakticky libovolné útvary v příslušném rozměru jakožto množiny bodů určité vlastnosti.

Je tedy záhodno vést studenty k vnímání soustavy souřadnic Oxy (resp. $Oxyz$) jako množiny bodů, jakési nekonečně husté mřížky, v níž jsou zachyceny zkoumané křivky. Pro popis těchto křivek je důležitá už volba počátku a os, jejichž nejvýhodnějším uspořádáním je právě to pravoúhlé.

V učebnici [8] je zavedení kartézské soustavy souřadnic v rovině motivováno určováním pozic figurek na šachovnici. Existují však i jiné způsoby, které mohou oslovit mnohem více studentů. Jeden z nich je obzvláště přístupný každému běžnému studentovi: zasedací pořádek.



Obr. 60: Zasedací pořádek jako kartézská soustava souřadnic.

Na obr. 60 je znázorněno schéma takového zasedacího pořádku, který se samozřejmě může třídu od třídy lišit. Jeho výhodou je, že se každý student stává bodem roviny dané učebnou a je tím pádem vtažen přímo do podstaty probírané látky. Souřadnice y jsou každému studentovi intuitivní, protože ví, v kolikáté lavici sedí. Pojmy „u okna“, „uprostřed“, „u dveří“, „vpravo“ a „vlevo“ jsou pak nahrazeny souřadnicí x .

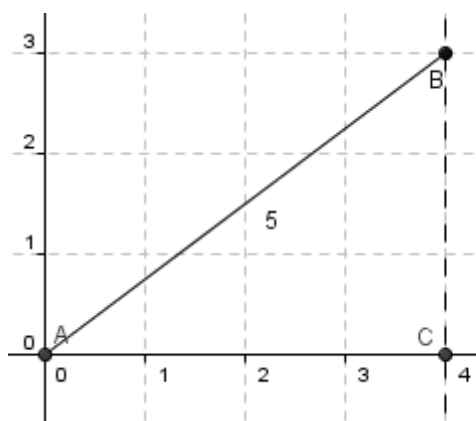
Kartézská soustava souřadnic je ortonormální, lze v ní tedy vycházet z existence úsečky jednotkové délky a pravého úhlu. Výborným prostředím pro práci je v této fázi tedy zjevně čtverečkový či milimetrový papír, případně zobrazení mřížky v programu GeoGebra. Každé z nich nabízí velký prostor pro tvůrčí práci, při níž žáci sami mohou induktivním způsobem odvodit vztahy pro velikost a střed úsečky. Zadání přitom může být jednoduchou úlohou s několika přednastavenými vstupními hodnotami, případně může navrhnout postup pokusu, který mají studenti provést, a kde si vstupní hodnoty nastaví sami. Například:

- **Úloha 4:** V programu GeoGebra sestrojte bod $A=[0; 0]$ a dále umístěte volný bod B tak, aby neležel ani na jedné z os. Body A, B spojte úsečkou.
 - a) Zobrazte délku (v programu označeno jako „hodnota“) úsečky a najděte takovou polohu bodu B , aby tato délka byla celočíselná. Zdůvodněte, proč jde skutečně o celé číslo a nikoli o zaokrouhlenou hodnotu.

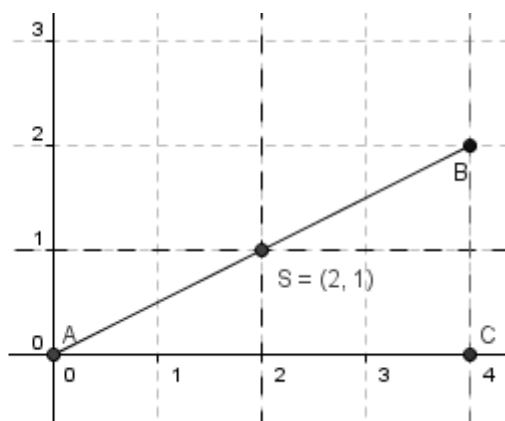
- b) Sestrojte střed S úsečky AB a zobrazte jeho souřadnice (opět „hodnotu.“) Jaké souřadnice musí mít bod B , aby byly souřadnice bodu S celočíselné?

Řešení:

- a) Jedno z řešení zobrazuje obrázek 61 a. Klíčem k úloze je volit za souřadnice bodu B dvě vybraná pythagorejská čísla: spuštěním kolmice z bodu B na osu x (průsečíkem necht' je bod C) totiž vzniká pravoúhlý trojúhelník ABC , ze kterého je již důkaz zřejmý.
- b) Řešení ilustruje obrázek 61 b. Střed S má celočíselné souřadnice právě tehdy, jsou-li obě souřadnice bodu B sudá čísla. Přímkou vedené bodem S kolmo na souřadnicové osy jsou podle věty o středních příčkách středními příčkami pravoúhlého trojúhelníka ABC . Zároveň vytínají na osách x , y příslušné souřadnice bodu S , které jsou v důsledku výše zmíněného poloviční vůči souřadnicím bodu B .



Obr. 61* a: Úsečka AB celočíselné délky.

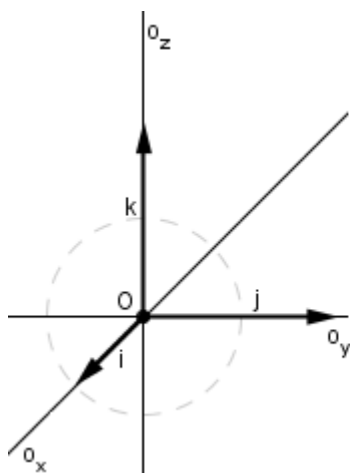


Obr. 61* b: Střed S úsečky AB s celočíselnými souřadnicemi.

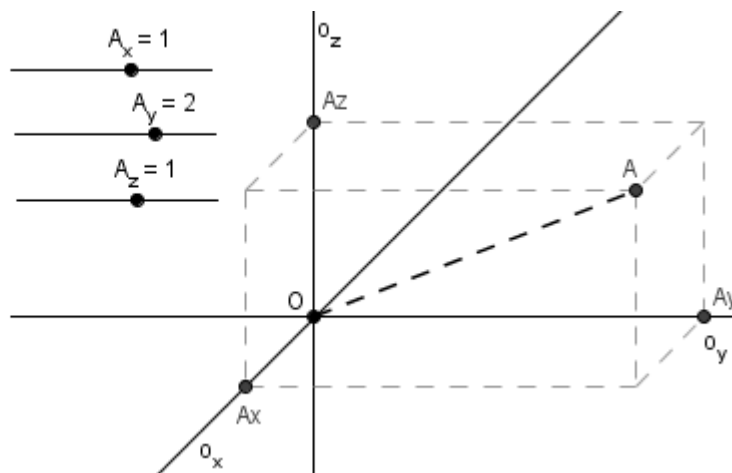
Na tento příklad lze dále navázat úvahami, co se stane, když bod A nebude ležet v počátku soustavy souřadnic, a konečně vzorci pro délku a střed úsečky.

Prostorové vztahy lze odvodit na základě analogie. Geogebra jakožto systém dynamické rovinné geometrie však pro ně v současnosti nemá žádnou vestavěnou podporu a vše je tedy nutné vložit ručně, nejnadhěji s využitím vektorů, což může studentům v této chvíli zůstat utajeno a následně být využito jako incentiva k jejich studiu.

Základem je vytvořit bázi tří „jednotkových“ vektorů \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , pro volné rovnoběžné promítání podle obrázku 62 a (kružnice, jejíž jeden průsečík s osou o_x určuje koncový bod vektoru \vec{k} , má dle pravidel volného rovnoběžného promítání poloměr 0,5). Ty a počátek O jsou základem pro tvorbu každého dalšího bodu, který vznikne posunutím počátku o vektor \vec{r} daný lineární kombinací $\vec{r} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$, kde $A = [A_x; A_y; A_z]$. Má-li bod být pohyblivý, musí být pohyb zprostředkován použitím posuvníků pro jednu či více souřadnic (obr. 62 b). Umístěním bodu na náčrtu nejsou jeho souřadnice v promítaném prostoru jednoznačně určeny (viz. obr. 63).

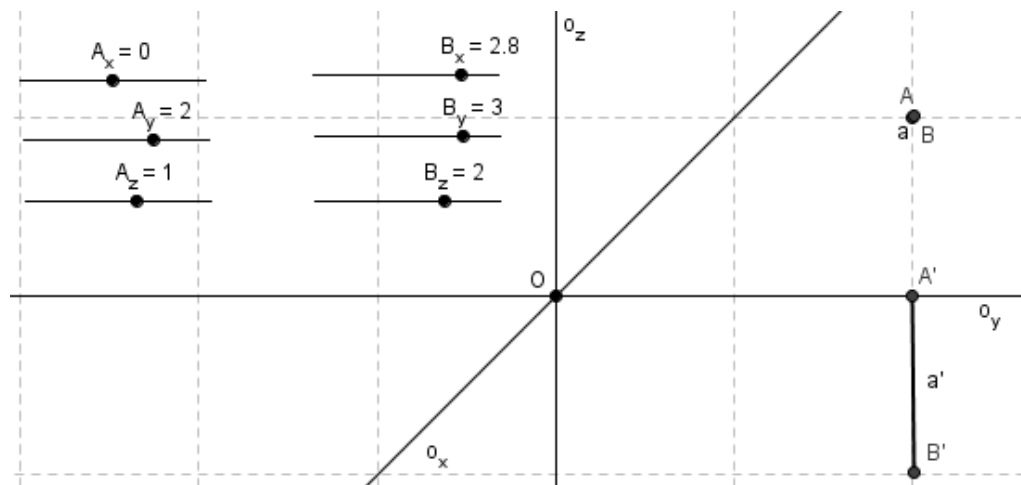


Obr. 62*a: Vektorová báze pro volné rovnoběžné promítání.



Obr. 62*b: Bod $A = [1; 2; 1]$ ve volném rovnoběžném promítání.

Na podobném principu lze zkonstruovat libovolné množství bodů. V případě potřeby konstrukce průmětu do jedné ze základních rovin stačí z lineární kombinace $\vec{r} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ vynechat člen obsahující vektor na tu rovinu kolmý, případně vytvořit obraz bodu v posunutí opačném než ten člen vektoru \vec{r} , který jej z roviny vychýlil. Obrázek 63 ilustruje průmět do roviny xy úsečky a spojující zdánlivě velmi blízké body A , B .



Obr. 63*: Kolmý průmět úsečky $a = \overleftrightarrow{AB}$ do roviny xy .

S vektory jako takovými se snad všichni studenti setkali ve fyzice, konkrétně v učivu mechaniky. Vektorová veličina ve fyzice se vyznačuje nejen velikostí, ale také směrem. Znázorňuje se šipkou s počátkem v působišti (pro mechanické síly je tímto působištěm obvykle těžiště), směřující požadovaným směrem, o délce odpovídající „velikosti“ veličiny.

Studenti tedy tuší význam a principy fungování vektorů, co však může dělat problémy je fyzikální důraz na kladení počátků souvisejících vektorů do jediného bodu. Skládání síly totiž musejí působit na totéž těleso. Matematika chápe vektory spíše ve smyslu jim příslušející transformace – posunutí, kde pohyb podél vektoru navazuje na ten podél vektoru předchozího.

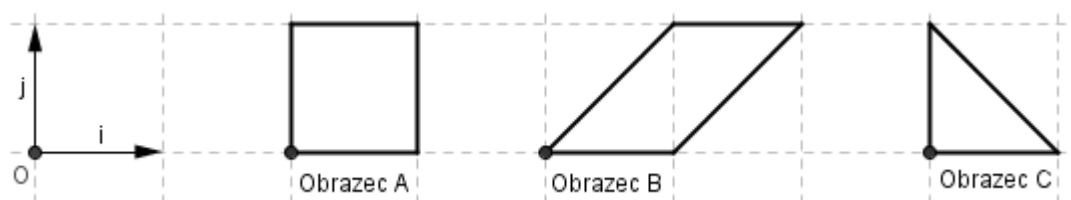
Tabulka 2 ilustruje fyzikální a matematický přístup k základním operacím s vektory – sčítání (jednoho a více vektorů) a násobení vektoru číslem. Jak vidno, fyzika se svojí podmínkou vázanosti vektoru na působiště velmi omezuje. Matematika, která vektory pojímá jako volně přemístitelné útvary je při jejich skládání daleko praktičtější.

	Fyzika	Matematika
$\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$		
\vec{z} $= \vec{u} + \vec{v}$ $+ \vec{w}$	<p>$\vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{z}_1$</p>	
$\vec{z} = k \cdot \vec{u}$		

Tab. 2: Srovnání fyzikálního a matematického přístupu k základním operacím s vektory.

Vektory v matematice není nutné vztahovat jen k jedinému bodu a není ani podmínkou je vztahovat ke vztažné soustavě. Stejně dobře mohou posloužit libovolné geometrické obrazce, jaké v některých cvičeních používá učebnice i sbírka. Taková cvičení nutí studenty k abstraktnímu myšlení a používání představivosti, o důkladném porozumění lineárním kombinacím nemluvě.

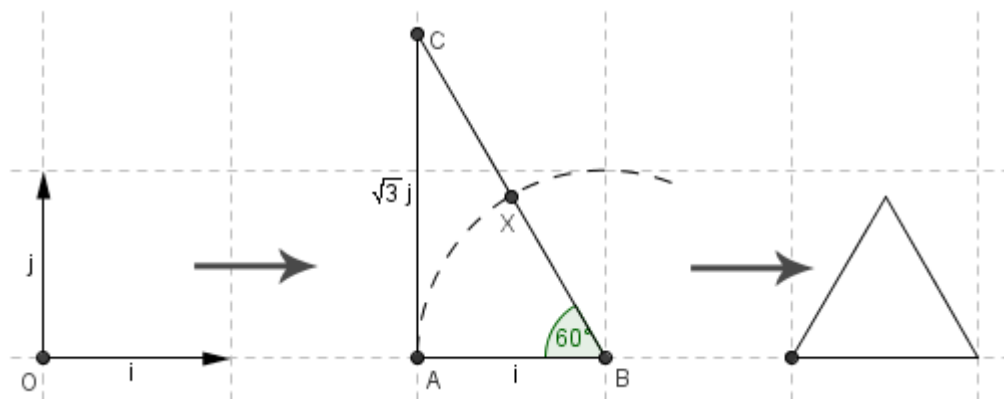
- **Úloha 5:** Jsou zadány jednotkové vektory \vec{i} , \vec{j} , podle obrázku 64. Pomocí jejich lineárních kombinací vytvořte vektory popisující, kterak nakreslit jedním tahem obrazce A, B a C z vyznačeného výchozího bodu v kladném směru (proti pohybu hodinových ručiček).



Obr. 64: K zadání úlohy 5.

Řešení: Obrazec A je zcela základní a lze jej obkreslit pomocí vektorů \vec{i} , \vec{j} , $-\vec{i}$, $-\vec{j}$. Obrazec B není o mnoho složitější, delší strana kosodélníka je tvořena vektorem např. $\vec{k} = \vec{i} + \vec{j}$ a celý postup obkreslování lze popsat vektory \vec{i} , \vec{k} , $-\vec{i}$, $-\vec{k}$. Obrazec C už postrádá rovnoběžky a navíc obsahuje úsečku „opačně skloněnou“ k úsečkám tvořeným vektorem \vec{k} z předchozího obrazce. Správná lineární kombinace pro vektor, který by tuto úsečku mohl vykreslit, je např. $\vec{l} = \vec{j} - \vec{i}$. Postup obkreslování je \vec{i} , \vec{l} , $-\vec{j}$.

Existuje bezpočet dalších tvarů, které lze takto vytvořit. U některých přes zdánlivou jednoduchost tvaru však vznikají překvapivě složité lineární kombinace vektorů. Například rovnostranný trojúhelník (obr. 65) vyžaduje ke svému sestrojení dobré porozumění goniometrii.



Obr. 65: Ke konstrukci tvaru rovnostranného trojúhelníka pomocí ortonormálních vektorů \vec{i}, \vec{j} .

Výchozím bodem konstrukce je potřeba, aby každé dva vektory svíraly úhel 60° . Protože se vychází z dvojice navzájem kolmých jednotkových vektorů, přichází v potaz hledání pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden další úhel má potřebnou velikost. U takového trojúhelníka lze v tomto případě libovolně nastavit délky odvěsen (vynásobením vektorů \vec{i}, \vec{j} reálnými čísly). S odvěsnami pracují goniometrické funkce tangens a kotangens. Obrázek 65 používá tangens a nastavuje velikosti vektorů $|B - A| = 1$ a $|C - A| = \sqrt{3}$, konkrétní vektory jsou $(B - A) = \vec{i}$ a $(C - A) = \sqrt{3} \cdot \vec{j}$. Vektor $(C - B)$, který je jejich lineární kombinací, svírá s vektorem $(B - A)$ požadovaný úhel. Druhou částí je požadavek, aby všechny strany byly stejně dlouhé, tedy například jednotkové. Toho lze snadno docílit normováním. Velikost „přeponového vektoru“ je dle Pythagorovy věty $|C - B| = \sqrt{|B - A|^2 + |C - A|^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$. Pokud vektor $(C - B)$ tímto číslem vydělíme, získáme vektor jednotkový a tím druhou ze stran. Ke konstrukci třetí strany stačí provést podobnou myšlenkovou operaci jako u obrazce C úlohy 5. Výsledné vektory tedy jsou např.:

$$\vec{u} = \vec{i},$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \cdot \vec{j} - \vec{i}),$$

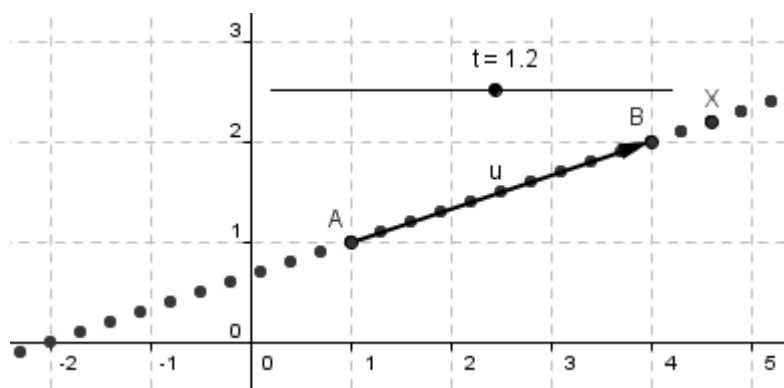
$$\vec{w} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \cdot \vec{j} + \vec{i}).$$

Zbývá stanovit postup obkreslování. Pro podmínky totožné se zadáním úlohy 5 je správné pořadí $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Zde samozřejmě nemusí úloha končit. Navazujícím úkolem může být například parametrický zápis úseček (určité délky), z nichž je útvar stvořen.

Analytickou geometrii v rovině lze velmi účinně modelovat pomocí programu GeoGebra, který je díky svému algebraicko-geometrickému vstupu i výstupu právě pro takovou činnost jako stvořený.

Pro parametrická vyjádření závisující na pohybu parametru po množině reálných čísel či jejím intervalu je ideální nástroj „Posuvník“ ve spojení s nástrojem „Stopa bodu.“ Posuvník lze nejprve nastavit na vysokou hodnotu kroku, jenom aby napomohl studentovu vhledu. Postupně lze velikost kroku snižovat, až Stopa vykreslí celý útvar. Velmi jednoduchý příklad takového postupu je model parametrického vyjádření přímky (či její části) na obrázku 66. Je dána dvojice bodů v rovině (volně pohyblivá) určujících vektor \vec{u} . Bod X , obraz jednoho z bodů v posunutí podle vektoru $t \cdot \vec{u}$, kde t je (obecně reálné) číslo dané posuvníkem, při svém pohybu daném změnou parametru t zanechává stopu vytvářející část přímky.



Obr. 66*: Ilustrace parametrického vyjádření přímky.

Přímku lze v parametrickém tvaru i zadat. Slouží k tomu příkaz Primka[bod, vektor], kam lze zadat jak souřadnice, tak názvy odpovídajících objektů. V algebraickém okně se přímka automaticky objeví v parametrickém tvaru. To může sloužit například k rychlému ověření správnosti výpočtu.

Přímku v obecném tvaru lze do Vstupu vložit přímo ve tvaru $ax + by + c = 0$, zobrazovat se bude tvar $ax + by = -c$. Toho lze využít k výzkumné činnosti vedoucí k objevení vztahu mezi obecnou rovnicí přímky a jejím normálovým vektorem, což je jeden z klíčových poznatků o analytickém vyjádření přímek. Tato činnost může být poměrně hravého charakteru, ale přesto je důležité se po každém kroku ujistit, že studenti porozuměli jeho podstatě a významu.

Následující úloha je ideální pro malé skupinky studentů, z nichž každá pracuje na jednom počítači. Pro individuální práci není kvůli svým nárokům na matematické formulování závěrů příliš vhodná, ale skupina podobně smýšlejících lidí se bude méně obávat veřejného vyjádření svého názoru, který je, včetně následné diskuse, také důležitou součástí činnosti.

- **Úloha 6:** V programu GeoGebra umístěte na nákresnu dva volné body A , B tak, aby jejich souřadnice byla celá čísla (použijte mřížku). Proložte jimi přímkou p , a bodem B k ní ved'te kolmici q . U obou přímek zobrazte jejich vyjádření v obecném tvaru.
 - a) Existuje mezi rovnicemi přímek p , q nějaká podobnost? Pokud ano, dovedete ji obecně matematicky vyjádřit? Svou domněnku ověřte pohybáním body A i B .
 - b) Sestrojte vektor $\vec{s} = (A - B)$ a vektor \vec{n} k němu kolmý, s počátkem v bodu B a velikostí $|\vec{n}| = |\vec{s}|$. Existuje mezi vektory \vec{s} , \vec{n} nějaká podobnost? Pokud ano, opět ji zkuste obecně matematicky vyjádřit. Svou domněnku ověřte podobně jako v a).
 - c) Existuje spojitost mezi obecnými rovnicemi přímek p , q a vektory \vec{s} , \vec{n} ? Pokud ano, dovedete z ní vytvořit pravidlo pro určování vektorů \vec{s} , \vec{n} z rovnice přímky p , a naopak?

(Poznámka: vektor \vec{s} se nazývá *směrovým vektorem* přímky p , vektor \vec{n} je *normálovým vektorem* přímky p .)

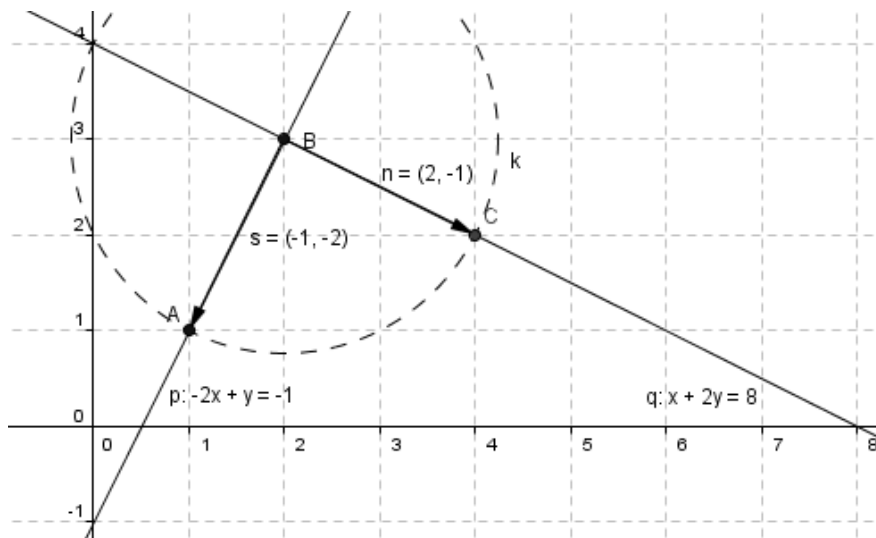
Řešení:

- a) Ano, existuje. Obecné vyjádření je například:

$$p: ax + by = c,$$

$$b: bx - ay = d.$$

- b) Vektor \vec{n} požadovaných vlastností lze sestavit pomocí kružnice k podle obrázku 67.



Obr. 67: K řešení úlohy 6.

I mezi vektory existuje podobnost. Jejich tvary lze obecně zapsat například:

$$\vec{u} = (k, l),$$

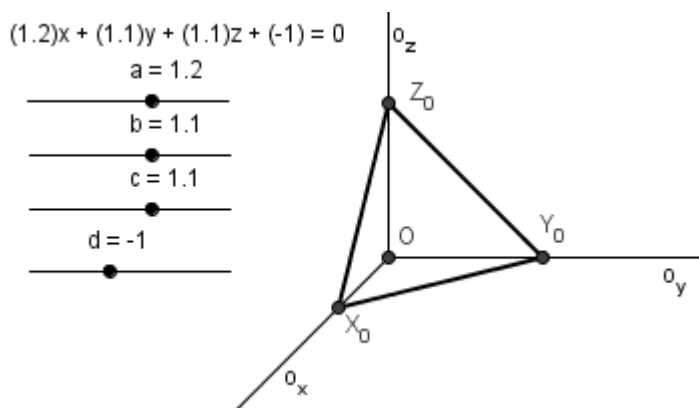
$$\vec{v} = (l, -k), \text{ případně } \vec{v}' = (-l, k).$$

c) Pro rovnici přímky $p: ax + by = c$ platí:

Směrový vektor $\vec{s} = (b, -a)$, nebo $\vec{s}' = (-b, a)$.

Normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$.

Přestup ke geometrii rovin v prostoru s využitím programu GeoGebra čelí opět problémům dvojrozměrnosti programu. S využitím vektorové báze pro volné rovnoběžné promítání a transformace posunutí lze však vytvářet až překvapivě výkonné modely, byť všechen pohyb je nutné řídit posuvníky a rovnice vypisovat pomocí dynamického textu. Příklad takového modelu je na obrázku 68 a.



Obr. 68* a: Model závislosti polohy roviny na koeficientech obecné rovnice $ax+by+cz+d=0$.

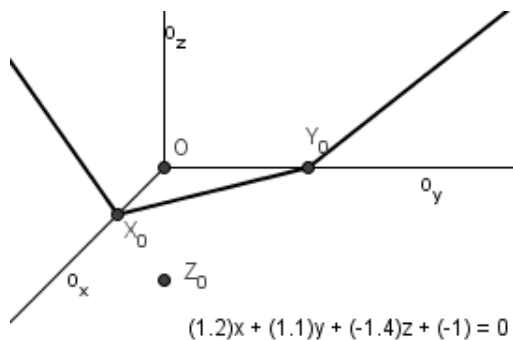
Model závislosti polohy roviny na koeficientech její obecné rovnice $ax + by + cz + d = 0$ lze využít pouze demonstračně, ale jeho tvorba (nejlépe s možností si zároveň podobně nastavit funkční model a ověřit tím správnost úvahy) podnětným způsobem naučí studenty práci s obecnou rovnicí a podmínkami požadovaného řešení.

Základem tvorby modelu je uvědomění, že obecná rovina $\rho: ax + by + cz + d = 0$ je porovnávána s trojicí rovin tvořících kartézskou soustavu $Oxyz$ – přesněji řečeno předmětem zkoumání jsou průniky těchto čtyř rovin. Těmi jsou ve většině případů přímky, a k sestrojení přímky je potřeba dvojice bodů.

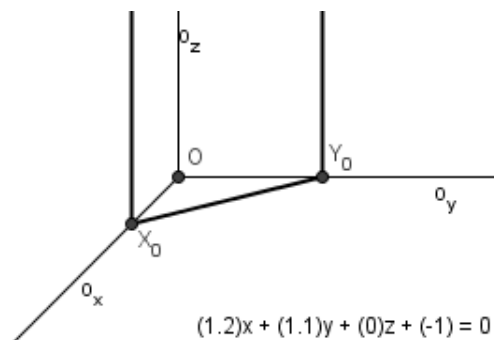
Nejvhodnějším místem pro první kroky konstrukce jsou zjevně průsečíky roviny s osami, kde se stopa zkoumané roviny „láme.“ Získat tyto body lze snadnou úvahou: bod na ose má pouze souřadnice té dané osy, druhé dvě jsou nulové. Necht' X_0 je průsečík roviny ρ s osou x . Platí pro něj $y = z = 0$. Po dosazení do rovnice jsou tímto vyřazeny členy b a c , zbude $ax + d = 0$. Z této rovnice pak zbývá vyjádřit jedinou nenulovou souřadnici bodu X_0 , tedy $x = -\frac{d}{a}$.

Bod X_0 je obrazem počátku O v posunutí podle vektoru $\vec{x} = -\frac{d}{a} \cdot \vec{i}$, kde \vec{i} je jednotkový vektor ve směru kladné poloosy x . Body Y_0 (posunutí $\vec{y} = -\frac{d}{b} \cdot \vec{j}$, kde \vec{j} je jednotkový vektor ve směru kladné poloosy y) a Z_0 ($\vec{z} = -\frac{d}{c} \cdot \vec{k}$, kde \vec{k} je jednotkový vektor ve směru kladné poloosy z) vznikají analogicky.

Pouhé spojení bodů X_0 , Y_0 a Z_0 úsečkami ovšem postačuje pouze pro případ $a, b, c > 0 \wedge d < 0$. Co je pro tento stav příznačné? Průsečíky roviny ρ s osami x , y , z leží na kladných poloosách x , y , z . V okamžiku, kdy se některý z původně kladných koeficientů a , b , c stane záporným, přesune se (při zachování znaménka d) příslušný bod (v pořadí X_0 , Y_0 , Z_0) na zápornou poloosu, kde původní stopy spojující jej s druhými dvěma průsečíky přestávají být viditelné. Zároveň ovšem vzniká nová dvojice stop, tentokrát polopřímek s počátky v bodech setrvávších na kladných poloosách, ležící v kladných polorovinách xy , yz nebo zx a směřující ve směru původních úseček (obr. 68 b).



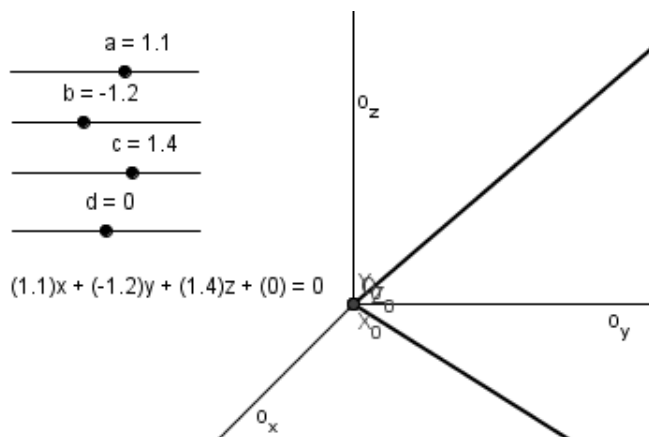
Obr. 68 b: $a, b > 0 \wedge c, d < 0$.



Obr. 68 c: $a, b > 0 \wedge c = 0 \wedge d < 0$.

Problém vzniká v případě, že jeden z koeficientů je nulový, protože pro posunutí příslušného bodu, například Z_0 (obr. 68 c), vzniká „nesmyslný výraz“ $\vec{z} = -\frac{d}{0} \cdot \vec{k}$. V geometrickém smyslu to znamená, že bod je posunut v příslušném směru do jednoho z nekonečen (kladného či záporného, v závislosti na znaménku členu d). Polopřímky do něj vedoucí z bodů X_0 a Y_0 se stávají rovnoběžkami s osou z .

Poslední situace vyžadující zvláštní přístup nastane pro $d = 0$, kdy se body X_0 , Y_0 a Z_0 ztotožní s počátkem O a nelze dále využívat jejich spojnic. Rovnice roviny nabude tvaru $\rho: ax + by + cz = 0$, požadavek, aby její stopa náležela jedné z rovin xy , yz či zx vynuluje pouze jednu ze souřadnic x , y , z . Při zvolení například $z = 0$, což odpovídá práci v dvojrozměrné kartézské souřadnici Oxy , vznikne zvláštní případ „obecné rovnice přímky“ $p: ax + by = 0$. Tato přímka je stopou roviny ρ v rovině xy . Přímou zadat ji nelze, protože to, co GeoGebra považuje za rovinu xy je v tomto případě rovinou yz . Je tedy nutné jednu souřadnici opět zvolit – tentokrát nenulovou, aby se nevynulovala i poslední zbývající – a druhou dopočítat. Například tedy pro $x = 1$ vyjde $y = -\frac{a}{b}$.



Obr. 68 d: $a, c > 0 \wedge b < 0 \wedge d = 0$.

Body pomocí nichž lze definovat polopřímky tvořící stopy roviny ve viditelných polorovinách jsou tedy ve všech případech počátek O , a dále body například $X'[0,1, -\frac{b}{a}]$, $Y'[-\frac{c}{a}, 0,1]$ a $Z'[1, -\frac{a}{b}, 0]$. Tyto vyneseme na příslušná místa použitím příslušných lineárních kombinací vektorů báze volného rovnoběžného promítání $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Nebudou-li zadány podmínky zobrazení, model bude zobrazovat všechny stopy bez ohledu na jejich polohu vůči viditelné části prostoru, za níž je tradičně považována ta ohraničená kladnými polorovinami xy , yz a zx . Program GeoGebra však umožňuje definovat podmínky zobrazení útvaru. I zde je prostor pro matematické myšlení. Všechny útvary lze jeden po druhém sestavit podle učebnice a zapsat podmínky uvedené u příslušných obrázků, což ale vede k duplikaci některých stop. Zajímavější je vést studenty ke zpytování rovnic použitých k tvorbě bodů a okolností, za jakých jsou tyto body součástí vykreslovaných stop a za jakých ne. Výsledkem těchto úvah by měl být poznatek, že zobrazené stopy procházejí body, jejichž všechny souřadnice jsou nezáporné.

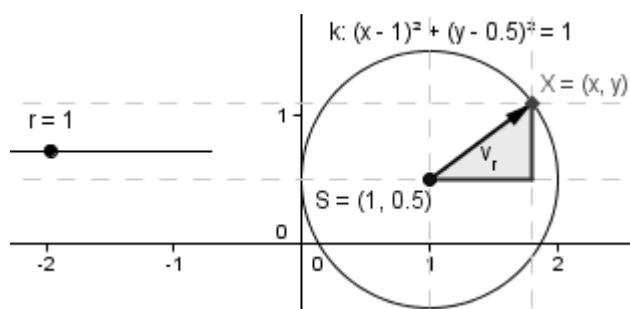
Jakkoli je modelování situací v prostoru pomocí vektorové báze volného rovnoběžného promítání přínosné pro navázání správných představ k výpočtům, jeho možnosti jsou velmi omezené a v některých případech jednoduše nestačí na prostou demonstraci pomocí reálných, třírozměrných pomůcek, byť improvizovaných.

Studium kuželoseček se vrací do roviny, kde lze možností programu GeoGebra opět využívat v jejich standardní podobě. Většinu ilustrací z učebnice lze velmi snadno převést do programu a demonstrovat dynamicky od nejjednodušších případů ke stále složitějším, na jejichž postupné vykreslení se v učebnici samotné nedostávalo místa.

Učebnice [8] přistupuje k hledání rovnic kuželoseček syntetickou metodou: shromáždí soubor relevantních poznatků o zkoumaném útvaru a vět souvisejících s jeho požadovanou interpretací, načež odvodí požadovanou rovnici. Možnost programu GeoGebra zobrazit rovnice kuželoseček a sledovat jejich změnu při změně parametrů (pohyb body, vazba parametrů rovnic na posuvníky či hodnoty tabulky a následná manipulace s nimi) otevírá cestu k analytickému přístupu k analytické geometrii těchto útvarů. Výchozím bodem je zde znalost rovnice útvaru, cílem práce pak rozbor jejich podob v závislosti na volených parametrech a objasnění důvodů, proč je tomu právě tak. Oba způsoby, analytický i syntetický jsou ovšem naprosto závislé na příslušných grafických představách a schopnosti tyto analyzovat či vyhledávat požadované znaky.

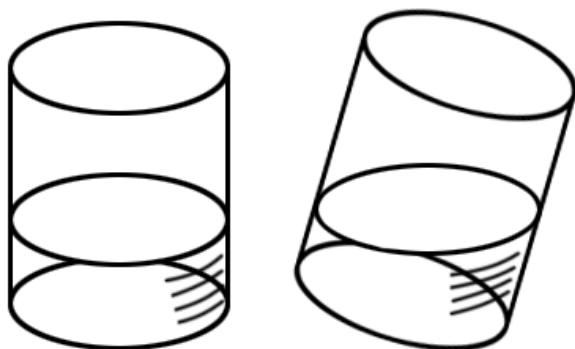
Například první a nejjednodušší kuželosečka, kružnice, v syntetickém přístupu potřebuje vhodnou interpretaci svého poloměru jako funkce souřadnic středu a libovolného bodu jejího obvodu, zatímco analytický přístup by někde v kružnici rád našel útvar, na nějž lze aplikovat Pythagorovu větu, k níž odkazuje experimentální analýzou odvozená středová rovnice kružnice $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, kde $S = [m, n]$ jsou souřadnice středu kružnice k a r je poloměr této kružnice.

Klíčovým krokem obou zmíněných přístupů je nalezení pravoúhlého trojúhelníka zvýrazněného na obrázku 69. Nejpodstatnějším rozdílem mezi tímto obrázkem a odpovídající ilustrací v [8] je vyznačení vektoru poloměru $v_r = (X - S)$. Tato drobná úprava především výrazně osvětlí použití výrazů $(x - m)$ a $(y - n)$. Ty jsou používány i ve vzorcích pro délku úsečky, která sice dávno přestala být aktuální látkou, ale zde je možnost ji osvěžit a zopakovat vazby mezi vektory a úsečkami. Představa dále poskytne důležitou nápovědu pro navazující látku probírající rovnici tečny kružnice: vektor v_r je totiž normálovým vektorem tečny dotýkající se kružnice v bodě X . (Více [8], str. 148)



Obr. 69*: Model pro analýzu středové rovnice kružnice.

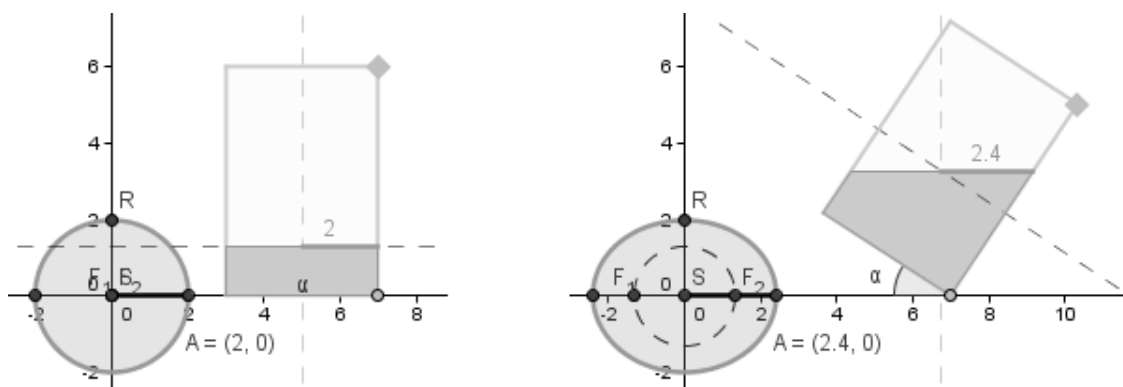
Kružnice je nejjednodušší z kuželoseček a přesto příklady jí obsahující dokážou být velmi zdlouhavé a výpočtově náročné. To může vážně ohrozit motivaci studentů ke zkoumání dalších útvarů, se kterými se na rozdíl od kružnice setkávají vůbec poprvé. V těchto úlohách je klíčové zejména nalezení metody, která postihnout dostatečný počet uplatnitelných geometrických závislostí známými vzorci. Zbytek jsou mechanické výpočty pro matematické myšlení málo podstatné a tedy v rozumné míře vynechatelné. „Máme-li ve sklenici tvaru válce vodu a sklenice stojí na stole, je samozřejmě hranicí vodní hladiny kružnice. Jestliže sklenici nakloníme, není již hranicí vodní hladiny kružnice, ale **elipsa** (obr. 70).“ ([8], str. 155)



Obr. 70: Sklenice s vodou: transformace kružnice v elipsu v reálné situaci. (Zdroj grafiky: [8]).

Původní obrázek 70 je mírně zavádějící, protože i hranice vodní hladiny v nenakloněné sklenici se na obrázku jeví jako elipsa. Při skutečném pokusu tedy není nutně naklánět sklenici, stačí změnit úhel pohledu. Změna tvaru hladiny nakloněním sklenice ale na rozdíl od změny úhlu pohledu ilustruje klíčový proces, kterým je oddělení ohnisek elipsy původně splývajících ve střed kružnicové hladiny.

Proces naklání sklenice vedoucí k „deformaci“ kružnice v elipsu lze modelovat v programu GeoGebra a jeho závěry jsou velice zajímavé. Aby podstata modelu skutečně vynikla, je potřeba zobrazit najednou dva kolmé průměty sklenice, jeden na libovolnou svislou rovinu tečnou ke stěně nádoby, podél které pak virtuální sklenici nahýbáme, druhý na vodorovnou rovinu podložky sklenice. Takový model v základním (a) a nakloněném (b) tvaru zobrazuje obrázek X.71.



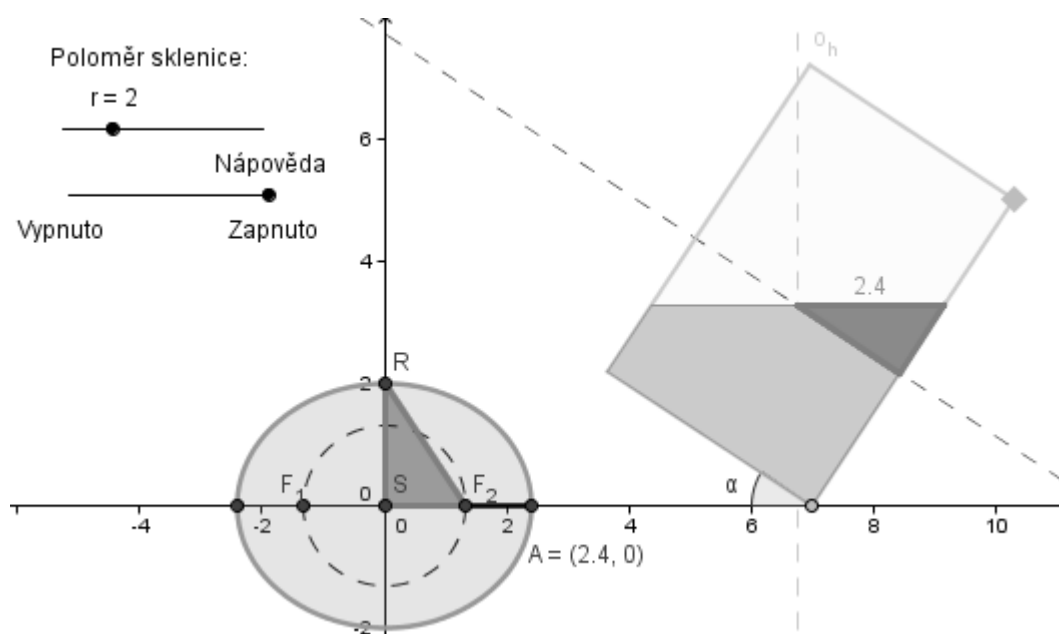
Obr. 71* a: Sklenice s vodou, nenakloněná: hranici hladiny tvoří kružnice.

Obr. 71* b: Sklenice s vodou, nakloněná: hranici hladiny tvoří elipsa.

Délka hlavních poloos je zřejmá: při naklání sklenice podél svislé průmětné roviny se hladina nejvíce „natahuje“ ve směru přímky, která je průsečnicí oné průmětny a vodorovné podložky sklenice. To je dobře vidět z obrázku 71 b. Délku této hlavní

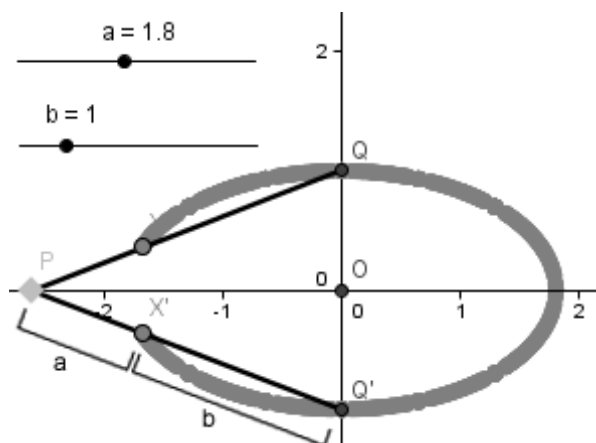
poloosy (a) lze i bez použití výpočetní techniky snadno spočítat pomocí goniometrické funkce kosinus – známe poloměr sklenice a úhel sevřený rovinou vodorovné hladiny s rovinou rovnoběžnou se dnem sklenice (znázorněna čárkovanou přímkou). Délka druhé hlavní poloosy (b) je konstantní a rovná poloměru sklenice.

Ke konstrukci elipsy v programu GeoGebra je však nutné zadat polohu jejích ohnisek a jednoho bodu na jejím obvodu. Obvodové body jsou dány znalostí délek poloos a skutečností, že osy elipsy jsou vzájemně kolmé. Naleznout ohniska a zapracovat je do dynamického modelu pomůže obrázek v učebnici (viz. [8], str. 158), případně nápověda vestavěná do modelu (obr. 71 c). Zatím nevyužitá odvěsna pravoúhlého trojúhelníka v průmětu na svislou rovinu je excentricita e elipsy!

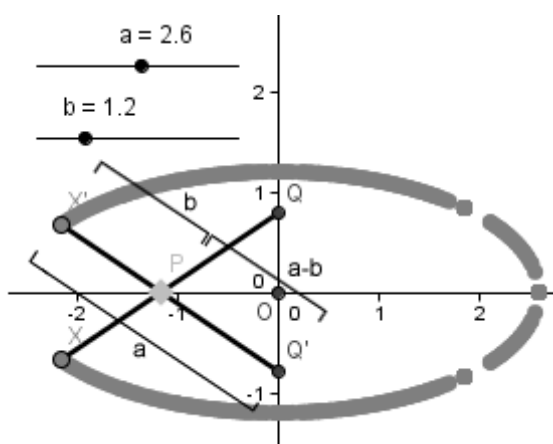


Obr. 71 c: Shodné trojúhelníky ve dvou různých průmětech nakloněné sklenice umožňují dynamickou konstrukci ohnisek F_1 a F_2 .

Zadání elipsy dvěma ohnisky a jedním bodem na jejím obvodu je typické pro takzvanou zahradnickou konstrukci ([8], str. 157), kterou lze snadno předvést na tabuli i v sešitě. Alternativou, především jsou-li známy jenom délky poloos, jsou proužkové konstrukce elipsy, které dobře spolupracují se systémy dynamických geometrií (obrázky 72, 73; podrobněji např. [17]).



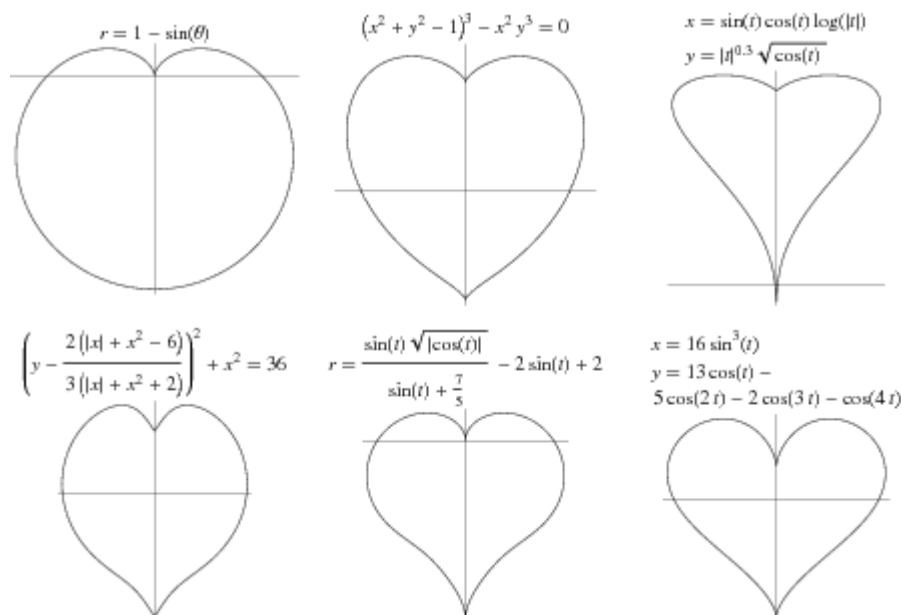
Obr. 72*: Součtová proužková konstrukce elipsy.



Obr. 73*: Rozdílová proužková konstrukce elipsy.

Na rozdíl od hmotné pomůcky potřebuje program ke konstrukci úplné elipsy vždy dva analogicky konstruované proužky. Vypracování součtové konstrukce v programu GeoGebra je velmi snadné a lze ji využít pro libovolné hodnoty parametrů a , b . Rozdílovou konstrukci dle obrázku 74 je však nutné ošetřit podmíněným zobrazením pro případy $a \geq b$ a $a < b$.

Studium elipsy (a kružnice jako jejího speciálního případu) v analytické geometrii je pro studenty v jistém smyslu zlomové: doteď pracovali v kartézském systému souřadnic především s funkcemi, jejichž grafy nikdy nemohly tvořit uzavřené křivky. Mezi kuželosečkami je elipsa jedinou takovou křivkou, avšak pomocí vhodných rovnic lze vykreslit překvapivé množství rovinných útvarů, jejichž bohatým zdrojem je internet. Například stránky [24] nabízejí studentům širokou škálu srdcových křivek (obrázek 74).



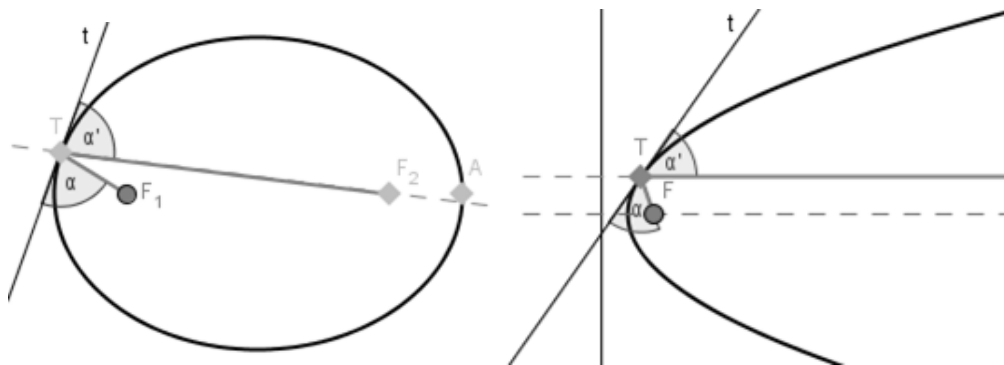
Obr. 74: Srdcové křivky (heart curves). (Zdroj grafiky: [24]).

Kuželosečky jsou možná pouhým matematickým konstruktem, ale mají hojně využití v praxi. Graficky lze demonstrovat zejména jejich vlastnosti v zrcadlové optice, jejíž základy by měli studenti mít už ze základní školy.

- **Úloha 7:** Navrhněte zrcadlivé zařízení, které, umístíte-li do něj na správné místo bodový zářič, bude a) soustředit všechny paprsky zářiče do jednoho bodu, b) soustředit všechny paprsky zářiče do jednoho směru.

Řešení:

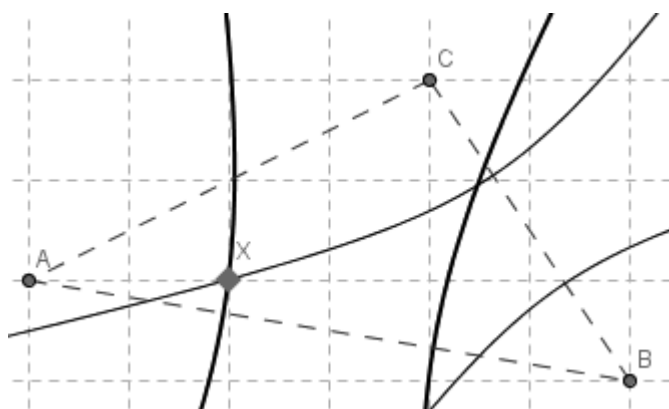
- a) Zařízení má tvar elipsy (ve třech rozměrech rotačního elipsoidu). Všechny paprsky vycházející z bodového zářiče v jednom ohnisku dopadnou do druhého ohniska (viz. obrázek 75).
- b) Zařízení má tvar paraboly (ve třech rozměrech rotačního paraboloidu). Všechny paprsky vycházející z bodového zářiče v ohnisku směřují podél osy paraboly (obrázek 76).



Obr. 75*: Paprsek vyslaný z jednoho ohniska elipsy se odráží do druhého ohniska.

Obr. 76*: Paprsek vyslaný z ohniska paraboly se odráží rovnoběžně s její osou.

Existuje nějaké praktické upotřebení pro hyperbolu? Odpovědí necht' je „zvukoměřičská úloha“ převzatá z [17]: „Ve třech různých místech A, B, C byl zaznamenán zvukový signál po řadě v časech t_1, t_2, t_3 . Určete místo zdroje signálu.“ Při řešení zvolíme dvě dvojice bodů a za předpokladu, že se signál šíří rychlostí v , zkoumáme, o kolik je zdroj dále od jednoho z přijímačů než od druhého. Uvažujme $t_1 \leq t_2 \leq t_3$. Označíme-li X zdroj signálu, platí pro rozdíl vzdáleností $|XB| - |XA| = (t_2 - t_1)v$ a zdroj tedy leží na hyperbole s ohnisky v bodech A, B a $2a = (t_2 - t_1)v$. Protože v bodě A byl signál zaznamenán nejdříve, uvažujeme pouze tu větev hyperboly, která je tomuto bodu bližší. Situaci znázorňuje obrázek 77. Podrobný výklad a poznámky viz. skripta [17], str. 42.



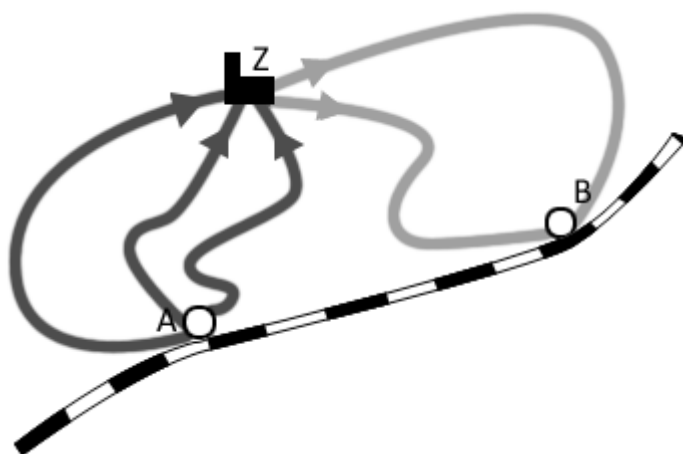
Obr. 77: Ilustrace řešení zvukoměřičské úlohy.

Analytická geometrie je jedním z nejnáročnějších odvětví matematiky probíraných na střední škole, ale zároveň jedním z nejdůležitějších, protože se zabývá jednou ze stěžejních vlastností matematiky – těsným sepejetím, ba prolínáním, jejích oborů.

3.7 Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Prakticky celou kombinatoriku lze postavit na dvou základních, snadno ilustrovatelných pravidlech – pravidlu součtu a pravidlu součinu. V učebnici [4] jsou ilustrována obě zároveň v takzvané „turistickém příkladě,“ zde jsou na podobných příkladech ilustrována zvlášť.

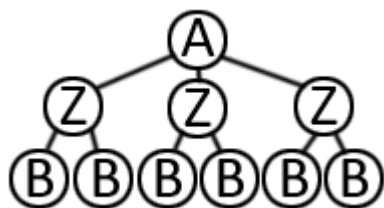
Kombinatorické pravidlo součinu zní následovně: Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předchozích členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$. Příslušná verze „turistického příkladu“ se ptá, kolik různých tras může turista naplánovat, chce-li z města A dojít na zříceninu Z a následně do města B, přičemž všechny možné cesty jsou zakresleny na obrázku 78.



Obr. 78: Ilustrace kombinatorického pravidla součinu.

Turistova trasa je uspořádána z cest nejprve $A \rightarrow Z$ a následně $Z \rightarrow B$. Nejprve má tři možnosti, potom dvě. Jinak řečeno, ke každé ze tří možností, které zvolí v první fázi plánování, si může v druhé fázi zvolit dvě cesty. Z této formulace, podpořené ilustrací, je už zřejmé, že turista má podle obrázku 78 celkem $6 = 3 \cdot 2$ možností.

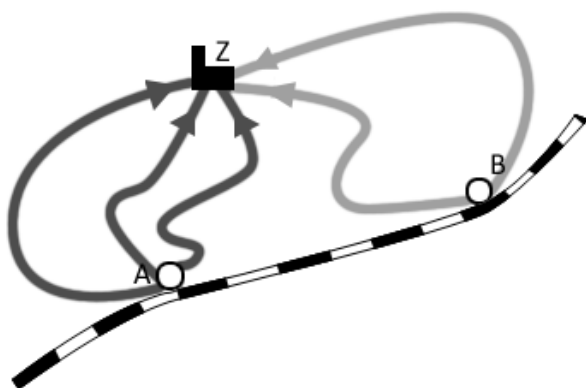
Známou ilustrací pravidla součinu je také „strom“ využitelný především v klasických úlohách házení kostkou, tahání karet, či losování. Obrázek 79 ilustruje „strom“ pro výše uvedenou úlohu.



Obr. 79: Ilustrace kombinatorického pravidla součtu pomocí „stromu.“

Kombinatorické pravidlo součtu má tuto matematickou formulaci: Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, \dots, p_n prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

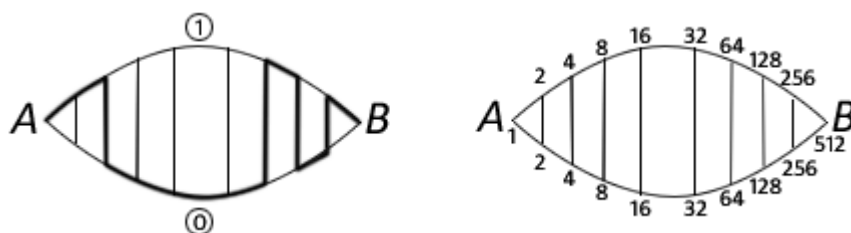
Turista využívající pravidla součtu chce dojít jenom na zříceninu Z (obrázek 80), a zbývá mu tedy jenom vybrat, zda vyjde z města A *nebo* B. V prvním případě si bude moct vybrat ze tří různých cest, v druhém pouze ze dvou. Tyto možnosti jsou zmíněnými konečnými množinami o určitém počtu prvků. Jsou také zjevně disjunktní, protože žádná cesta $A \rightarrow Z$ není zároveň cestou $B \rightarrow Z$. Celkový počet možností, kterak tento turista může naplánovat svoji cestu je $5 = 3 + 2$, jak lze snadno vyčíst z obrázku 80.



Obr. 80: Ilustrace kombinatorického pravidla součtu.

Ilustrace příkladů z kombinatoriky jsou vhodným nástrojem k vizualizaci děje a odhadu, jak lze dospět k požadovanému výsledku. Pro zvlášť význačné způsoby vybírání prvků z množin a jejich následné uspořádávání byly pro usnadnění práce vytvořeny specifické vzorce, ale i ty mají svou graficky znázornitelnou strukturu pomáhající s objasněním vzniku vzorce. Učebnice [4] má tyto struktury kvalitně ilustrovány, ať už obecně (variace, variace s opakováním), nebo v podobě graficky řešených příkladů (kombinace, permutace a kombinace s opakováním), jejichž zobecněním se dospěje ke vzorci.

Grafickými příklady využívanými v tomto učivu jsou „cesty:“ na obrázku (např. obr. 81) je zachycena struktura sítě komunikací mezi místy A , B . Úkolem řešitele je vyčíslit počet možností, kterými lze bez vracení vykonat cestu z A do B . Jedním způsobem řešení některých úloh je kódování cest: každé z „hlavních cest,“ které přímo spojují body A , B je přiřazen znak a cesta je pak popsána uspořádanou množinou znaků, např. na obrázku 81 a jsou to čísla 0 a 1. Vyznačená trasa je pak charakterizována uspořádanou devíticí (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1).

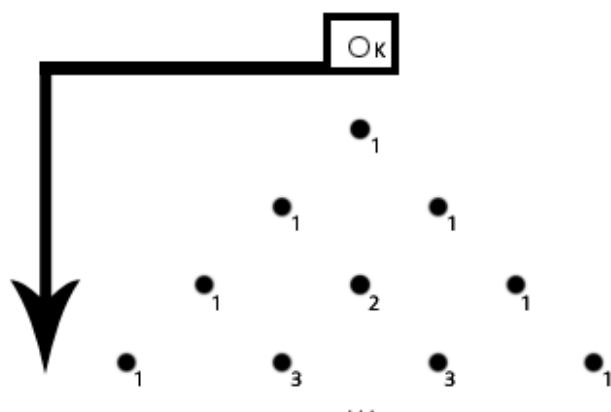


Obr. 81a: Ilustrace úlohy určující počet možných cest mezi body A , B kódováním. (Zdroj grafiky: [4])

Obr. 81b: Ilustrace úlohy určující počet možných cest mezi body A , B sčítáním cest v uzlech.

Obrázek 81 b ilustruje jinou metodu s širším uplatněním (ne vždy je totiž možné stanovit „hlavní cestu“): v každém uzlu cest, tedy místě, kde je možné se rozhodnout kudy pokračovat, je vyznačen počet možností, kterými lze na toto místo dospět. Na rozdíl od obrázku 81 a nevede studenty ke vzorci, ale k úvaze a následně indukci.

Touto „metodou uzlů“ je navíc možné ilustrovat též jednu ze stěžejních kombinatorických konstrukcí, kterou je Pascalův trojúhelník. Pomůcka, na které lze tento důležitý matematický poznatek modelovat, se nazývá Galtonova deska. Její podoba je schematicky zakreslena na obrázku 82.



Obr. 82: Schéma Galtonovy desky.

Skutečná Galtonova deska je podobná hrací ploše pinballu. Kulička (na obrázku 82 označená K) padá (dle šipky) mezi kolíky. Od každého se odrazí buď doleva nebo doprava a dopadne na kolík v řadě pod ním. Tyto kolíky mají tedy roli výše zmíněných uzlů. Při zkoumání, kolika způsoby může kulička K do uzlu dospět lze zjistit, že čísla takto přiřazená jednotlivým kolíkům mají strukturu Pascalova trojúhelníku.

Navíc, velké množství kuliček, které projdou Galtonovou deskou, vytvoří na dně hromadu, jejíž tvar odpovídá Gaussově křivce. Ta se velmi často vyskytuje ve statistice. Učivo pravděpodobnosti v mnoha případech těží z dobře navrženého grafického modelu, který má často podobu tabulky, která má zejména s použitím stínování políček větší šanci se vtisknout do studentových představ. „*Představme si hru, při níž házíme 2 kostkami. Vyhraje, padne-li aspoň na 1 kostce šestka. Hod 2 kostkami, řekněme bílou a černou, je náhodným pokusem s možnými výsledky...*“ (prezentace možných výsledků podle ([U], str. 83) je na obrázku 83 a).

(1, 1),	(1, 2),	...	(1, 6),
(2, 1),	(2, 2),	...	(2, 6),
⋮			
(6, 1),	(6, 2),	...	(6, 6)

Č B	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Obr. 83a: Možné výsledky hodu dvěma kostkami. (Zdroj grafiky: [4]).

Obr. 83b: Tabulkový model hodu dvěma kostkami s vystínovanými „výherními poli.“

Tabulkový model situace na obrázku 83 b nejen ušetří námahu, ale navíc přehledně zobrazí vše, co student k řešení takového příkladu potřebuje – to a mnohem víc. Z modelu lze snadno vyčíst nejen počet příznivých a všech možných výsledků. Nestínovaná pole také představují jev V' opačný k příznivému jevu V , a protože žádné pole nemůže být zároveň vystínované a nevystínované, je odtud zřejmá platnost tvrzení $V \cap V' = \emptyset$.

Každé políčko tabulky na obrázku 83 b se vyznačuje stejnou pravděpodobností, protože, není-li zadáno jinak, jsou kostky považovány za „spravedlivé.“ Podobnou tabulkou lze však stejně dobře řešit případ, kdy jsou kostky „falešné,“ například „... čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 mají po řadě pravděpodobnosti 0,10; 0,15; 0,15; 0,15; 0,15; 0,30.“

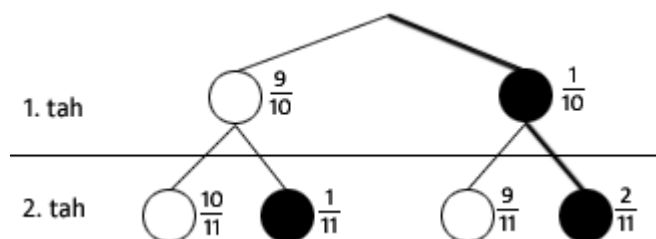
([4], str. 115) Obrázek 84 ilustruje řešení úlohy „*hodíme dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že při obou hodech padne stejné číslo?*“

Č B	1	2	3	4	5	6
1	0,1·0,1	0,15·0,1	0,15·0,1	0,15·0,1	0,15·0,1	0,30·0,1
2	0,1·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,30·0,15
3	0,1·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,30·0,15
4	0,1·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,30·0,15
5	0,1·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,15·0,15	0,30·0,15
6	0,1·0,30	0,15·0,30	0,15·0,30	0,15·0,30	0,15·0,30	0,30·0,30

Obr. 84: Tabulkový model hodu dvěma „falešnými“ kostkami.

Hodnoty jednotlivých polí tabulky jsou součiny pravděpodobností, protože oba hody kostkou, byť „falešnou,“ jsou nezávislé. Každé dva jevy v různých polích se zároveň vylučují, pročež pravděpodobnost jevu **V** lze získat sečtením pravděpodobností ve vystínovaných polích. Více k tématu sčítání a násobení pravděpodobností viz. ([4], str. 97 – 98, 106 – 107).

Dalším užitečným modelem v pravděpodobnosti je logický strom využívaný především při řešení příkladů, jejichž jednotlivé pokusy jsou vzájemně závislé. Typickým případem tohoto druhu úloh je následující příklad z ([4], str. 123): „*V osudí je 9 bílých koulí a 1 červená koule. Vytáhneme jednu kouli, vrátíme ji a přidáme jednu kouli téže barvy; pak táhneme podruhé. Jaká je pravděpodobnost, že v obou tazích vytáhneme červenou?*“



Obr. 85: Grafický model dvou tahů z losovacího osudí.

Grafické řešení představuje obrázek 85. Úspěšné řešení znázorňuje cesta „je vytažena červená koule a následně je vytažena červená koule.“ Tato věta připomíná tvrzení kombinatorického pravidla součinu, a skutečně, řešením příkladu je

$$P(\mathbf{V}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{11}.$$

12. června 2009 oběhla svět zpráva: „*Chlapec přežil přímý náraz meteoritem letícím rychlostí 48 000 km/h,*“ [28] která v tomto znění možná zničí fyzika, ale mohla by zaujmout studenta pravděpodobnosti. Jaká je pravděpodobnost, že by takový meteor zasáhl zrovna *jeho*? Při značném zjednodušení, které předpokládá kulový tvar Země a rovnoměrné rozprostření meteorů vhodné velikosti v jejím okolí, lze tuto pravděpodobnost řešit geometricky. Protože dle předpokladů dopadají meteory na Zemi rovnoměrně, stačí srovnat povrch planety (přibližně $5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$) s plochou, kterou na tomto povrchu zaujímá jeden člověk. I bez přesného počítání je zjevné, že tato pravděpodobnost se blíží nule.

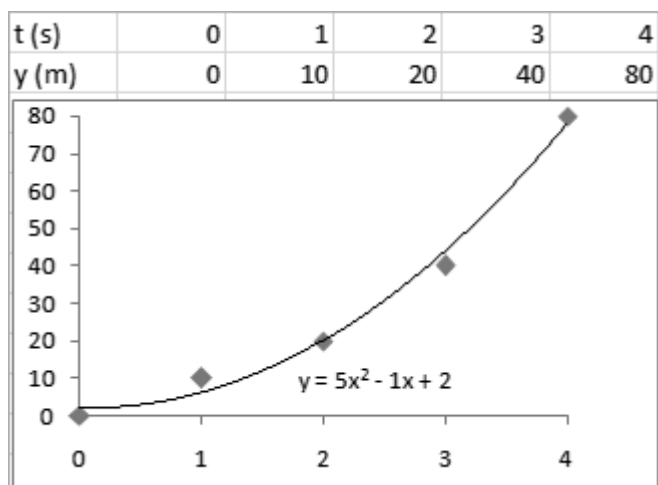
Geometrická pravděpodobnost má ovšem jedno úskalí: zdánlivě spolehlivé úvahy zahrnující geometrické objekty, jichž je často nekonečně mnoho (například bodů na úsečce) mohou vést k paradoxům. Nejznámější z nich ukázal v 19. století francouzský matematik Joseph L. E. Bertrand. Více o tomto (i z grafického hlediska) zajímavém jevu se lze dočíst mimo jiné na internetu [22].

Grafickou podobou statistiky jsou pochopitelně grafy, neboli diagramy, které jsou v dostatečně šířce popsány v učebnici, snad až na jeden typ stěžejní pro zpracování laboratorních dat, kterým je regrese.

Stanovení regresní křivky je velmi podobné zakreslování grafu funkce do sešitu: student vynese dostatečný počet bodů, aby mohl stanovit podobu grafu, načtež je proloží vhodnou křivkou. Samozřejmě zatímco v případě grafů funkcí je rovnice křivky předem známa, stanovení regresní křivky, ať už její tvar je či není alespoň přibližně znám, je komplikováno faktem, že většina měření je zatížena chybou. Regresní křivka tedy většinou bodů grafu neprochází, jen se jim snaží co nejlépe přizpůsobit.

Matematika tvorby regresních křivek přesahuje rámec učiva střední školy, ovšem tento krok je vestavěn do tabulkových procesorů, které jsou k dispozici snad na každém počítači. Student možná nebude znát jeho mechanismus, ale získá vhodný nástroj k tvorbě grafů zejména fyzikálních měření.

Obrázek 86 je příkladem využití kvadratické regrese při zkoumání volného pádu, jehož rovnice by ve shodě se značením grafu byla $y = 4,9x^2$ (pro tíhové zrychlení $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Zatímco zaokrouhlení vedlo ke značným nepřesnostem, závislost je pořád zjevně kvadratická.



Obr. 86: Příklad stanovení regresní křivky tabulkovým procesorem.

Kombinatorika a pravděpodobnost vzešly z hazardních her a tento svůj původ připomínají charakterem svých úloh, přičemž nejde jenom o jejich téma. Pravděpodobnostní úlohy jsou stejně rozmanité jako výsledky náhodného pokusu a k jejich řešení je občas třeba nejen znalostí, ale i hravosti. Kreslení schémat a grafických znázornění tuto hravost, která je v látce studenty relativně obávané žádoucí, podporuje.

3.8 Komplexní čísla

„Jedna z vlastností komplexních čísel, kterou se odlišují od čísel reálných, je to, že se nedají vzájemně jednoznačně zobrazit na přímku. ... Jak však uvidíme ve druhé kapitole, komplexní čísla je možné vzájemně jednoznačně zobrazit na rovinu – každému bodu roviny lze přiřadit právě jedno komplexní číslo a naopak každému komplexnímu číslu se dá přiřadit jediný bod roviny.“ ([5], str. 7)

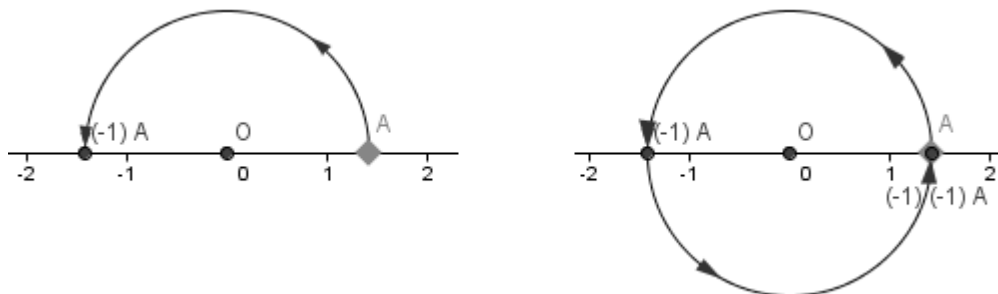
Učebnice Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla ve své první kapitole zavádí tento nový číselný obor algebraicky. „Vynález“ čísla i , pro které platí $i^2 = -1$, motivuje kvadratickou rovnicí $x^2 + 1 = 0$, která nemá reálné kořeny. Poté, co se tento nový typ čísla ve tvaru $z = a + bi$ při jejím řešení osvědčí, přistupuje ke zkoumání a ověřování jeho dalších matematických vlastností a operací, které je s takovými čísly možné provádět.

Motto první kapitoly v překladu praví „není lehká cesta ze země ke hvězdám.“ Algebraické zavedení komplexních čísel na základě analogie s čísly reálnými je možná početně jednoduché, ale působí suše a nezáživně, zejména když nutí studenty řešit kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, které mohli předtím odepsat jako neřešitelné. Když už cestují ke hvězdám, mají studenti bezpochyby nárok být za svou námahu odměněni již během cesty. Takovou odměňující cestou může být grafický přístup k zavedení komplexních čísel, jak jej prezentuje volně dostupný seriál Dimensions [25]. Zde jsou zachycena jeho nejdůležitější pozastavení.

Neexistuje číslo, které by, násobeno sebou samým, mělo jako výsledek -1 (nebo jakékoli záporné číslo), tedy jinými slovy neexistuje odmocnina z -1 . To studenti vědí už ze základní školy. Tato myšlenka je ovšem vystavěna na modelu reálných čísel, který je komplexními čísly rozšířen.

Francouzský matematik Jean-Robert Argand zkoumal začátkem 19. století následující grafický model: jak je zřejmé z obrázku 87 a, násobením libovolného bodu na ose číslem -1 dostaneme jeho obraz v symetrii podle počátku O . Tuto symetrii lze získat hned několika způsoby – již zmíněnou středovou souměrností, osovou souměrností podle osy procházející počátkem a kolmé na číselnou osu, a ještě jednou, již o něco méně zmiňovanou geometrickou transformací, jíž je otočení: násobením číslem -1 lze docílit téhož účinku, jako otočením daného bodu o 180° .

Při druhém násobení číslem -1 se obraz otočí o dalších 180° (tedy celkem o 360°) a splyne s původním vzorem, jak je znázorněno na obrázku 87 b. Proto násobení $A \cdot (-1) \cdot (-1) = A \cdot 1$.



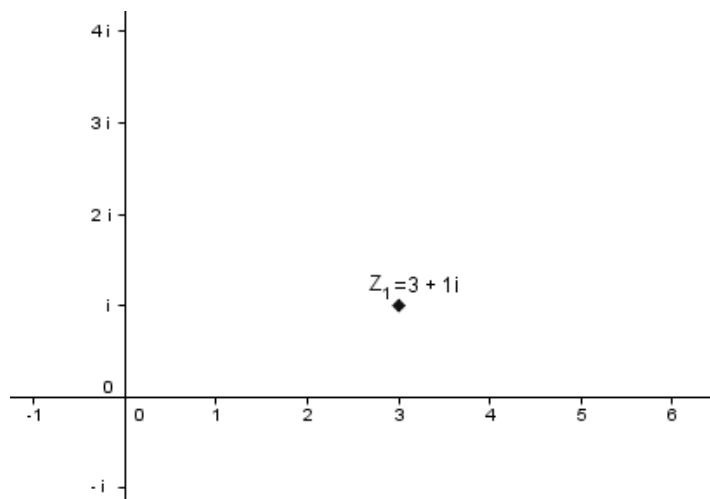
Obr. 87*a: Násobení bodu číslem -1 jako otočení o 180° .

Obr. 87*b: Dvojnásobné násobení bodu číslem -1 jako otočení o 360° .

Pokud násobení bodu číslem -1 otočí tento bod o 180° a násobení číslem $(-1)^2$ o 360° , myšlenka, že $\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ představuje otočení bodu o 90° je nasnadě. Při provedení této transformace dvakrát za sebou, tedy při násobení

$A \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = A \cdot \sqrt{-1}^2$ je výsledkem otočení o $2 \cdot 90^\circ$, tedy o 180° , podobně jako předtím dvojnásobné násobení číslem -1 zdvojnásobilo argument ze 180° na 360° .

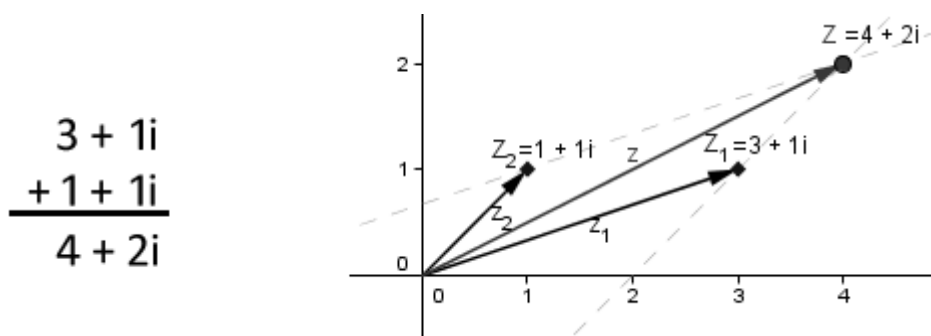
Argand tedy stanovil bod, který je obrazem čísla 1 v otočení o 90° , číslem $i = \sqrt{-1}$. Tím se dostal z původní přímky ryze reálných čísel do roviny dané původní osou a přímkou k ní kolmou, která tvoří analogickou osu ryze imaginárních čísel, jak ukazuje obrázek 88. Každý z bodů této roviny reprezentuje komplexní číslo, přičemž spíše než zápis $Z = [a; b]$ se používá $z = a + bi$.



Obr. 88*: Gaussova rovina komplexních čísel s bodem Z_1 odpovídajícím číslu $z_1 = 3 + i$.

Studentům, kteří v rámci rozšířené výuky analytické geometrie pracovali s výpočtem vektorového součinu pomocí determinantu, může zápis $z = a + bi$ připomenout tvar vektoru $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Vskutku, komplexní čísla jsou prakticky identická s dvojrozměrnými vektory, jak se dále ukáže.

Je rozumné předpokládat, že operace známé z čísel reálných budou proveditelné i s čísly komplexními. Jak sčítat komplexní čísla je nejlépe patrné při sčítání „pod sebou,“ jak ukazuje obrázek 89 a. Grafickým znázorněním tohoto součtu (obrázek 89 b) lze získat součet vektorový.



Obr. 89a: Součet komplexních čísel „pod sebou.“

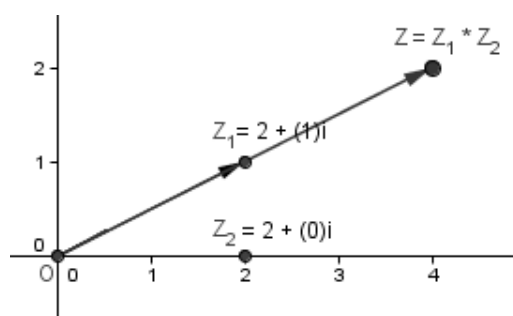
Obr. 89* b: Součet komplexních čísel jako vektorový součet $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$.

Stejně jako velikost vektoru má smysl zkoumat i velikost komplexního čísla. Vzorec, jehož odvození vychází z Pythagorovy věty, je zcela analogický:

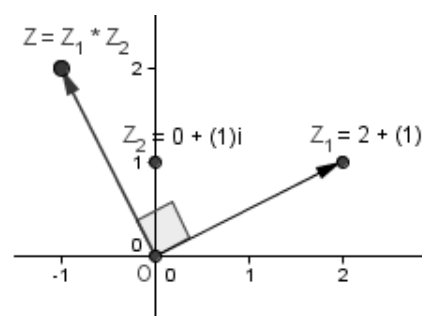
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zatímco však reálná čísla lze uspořádat podle velikosti, u komplexních čísel to nejde. Existuje nekonečně mnoho komplexních čísel, jejichž velikost je stejná:

jejich obrazem je kružnice příslušného poloměru se středem v průsečíku reálné a imaginární osy.

Násobení lze rozdělit na tři různé případy: násobení ryze reálným číslem, násobení ryze imaginárním číslem, a násobení obecným komplexním číslem. V prvních dvou případech se vyplatí vektorový pohled na věc. Násobení ryze reálným číslem zachová směr vektoru ve smyslu úhlů, které tento vektor svírá s osami, ale změní (s výjimkou násobení číslem 1) jeho velikost, případně směrovou orientaci (násobení záporným číslem), jak ukazuje obrázek 90 a. Násobení ryze imaginárním číslem je známé již z úvodu: vektor se otočí o 90° ve směru daném znaménkem čísla i (viz. obrázek 90 b). Velikost násobku i má podobnou roli jako hodnota ryze reálného čísla v předchozím případě.



Obr. 90* a: Grafické násobení komplexního čísla číslem ryze reálným.



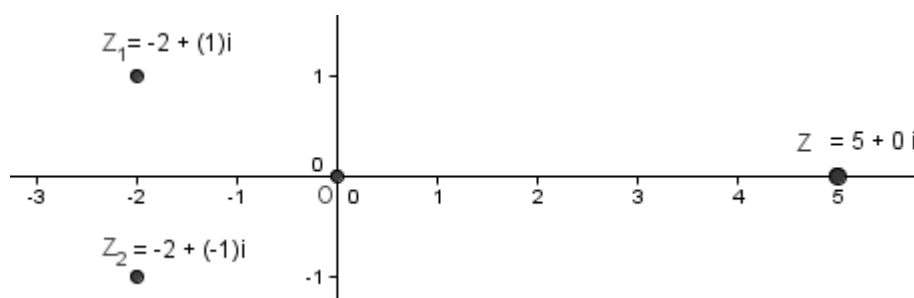
Obr. 90* b: Grafické násobení komplexního čísla číslem i .

Poslední případ násobení dvou obecných komplexních čísel je vhodné vyřešit nejprve algebraicky.

Pravá část rovnice $(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$ (*) je základem pro tvorbu dynamického grafického modelu umožňujícího zkoumat součin komplexních čísel: je-li \vec{r} jednotkový vektor směřující v kladném směru imaginární osy a například \vec{r} jednotkový vektor v kladném směru osy reálné, je bod Z , který vznikne posunutím průsečíku os O o vektor $(a_1a_2 - b_1b_2)\vec{r} + (a_1b_2 + b_1a_2)\vec{i}$ obrazem součinu zadaných bodů $Z_1 = [a_1, b_1]$ a $Z_2 = [a_2, b_2]$.

V rámci modelování součinu komplexních čísel lze zkoumat závislost polohy bodu Z vzniklého součinem na (vzájemné) poloze jeho činitelů. Jednou z takových poloh je když bod Z leží na reálné ose (obrázek 90 c). Tento případ nastává, jsou-li body Z_1 a Z_2 rozmístěny v osové souměrnosti podle reálné osy, tedy platí $Z_1 = a + bi$

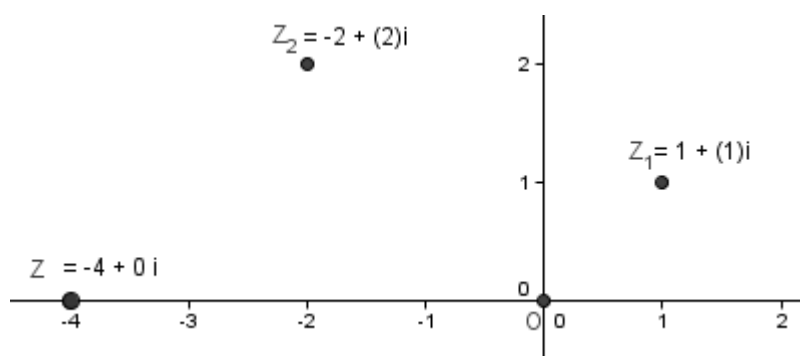
a zároveň $Z_2 = a - bi$. V takovém případě přeznačíme $Z_2 \equiv \overline{Z_1}$ a nazýváme jej číslem komplexně sdruženým s Z_1 .



Obr. 90* c: Obraz bodu Z , součinu komplexně sdružených (osově souměrných podle reálné osy) čísel odpovídající bodům Z_1 a Z_2 , leží na této ose souměrnosti.

Součin dvojice komplexně sdružených čísel je vždy nezáporné reálné číslo. Toho se využívá při alternativním vyjádření velikosti komplexního čísla: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Tento přístup je analogický definici absolutní hodnoty reálného čísla $|x| = \sqrt{x^2}$.

Obrázek 90 d však ukazuje, že bod Z může ležet i na záporné části reálné osy, aniž by body Z_1 a Z_2 vykazovaly nějakou souměrnost. Po krátkém experimentování lze vyslovit hypotézu, že tato situace nastává pro $Z_1 = a_1 + a_1i$ a $Z_2 = -a_2 + a_2i$, kde a_1, a_2 jsou kladná reálná čísla.



Obr. 90* d: Obraz bodu Z , součinu komplexních čísel $Z_1 = a_1 + a_1i$ a $Z_2 = -a_2 + a_2i$, kde a_1, a_2 jsou kladná reálná čísla, je záporné reálné číslo.

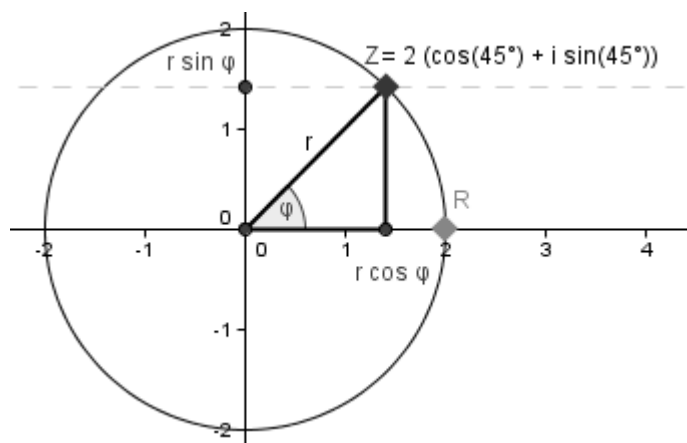
Dalším experimentováním lze hypotézu rozšířit: jsou-li a_1, a_2 kladná reálná čísla, pak obraz $Z' = (a_1 + a_1i) \cdot (a_2 + a_2i)$ odpovídá kladnému ryze imaginárnímu číslu a například obraz $Z'' = (a_1 + a_1i) \cdot (-a_2 - a_2i)$ zápornému imaginárnímu číslu. Čísla s takovýmito souřadnicemi jsou zajímavá tím, že leží na osách kvadrantů Gaussovy roviny. Tyto osy jsou navzájem kolmé a s reálnou i imaginární osou svírají úhel 45° . A právě úhly jsou podstatou zkoumaného jevu: při násobení komplexních

čísel se sčítají úhly sevřené příslušným vektorem a kladným směrem reálné osy, takzvané argumenty komplexních čísel. Na obrázku 90 d násobení čísla Z_1 s argumentem 45° a čísla Z_2 s argumentem 135° dalo číslo Z s argumentem 180° .

Zbývá dodat, že zatímco argumenty se při násobení komplexních čísel sčítají, jejich velikosti se násobí, tedy pro součin $z = z_1 \cdot z_2$ platí, že $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Zatímco sčítání komplexních čísel ve tvaru $z = a + bi$ je snadné, násobení vyžaduje několik kroků a může se stát zdrojem chyb z nepozornosti. Výše popsané pokusy s dynamickým grafickým modelem přitom ukázaly na zajímavé vlastnosti násobení komplexních čísel, které ve vzorci v algebraickém tvaru (*) na zběžný pohled nevystupují. Je zde tedy výhodné zavést nový tvar komplexního čísla, který využívá k popisu jeho obrazu v Gaussově rovině úhlu (argumentu) a vzdálenosti od počátku (velikosti). Pokud algebraický tvar komplexního čísla vedl k představě Gaussovy roviny jako nekonečně husté mřížky, pak goniometrickému tvaru odpovídá představa této roviny jako rovinné plochy tvořené nekonečně mnoha soustřednými kružnicemi.

Odvození podoby goniometrického tvaru komplexního čísla by mělo být v silách každého studenta obeznámeného se základy goniometrie: souřadnice bodu Z ležícího na kružnici se středem v počátku a s poloměrem velikosti r jsou $Z = [r \cos \varphi ; r \sin \varphi]$, kde φ je úhel sevřený osou x a průvodičem \vec{r} bodu Z . Srovnáním s geometrickou interpretací algebraického tvaru komplexního čísla pak už lze snadno odvodit goniometrický tvar $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (viz. obrázek 91).



Obr. 91*: K odvození goniometrického tvaru komplexního čísla.

Jak bude vypadat součin komplexních čísel $z_1 \cdot z_2 = z$ v goniometrickém tvaru? Všechny důležité údaje byly již vyčteny při rozboru modelu na obrázku 91 d: argumenty se sčítají a velikosti násobí. Platí

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Algebraický důkaz vztahu lze nalézt například v [5], str. 48 - 49.

Co zde dosud nebylo probráno, je mocnina a podíl komplexního čísla.

Mocninu komplexního čísla z^n , kde n je přirozené číslo, lze z definice získat stejným způsobem jako u ostatních číselných oborů, a sice n -násobným součinem čísla z . Využívá se při tom vztahů odvozených v učebnici ([5], str. 18): "*platí ... obecně pro libovolné přirozené číslo k : $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, $i^{4k} = 1$.*" Protože jde o součin, má smysl se ptát, zdali nebude n -tá mocnina snáze řešitelná s použitím goniometrického tvaru. Zde postupem uvedeným v učebnici [5] $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, kterýžto vztah je bezpochyby ještě elegantnější než čtveřice druhů mocnin čísla i .

Podíl dvou komplexních čísel $z = \frac{z_1}{z_2}$ je, obdobně jako u reálných čísel, definován jako součin $z = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, kde $\frac{1}{z_2}$ je převrácená hodnota čísla z_2 . To však skutečnému výpočtu příliš nepomůže, a je tedy nutné najít způsob jak buď odstranit komplexní číslo ze jmenovatele (tento postup je pro algebraický tvar komplexního čísla rozepsán v [5], str. 32), nebo najít nějaký elegantnější způsob dělení. Ukazuje se, že i zde je mnohem výhodnější goniometrický tvar komplexního čísla, neboť dělení zde má podobnou strukturu jako násobení s tou výjimkou, že velikosti jsou v podílu místo součinu a argumenty se místo sčítání odečtou. Zde je výsledný vzorec:

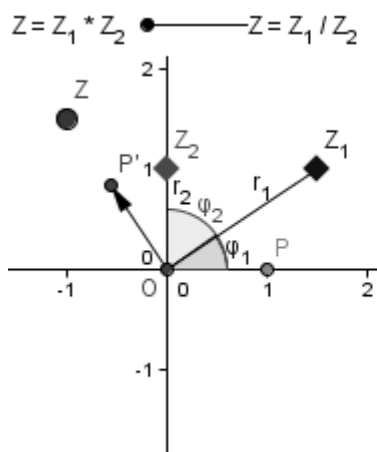
$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Mimo snazší zapamatovatelnosti skrz pochopení vztahů má goniometrický tvar komplexních čísel ještě jednu velkou výhodu, a to v oblasti tvorby modelů. Model z obrázků 90 a-d používající algebraický tvar musel mít všechna vstupní komplexní čísla nastavena pomocí dvojic posuvníků, které ovšem značně omezovaly možnosti manipulace s body; bez změny nastavení bylo možné najednou posunout jediný bod pouze podél jediné osy. Model využívající goniometrického tvaru, či lépe řečeno goniometrických pravidel pro konstrukci komplexních čísel, takto omezen není.

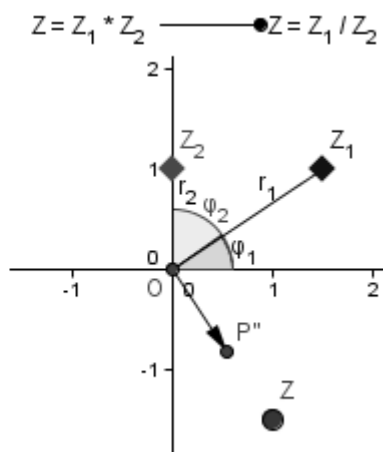
- **Úloha 8:** V programu GeoGebra sestrojte model umožňující (dle polohy přepínače) násobit či dělit dvě komplexní čísla reprezentovaná volnými body Z_1 a Z_2 .

Řešení: Základem modelu je správný výběr bodů a transformací. Mimo bodů Z_1 a Z_2 je potřeba vložit počátek O a pevný bod $P = [1; 0]$. Pomocí těchto bodů lze vynést velikosti (úsečky) r_1, r_2 a argumenty (úhly s vrcholem O) φ_1, φ_2 komplexních čísel reprezentovaných body Z_1 a Z_2 .

Následují transformace, nejprve otočení bodu P kolem bodu O o požadovaný součet či rozdíl úhlů φ_1, φ_2 . Do takto vzniklého bodu P' vedeme vektor \vec{p}' z bodu O , který je jednotkový. Posunutím bodu O o násobek $(r_1 \cdot r_2)$ či $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ vektoru \vec{p}' získáme bod Z , který je výsledkem. Příklad modelu je na obrázku 92 a,b.



Obr. 92* a: Model pro zobrazení součinu bodů $Z_1 \cdot Z_2$.



Obr. 92* b: Model pro zobrazení podílu bodů $\frac{Z_1}{Z_2}$.

Komplexní čísla nejsou jenom matematickou hračkou, ale mimo jiné i dlouho chybějícím článkem k porozumění polynomům druhého a vyššího stupně a příslušným rovnicím. Teprve jejich existence dala možnost zformulovat větu, jež je nyní známa jako základní věta algebry: „každá algebraická rovnice n -tého stupně ($n \geq 1$) s jednou neznámou má v tělese komplexních čísel aspoň jeden kořen.“ ([2], str. 217) Lze dokonce dokázat, že rovnice n -tého stupně (n je přirozené číslo) má právě n kořenů, přičemž je ovšem nutné připustit existenci násobnosti kořenů.

Z grafického hlediska je polynom (s reálnými koeficienty) křivkou v rovině, a příslušná rovnice hledá jeho průsečíky s osou x . Tradiční grafické řešení příkladu

$x^2 + 1 = 0$ nedá žádné výsledky, zatímco algebraickým řešením lze nyní získat dvojici komplexně sdružených kořenů: $x_1 = i$, $x_2 = -i$. Přestože tedy graf paraboly funkce $f: y = x^2 + 1$ nikdy neprotne přímkou x , má právě dva průsečíky s komplexní rovinou x .

Malý vhled do situace přináší řešení binomických rovnic. „*Binomickou rovnicí se nazývá rovnice tvaru $x^n - a = 0$, kde a je dané komplexní číslo, x je neznámá a $n > 1$ je číslo přirozené. ... Binomická rovnice $x^n - |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 0$ má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů, a to*

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \text{“ ([5], str. 76 – 77)}$$

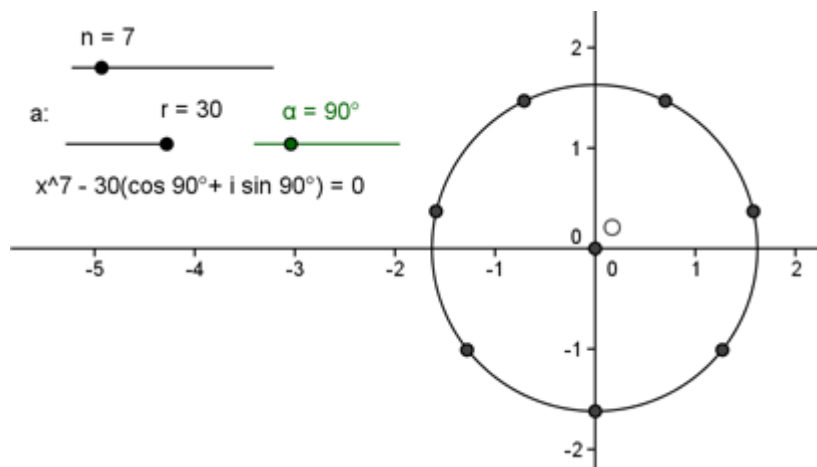
Grafickou interpretaci lze vyčíst tamtéž ([5], str. 78): „*kořeny $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ binomické rovnice $x^n - a = 0$ leží pro $n > 2$ v Gaussově rovině ve vrcholech pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.*“ Tento popis přímo vybízí ke konstrukci dynamického řešiče, jehož možnosti jsou, zejména díky nástroji *pravidelný mnohoúhelník* prakticky neomezené.

- **Úloha 9:** V programu GeoGebra sestrojte model umožňující zobrazit řešení binomické rovnice $x^n - a = 0$ stupně $3 \leq n \leq 30$, kde a je komplexní číslo v goniometrickém tvaru.

Řešení: Základem modelu je rotace. Prvním krokem je tedy volba vhodného bodu k otáčení. Nejsnadněji vznikne takový bod X_a jako průsečík kladné poloosy x a kružnice c , jejíž poloměr zadáme jako vzorec $r \cdot (1/n)$, kde r je hodnota posuvníku určujícího velikost komplexního čísla a v goniometrickém tvaru. Tento bod X_a otočíme o úhel $\frac{\alpha}{n}$, kde α je hodnota posuvníku určujícího argument komplexního čísla a a n stupeň binomické rovnice, rovněž definovaný posuvníkem. Získáme bod X . Protože nástroj *pravidelný mnohoúhelník* vyžaduje dva body, otočíme bod X podruhé, tentokrát o $\frac{360^\circ}{n}$. Tyto dva body X a X' tvoří potřebnou stranu pravidelného mnohoúhelníka, jehož počet vrcholů můžeme zadat n .

Příklad řešiče je na obrázku 93.

Poznámka: Řešením jsou vrcholy mnohoúhelníka, nikoli hrany. Je tedy vhodné nakonec vypnout zobrazení objektu *mnohoúhelník*.



Obr. 93*: Řešení binomické rovnice $x^7 - 30 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0$ zobrazené dynamickým řešičem.

Kromě řešení polynomů jsou komplexní čísla také nástrojem některých geometrických transformací. Objekty umístěné v Gaussově rovině lze snadno transformovat operací provedenou s každým bodem objektu. Například přičtení komplexního čísla z je posunutí o vektor $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$, kde bod Z je obrazem daného komplexního čísla v Gaussově rovině. Násobení objektu reálným číslem r je podobné zobrazení stejnohlost (viz. např. [18], str. 159) se středem v počátku a koeficientem r , násobení číslem i je otočení o 90° . Násobení komplexním číslem $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ je potom transformace složená z otočení o úhel φ a stejnohlosti se středem v počátku a koeficientem r .

Možnosti komplexních čísel ovšem zdaleka nekončí u transformací známých ze středoškolské geometrie, aniž by se ovšem jejich algebraické vyjádření stalo nějak zvlášť složitým. Dynamické ztvárnění těchto transformací pomocí programu GeoGebra však složitě je, protože i v nejjednodušších případech vyžaduje manipulaci s velkým množstvím objektů. Vzhledem k tomu, že účelem těchto modelů je pouze ilustrace možností, je mnohem výhodnější využít už jednou výtečně odvedené práce a promítnout 6. díl série Dimensions [13], kde je mimo jiné rozebrána transformace $z \rightarrow z^2 + c$, kdy je každému bodu Gaussovy roviny přiřazeno číslo rovné jeho druhé mocnině „posunuté“ o obecně komplexní konstantu c .

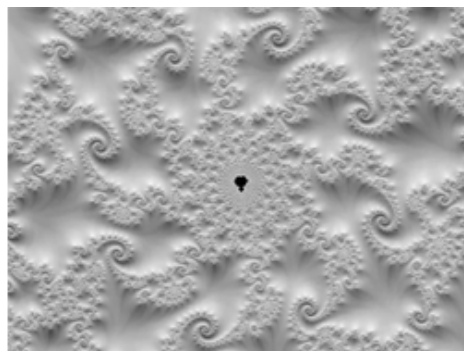
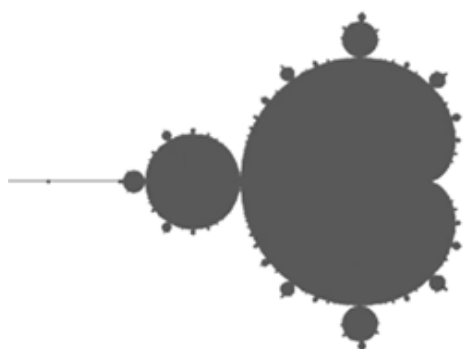
Mnohonásobná aplikace transformace $z \rightarrow z^2 + c$ rozdělí body Gaussovy roviny na dvě množiny: jedna z nich, obsažená v určitém obrazci, tento obrazec nikdy neopustí, byť je transformace opakována donekonečna. Body vně tohoto obrazce se zato vzdalují,

a při nekonečném opakování transformace se samy do nekonečna dostanou. Tyto obrazce se nazývají Juliovy množiny a jsou spolu s Mandelbrotovou množinou, o které bude zmínka dále, jedním z příkladů ryze matematické krásy, která se díky své grafické interpretaci dostala i mezi nematematickou veřejnost skrze fraktálové umění. Jedna z Juliovy množin, pro transformaci $z \rightarrow z^2 - 0,74 + 0,12i$, je na obrázku 94.



Obr. 94: Juliova množina pro transformaci $z \rightarrow z^2 - 0,74 + 0,12i$. (Zdroj grafiky: [13]).

Při změně čísla c se mění tvar Juliovy množiny, a existují taková c , při kterých se množina rozpadne. Mandelbrotova množina (obrázek 95 a, b) je pak množina komplexních čísel volně definovatelná jako „množina, která popisuje hodnoty c pro které je Juliova množina vidět, jinými slovy pro které se Juliova množina nerozpadá na mnoho (nepozorovatelných) částí.“ [13]



Obr. 95a: Mandelbrotova množina. (Zdroj grafiky: [13]).

Obr. 95b: Detail Mandelbrotovy množiny. (Zdroj grafiky: [13]).

Komplexní čísla mají v moderní matematice i mimo ni široké uplatnění. Učebnice [5] obsahuje ve své závěrečné kapitole v rámci rozšiřujícího učiva geometrické úlohy řešené ryze skrz vlastnosti komplexních čísel probrané dříve v knize (a z velké části i zde.) Stojí na nich fyzikální obory elektrotechnika, kvantová teorie i teorie chaosu. Fraktálové umění je kapitolou samo pro sebe.

Grafická práce s komplexními čísly má kromě větší atraktivity pro studenty i jiné výhody, zejména upevnění některých základních poznatků z analytické geometrie, algebraické vyjádření některých základních geometrických transformací a vzhled do přechodu mezi kartézskými a polárními souřadnicemi.

4 Závěr

Cílem této práce bylo v první řadě doplnit obsah výběru dobře zpracovaných, ale bohužel rychle stárnoucích učebnic z řady Matematika pro gymnázia, v druhé poskytnout čtenáři mnoho matematických hraček ke zvýšení zábavnosti výuky i učení matematice a provokaci fantazie. Ilustrace a modely v této práci prezentované zdaleka nejsou všechny, které by učitel matematiky kdy měl použít, a některým možná chybí k dokonalosti jedna či dvě rychlé úpravy. To však není chybou či nedokonalostí – předložené hotové věci nejsou zdaleka tak vzrušující jako ty nové a neznámé. A v dnešní době, kdy je matematika pro mnohé jen o málo víc než pouhé mechanické počítání, je vzrušení a fascinace královnou věd potřeba více než kdy jindy.

Ideální čtenář přijme tuto práci jako výzvu, jako malý vzorek nekonečných možností, které grafická podoba matematiky skýtá. Zamyslí se nad skutečností, že i v matematice by měl student kromě nových poznatků nabývat také nové zážitky. Bohužel, ne všichni lidé jsou schopni hned při prvním setkání ocenit krásu matematiky ze vzorce $e^{i\pi} = -1$. Mnoho z nich však bude ochotno vzorci věnovat i pohled druhý.

Kvůli velkému nárůstu popularity prostředí dynamické geometrie (např. programy Cabri, GeoGebra) v posledních letech se práce nijak detailně nezabývá geometrií a stereometrií, pro níž je tento software primárně určen. Bezpochyby bylo v těchto oblastech matematiky mnohem méně věcí k objevení než v jiných, které s geometrií bezprostředně nesouvisely – alespoň na první pohled.

Kalkulus, od limit po diferenciální a integrální počet, se z učiva středních škol vytratil zcela. Jeho grafická podoba má také vlastní specializovaný software. Z těchto dvou hlavních důvodů není v práci obsažen, byť i jeho grafická podoba si zaslouží velkou pozornost.

Středoškolská matematika, zejména na gymnáziích, by měla opustit současné směřování k pragmatismu, tedy využití zejména ve finančnictví a statistické analýze dat. Tento přístup nutí studenty vidět matematiku jako nástroj k úkonům, které v dnešní době stejně mohou přenechat svému finančnímu poradci či počítači. Bere jim důvod se jí zabývat jinak než v rámci povinnosti a jakési iluze přípravy na budoucí život.

Moderní středoškolská matematika by měla dát studentům pocit, že jejím studiem pronikají do tajemství samotného vesmíru. Měla by uspokojit nejen jejich

potřebu poznání, ale i potřeby společenské a estetické. Důraz na grafický přístup je jednou z možností, jak tuto moderní matematiku stvořit. Studenti uvidí a uvěří. A možná také prožou.

5 Seznam obrázků

- Obr. 1*: Model vykreslující spirálu využívající kombinace posunutí a otočení
- Obr. 2*: Model vykreslující spirálu využívající kombinace otočení a posunutí
- Obr. 3*: Použití posuvníku jako přepínače „režimů“ modelu
- Obr. 4*: Chybné zobrazení modelu polohy rovin
- Obr. 6: Zjištění definice objektu
- Obr. 5: Úprava vlastností libovolného objektu či skupiny
- Obr. 7*: Tvorba dynamického vzorce pro směnicový tvar přímky AB
- Obr. 8: Tvorba prvních několika členů posloupnosti „tažením.“
- Obr. 9: Znázornění číselných oborů množinovým diagramem podle [3]
- Obr. 10: Alternativní znázornění číselných oborů množinovým diagramem s použitím ilustrativního stínování
- Obr. 11: Ilustrace číselných oborů na konkrétním předmětu
- Obr. 12: Množiny s číslem 12 jako společnou vlastností
- Obr. 13: Hledání opačných čísel pomocí číselné osy a kružítka
- Obr. 14*: Interaktivní nástroj na hledání racionálních čísel v pozici odpovídající číslu $\frac{2}{3}$
- Obr. 15a: Geometrické znázornění řady iracionálních čísel na základě Pythagorovy věty
- Obr. 15b: Detail konstrukce: kolmice k předchozí přeponě a jednotková kružnice
- Obr. 16*: Interaktivní řešič rovnic s absolutní hodnotou v pozici odpovídající rovnici $|-1,8 - x| = 1$
- Obr. 17: Ilustrace důkazu věty $k|a| \wedge k|b| \Rightarrow k|(a+b)$
- Obr. 18: Odvození pravidla pro dělitelnost devíti pomocí řádového počítadla. (Zdroj grafiky: [10])
- Obr. 19*: Hyperkrychle
- Obr. 20: „Při konstrukci Kochovy křivky vyjdeme z trojúhelníka o stranách délky 1. Doprostřed každé strany přidáme další trojúhelník třetinové velikosti a postup dále zopakujeme. Délka hranice je $3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \dots$ - a tak dál až do nekonečna. Přesto obsah zůstává menší, než je plocha kruhu opsaného původnímu trojúhelníku. Nekonečně dlouhá čára tedy ohraničuje plochu o konečném obsahu.“ ([7], str. 103) (Zdroj grafiky: [21])
- Obr. 21*: Odvození vztahů pro čtverce $(a + b)$ a $(a - b)$ „rozřezáním.“
- Obr. 22*: Dynamický grafický model pro rozklad mnohočlenu $(a-b)^2$
- Obr. 23*: Dynamický model pro rozklad mnohočlenu $(a + b)^3$
- Obr. 24* a: Grafické znázornění $(a^2 - b^2)$
- Obr. 24* b: Grafické znázornění $(a - b)(a + b)$
- Obr. 25*: Ověření platnosti Pythagorovy věty pomocí modelu v programu GeoGebra
- Obr. 26: Důkaz Pythagorovy věty různým „rozřezáním“ dvou čtverců shodného obsahu
- Obr. 27*: Dynamický grafický řešič lineárních rovnic a nerovnic v pozici $x+1 \leq 4x-1$

- Obr. 28: Grafické řešení příkladu $(x-2)(2x+3) > 0$
- Obr. 29: Grafické řešení úlohy o pohybu. (Zdroj grafiky: [9])
- Obr. 30*: Dynamický grafický řešič kvadratických rovnic a nerovnic v pozici $x^2 - x - 1 \geq 0$
- Obr. 31: Experimentální určení průsečíku dvojice přímek daných lineárními funkcemi
- Obr. 32: Grafické ověření platnosti $a = \tan \alpha$
- Obr. 33: Sestrojení grafu funkce $y = (|x| - 1)$ v jednotlivých krocích
- Obr. 34: Odhad maxima funkce $y = (18 - 2x) \cdot x$ ze symetrie grafu několika vybraných hodnot
- Obr. 35a: Ilustrace konstrukce grafu funkce $g: y = x + x - 2$ podle ([14], str. 84)
- Obr. 35b: Ilustrace konstrukce grafu funkce $g: y = (x + x) / (x - 2)$ využívající středové souměrnosti a barvy
- Obr. 36: Grafické znázornění prvních dvou kroků Newtonovy metody hledání kořenů polynomu: $X_1 = X_0 - f(X_0)/f'(X_0)$, $X_2 = X_1 - f(X_1)/f'(X_1)$
- Obr. 37: Grafické znázornění prvních dvou kroků metody hledání kořenů polynomu regula falsi: $X_0 = a - b \cdot f(a) / (f(b) - f(a))$, $X_1 = a - f(X_0) \cdot (b - X_0) / (f(X_0) - f(a))$
- Obr. 38: Graf $f^{-1}: x = y^2$ jako inverzní křivky k $f: y = x^2$
- Obr. 39: Graf $f^{-1}: x = y^3$ jako inverzní křivky k $f: y = x^3$
- Obr. 40: Ukázka příkladu přiřazení funkčního předpisu a grafu. (Zdroj grafiky: [14])
- Obr. 41: Graf exponenciální funkce s vyznačenými důležitými body
- Obr. 42: Zavedení logaritmických funkcí podle učebnice [14]
- Obr. 43*: Základní dynamický model logaritmické funkce v pozici $a = 1,4$
- Obr. 44: Užití logaritmické stupnice v grafu srovnávajícím různé objekty známého vesmíru. (Zdroj grafiky: [1])
- Obr. 45: Definice bodů posloupnosti $y = 0,5 \cdot n^2$, $n \in 1, 2, 3, 4$ a vytvořený seznam bodů touto posloupností definovaných
- Obr. 46: Příklad aritmetické posloupnosti. (Zdroj: [15])
- Obr. 47: Příklad geometrické posloupnosti. (Zdroj: [15])
- Obr. 48: Počítadlový model pro součet prvních n přirozených čísel
- Obr. 49a: Úhlový posuvník α ve tvaru kružnice
- Obr. 49b: Úhlové posuvníky α (stupně) a ω (radiány) ve tvaru úsečky
- Obr. 50: První krok tvorby dynamického modelu vykreslujícího cykloidu: kružnice posouvající se podél přímky h v závislosti na parametru t
- Obr. 51*: Cykloida, prodloužená cykloida a zkrácená cykloida vykreslené dynamickým modelem
- Obr. 52*: Sinusoida vykreslená dynamickým modelem
- Obr. 53*: Kosinusoida vykreslená dynamickým modelem
- Obr. 54*: Graf funkce $y = \sin(3x)$ generovaný dynamickým modelem
- Obr. 55*: Dynamický model generující tangentoidu
- Obr. 56*: Prototyp dynamického řešiče úloh typu $\sin(x) = h$ nebo $\cos(x) = h$ v poloze odpovídající rovnici $\cos(x) = -0,5$
- Obr. 57a: Původní grafické řešení příkladu 3. (Zdroj grafiky: [16])

- Obr. 57b: Alternativní grafické řešení příkladu 3
- Obr. 58: Trojúhelník se třemi pravými úhly ve sférické geometrii na podkladě mapy světa. (Zdroj podkladu: [26])
- Obr. 59*a: Úsečkový model sčítání a odečítání čísel na číselné ose
- Obr. 59*b: Úsečkový model sčítání a odečítání čísel na číselné ose pro počátek $O \neq 0$
- Obr. 60: Zasedací pořádek jako kartézská soustava souřadnic
- Obr. 61* a: Úsečka AB celočíselné délky
- Obr. 61*b: Střed S úsečky AB s celočíselnými souřadnicemi
- Obr. 62*a: Vektorová báze pro volné rovnoběžné promítání
- Obr. 62*b: Bod $A = [1; 2; 1]$ ve volném rovnoběžném promítání
- Obr. 63*: Kolmý průmět úsečky $a \leftrightarrow AB$ do roviny xy
- Obr. 64: K zadání úlohy 5
- Obr. 65: Ke konstrukci tvaru rovnostranného trojúhelníka pomocí ortonormálních vektorů \vec{i}, \vec{j} .
- Obr. 66*: Ilustrace parametrického vyjádření přímky
- Obr. 67: K řešení úlohy 6
- Obr. 68*a: Model závislosti polohy roviny na koeficientech obecné rovnice $ax+by+cz+d=0$
- Obr. 68b: $a, b > 0 \wedge c, d < 0$
- Obr. 68c: $a, b > 0 \wedge c = 0 \wedge d < 0$
- Obr. 68d: $a, c > 0 \wedge b < 0 \wedge d = 0$
- Obr. 69*: Model pro analýzu středové rovnice kružnice
- Obr. 70: Sklenice s vodou: transformace kružnice v elipsu v reálné situaci. (Zdroj grafiky: [8])
- Obr. 71*a: Sklenice s vodou, nenakloněná: hranici hladiny tvoří kružnice
- Obr. 71*b: Sklenice s vodou, nakloněná: hranici hladiny tvoří elipsa
- Obr. 71c: Shodné trojúhelníky ve dvou různých průmětech nakloněné sklenice umožňují dynamickou konstrukci ohnisek F_1 a F_2
- Obr. 72*: Součtová proužková konstrukce elipsy
- Obr. 73*: Rozdílová proužková konstrukce elipsy
- Obr. 74: Srdcové křivky (heart curves). (Zdroj grafiky: [24])
- Obr. 75*: Paprsek vyslaný z jednoho ohniska elipsy se odráží do druhého ohniska
- Obr. 76*: Paprsek vyslaný z ohniska paraboly se odráží rovnoběžně s její osou
- Obr. 77: Ilustrace řešení zvukoměřičské úlohy
- Obr. 78: Ilustrace kombinatorického pravidla součinu
- Obr. 79: Ilustrace kombinatorického pravidla součinu pomocí „stromu.“
- Obr. 80: Ilustrace kombinatorického pravidla součtu
- Obr. 81a: Ilustrace úlohy určující počet možných cest mezi body A, B kódováním. (Zdroj grafiky: [4])
- Obr. 81b: Ilustrace úlohy určující počet možných cest mezi body A, B sčítáním cest v uzlech
- Obr. 82: Schéma Galtonovy desky

- Obr. 83a: Možné výsledky hodu dvěma kostkami. (Zdroj grafiky: [4])
- Obr. 83b: Tabulkový model hodu dvěma kostkami s vystínovanými „výherními poli“
- Obr. 84: Tabulkový model hodu dvěma „falešnými“ kostkami
- Obr. 85: Grafický model dvou tahů z losovacího osudí
- Obr. 86: Příklad stanovení regresní křivky tabulkovým procesorem
- Obr. 87*a: Násobení bodu číslem -1 jako otočení o 180°
- Obr. 87*b: Dvojnásobné násobení bodu číslem -1 jako otočení o 360°
- Obr. 88*: Gaussova rovina komplexních čísel s bodem Z_1 odpovídajícím číslu $z_1 = 3 + i$
- Obr. 89a: Součet komplexních čísel „pod sebou.“
- Obr. 89*b: Součet komplexních čísel jako vektorový součet $\vec{z} = (z_1) \vec{+} (z_2) \vec{+}$.
- Obr. 90*a: Grafické násobení komplexního čísla číslem ryze reálným
- Obr. 90*b: Grafické násobení komplexního čísla číslem i
- Obr. 90*c: Obraz bodu Z , součinu komplexně sdružených (osově souměrných podle reálné osy) čísel odpovídající bodům Z_1 a Z_2 , leží na této ose souměrnosti
- Obr. 90*d: Obraz bodu Z , součinu komplexních čísel $Z_1 = a_1 + a_1 i$ a $Z_2 = [-a_2 + a_2 i]$, kde a_1, a_2 jsou kladná reálná čísla, je záporné reálné číslo
- Obr. 91*: K odvození goniometrického tvaru komplexního čísla
- Obr. 92*a: Model pro zobrazení součinu bodů $Z_1 \cdot Z_2$
- Obr. 92*b: Model pro zobrazení podílu bodů Z_1 / Z_2
- Obr. 93*: Řešení binomické rovnice $x^7 - 30 \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = 0$ zobrazené dynamickým řešičem
- Obr. 94: Juliova množina pro transformaci $z \rightarrow z^2 - 0,74 + 0,12i$. (Zdroj grafiky: [13])
- Obr. 95a: Mandelbrotova množina. (Zdroj grafiky: [13])
- Obr. 95b: Detail Mandelbrotovy množiny. (Zdroj grafiky: [13])

6 Seznam tabulek

- Tab. 1: Rozšiřování rozměrů od nultého po čtvrtý na základě analogie vlastností a transformací
- Tab. 2: Srovnání fyzikálního a matematického přístupu k základním operacím s vektory

7 Literatura

- [1] Barrow, J. D.: *Konstanty Přírody*, Praha: Paseka, 2005.
- [2] Bartsch, H.: *Matematické Vzorce*, Praha: Academia, 2006.
- [3] Bušek, I., Calda, E.: *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky*, Praha: Prometheus, 2010.
- [4] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Praha: Prometheus, 2011.
- [5] Calda, E.: *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*, Praha: Prometheus, 2011.
- [6] Devlin, K.: *Jazyk Matematiky*, Praha: Argo a Dokořán, 2002.
- [7] Gleick, J.: *Chaos: vznik nové vědy*, Brno: Ando Publishing, 1996.
- [8] Kočandrlle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie*, Praha: Prometheus, 1999.
- [9] Charvát, J. a kol.: *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*, Praha: Prometheus, 2011.
- [10] Kuřina, F.: *Umění Vidět v Matematice*, Praha: SPN, 1990.
- [11] Kuřina, F. a kol.: *Matematika a Porozumění Světu*, Praha: Academia, 2009.
- [12] Kuřina, F., Půlpán, Z.: *Podivuhodný Svět Elementární Matematiky*, Praha: Academia, 2006.
- [13] Leys, J., Ghys, E., Alvarez A.: *Dimensions*, Lyon: École Normale Supérieure de Lyon, 2008.
- [14] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Funkce*, Praha: Prometheus, 2007.
- [15] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*, Praha: Prometheus, 2000.
- [16] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*, Praha: Prometheus, 2008.
- [17] Pech, P.: *Kuželosečky*, České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2004.
- [18] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*, Praha: Prometheus, 1997
- [19] http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logarithmic_Scales.svg
- [20] <http://en.wikipedia.org/wiki/Hypercube#Graphs>
- [21] <http://en.wikipedia.org/wiki/File:KochFlake.svg>
- [22] [http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_\(probability\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability))
- [24] <http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html>
- [25] http://www.dimensions-math.org/Dim_E.htm
- [26] <http://www.freemaps.net>
- [27] <http://www.geogebra.org/cms/>
- [28] <http://www.novinky.cz/koktejl/171184-chlapec-prezil-primy-naraz-meteoritem-leticim-rychlosti-48-000-km-h.html>