Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

# EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH - SBÍRKA ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Vedoucí práce** **Vypracovala**

RNDr. Libuše Samková, Ph.D. Jana Zacharová

České Budějovice, duben 2013

**Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Extrémy funkcí více proměnných – sbírka příkladů jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 10. 4. 2013 ……………………...

Jana Zacharová

**Poděkování**

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucí mojí bakalářské práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za ochotu při spolupráci, za její čas, cenné rady a připomínky, které mi poskytla. Také bych chtěla poděkovat rodině a kamarádům, kteří mi byli po celou dobu studia oporou.

**Anotace:**

Hlavním cílem mojí bakalářské práce na téma Extrémy funkcí více proměnných – sbírka příkladů je vytvořit soubor řešených příkladů, které by mohly sloužit studentům Matematické analýzy II. k procvičování. Práce se bude týkat funkcí nejen dvou, ale i tří proměnných. Pro lepší přehled budou jednotlivé příklady řazeny od nejjednodušších po nejsložitější. V mojí práci se objevují funkce nejen polynomické, ale i logaritmické, goniometrické či exponenciální, aby došlo k procvičení i náročnějších parciálních derivací. Při řešení příkladů se také budou využívat soustavy rovnic, jak lineárních, tak kvadratických.

**Klíčová slova:** stacionární bod, lokální minimum, lokální maximum, sedlový bod, parciální derivace.

**Annotation:**

The main goal of my bachelor work on the topic "Extremes of more-variable functions - a digest of solved examples" is to create a set of solved exercises, which could serve students of Mathematical analysis II for practicing. The work will be bearing on functions with two, but even three variables For better understanding, the individual examples will be arranged from the simpliest to the most complex. In my work appear polynomic functions, but also logaritmic, goniometric, or exponential functions to practice more difficult derivations too. During the solving of the examples will be used systems of equations, linear, but also quadratic.

**Key words**: stationary point, local minimum, local maximum, saddle point, partial derivative.

# Obsah

# 1 Úvod

Moje bakalářská práce je postavena na praktické části vytvoření sbírky příkladů extrémů funkcí více proměnných. Konkrétně se zaměřuji na lokální extrémy funkcí. Práce obsahuje pouze nutnou teorii k porozumění řešení uvedených příkladů. Jak již název napovídá, jsou zde uvedeny funkce nejen dvou, ale i tří proměnných, které se řeší obdobně.

Konkrétní postupy řešení jsou uvedeny v první kapitole s názvem Základní pojmy a návod k řešení příkladů. V další části následují řešené příklady funkcí dvou proměnných, které jsou čerpány především z literatury [1] a [7], kde tyto příklady nejsou řešené a poskytují pouze výsledek. Následuje kapitola s řešenými příklady funkcí tří proměnných, jejich zadání jsem převzala převážně z literatury [4].

Příklady jsou řazeny od nejjednodušších po nejsložitější, u nichž je také možné procvičit si složené funkce. U jednotlivých příkladů jsou uvedeny také definiční obory, které jsou zde velice důležité. Najdeme-li stacionární bod, který nenáleží definičnímu oboru, nemá smysl lokální extrémy funkce řešit dál, funkce lokální extrémy v tomto bodě nemá.

Účelem této práce je ukázat přehledné a podrobné řešení příkladů, které jistě napomůže k úspěšnému porozumění této látky či jako cvičební pomůcka.

# 2 Základní pojmy a návod k řešení příkladů

Tato úvodní pasáž je vytvořena na základě podkladů z literatury [3], [6] a [9].

## 2.1 Návod (Stacionární bod)

Bod, patřící do definičního oboru dané funkce, nazveme stacionárním, jestliže první parciální derivace neexistují nebo jsou rovny nule. Mohou nastat celkem tři případy, kdy buď všechny první parciální derivace jsou nulové, všechny neexistují, nebo některé jsou nulové a některé neexistují. Stacionární body jsou body podezřelé z extrému. Abychom zjistili, zda je ve stacionárním bodě skutečně extrém, musíme vyšetřit parciální derivace druhého řádu v tomto bodě.

## 2.2 Lokální extrémy a sedlový bod

Nechť $f$ je funkce definovaná v intervalu $(a, b)$. Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $c \in (a, b)$ lokální maximum (resp. lokální minimum), existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$). Lokální maximum a lokální minimum funkce $f$ souhrnně nazýváme extrémy funkce $f$.

Sedlový bod je bod, ve kterém má funkce $f$ v jednom směru lokální maximum a v druhém směru lokální minimum.

## 2.3 Návod (Hessova matice)

Hessova matice druhého řádu se skládá z druhých parciálních derivací dané funkce a vypadá takto: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$. Hessovu matici vytváříme proto, abychom mohli spočítat její determinant, který poté rozhodne o lokálních extrémech dané funkce.

V této práci budu pracovat i s funkcemi tří proměnných a proto uvádím i Hessovu matici třetího řádu: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\, \partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{pmatrix}$.

## 2.4 Diskuse podle Hessova determinantu (pro matice druhého řádu)

Označme $D_1 = \left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right|$ a $D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix}$.

Je-li $D_2 > 0$, $D_1 > 0$ má funkce v daném bodě $[x, y]$ *lokální minimum.*

Je-li $D_2 > 0$, $D_1 < 0$ má funkce v daném bodě $[x, y]$ *lokální maximum.*

Je-li $D_2 < 0$, má funkce ve stacionárním bodě $[x, y]$ *sedlo.*

Je-li $D_2 = 0$, nelze o extrému touto metodou rozhodnout, je třeba zvolit jiný postup.

## 2.5 Diskuse podle Hessova determinantu (pro matice třetího řádu)

Dále označme $D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\, \partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix}$.

Je-li $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, je v daném bodě $[x, y, z]$ *lokální minimum.*

Je-li $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, je v daném bodě $[x, y, z]$ *lokální maximum.*

Je-li $D_1 \in \mathbb{R}$, $D_2 < 0$, $D_3 \in \mathbb{R}$, je v daném bodě $[x, y, z]$ *sedlo.*

Je-li $D_1 > 0$, $D_2 \in \mathbb{R}$, $D_3 < 0$, je v daném bodě $[x, y, z]$ *sedlo.*

Je-li $D_1 < 0$, $D_2 \in \mathbb{R}$, $D_3 > 0$, je v daném bodě $[x, y, z]$ *sedlo.*

Nastane-li některá z možností výše neuvedených, nelze o extrému touto metodou rozhodnout, je třeba zvolit jiný postup.

V jiných než stacionárních bodech lokální extrémy být nemohou.

# 3 Extrémy funkcí dvou proměnných-řešené příklady

## 3.1 Příklad 1

Nalezněte lokální extrémy funkce $F(x, y) = x^2 - (y-1)^2$.

([1], str. 303)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -2(y-1)$$

První parciální derivace položíme rovny nule, abychom získali stacionární body:

$$2x = 0$$

$$-2(y-1) = 0,$$

odtud $x = 0$ a $y = 1$.

Funkce má právě jeden stacionární bod: [0, 1].

Nyní provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = -2$$

Sestavíme Hessovu matici:

$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -4 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, 1] sedlový bod.

## 3.2 Příklad 2

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y) = x^2 + (y-1)^2$.

([1], str. 303)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Funkci upravíme: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$.

Provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y - 2$$

První parciální derivace položíme rovny nule, abychom získali stacionární body:

$$2x = 0$$

$$2y - 2 = 0,$$

odtud $x = 0$ a $y = 1$.

Stacionární bod má souřadnice: [0, 1].

Nyní provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2$$

Sestavíme Hessovu matici:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 \; > 0$$ ⇒ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 2 \; > 0$ ⇒ Funkce má v bodě [0, 1] lokální minimum.

## 3.3 Příklad 3

Nalezněte lokální extrémy funkce $F(x,y) = (x - y + 1)^2$.

([1], str. 303)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2(x - y + 1) \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2(x - y + 1) \cdot (-1)$$

Pokud první parciální derivace položíme rovny nule, dostaneme dvě soustavy rovnic o dvou neznámých:

$$2x - 2y + 2 = 0$$

$$2y - 2x - 2 = 0.$$

Po vypočtení těchto dvou rovnic sčítací nebo dosazovací metodou zjistíme, že řešením jsou všechny body, které leží na přímce ve tvaru: $y = x + 1$. Stacionárních bodů je tedy nekonečně mnoho a všechny leží na přímce $y = x + 1$.

Dále spočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = -2$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = -2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2$$

Hessova matice:

$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-2) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow$ Nelze touto metodou rozhodnout o lokálním extrému.

## 3.4 Příklad 4

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

([1], str. 303)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Funkci nemusíme nijak upravovat, rovnou vypočteme její první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x - y - 2 \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -x + 2y + 1$$

Abychom dostali stacionární body, opět položíme první parciální derivace rovny nule:

$$2x - y - 2 = 0$$
$$-x + 2y + 1 = 0.$$

Řešením těchto dvou rovnic o dvou neznámých je jeden jediný bod – stacionární bod: [1, 0].

Nyní spočítáme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = -1$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3 > 0 \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 2 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [1, 0] lokální minimum.

## 3.5 Příklad 5

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y) = xy + x + y - x^2 - y^2 + 2$.

([4], str. 124)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Vypočteme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y + 1 - 2x \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x + 1 - 2y$$

První parciální derivace rovny nule:

$$y + 1 - 2x = 0$$
$$x + 1 - 2y = 0.$$

Řešením těchto dvou rovnic o dvou neznámých je jeden jediný bod: [1, 1].

Nyní spočítáme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = -2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = -2$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 3 > 0 \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -2 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [1, 1] lokální maximum.

### 3.6 Příklad 6

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = (x-1)\cdot(xy-1)$.

([3], str. 469)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Vypočteme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 1\cdot(xy-1) + (x-1)\cdot y = 2xy - y - 1$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0\cdot(xy-1) + (x-1)\cdot x = x^2 - x$$

První parciální derivace rovny nule:

$$2xy - y - 1 = 0$$
$$x^2 - x = 0.$$

Druhou rovnici upravíme do tvaru: $(x-1)\cdot x = 0$. Vidíme tak, že $x_1 = 1$ a $x_2 = 0$.

Po dosazení do rovnice první získáme $y_1 = 1$ a $y_2 = -1$.

Získali jsme dva stacionární body: [1, 1], [0, -1].

Nyní spočítáme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 2y \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = 2x - 1$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = 2x - 1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 0$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{vmatrix}$$

1) Dosazení stacionárního bodu [1, 1]:

$\begin{vmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [1, 1] sedlo.

2) Dosazení stacionárního bodu [0, -1]:

$\begin{vmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 0 - (-1)\cdot(-1) = -1 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, -1] také sedlo.

## 3.7 Příklad 7

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, kde $x > 0, y > 0$.

([1], str. 303)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$.

Zlomky vyskytující se v zadání funkce převedeme na mocninné tvary, aby se nám lépe derivovaly:

$$F(x,y) = xy + 50x^{-1} + 20y^{-1}.$$

Po vypočtení prvních parciálních derivací dostaneme:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y - 50x^{-2} = y - \frac{50}{x^2} \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x - 20y^{-2} = x - \frac{20}{y^2}$$

Pro získání stacionárních bodů, položíme tyto derivace rovny nule:

$$y - \frac{50}{x^2} = 0$$

$$x - \frac{20}{y^2} = 0.$$

Z rovnice $y - \frac{50}{x^2} = 0$ vyjádříme $y$, tedy $y = \frac{50}{x^2}$ a dosadíme do druhé rovnice.

Dostaneme rovnici ve tvaru: $x - \frac{20}{\left(\frac{50}{x^2}\right)^2} = 0$. Levou stranu upravíme:

$$x - \frac{20}{\left(\frac{50}{x^2}\right)^2} = x - \frac{20}{\frac{2500}{x^4}} = x - \frac{20x^4}{2500} = \frac{x \cdot (125 - x^3)}{125}.$$

Řešením rovnice jsou dva body: 0 a 5, ale bod 0 nepatří do $D_{(F)}$. Protože víme, že $y = \frac{50}{x^2} \Rightarrow y = 2$.

Získáváme jediný stacionární bod [5, 2], který leží v $D_{(F)}$.

Po té spočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 100x^{-3} = \frac{100}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 40y^{-3} = \frac{40}{y^3}$$

Sestavíme Hessovu matici:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{vmatrix}$$ ⇒ Dosadíme stacionární bod [5, 2]:

$\begin{vmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0{,}8 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 0{,}8 > 0$ ⇒ Funkce má v bodě [5, 2] lokální minimum.

## 3.8 Příklad 8

Nalezněte lokální extrémy funkce $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + y - 7$.

([7], str. 115)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -3x + 2y + 1$$

První parciální derivace položíme rovny nule a vypočteme stacionární body:

$$3x^2 - 3y = 0$$
$$-3x + 2y + 1 = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme $y, y = x^2$. Po dosazení do druhé rovnice, dostaneme rovnici ve tvaru $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Řešení rovnice získáme pomocí diskriminantu: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Ypsilonové souřadnice získáme dosazením $x_1$ a $x_2$ do rovnice $y = x^2$.

Z těchto dvou rovnic získáme celkem dva stacionární body: [1, 1] a [$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 6x \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = -3$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = -3 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$ ⇒ Dosadíme stacionární body:

1) Dosazení stacionárního bodu [1, 1]:

$\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) = 3 > 0 \Rightarrow$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 6 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [1, 1] lokální minimum.

2) Dosazení stacionárního bodu [$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$]:

$\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) = -3 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$] sedlový bod.

## 3.9 Příklad 9

Nalezněte lokální extrémy funkce $F(x, y) = (x + y - 5)^4 + 4$.

(vlastní příklad)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 4 \cdot (x + y - 5)^3 \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 4 \cdot (x + y - 5)^3$$

První parciální derivace položíme rovny nule:

$$4 \cdot (x + y - 5)^3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

Stacionární body leží na přímce ve tvaru $x + y - 5 = 0$.

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 12 \cdot (x + y - 5)^2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = 12 \cdot (x + y - 5)^2$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = 12 \cdot (x + y - 5)^2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 12 \cdot (x + y - 5)^2$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12\cdot(x+y-5)^2 & 12\cdot(x+y-5)^2 \\ 12\cdot(x+y-5)^2 & 12\cdot(x+y-5)^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ tuto metodu nelze použít.

Platí-li, že: [x, y] $\in$ přímky $x + y - 5 = 0$, pak $F(x, y) = 0^4 + 4 = 4$.

Platí-li, že: [x, y] $\notin$ přímky $x + y - 5 = 0$, platí tedy, že $x + y - 5 \neq 0$. Proto je výraz $(x + y - 5)^4 > 0$ a $F(x, y) > 4$.

Funkce má ve všech stacionárních bodech, které leží na přímce $x + y - 5 = 0$ lokální minima.

## 3.10 Příklad 10

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

([7], str. 115)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x - y + 9 \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -x + 2y - 6$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$2x - y + 9 = 0$$
$$-x + 2y - 6 = 0.$$

Řešení těchto dvou rovnic o dvou neznámých dostaneme například tímto způsobem:

Z obou rovnic vyjádříme neznámou $y$: $y = 2x + 9$ a $y = \frac{x+6}{2}$. Obě neznámé porovnáme ($2x + 9 = \frac{x+6}{2}$) a zjistíme, že $x = -4$. Číslo -4 pak dosadíme do jedné z rovnic $y = 2x + 9$ a $y = \frac{x+6}{2}$ a zjistíme, že $y = 1$.

Řešením těchto dvou rovnic je tedy stacionární bod: [-4, 1].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = -1$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3 > 0 \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 2 > 0$ ⇒ Funkce má v bodě [-4, 1] lokální minimum.

## 3.11 Příklad 11

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

([7], str. 115)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Utvoříme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$3x^2 - 3y = 0$$
$$3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme $y$: $y = x^2$ a dosadíme do druhé rovnice. Získáme rovnici ve tvaru $x^4 - x = 0$, vytkneme $x$: $x \cdot (x^3 - 1) = 0$. Závorku rozložíme podle vzorečku $a^3 - b^3$: $x \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$ a odtud získáme $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ypsilonové souřadnice zjistíme dosazením $x$ do rovnice $y = x^2$.

Po vyřešení této rovnice dostaneme dva stacionární body: [0, 0] a [1, 1].

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 6x \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = -3$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = -3 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 6y$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$ ⇒ Dosadíme stacionární body:

1) Dosazení stacionárního bodu [0, 0]:

$\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-3) \cdot (-3) = -9 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, 0] sedlový bod.

2) Dosazení stacionárního bodu $[1, 1]$:

$\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - (-3) \cdot (-3) = 27 > 0 \Rightarrow$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 6 > 0$ ⇒ Funkce má v bodě [1, 1] lokální minimum.

## 3.12 Příklad 12

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$.

([7], str. 115)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Utvoříme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 6y - 3x^2 \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 6x - 3y^2$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$6y - 3x^2 = 0$$

$$6x - 3y^2 = 0.$$

Po vyřešení této rovnice dostaneme dva (stacionární) body: [0, 0] a [2, 2].

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = -6x \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = 6$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = 6 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = -6y$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{vmatrix}$$ ⇒ Dosadíme stacionární body:

1) Dosazení stacionárního bodu [0, 0]:

$\begin{vmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 6 \cdot 6 = -36 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, 0] sedlový bod.

2) Dosazení stacionárního bodu $[2, 2]$:

$\begin{vmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = (-12) \cdot (-12) - 6 \cdot 6 = 108 > 0 \Rightarrow$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -12 < 0$ ⇒ Funkce má v bodě [2, 2] lokální maximum.

## 3.13 Příklad 13

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
([7], str. 115)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Utvoříme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 6y - 39 \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y - 6x + 18$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$3x^2 - 6y - 39 = 0$$
$$2y - 6x + 18 = 0.$$

Po vyřešení této rovnice dostaneme dva (stacionární) body: [5, 6] a [1, -6].

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 6x \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = -6$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = -6 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$$ ⇒ Dosadíme stacionární body:

1) Dosazení stacionárního bodu [5, 6]:

$\begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 30 \cdot 2 - (-6) \cdot (-6) = 24 > 0 \;\Rightarrow\;$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 30 > 0 \;\Rightarrow$ Funkce má v bodě [5, 6] lokální minimum.

2) Dosazení stacionárního bodu $[1, -6]$:

$\begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - (-6) \cdot (-6) = -24 > 0 \;\Rightarrow\;$ Funkce má v bodě $[1, -6]$ sedlový bod.

## 3.14 Příklad 14

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = x^2 \cdot (1 + y^2)$

([8], str. 74)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Utvoříme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x \cdot (1 + y^2) \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x^2 y$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$2x \cdot (1 + y^2) = 0$$
$$2x^2 y = 0.$$

Výraz $(1 + y^2) \neq 0 \;\Rightarrow x = 0$. Je-li $x = 0$, pak $y \in \mathbb{R}$.

Existuje tedy nekonečně mnoho stacionárních bodů ve tvaru $[0, y]$, kde $y \in \mathbb{R}$.

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = 2 + 2y^2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = 4xy$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = 4xy \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = 2x^2$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Dosadíme stacionární bod:}$$

Dosazení stacionárního bodu [0, y]:

$$\begin{vmatrix} 2 + 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ Tuto metodu nelze použít.}$$

Protože však víme, že $F(0,y) = 0$ a $x^2 \cdot (1 + y^2) > 0$ pro všechna $y$ a všechna $x \neq 0$, má funkce ve stacionárních bodech [0, $y$] lokální minima.

## 3.15 Příklad 15

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

([2], str. 79)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0\}$.

Funkci nejprve upravíme, aby se nám lépe derivovala:

$$x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = x - 2y + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + 3\mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

Utvoříme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot y \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{x^2 + y^2 - 3y + x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y + 3 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 - 2y^2 + y + 3x}{x^2 + y^2}$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$\frac{x^2 + y^2 - 3y + x}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\frac{-2x^2 - 2y^2 + y + 3x}{x^2 + y^2} = 0.$$

Podíl je roven nule, jestliže čitatel je roven nule proto řešíme rovnice:

$$x^2 + y^2 - 3y + x = 0$$
$$-2x^2 - 2y^2 + y + 3x = 0.$$

První rovnici vynásobíme číslem 2 a poté rovnice sečteme. Dostaneme tak rovnici $y = x$, kterou dosadíme například do první rovnice a získáme tak kvadratickou rovnici ve tvaru $2x^2 - 2x = 0$, jejímž řešením jsou dva kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$.

Je-li $x_1 = 0 \Rightarrow y = 0$, je-li $x_2 = 1 \Rightarrow y = 1$.

Získáváme tedy dva body: [0, 0] a [1, 1], ale bod [0, 0] nepatří do $D_{(F)}$. Funkce má tedy jediný stacionární bod: [1, 1].

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{(2x+1)\cdot(x^2+y^2) - (x^2+y^2-3y+x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+6xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = \frac{(2y-3)\cdot(x^2+y^2) - (x^2+y^2-3y+x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = \frac{(-4x+3)\cdot(x^2+y^2)^2 - (-2x^2-2y^2+y+3x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = \frac{(-4y+1)\cdot(x^2+y^2)^2 - (-2x^2-2y^2+y+3x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-6xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-x^2+6xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-6xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Dosadíme stacionární bod.}$$

Dosazení stacionárního bodu [1, 1]:

$$\begin{vmatrix} \frac{-x^2+6xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-6xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1+6+1}{4} & \frac{-3-2+3}{4} \\ \frac{-3-2+3}{4} & \frac{1-6-1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} =$$

$= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{4} < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [1, 1] sedlo.

## 3.16 Příklad 16

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y) = e^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2) + 2$

(vlastní příklad)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Utvoříme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) \cdot (2y^2 + x^2) + \left(e^{-x^2-y^2}\right) \cdot 2x = -2xe^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) \cdot (2y^2 + x^2) + \left(e^{-x^2-y^2}\right) \cdot 4y = -2ye^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 2)$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$-2xe^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 1) = 0$$

$$-2ye^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 2) = 0.$$

Výraz $e^{-x^2-y^2}$ je pro libovolné $x$ a $y$ vždy různý od nuly, dále řešíme tyto rovnice:

$$x \cdot (2y^2 + x^2 - 1) = 0$$

$$y \cdot (2y^2 + x^2 - 2) = 0.$$

Jestliže $x = 0$, pak $y = 0$, $y = \pm 1$. Je-li $y = 0$, pak $x = 0$, $x = \pm 1$.

Jestliže $x \neq 0 \wedge y \neq 0$, mělo by platit, že $2y^2 + x^2 = 1 \;\wedge\; 2y^2 + x^2 = 2 \;\Rightarrow$ soustava rovnic nemá řešení. Z tohoto plyne, že funkce má celkem pět stacionárních bodů: [0, 0], [0, 1], [0, -1], [1, 0], [-1, 0].

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = -2e^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 1) - 2xe^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) \cdot (2y^2 + x^2 - 1) - 2xe^{-x^2-y^2} \cdot 2x$$

$$= e^{-x^2-y^2} \cdot ((2y^2 + x^2 - 1) \cdot (4x^2 - 2) - 4x^2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = 0 \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 1) - 2xe^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) \cdot (2y^2 + x^2 - 1) - 2xe^{-x^2-y^2} \cdot 4y$$

$$= 4xye^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 3)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = 0 \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 2) - 2ye^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) \cdot (2y^2 + x^2 - 2) - 2ye^{-x^2-y^2} \cdot 2x$$

$$= 4xye^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 3)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = -2e^{-x^2-y^2} \cdot (2y^2 + x^2 - 2) - 2ye^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) \cdot (2y^2 + x^2 - 2) - 2ye^{-x^2-y^2} \cdot 4y$$

$$= e^{-x^2-y^2} \cdot ((2y^2 + x^2 - 2) \cdot (4y^2 - 2) - 8y^2)$$

1) Dosazení stacionárního bodu [0, 0]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 8 > 0 \Rightarrow \text{ Funkce má lokální extrém.}$$

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 2 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, 0] lokální minimum.

2) Dosazení stacionárního bodu [0, 1]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{e}\right) \cdot \left(-\frac{8}{e}\right) - 0 \cdot 0 = \frac{16}{e^2} > 0 \Rightarrow \text{ Funkce má}$$

lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, 1] lokální maximum.

3) Dosazení stacionárního bodu [0, -1]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{e}\right) \cdot \left(-\frac{8}{e}\right) - 0 \cdot 0 = \frac{16}{e^2} > 0 \Rightarrow \text{ Funkce má}$$

lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, -1] lokální maximum.

4) Dosazení stacionárního bodu [1, 0]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{e}\right) \cdot \left(\frac{2}{e}\right) - 0 \cdot 0 = -\frac{8}{e^2} < 0 \Rightarrow \text{ Funkce má v bodě}$$

[1, 0] sedlový bod.

5) Dosazení stacionárního bodu [-1, 0]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{e}\right) \cdot \left(\frac{2}{e}\right) - 0 \cdot 0 = -\frac{8}{e^2} < 0 \Rightarrow \text{ Funkce má v bodě}$$

[-1, 0] sedlový bod.

## 3.17 Příklad 17

Nalezněte extrémy funkce $F(x,y) = e^{2x+3y} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

([1], str. 303)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^2$.

Provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{2x+3y} \cdot 2 \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y} \cdot (16x - 6y) =$$

$$= e^{2x+3y} \cdot (16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{2x+3y} \cdot 3 \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y} \cdot (-6x + 6y) =$$

$$= e^{2x+3y} \cdot (24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y)$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$e^{2x+3y} \cdot (16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y) = 0$$

$$e^{2x+3y} \cdot (24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y) = 0.$$

Výraz $e^{-x^2-y^2}$ je pro libovolné $x$ a $y$ vždy různý od nuly, dále řešíme tyto rovnice:

$$16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y = 0$$

$$24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y = 0.$$

Nejprve první rovnici vydělíme číslem 2 a druhou rovnici číslem 3 a poté je od sebe odečteme. Získáme tak rovnici ve tvaru $10x - 5y = 0$ neboli $y = 2x$. Ypsilon dosadíme do obou dvou rovnic:

$$16x^2 - 12x \cdot (2x) + 6 \cdot (2x)^2 + 16x - 6 \cdot (2x) = 0$$

$$24x^2 - 18x \cdot (2x) + 9 \cdot (2x)^2 - 6x + 6 \cdot (2x) = 0.$$

Po úpravě obou rovnic dostaneme jednu a tu samou rovnici v tomto tvaru: $4x^2 + x = 0$.

$$4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ nebo } x = -\frac{1}{4}.$$

Je-li $x = 0$, pak $y = 0$. Je-li $x = -\frac{1}{4}$, pak $y = -\frac{1}{2}$.

Tato funkce má právě dva stacionární body: [0, 0], $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$.

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = e^{2x+3y} \cdot 2 \cdot (16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y) + e^{2x+3y} \cdot (32x - 12y + 16)$$

$$= e^{2x+3y} \cdot (32x^2 - 24xy + 12y^2 + 64x - 24y + 16)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = e^{2x+3y} \cdot 3 \cdot (16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y) + e^{2x+3y} \cdot (-12x + 12y - 6)$$

$$= e^{2x+3y} \cdot (48x^2 - 36xy + 18y^2 + 36x - 6y - 6)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = e^{2x+3y} \cdot 2 \cdot (24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y) + e^{2x+3y} \cdot (48x - 18y - 6) =$$

$$= e^{2x+3y} \cdot (48x^2 - 36xy + 18y^2 + 36x - 6y - 6)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = e^{2x+3y} \cdot 3 \cdot (24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y) + e^{2x+3y} \cdot (-18x + 18y + 6) =$$

$$= e^{2x+3y} \cdot (72x^2 - 54xy + 27y^2 - 36x + 36y + 6)$$

1) Dosazení stacionárního bodu [0, 0]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 16 \cdot 6 - (-6) \cdot (-6) = 60 > 0 \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 16 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [0, 0] lokální minimum.

2) Dosazení stacionárního bodu $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{14}{e^2} & -\frac{9}{e^2} \\ -\frac{9}{e^2} & \frac{3}{2e^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{14}{e^2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2e^2}\right) - \left(-\frac{9}{e^2}\right) \cdot \left(-\frac{9}{e^2}\right) = -\frac{60}{e^4} < 0 \Rightarrow$$

Funkce má v bodě $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$ sedlový bod.

## 3.18 Příklad 18

Nalezněte extrémy funkce $F(x, y)$= $1 + \sin x \cdot \sin y$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$.

(vlastní příklad)

---

Provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos x \ \cdot \ \sin y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin x \ \cdot \ \cos y$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$\cos x \cdot \sin y = 0$$
$$\sin x \cdot \cos y = 0.$$

1) Rovnice $\cos x \cdot \sin y = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \lor \sin y = 0.$

Je-li $\cos x = 0$, pak $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

Dosadíme-li $x_1$ a $x_2$ do druhé rovnice, získáme rovnici $\pm\cos y = 0$. Odtud $y_1 = \frac{\pi}{2}$, $y_2 = \frac{3\pi}{2}$.

Je-li $\sin y = 0$, pak $y_1 = 0, y_2 = \pi, y_3 = 2\pi$.

Dosadíme-li $y_1$, $y_2$ a $y_3$ do druhé rovnice, získáme rovnici $\pm\sin x = 0$. Odtud $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$.

Funkce má celkem 13 stacionárních bodů: $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[0, 0]$, $[0, \pi]$, $[0, 2\pi]$, $[\pi, 0]$,$[\pi, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 0]$, $[2\pi, \pi]$, $[2\pi, 2\pi]$.

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = -\sin x \cdot \sin y \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \cos x \cdot \cos y$$
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} = \cos x \cdot \cos y \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = \sin x \cdot (-\sin y)$$

1) Dosazení stacionárního bodu $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - 0 \cdot 0 = 1 > 0 \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -1 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ lokální maximum.

2) Dosazení stacionárního bodu $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 > 0 \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 1 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ lokální minimum.

3) Dosazení stacionárního bodu $[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Funkce má lokální extrém.}$$

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 1 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě $[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ lokální minimum.

4) Dosazení stacionárního bodu $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Funkce má}$$

lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -1 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ lokální maximum.

Ostatních 9 podezřelých bodů ($[0, 0], [0, \pi], [0, 2\pi], [\pi, 0], [\pi, \pi], [\pi, 2\pi], [2\pi, 0], [2\pi, \pi], [2\pi, 2\pi]$) lze vyřešit najednou: $x$-ové souřadnice jsou buď $0, \pi, 2\pi$, tudíž druhé derivace podle $x$, které jsou stejné jako druhé derivace podle $y$, budou vždy rovny nule. Smíšené derivace jsou vždy stejné a nenulové. Hessova matice bude tedy vždy záporná a všech 9 stacionárních bodů jsou sedla.

## 3.19 Příklad 19

Nalezněte extrémy funkce $F(x, y) = xy \cdot \ln(x^2 + y^2)$.

([4], str. 124)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; [x, y] \neq [0,0]\}$.

Provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \cdot \ln(x^2 + y^2) + xy \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = y \cdot \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \cdot \ln(x^2+y^2) + xy \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = x \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

Obě parciální derivace položíme rovny nule:

$$y \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

$$x \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

První rovnici vynásobíme neznámou $y$, rovnici druhou vynásobíme neznámou $x$:

$$y^2 \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$x^2 \cdot \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Nyní od sebe obě dvě rovnice odečteme:

$$y^2 \cdot \ln(x^2+y^2) - x^2 \cdot \ln(x^2+y^2) = 0.$$

Vytkneme výraz $\ln(x^2+y^2)$:

$$\ln(x^2+y^2) \cdot (y^2 - x^2) = 0.$$

Součin je roven nule, je-li $\ln(x^2+y^2) = 0 \ \vee (y^2 - x^2) = 0.$

1) $\ln(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = 1.$

   Upravíme: $x^2 = 1 - y^2$ a dosadíme do první rovnice a poté upravíme:

$$y \cdot \ln(1 - y^2 + y^2) + \frac{2 \cdot (1-y^2) \cdot y}{(1-y^2) + y^2} = 0,$$

$$y \cdot \ln 1 + \frac{2\mathrm{y} - 2\mathrm{y}^3}{1} = 0,$$

$$2\mathrm{y} - 2\mathrm{y}^3 = 0,$$

$$2y \cdot (1 - y^2) = 0,$$

Odtud $y_1 = 0, y_{2,3} = \pm 1.$

   Víme, že $x^2 = 1 - y^2$, proto $x_{1,2} = \pm 1, x_3 = 0.$

   Získáváme tyto stacionární body: $[\pm 1, 0]$, $[0, \pm 1]$.

2) $(y^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

Opět dosadíme do první rovnice a upravujeme:

$$y \cdot \ln(y^2 + y^2) + \frac{2y^2y}{y^2 + y^2} = 0,$$

$$y \cdot \ln(2y^2) + \frac{2y^3}{2y^2} = 0,$$

$$y \cdot \ln(2y^2) + y = 0,$$

$$y \cdot (\ln(2y^2) + 1) = 0.$$

Výraz je roven nule, je-li $y = 0 \vee \ln(2y^2) + 1 = 0$.

a) Je-li $y = 0$, pak $x = 0$. Stacionární bod [0, 0] však nepatří do definičního oboru, proto v tomto bodě není žádný lokální extrém.

b) Rovnici $\ln(2y^2) + 1 = 0$ budeme dál řešit:

$$\ln(2y^2) = -1,$$

$$\mathrm{e}^{-1} = 2y^2,$$

$$\frac{1}{e} = 2y^2,$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2e}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Je-li $x^2 = y^2$, pak $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2e}}$.

Stacionární body této funkce jsou: $[\pm 1, 0]$, $[0, \pm 1]$, $[\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}]$.

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 0 \cdot \ln(x^2 + y^2) + y \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x + y \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{2 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy \cdot (2y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy}{x^2 + y^2} + \frac{2xy^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{4xy \cdot (x^2 + y^2) + 2xy^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y + 6xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = 1 \cdot \ln(x^2+y^2) + y \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y + x \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{0 \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \ln(x^2+y^2) + \frac{2 \cdot (y^2+x^2)}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \ln(x^2+y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = 1 \cdot \ln(x^2+y^2) + x \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x + y \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{0 \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \ln(x^2+y^2) + \frac{2 \cdot (x^2+y^2)}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \ln(x^2+y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = 0 \cdot \ln(x^2+y^2) + x \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y + x \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{2 \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{xy \cdot (2x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy}{x^2+y^2} + \frac{2x^3y - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4xy \cdot (x^2+y^2) + 2x^3y - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6x^3y + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x^3y+6xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \ln(x^2+y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \ln(x^2+y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{6x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix}$$

1) Dosazení stacionárních bodů $[\pm 1, 0], [0, \pm 1]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -2 < 0 \Rightarrow$$ Funkce má v těchto bodech sedlo.

2) Dosazení stacionárních bodů $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0 \ \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 2 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodech $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ lokální minima.

3) Dosazení stacionárních bodů $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 4 > 0 \ \Rightarrow$$ Funkce má lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -2 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodech $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ lokální maxima.

# 4 Extrémy funkcí tří proměnných-řešené příklady

## 4.1 Příklad 1

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z$.

([4], str. 125)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^3$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 2x - 4 \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 2y + 2 \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 2z + 6$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$2x - 4 = 0$$

$$2y + 2 = 0$$

$$2z + 6 = 0.$$

Řešením těchto tří rovnic o třech neznámých je jeden jediný stacionární bod: [2, -1, -3].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} = 2$$

Hessova matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 > 0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$$

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 2 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [2, -1, -3] lokální minimum.

## 4.2 Příklad 2

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2x - xy - xz$.

([7], str. 115)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^3$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 4x + 2 - y - z \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = \ 2y - x$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}} = -x$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$4x + 2 - y - z = 0$$
$$-2y - x \ = 0$$
$$-\mathrm{x} = 0.$$

Řešením těchto tří rovnic o třech neznámých je jeden jediný stacionární bod: [0, 0, 2].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} = 4 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}} = -1$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} = 0$$

Hessova matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (2 + 0 + 0) =$$

$$= -2 < 0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 7 > 0$$

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 4 > 0 \Rightarrow$ V bodě [0, 0, 2] je sedlo.

## 4.3 Příklad 3

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y, z) = x^2 + 2y^3 + z^2 - 8xy - 4z + 7$.

(vlastní příklad)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^3$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 2x - 8y \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 6y^2 - 8x$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 2z - 4$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$2x - 8y = 0$$
$$6y^2 - 8x = 0$$
$$2z - 4 = 0.$$

Řešením těchto tří rovnic o třech neznámých jsou dva stacionární body: $[\frac{64}{3}, \frac{16}{3}, 2]$ a [0, 0, 2].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\, \partial y} = -8$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\, \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\, \partial z} = -8$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} = 12y \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\, \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\, \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\, \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} = 2$$

Hessova matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\, \partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -8 & 12y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

1) Dosazení stacionárního bodu $[\frac{64}{3}, \frac{16}{3}, 2]$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -8 & 12y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -8 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (256 + 0 + 0) - (0 + 0 + 128) = 128 > 0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 64 \end{vmatrix} = 2 \cdot 64 - (-8) \cdot (-8) = 64 > 0$$

$$\left| \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} \right| = 2 > 0$$

Funkce má v bodě $[\frac{64}{3}, \frac{16}{3}, 2]$ lokální minimum.

2) Dosazení stacionárního bodu $[0, 0, 2]$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -8 & 12y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 128) = -128 < 0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-8) \cdot (-8) = -64 < 0$$

$\left| \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} \right| = 2 > 0 \Rightarrow$ V bodě [0, 0, 2] je sedlo.

## 4.4 Příklad 4

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

([4], str. 125)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^3$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 4x - y - z \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 2y - x \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 2 - x$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$4x - y - z = 0$$
$$2y - x = 0$$
$$2 - x = 0.$$

Ze třetí rovnice plyne, že $x = 2$, po dosazení $x$ do rovnice druhé zjistíme, že $y = 1$.

Po dosazení $x$ a $y$ do první rovnice získáme $z = 7$.

Řešením je jediný stacionární bod: [2, 1, 7].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} = 4 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial z} = -1$$
$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} = 0$$

Hessova matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) -$$

$$-(2 + 0 + 0) = -2 < 0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 7 > 0$$

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 4 > 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [2, 1, 7] sedlo.

## 4.5 Příklad 5

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

([5], str. 510)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^3$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2 - 3z \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}} = z - 3x + 2$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 2y - 2$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$3x^2 - 3z = 0$$
$$2y - 2 = 0$$
$$z - 3x + 2 = 0.$$

Z druhé rovnice zjistíme, že $y = 1$. Poté ze třetí rovnice vyjádříme $z$. Dále řešíme jen dvě rovnice o dvou neznámých:

$$3x^2 - 3z = 0$$
$$z - 3x + 2 = 0.$$

Řešením těchto tří rovnic o třech neznámých jsou dva stacionární body: [1, 1, 1] a [2, 1, 4].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} = 6x \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{z}} = -3$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{z}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\, \partial \mathrm{x}} = -3 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\, \partial \mathrm{y}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} = 1$$

Hessova matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\, \partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1) Dosazení stacionárního bodu [1, 1, 1]:

$$\begin{vmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (12 + 0 + 0) - (18 + 0 + 0) = -6 < 0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 12 > 0$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 6 > 0$$

V bodě [1, 1, 1] má funkce sedlo.

2) Dosazení stacionárního bodu [2, 1, 4]:

$$\begin{vmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (24 + 0 + 0) - (18 + 0 + 0) = 6 > 0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 24 > 0$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 6x = 6 \cdot 2 = 12 > 0$$

V bodě [2, 1, 4] má funkce lokální minimum.

## 4.6 Příklad 6

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y, z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln\,(22 - x - y - z)$.
([6], str. 298)

---

Definičním obor: $D_{(F)} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x > 0, y > 0, z > 0, 22 - x - y - z > 0\,]\}$

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = \frac{2}{y} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = \frac{5}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{22-x-y-z}=0$$

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{22-x-y-z}=0$$

$$\frac{5}{z}-\frac{1}{22-x-y-z}=0.$$

Každou rovnici vynásobíme společným jmenovatelem a získáme tak rovnice v těchto tvarech: $66-4x-3y-3z=0$, $44-2x-3y-2z=0$ a $110-5x-5y-6z=0$. Dále řešíme jako rovnici tří rovnic a o třech neznámých pomocí dosazovací nebo sčítací metody.

Řešením tří rovnic o třech neznámých je jeden jediný stacionární bod: [6, 4, 10].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}=-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}}=-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}}=-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}=-\frac{2}{y^2}-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}}=-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}}=-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}}=-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 z}=-\frac{5}{z^2}-\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

Hessova matice třetího řádu a dosazení stacionárního bodu [6, 4, 10]:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}}\\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}}\\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{10}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{10}\end{vmatrix}=\frac{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)}{12\cdot 8\cdot 20}\cdot\begin{vmatrix}4 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 5 & 5 & 6\end{vmatrix}=-\frac{11}{1920}<0$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -\frac{1}{3} < 0$$

Protože $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ a $D_3 < 0$, je v bodě [6, 4, 10] lokální maximum.

## 4.7 Příklad 7

Nalezněte lokální extrémy funkce: $F(x, y, z) = x^3 + 8y^3 - z^2 + 3xy + 2z + 1$.

([4], str. 125)

---

Definičním oborem této funkce je $D_{(F)} = \mathbb{R}^3$.

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2 + 3y \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 24y^2 + 3x$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = -2z + 2$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$3x^2 + 3y = 0$$
$$24y^2 + 3x = 0$$
$$-2z + 2 = 0.$$

Ze třetí rovnice vypočteme, že $z = 1$. Z první rovnice vyjádříme $y$: $y = -x^2$ a dosadíme do rovnice druhé. Získáme rovnici ve tvaru

$$x \cdot (8x^3 + 1) = 0,$$

jejímž řešením jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Je-li $x_1 = 0$, pak $y_1 = 0$, je-li $x_2 = -\frac{1}{2}$, pak $y_2 = -\frac{1}{4}$.

Funkce má tedy celkem dva stacionární body: [0, 0, 1] a $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1]$.

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 6x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = 3 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = 3 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = 48y \qquad \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 z} = -2$$

Hessova matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 3 & 0 \\ 3 & 48y & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

1) Dosazení stacionárního bodu [0, 0, 1]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 18$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 0$$

Funkce má v bodě [0, 0, 1] sedlo.

2) Dosazení stacionárního bodu $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1]$.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial \mathrm{z}\,\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -54$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 27$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -3$$

Ve stacionárním bodě $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1]$ je lokální maximum.

## 4.8 Příklad 8

Nalezněte lokální extrémy funkce:

$F(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z + 2$ .

(vlastní příklad)

---

Definičním obor: $D_{(F)} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\}$

První parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2 - 4x - 2y + z$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 2z + x - y + 3$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 2y - 2x - z$$

Parciální derivace položíme rovny nule:

$$3x^2 - 4x - 2y + z = 0$$

$$2y - 2x - z = 0$$

$$2z + x - y + 3 = 0.$$

Ze třetí rovnice vyjádříme $y$ ($y = 2z + x + 3$) dosadíme do druhé rovnice a vyjde nám, že $z = -2$. Číslo -2 dosadíme do rovnice $y = 2z + x + 3$ a dostaneme rovnici ve tvaru $y = x - 1$. Tuto rovnici dosadíme do rovnice první ($3x^2 - 6x = 0$) a vyjdou nám dva kořeny: $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Jestliže $x = 0$, pak $y = -1$. Je-li $x = 2$, pak $y = 1$.

Máme tedy dva stacionární body: [0, -1, -2], [2, 1, -2].

Druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 6x - 4 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = -2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = 2 \qquad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} = -1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 z} = 2$$

Hessova matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1) Dosazení stacionárního bodu [0, -1, -2]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -4 \Rightarrow$ V bodě [0, -1, -2] je sedlo.

2) Dosazení stacionárního bodu [2, 1, -2]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y,z)}{\partial^2 z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

Hessova matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 8$$

Protože $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ a $D_3 > 0$, je ve stacionárním bodě [2, 1, -2] lokální minimum.

# 5 Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na jedno z nejdůležitějších témat matematické analýzy, totiž extrémy funkcí více proměnných. V průběhu psaní bakalářské práce jsem si zároveň procvičila spoustu jiných témat, jako je určování definičních oborů, řešení soustav, logika při řešení podmínek, počítání determinantů, či parciální derivace. Doufám, že to pomůže čtenářům při jejich studiu tohoto tématu.

# 6 Seznam použité literatury a ostatní zdrojů


[1] Děmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.

[2] Došlá, Z., Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Brno: Přírodovědecká fakulta MU, 2006.

[3] Gilmann, L., McDowell R. H.: *Matematická analýza*, Praha: SNTL, 1980.

[4] Charvát, J., Kelar, V., Šibrava, Z.: *Matematika 2: Sbírka příkladů*, Praha: ČVUT, 2006.

[5] Jarník, V.: *Diferenciální počet (II)*, Praha: Academia, 1976.

[6] Kaňka, M., Henzler, J.: *Učebnice matematiky II*, Praha: VŠE, 1996.

[7] Matematická analýza 5 pro SŠ [online] [cit. 2013-03-04]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/ma5osme.pdf.

[8] Nagy, J., Taufer, J.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, ČVUT, 1997.

[9] Novák, V.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Brno: UJEP, 1983.