Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

SBÍRKA PŘÍKLADŮ NA KVADRATICKÉ PLOCHY

Autor práce: Žaneta Mifková
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Sbírka příkladů na kvadratické plochy jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích …………… ……………………………

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za odborné vedení mé bakalářské práce, poskytnuté cenné rady a přínosné konzultace. Děkuji také rodině a příteli za podporu během celého studia.

Anotace

Bakalářská práce se zabývá praktickými příklady na kvadratické plochy. Je rozdělena na Úvod a 11 kapitol. Každá kapitola obsahuje základní pojmy dané problematiky, následuje několik řešených příkladů a v závěru kapitoly jsou uvedeny neřešené příklady včetně výsledků. Práce tak může napomoci ke zvládnutí předmětu Geometrie I., ve které se probírají kuželosečky a kvadriky. Cílem práce je shromáždit příklady k jednotlivým tématům teorie kvadratických ploch, následně typické příklady vyřešit a podat tak návod k řešení ostatních příkladů k procvičení, které jsou uvedeny pouze s výsledky.

Annotation

Bachelor thesis deals with practical examples on quadratic surfaces. It is divided into an Introduction and 11 chapters. Each chapter includes basic concepts of the issue, followed by several solved examples and at the end of chapter unsolved examples are listed, including results. The thesis can help to manage the course Geometry I., in which conics and quadrics are discussed. Aim of this thesis is to collect examples for each topic of the theory of quadratic surfaces, subsequently typical examples resolve and in this way give the instructions for solving other examples, which are listed only with results, to practice.

Obsah

Úvod

V bakalářské práci se zabývám příklady na kvadratické plochy. Práce je rozdělena do 11 kapitol týkajících se kvadratických ploch a jejich vlastností. Jednotlivé kapitoly jsou: Kvadriky; Asymptotické směry; Vzájemná poloha přímky a kvadriky; Vzájemná poloha roviny a kvadriky; Střed kvadriky, středové a nestředové kvadriky; Singulární bod, singulární kvadriky a regulární kvadriky; Tečna a tečná rovina; Pól a polární rovina; Klasifikace kvadrik; Kulová plocha; Kuželová plocha. Každá kapitola, kromě kapitoly Kvadriky, obsahuje v úvodu základní definice a věty k danému tématu, následují příklady s uvedeným postupem řešení a kapitolu uzavírají neřešené příklady s výsledky. V kapitole Kvadriky jsou uvedeny základní definice a pojmy, na které navazují příklady některých kvadrik doplněné o obrázky.

Myslím, že tato bakalářská práce by mohla být přínosem především pro studenty předmětu Geometrie I. na PF Jihočeské univerzity. Může jim ukázat, jak postupovat při řešení typických příkladů, a zároveň si díky příkladům k procvičení mohou tyto postupy osvojit a upevnit.

Obrázky v této práci jsem vytvořila v programu Maple 9.5 a GeoGebra 4.2. K pomocným výpočtům byly použity matematické softwary Derive 6 a Maple 9.5.

Nebude-li uvedeno jinak, pak jsou všechny uvedené definice a věty převzaty z knihy *Kvadratické plochy a jejich reprezentace v programu Maple* – v seznamu literatury označené [1].

1. Kvadriky

1.1 Kvadrika

Definice: Nechť je dána rovnice ve tvaru:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34} + a_{44} = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty a_{ij} jsou reálná čísla a alespoň jeden z koeficientů u kvadratických členů je různý od nuly, tj. $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Potom se množina všech bodů euklidovského prostoru E^3, jejichž souřadnice v nějaké kartézské soustavě souřadnic vyhovují rovnici (1), nazývá plocha 2. stupně, přesněji plocha 2. stupně určená rovnicí (1). Místo plocha 2. stupně užíváme též název kvadratická plocha, nebo stručně kvadrika. Body, které této rovnici vyhovují, jsou body kvadriky.

Maticový tvar kvadriky:

Rovnici kvadriky (1) můžeme uvádět i v maticovém tvaru:

$$(x, y, z, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

kdy platí $a_{ij} = a_{ji}$, pro $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Malý determinant:

Malý determinant označujeme A_{44} a je ve tvaru:

$$A_{44} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Velký determinant:

Velký determinant označujeme Δ a je ve tvaru:

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

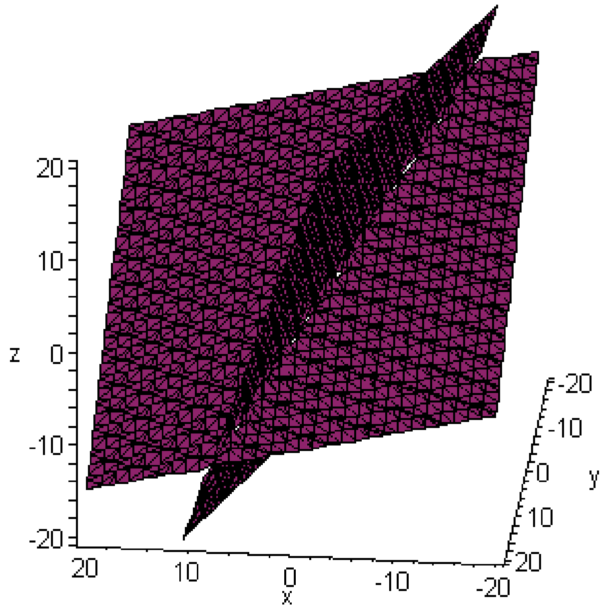
1.2 Příklady některých kvadrik

- jediný bod $[2;\ -1;\ -2]$:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=0$$

- dvě různé roviny:

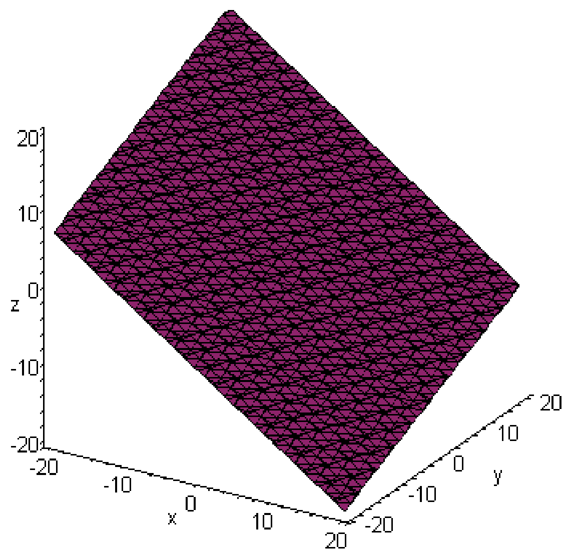
$$(x+2y+4z)\cdot(3x-y+z+8)=0$$



Obr. 1 Dvě různé roviny

- dvojnásobná rovina:

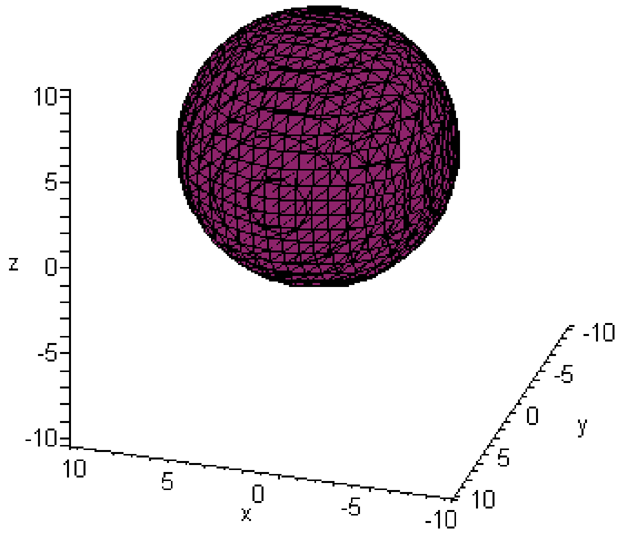
$$(2x-y+3z-1)^2=0$$



Obr. 2 Dvojnásobná rovina

- kulová plocha se středem v bodě $S = [1, -3, 2]$ a poloměrem 6:

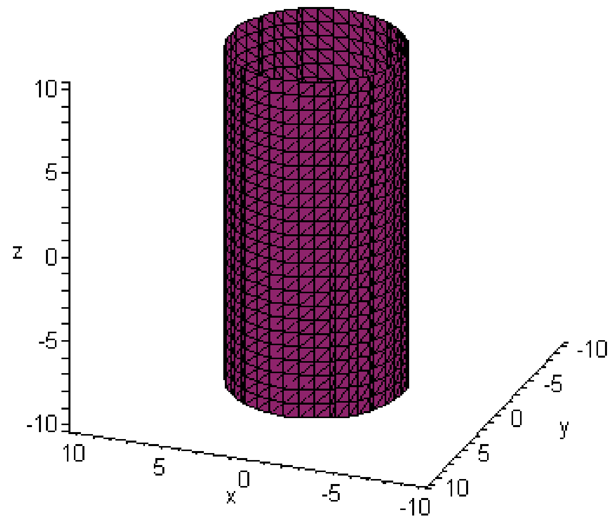
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 - 36 = 0$$



Obr. 3: Kulová plocha

- válcová plocha:

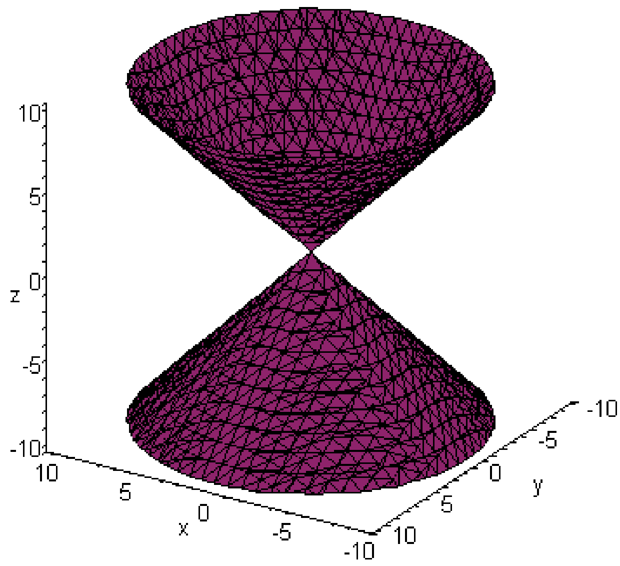
$$\{[x, y, z];\ x^2 + y^2 - 25 = 0\}$$



Obr. 4: Válcová plocha

- kuželová plocha s vrcholem v počátku:

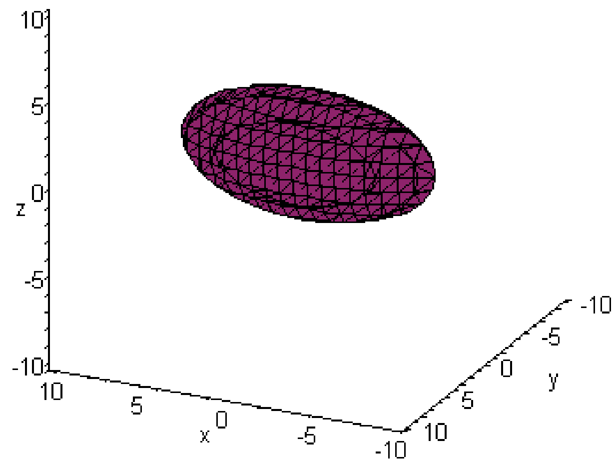
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$



Obr. 5: Kuželová plocha

- elipsoid:

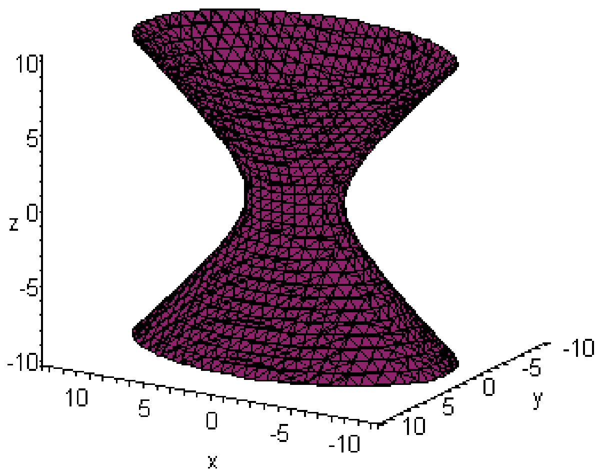
$$4x^2 + 49y^2 + 16z^2 - 225 = 0$$



Obr. 6: Elipsoid

- hyperboloid:

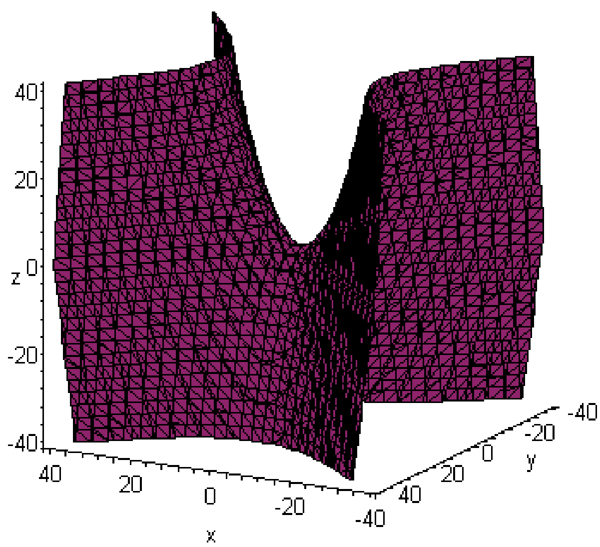
$$6x^2 + 15y^2 - 7z^2 - 78 = 0$$



Obr. 7 Jednodílný hyperboloid

- hyperbolický paraboloid:

$$x^2 - y^2 - 10z = 0$$



Obr. 8 Hyperbolický paraboloid

- množina prázdná:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

2. Asymptotické směry

Definice: Směrem daným nenulovým vektorem $\vec{u}$ rozumíme jednorozměrný vektorový prostor $\{k \cdot \vec{u}; k \in R\}$.

Definice: Směr daný nenulovým vektorem $\vec{u} = (u, v, w)$ se nazývá asymptotickým směrem kvadriky (1), jestliže platí:

$$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 0.$$

2.1 Řešené příklady

Příklad: Určete asymptotické směry následujících kvadrik:

a) $\{[x, y, z];\ x^2 + y^2 = 1\}$

Rovnice asymptotických směrů je v tomto případě:

$$1 \cdot u^2 + 1 \cdot v^2 + 0 \cdot w^2 + 2 \cdot 0 \cdot uv + 2 \cdot 0 \cdot uw + 2 \cdot 0 \cdot vw = 0$$
$$u^2 + v^2 = 0,$$

rovnici řeší jediný asymptotický směr $\vec{u} = (0; 0; 1)$.

b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Rovnici asymptotických směrů udává rovnice:

$$u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

Tato rovnice je zároveň obecnou rovnicí kuželové plochy, řešení této rovnice tak odpovídá směrům povrchových přímek kuželové plochy.

2.3 Příklady k procvičení

Příklad: Určete rovnici asymptotických směrů v následujících případech:

a) $10x^2 - 6y^2 - 12z^2 - 4xy + 7xz + 17yz - 9x + y - 2z + 2 = 0$

b) $6x^2 + 15y^2 - 7z^2 - 1 = 0$

c) $3x^2 + y^2 + 18yz + 80 = 0$

d) $6xy - 4yz + xz + 6y - 2 = 0$

e) $x^2 + y^2 - z^2 - 8x - 14y + 4z + 69 = 0$

2.3 Výsledky

Příklad:

a) $10u^2 - 6v^2 - 12z^2 - 4uv + 7uw + 17vw = 0$

b) $6u^2 + 15v^2 - 7w^2 = 0$

c) $3u^2 + v^2 + 18vw = 0$

d) $6uv - 4vw + uw = 0$

e) $u^2 + v^2 + w^2 = 0$

3. Vzájemná poloha přímky a kvadriky

Mějme kvadriku (1) a dále přímku p zadanou parametricky:

$p\colon X = M + t \cdot \vec{u}$, kde $M = [m, n, r]$, $\vec{u} = (u, v, w)$:

$$x = m + t \cdot u$$
$$y = n + t \cdot v$$
$$z = r + t \cdot w.$$

Dosazením x, y, z do rovnice kvadriky (1) získáme pro parametr t rovnici: $At^2 + Bt + C = 0$, kde:

$$A = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uw + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw,$$
$$B = u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}r + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}r + a_{24}) + w(a_{31} + a_{32} + a_{33}r + a_{34}),$$
$$C = a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}r^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mr + 2a_{23}nr + 2a_{14}m + 2a_{24}n + 2a_{34}r + a_{44}.$$

Pak může dojít k následujícím případům:

$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$	rovnice platí pro všechna t => **celá přímka leží na kvadrice** (každý bod přímky je i bodem kvadriky)
$A = 0, \quad B = 0, \quad C \neq 0$	rovnice nemá žádný kořen => **přímka nemá s kvadrikou žádný společný bod**
$A = 0, \quad B \neq 0, \quad C = libovolné$	řešením rovnice je jeden lineární kořen $t = \frac{-C}{2B}$ => **přímka má s kvadrikou jeden společný bod**
$A \neq 0, \quad B^2 - AC > 0$	řešením rovnice jsou 2 různé reálné kořeny => **přímka má s kvadrikou společné 2 body – je její sečnou**
$A \neq 0, \quad B^2 - AC = 0$	řešením rovnice je 1 dvojnásobný kořen => **přímka má s kvadrikou společný 1 dvojnásobný bod – je její tečnou**
$A \neq 0, \quad B^2 - AC < 0$	rovnice nemá reálné kořeny => **přímka nemá s kvadrikou žádný společný bod – je její nesečnou**

3.1 Řešené příklady

Příklad: Určete vzájemnou polohu přímky p a kvadriky κ:

a) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 22 = 0;$

$p: x = 2t + 3; y = 2t + 4, z = 2t + 1$

Ke zjištění vzájemné polohy přímky p a kvadriky κ dosadíme hodnoty x, y, z z parametrického zadání přímky p do rovnice kvadriky κ:

$$(2t + 3)^2 + (2t + 4)^2 + (2t + 1)^2 - 6(2t + 3) + 4(2t + 4) - 2(2t + 1) - 22 = 0.$$

Po umocnění, vynásobení a následné úpravě získáme rovnici:

$$12t^2 + 24t + 0 = 0$$
$$12t(t + 2) = 0.$$

Řešením této rovnice jsou dva různé reálné kořeny: $t_1 = 0$ a $t_2 = -2$, to znamená, že přímka kvadriku protíná.

Po dosazení t_1 a t_2 do přímky p získáme 2 body průniku přímky p a kvadriky κ – pro t_1 bod $M_1 = [3; 4; 1]$ a pro t_2 bod $M_2 = [-1; 0; -3]$.

b) κ: $9x^2 + 16y^2 - 36z^2 = 144;$ $p: x = 4t; y = -3t; z = 4t - 2.$ [2]

Hodnoty x, y, z z parametrické rovnice přímky p opět dosadíme do rovnice kvadriky κ:

$$9 \cdot 16t^2 + 16 \cdot 9t^2 - 36(16t^2 - 16t + 4) = 144$$
$$144t^2 + 144t^2 - 576t^2 + 576t - 144 = 144.$$

Nyní už jen upravíme a zjistíme hodnoty parametru t:

$$-288t^2 + 576t - 288 = 0 \qquad /.\frac{1}{-288}$$
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t - 1)^2 = 0.$$

Řešením této rovnice je jeden dvojnásobný kořen $t = 1$, tudíž se přímka kvadriky dotýká – je její tečnou.

Po dosazení $t = 1$ do rovnice přímky p získáme souřadnice bodu dotyku tečny, tedy bod $M = [4, -3,2]$.

c) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 6yz - 4x + 8y - 10z + 1 = 0$;
$p: x = t + 1, y = 3, z = t + 2$.

Hodnoty pro x, y, z z parametrické rovnice přímky p opět dosadíme do rovnice kvadriky κ:

$$(t+1)^2 + 3^2 + (t+2)^2 + 2 \cdot (t+1) \cdot 3 + 2 \cdot (t+1) \cdot (t+2) + 6 \cdot 3 \cdot (t+2) - 4 \cdot (t+1) + 8 \cdot 3 - 10 \cdot (t+2) + 1 = 0.$$

Po úpravě tedy dostaneme:

$$4t^2 + 22t + 61 = 0,$$

diskriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 22^2 - 4 \cdot 4 \cdot 61 = 484 - 976 = -492.$$

Jelikož je diskriminant D záporný, neexistuje žádný reálný kořen a kvadrika tak nemá s přímkou žádný společný bod – přímka je tedy nesečnou kvadriky.

3.2 Příklady k procvičení

Příklad 1: Rozhodněte o vzájemné poloze dané přímky p a kvadriky κ:

a) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 4z - 5 = 0$;
$p: x = 2t + 1, y = t + 5, z = t + 1$.

b) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 6yz - x + 2y + 3z - 24 = 0$;
$p: x = t + 1, y = 3t, z = t + 3$.

c) $\kappa: 2x^2 + 4y^2 + z^2 - xy + 4xz + 2yz - x + y - 2z + 16 = 0$;

$p: x = t, y = t + 1, z = 2t + 3.$

d) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 2 = 0;$

$p: x = 1 + t, y = 0, z = 1 + 3t.$

e) $\kappa: 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 6y - z - 25 = 0;$

$p: x = t + 1, y = t + 2, z = 3.$

f) $\kappa: 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + xz - 3yz + 6x - 4y + 3z - 12 = 0;$

$p: x = t, y = 2, z = t + 1.$

g) $\kappa: 3x^2 + 4y^2 + z^2 - xy + 2xz + 6yz - x + 3y + 4z + 10 = 0;$

$p: x = t + 1, y = t, z = t + 2.$

h) $\kappa: x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6xy - 2xz - 2yz + 4x + 2y - 8z + 3 = 0;$

$p: x = -1 + 2t, y = 2 - 2t, z = 2t.$

Příklad 2: Určete průsečíky přímky $p: x = t + 3, y = t + 1, z = 3t + 6$ s dvojdílným hyperboloidem $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} + 1 = 0.$ [3]

Příklad 3: Určete průsečíky přímky $p: x = 3 + 3t, y = 4 - 6t, z = -2 + 4t$ s elipsoidem $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1.$ [3]

3.3 Výsledky

Příklad 1:

a) $D < 0$ $(D = -204)$; nemají žádný společný bod => přímka je nesečnou kvadriky

b) $D > 0$ $(D = 1764)$; mají společné dva různé body => přímka je sečnou kvadriky:

$t_1 = 0$ => průsečík v bodě $M_1 = [1,0,3]$

$t_2 = -\frac{42}{17}$ => průsečík v bodě $M_2 = \left[-\frac{25}{17}, -\frac{126}{17}, \frac{9}{17}\right]$

c) $D < 0$ $(D = -1151)$; nemají žádný společný bod => přímka je nesečnou kvadriky

d) $D = 0$; mají jeden společný bod => přímka je tečnou kvadriky:

$t = 0 =>$ bod dotyku $T = [1; 0; 1]$

e) $D > 0$ $(D = 34)$; mají společné dva různé body => přímka je sečnou kvadriky:

$t_1 = -4 =>$ průsečík v bodě $M_1 = [-3; -2; 3]$

$t_2 = \frac{1}{4} =>$ průsečík v bodě $M_2 = \left[\frac{5}{4}; \frac{9}{4}; 3\right]$

f) $D > 0$ $(D = 49)$; mají společné dva různé body => přímka je sečnou kvadriky:

$t_1 = 2 =>$ průsečík v bodě $M_1 = [2; 2; 3]$

$t_2 = -5 =>$ průsečík v bodě $M_2 = [-5; 2; -4]$

g) $D < 0$ $(D = -591)$; nemají žádný společný bod => přímka je nesečnou kvadriky

h) $D = 0$; mají jeden společný bod => přímka je tečnou kvadriky:

$t = 0 =>$ bod dotyku $T = [-1; 2; 0]$

Příklad 2:

$D = 0$; přímka se jednodílného hyperboloidu dotýká => přímka je tečnou kvadriky:

$t = 1 =>$ bod dotyku $T = [4; 2; 9]$

Příklad 3:

$D > 0$; přímka kvadriku protíná ve dvou různých bodech => přímka je sečnou kvadriky:

$t_1 = 0 =>$ průsečík v bodě $M_1 = [3; 4 - 2]$

$t_2 = 1 =>$ průsečík v bodě $M_2 = [6; -2; 2]$

4. Vzájemná poloha roviny a kvadriky

Při řešení vzájemné polohy roviny a kvadriky provedeme transformaci souřadnic tak, že $z = 0$. Z rovnice kvadriky (1) tak vymizí všechny členy obsahující z a vznikne rovnice kuželosečky:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0.$$

Opět mohou nastat následující případy:

alespoň jeden z koeficientů a_{11}, a_{12}, a_{22} je různý od nuly	**rovina protíná kvadriku v kuželosečce**
$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$; alespoň jedno z čísel a_{14}, a_{24} je různé od nuly	**rovina protíná kvadriku v přímce**
$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0$	**rovina protíná kvadriku v celé rovině**
$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{14} = a_{24} = 0$; $a_{44} \neq 0$	**rovina kvadriku neprotíná** (průnikem je prázdná množina)

4.1 Řešené příklady

Příklad 1: Určete vzájemnou polohu roviny ρ a kvadriky κ:

a) κ: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 4 = 0$; ρ: $x = 3$.

Rovinu ρ dosadíme do kvadriky κ:

$$3^2 + y^2 + z^2 + 4 \cdot 3 - 6y - 8z + 4 = 0$$
$$y^2 + z^2 - 6y - 8z + 25 = 0.$$

Získanou kuželosečku již umíme analyzovat:

$$\Delta \coloneqq \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 25 \end{vmatrix} = 25 - 25 = 0 \quad \text{– singulární kuželosečka}$$

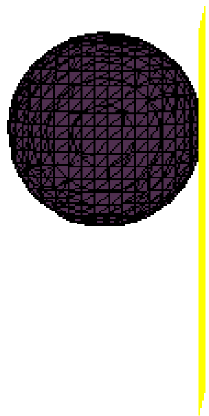
$$\delta \coloneqq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{– eliptický případ}$$

jedná se o singulární kuželosečku eliptického typu, tedy o bod.

Jeho souřadnice získáme ze soustavy rovnic:

$$n = 3$$
$$r = 4.$$

Řešením je bod $M = [m, n, r]$, to znamená, že rovina se kvadriky dotýká. Jelikož je $x = 3$, pak bodu dotyku odpovídá bod $M = [3,3,4]$.



Obr. 9 Vzájemná poloha kulové plochy a roviny

b) κ: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 4 = 0$; ρ: $y = 0$.

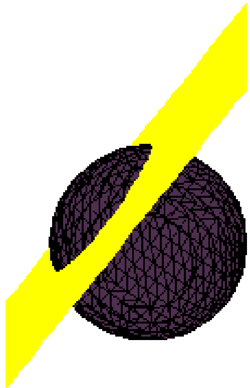
Opět dosadíme rovnici roviny ρ do rovnice kvadriky κ:

$$x^2 + z^2 + 4x - 8z + 4 = 0.$$

Po úpravě získáme rovnici:

$$(x + 2)^2 - 4 + (z - 4)^2 - 16 + 4 = 0$$
$$(x + 2)^2 + (z - 4)^2 = 16 \qquad /\cdot \frac{1}{16}$$
$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(z-4)^2}{16} = 1.$$

Jedná se o rovnoosou elipsu, tudíž daná rovina ρ kvadriku κ protíná.



Obr. 10 Vzájemná poloha kulové plochy a roviny

c) κ: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 4 = 0$; ρ: $z = -2$.

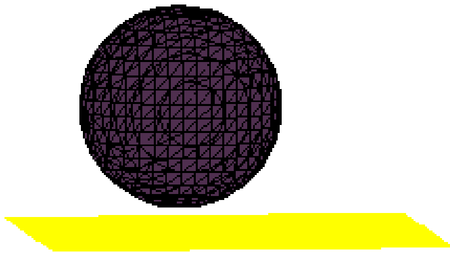
Po dosazení rovnice roviny ρ do rovnice kvadriky κ získáme rovnici:

$$x^2 + y^2 + 4 + 4x - 6y + 16 + 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = -24.$$

Po úpravě:

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = -24$$
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = -11.$$

V tomto případě jde o prázdnou množinu, a proto rovina kvadriku neprotíná.



Obr. 11 Vzájemná poloha kulové plochy a roviny

Příklad 2: Ukažte, že eliptický paraboloid $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$ má s rovinou $2x - 2y - z - 10 = 0$ jeden společný bod. Určete jeho souřadnice. [2]

Určíme průnik paraboloidu s danou rovinou tak, že z rovnice roviny si nejprve vyjádříme z:

$$2x - 2y - z - 10 = 0$$
$$z = 2x - 2y - 10.$$

Dosadíme do rovnice kvadriky:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(2x-2y-10)^2}{4} = 2y \qquad /\cdot 36$$
$$4x^2 + 9 \cdot (2x - 2y - 10)^2 = 72y$$
$$40x^2 + 36y^2 - 72xy - 360x + 288y + 900 = 0.$$

Nyní určíme, o jakou kuželosečku se jedná:

$$\Delta := \begin{vmatrix} 40 & -36 & -180 \\ -36 & 36 & 144 \\ -180 & 144 & 900 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{– singulární kuželosečka}$$

$$\delta := \begin{vmatrix} 40 & -36 \\ -36 & 40 \end{vmatrix} = 144 \qquad \text{– eliptický případ.}$$

Singulární kuželosečkou eliptického typu je bod, tudíž je ukázáno, že daná rovina má opravdu s eliptickým paraboloidem společný jen jeden bod.

Nyní už zbývá pouze určit jeho souřadnice ze soustavy rovnic:

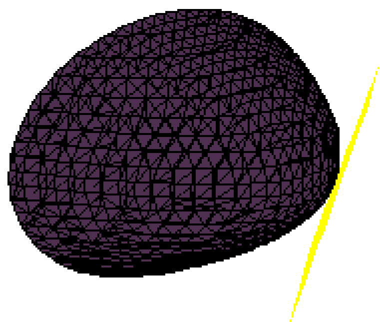
$$\begin{aligned} 40\,x - 36y &= 180 \\ \underline{-36\,x + 36y} &\underline{= -144} \\ 4x &= 36 \\ x &= 9, \end{aligned}$$

dosazením do první rovnice: $40 \cdot 9 - 36y = 180$ získáme $y = 5$.

Třetí souřadnici z udává rovnice:

$$z = 2x - 2y - z - 10$$
$$z = 2 \cdot 9 - 2 \cdot 5 - 10 = 18 - 20 = -2.$$

Rovina má skutečně s kvadrikou společný pouze jeden bod, a to bod dotyku $T = [9; 5; -2]$.



Obr. 12 Vzájemná poloha paraboloidu a roviny

Příklad 3: Dokažte, že rovina $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ protíná jednodílný hyperboloid $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ ve dvou přímkách. Určete rovnice těchto přímek. [2]

Z rovnice roviny ρ si vyjádříme z:

$$z = \frac{20+5y-4x}{-10}.$$

Dosadíme do rovnice jednodílného hyperboloidu:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{(20+5y-4x)^2}{400} = 1 \quad /\cdot 400$$
$$16x^2 + 25y^2 - 16x^2 - 25y^2 + 40xy + 160x - 200y - 800 = 0$$
$$xy + 4x - 5y - 20 = 0.$$

Určíme kuželosečku:

$$\Delta := \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & -20 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{– singulární kuželosečka}$$

$$\delta := \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \qquad \text{– hyperbolický případ.}$$

Singulární kuželosečkou hyperbolického typu jsou 2 různoběžky.

Nyní nalezneme jejich průsečík P:

$$\frac{1}{2}n = -2 \ \rightarrow n = -4$$
$$\frac{1}{2}m = \frac{5}{2} \ \rightarrow m = 5$$
$$P = [5, -4].$$

Asymptotické směry $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$:

$$u \cdot v = 0,$$
$$\overrightarrow{u_1} = (1; 0), \overrightarrow{u_2} = (0; 1).$$

Rovnice přímek:

$$p_1: X = P + t \cdot \overrightarrow{u_1}$$
$$x = 5 + t$$

$$y = -4$$

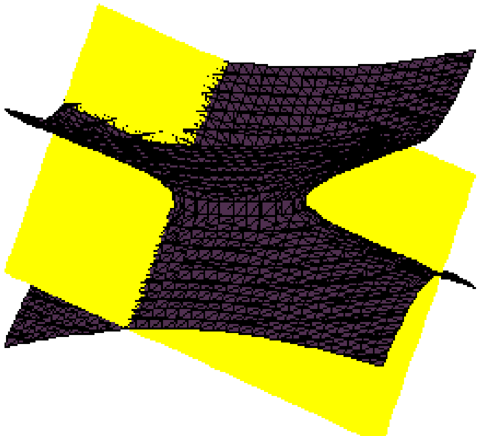
$$z = \frac{-20-5\cdot(-4)+4\cdot(5+t)}{10} = 2 + \frac{2}{5}t$$

$$p_2: X = P + s \cdot \overrightarrow{u_2}$$

$$x = 5$$

$$y = -4 + s$$

$$z = \frac{-20-5\cdot(-4+s)+4\cdot 5}{10} = 2 - \frac{1}{2}s.$$



Obr. 13 Průnik jednodílného hyperboloidu a roviny

4.2 Příklady k procvičení

Příklad 1: Určete vzájemnou polohu kvadriky κ a roviny ρ:

a) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 6z + 3 = 0;\ \rho: x = 3$

b) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 6z + 21 = 0;\ \rho: x = 3$

c) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 6z + 36 = 0;\ \rho: x = 3$

d) $\kappa: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 4xz + 4yz - 6x - 2y + 4z + 31 = 0;$

$\rho: 5x + 5y - 7z - 22 = 0$

e) $\kappa: x^2 + 3y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 4 = 0;\ \rho: 6x + 3y - 3z + 9$

f) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 12x + 7y + z + 61 = 0;\ \rho: 2x + y - z = 0$

g) $\kappa: x^2 + 3y^2 + z^2 - 6xy + 12z - 8 = 0;\ \rho: 7x - 15y + z - 38 = 0$

h) κ: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1$; ρ: $9x - 6y + 2z - 28 = 0$ [3]

i) κ: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$; ρ: $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ [3]

Příklad 2:

Ukažte, že následující kvadrika κ má s rovinou ρ pouze jeden společný bod:

a) κ: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1$; ρ: $5x + 2z + 5 = 0$ [2]

b) κ: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$; ρ: $4x - 3y + 12z - 54 = 0$ [2]

c) κ: $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} + 1 = 0$; ρ: $10x + 5y - 3z + 5 = 0$ [3]

Příklad 3:

Dokažte, že rovina $2x - 12y - z + 16 = 0$ protíná hyperbolický paraboloid $x^2 - 4y^2 = 2z$ v přímkách. Napište rovnice těchto přímek. [2]

4.3 Výsledky

Příklad 1:

a) rovina kvadriku protíná v rovnoosé elipse se středem $S = [3; -3; 3]$

b) rovina se kvadriky dotýká v bodě $T = [3; -3; 3]$

c) rovina kvadriku neprotíná (po dosazení z z roviny do kvadriky získáme prázdnou množinu)

d) rovina se kvadriky dotýká v bodě $T = [2; 1; -1]$

e) rovina kvadriku protíná v rovnoosé elipse se středem $S = \left[-\frac{12}{5}; -1; -\frac{14}{5}\right]$

f) rovina kvadriku neprotíná (po dosazení z z roviny ρ do kvadriky κ získáme prázdnou množinu)

g) rovina se kvadriky dotýká v bodě $T = [4; -1; -5]$

h) rovina kvadriku protíná v hyperbole se středem $S = [2; -3; -4]$

i) rovina kvadriku protíná v elipse se středem $S = [2; -1; 1]$

Příklad 2:

a) bod dotyku $T = [3; 0; -10]$

b) bod dotyku $T = [6; -2; 2]$

c) bod dotyku $T = [2; 4; 15]$

Příklad 3:

Průsečík přímek je v bodě $P = [2; 3; -16]$.

Asymptotické směry: $\vec{u}_1 = (2; 1)$ a $\vec{u}_2 = (-2; 1)$.

Rovnice přímek: $p_1: X = P + t \cdot \vec{u}_1$

$$x = 2 + 2t$$

$$y = 3 + t$$

$$z = -16 - 12t$$

$p_2: X = P + s \cdot \vec{u}_2$

$$x = 2 - 2t$$

$$y = 3 + t$$

$$z = -16 - 16t$$

5. Střed kvadriky, středové a nestředové kvadriky

5.1 Střed kvadriky

Definice: Bod M nazveme střed kvadriky (1), jestliže pro libovolný bod X_1 kvadriky existuje bod X_2 kvadriky takový, že M je středem úsečky X_1X_2.

Věta: Bod $M = [m, n, p]$ je středem kvadriky (1), právě když platí soustava:

$$a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} = 0$$
$$a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} = 0$$
$$a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} = 0.$$

5.2 Středové a nestředové kvadriky

Definice: Kvadrika, která má jediný střed, se nazývá středová kvadrika.

Věta: Kvadrika je středová, právě když $A_{44} \neq 0$.

5.3 Řešené příklady

Příklad: Rozhodněte, zda jsou následující kvadriky středové, nebo nestředové. Případně určete souřadnice středu.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 14y + 4z + 69 = 0$

Nejdříve vypočteme malý determinant A_{44} (2), tedy v našem případě:

$$A_{44} \coloneqq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$$

Zjistili jsme, že $A_{44} \neq 0$, tudíž se jedná o kvadriku středovou.

K výpočtu středu potřebujeme velký determinant (3).

Dosadíme-li uvedenou kvadriku, bude Δ:

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 & 69 \end{vmatrix}.$$

Z matice plyne soustava:

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z - 4 &= 0 \\ 0x + y + 0z - 7 &= 0 \\ 0x + 0y + z + 2 &= 0 \\ -4x - 7y + 2z + 69 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 7 \quad . \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Hledaným středem je tedy $S = [4;\ 7;\ -2]$.

b) $10x^2 - 6y^2 - 12z^2 - 4xy + 7xz + 17yz - 9x + y - 2z + 2 = 0$

Nejdříve vypočteme malý determinant A_{44}:

$$A_{44} := \begin{vmatrix} 10 & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & -6 & \frac{17}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{17}{2} & -12 \end{vmatrix} = 720 - \frac{476}{8} - \frac{476}{8} - \frac{588}{8} - 48 + \frac{5780}{8} = 0.$$

Vidíme, že tentokrát $A_{44} = 0$ a jedná se tedy o kvadriku nestředovou.

Můžeme rozhodnout, zda střed neexistuje, nebo zda je středů nekonečně mnoho.
K výpočtu potřebujeme Δ:

$$\Delta := \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -2 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ -2 & -6 & \frac{17}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{17}{2} & -12 & 1 \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -2 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -32 & 46 & 2 \\ 0 & -184 & \frac{529}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & -8 & \frac{23}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 10 & -2 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -32 & 46 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} => h(A) = h(Aroz) < n$$

Frobeniova podmínka říká, že pokud je hodnost matice rozšířené rovna hodnosti matice nerozšířené, pak má soustava řešení. Je-li tato hodnost menší než počet neznámých, potom existuje nekonečně mnoho řešení.

V našem případě tedy existuje nekonečně mnoho řešení středů.

5.4 Příklady k procvičení

Příklad: Rozhodněte, zda jsou následující kvadriky středové, nebo nestředové. Případně určete souřadnice středu.

a) $9x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 12xy - 30xz + 20yz + 42x - 28y - 70z + 49 = 0$

b) $6x^2 + 15y^2 - 7z^2 - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 16y - 20z + 173 = 0$

d) $3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy - 8y + 80 = 0$

e) $25x^2 + 36y^2 + 9z^2 - 60xy + 30xz - 36yz - 10x + 12y - 6z + 1 = 0$

f) $3x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 5xy + 13xz - 2yz + 8x + 16y + 32z = 0$

g) $x^2 + y^2 - z^2 - 8x + 4y + 2z + 19 = 0$

h) $6xy - 4yz + xz + 6y - 2 = 0$

i) $2x^2 + 4y^2 + 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 6y - z - 12 = 0$

5.5 Výsledky

a) nestředová kvadrika ($A_{44} = 0$) – nekonečně mnoho středů

b) středová kvadrika ($A_{44} \neq 0, A_{44} = 630$); $S = [0, ; 0;\ 0]$

c) středová kvadrika ($A_{44} \neq 0, A_{44} = 1$); $S = [3;\ -8;\ 10]$

d) středová kvadrika ($A_{44} \neq 0$); $S = [\frac{8}{11}; -\frac{4}{11}; 0]$

e) nestředová kvadrika ($A_{44} = 0$) – nekonečně mnoho středů

f) nestředová kvadrika ($A_{44} = 0$) – nekonečně mnoho středů

g) středová kvadrika ($A_{44} \neq 0,\ A_{44} = -1$); $S = [4;\ -2;\ 1]$

h) středová kvadrika ($A_{44} \neq 0,\ A_{44} = -6$); $S = \left[\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; -4\right]$

i) středová kvadrika ($A_{44} \neq 0,\ A_{44} = \ -32$); $S = \left[\frac{-3}{32}; \frac{-11}{32}; \frac{49}{64}\right]$

6. Singulární bod, singulární a regulární kvadriky

6.1 Singulární bod

Definice: Bod $M = [m, n, p]$ je singulárním bodem kvadriky (1), jestliže jeho souřadnice vyhovují soustavě rovnic:

$$a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} = 0$$
$$a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} = 0$$
$$a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} = 0$$
$$a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44} = 0.$$

Věta: Bod M je singulárním bodem kvadriky, právě když je jejím středem a zároveň na kvadrice leží.

6.2 Singulární a regulární kvadriky

Definice: Kvadrika se nazývá singulární, jestliže $\Delta = 0$. Jestliže $\Delta \neq 0$, potom se kvadrika nazývá regulární.

Věta: Obsahuje-li kvadrika singulární bod, pak je to kvadrika singulární.

Definice: Bod kvadriky, který není singulární, se nazývá regulární.

6.3 Řešené příklady

Příklad: Určete, zda se v následujících případech jedná o kvadriky singulární, nebo regulární.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 14y + 4z + 69 = 0$

Vypočteme Δ:

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 & 69 \end{vmatrix} = 0.$$

Zjistili jsme, že $\Delta = 0$, a proto se jedná o singulární kvadriku.

Souřadnice případného singulárního bodu musí dle definice vyhovovat soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} m + 4 &= 0 \\ n + 7 &= 0 \\ p - 2 &= 0 \\ -4m - 7n + 2p - 69 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních třech rovnic získáme souřadnice středu kvadriky, tedy bodu $M = [-4, -7, 2]$.

Dosazením těchto souřadnic do poslední rovnice ověříme, zda bod M na kvadrice i leží:

$$\begin{aligned} -4 \cdot (-4) - 7 \cdot (-7) + 2 \cdot 2 - 69 &= 0 \\ 16 + 49 + 4 - 69 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Bod M je středem kvadriky a zároveň na ní leží, a proto je i singulárním bodem kvadriky.

Rozkladem na součet čtverců lze určit, o jakou kvadriku se jedná:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 - 16 + (y-7)^2 - 49 + (z+2)^2 - 4 + 69 &= 0 \\ (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Jediným řešením této rovnice je bod $[4; 7; -2]$.

b) $6x^2 + 15y^2 - 7z^2 - 1 = 0$

Opět vypočteme Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 630.$$

$\Delta \neq 0$, a proto jde o kvadriku regulární.

6.4 Příklady k procvičení

Příklad: Rozhodněte, zda jde o kvadriku singulární, nebo regulární. V případě singulárních kvadrik určete singulární bod (pokud existuje):

a) $10x^2 - 6y^2 - 12z^2 - 4xy + 7xz + 17yz - 9x + y - 2z + 2 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 12xy - 30xz + 20yz + 42x - 28y - 70z + 49 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 16y - 20z + 173 = 0$

d) $3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy - 8y + 80 = 0$

e) $25x^2 + 36y^2 + 9z^2 - 60xy + 30xz - 36yz - 10x + 12y - 6z + 1 = 0$

f) $3x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 5xy + 13xz - 2yz + 8x + 16y + 32z = 0$

g) $x^2 + y^2 - z^2 - 8x + 4y + 2z + 19 = 0$

h) $6xy - 4yz + xz + 6y - 2 = 0$

i) $2x^2 + 4y^2 + 2xy - 4yz + 4xz - 2x + 6y - z - 12 = 0$

6.5 Výsledky

a) singulární kvadrika ($\Delta = 0$), neobsahuje singulární bod

b) singulární kvadrika ($\Delta = 0$), neobsahuje singulární bod

c) singulární kvadrika ($\Delta = 0$), singulární bod $M = [3; -8; 10]$

d) regulární kvadrika ($\Delta \neq 0$, $\Delta = -2688$)

e) singulární kvadrika ($\Delta = 0$), neobsahuje singulární bod

f) singulární kvadrika ($\Delta = 0$), neobsahuje singulární bod

g) singulární kvadrika ($\Delta = 0$), singulární bod $M = [4,; -2;\ 1]$

h) regulární kvadrika $\left(\Delta \neq 0,\ \Delta = \frac{57}{4}\right)$

i) regulární kvadrika ($\Delta \neq 0$, $\Delta = \frac{1705}{4}$)

7. Tečna a tečná rovina

7.1 Tečna a tečná rovina

Definice: Tečna kvadriky je přímka, která má v bodě dotyku s kvadrikou dvojnásobný průsečík.

Věta: Přímka $t: X = M + t \cdot \vec{u}$ je tečnou kvadriky (1) v regulárním bodě $M = [m, n, p]$, právě když vektor $\vec{u} = (u, v, w)$ splňuje:

$$u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}) = 0.$$

Definice: Rovina τ o rovnici

$$\tau: (a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14})x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24})y + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})z + a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44} = 0$$

se nazývá tečná rovina kvadriky (1) v bodě M. Bod $M = [m, n, p]$ se nazývá bod dotyku.

Pro přehlednější výpočet se používá maticový tvar tečné roviny τ:

$$(m, n, p, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

7.2 Řešené příklady

Příklad 1: Napište rovnici tečné roviny ke kvadrice $4x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 2 = 0$ v bodě $T = [1;\ -2;\ ?]$.

Nejprve zjistíme dosazením do kvadriky z-tovou souřadnici bodu dotyku T tak, aby ležel na dané kvadrice:

$$4 \cdot 1^2 - 2 \cdot (-2)^2 + 3z^2 - 2 = 0$$
$$3z^2 = 6$$

$$z = \pm\sqrt{2}$$

Získali jsme tedy dva body dotyku tečné roviny: $T_1 = \left[1;\ -2;\ \sqrt{2}\right]$ a $T_2 = \left[1;\ -2;\ -\sqrt{2}\right]$.

Nyní spočítáme rovnici tečné roviny v bodě T_1 podle definice:

$$\tau_1\colon \left(1;\ -2;\ \sqrt{2};\ 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x + 4y + 3\sqrt{2}z - 2 = 0.$$

Stejný způsobem zjistíme rovnici tečné roviny i v bodě T_2:

$$\tau_2\colon \left(1;\ -2;\ -\sqrt{2};\ 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x + 4y - 3\sqrt{2}z - 2 = 0.$$

Hledané tečné roviny mají rovnice $4x + 4y + 3\sqrt{2}z - 2 = 0$ a $4x + 4y - 3\sqrt{2}z - 2 = 0$.

Příklad 2: Dokažte, že rovina $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ je tečnou rovinou ke kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. Určete souřadnice bodu dotyku. [2]

I. způsob – přes vzorec pro tečnou rovinu:

$$(m, n, p, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$mx + ny + pz - 49 = 0$$

$$2x - 6y + 3z - 49 = 0 \Rightarrow m = 2, n = -6, p = 3$$

$$T = [2; -6; 3]$$

II. způsob – přes normálový vektor roviny:

Nalezneme přímku jdoucí středem kulové plochy a kolmou k rovině:

$$n = (2; -6; 3),\ \text{střed kulové plochy: } S = [0,0,0]$$
$$p: x = 2t, y = -6t, z = 3t.$$

Nyní zjistíme průsečík přímky p a kulové plochy tak, že přímku p dosadíme do rovnice kulové plochy:

$$4t^2 + 36t^2 + 9t^2 = 49$$
$$49t^2 = 49$$
$$t = \pm 1.$$

Získali jsme dva průsečíky – 2 možné body dotyku tečné roviny:

$$t_1 = 1 \Rightarrow T_1 = [2; -6; 3]$$
$$t_2 = -1 \Rightarrow T_2 = [-2; 6; -3].$$

Dosazením do rovnice roviny zjistíme, který z průsečíků je bodem dotyku tečné roviny:

$$T_1 = [2; -6; 3] \Rightarrow 2 \cdot 2 - 6 \cdot (-6) + 3 \cdot 3 - 49 = 0$$
$$0 = 0,$$
$$T_2 = [-2; 6; -3] \Rightarrow 2 \cdot (-2) - 6 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) - 49 = 0$$
$$-98 = 0.$$

Bodem dotyku je bod $T_1 = [2; -6; 3]$.

Příklad 3: Určete, při kterých hodnotách a se rovina $x + y + z - a = 0$ dotýká kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. [2]

Opět využijeme vzorec pro určení tečné roviny:

$$(m, n, p, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$mx + ny + pz - 12 = 0$$
$$mx + my + mz - ma = 0,$$

Ze soustavy těchto dvou rovnic pak plyne:

$$m = m, m = n, p = m, m = \frac{12}{a}.$$

Dosadíme do rovnice kulové plochy:

$$m^2 + m^2 + m^2 = 12$$
$$3m^2 = 12$$
$$m^2 = 4$$
$$m = \pm 2.$$

Body dotyku jsou $T_1 = [2; 2; 2]$ a $T_2 = [-2; -2; -2]$.

Hledanou hodnotu a získáme dosazením m do $a = \frac{12}{m}$:

$$m_1 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{2} = 6$$
$$m_2 = -2 \Rightarrow a_2 = -\frac{12}{2} = -6.$$

Rovina se kulové plochy dotýká při hodnotách $a = \pm 6$.

Příklad 4: K elipsoidu $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 - 1 = 0$ veďte tečnou rovinu rovnoběžnou s rovinou $x - 2y + 2z + 17$. [2]

K výpočtu využijeme vzorec pro tečnou rovinu:

$$(m, n, p, 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$4mx + 16ny + 8pz - 1 = 0.$$

Získanou tečnou rovinu porovnáme s rovinou ze zadání:

$$4mx + 16ny + 8pz - 1 = 0$$

$$\underline{mx - 2my + 2mz + mk = 0 \qquad\qquad /\cdot 4}$$

$$4mx + 16ny + 8pz - 1 = 0$$

$$\underline{4mx - 8my + 8mz + 4mk = 0}$$

$$16n = -8m \Rightarrow n = -\frac{1}{2}m$$

$$8p = 8m \Rightarrow p = m$$

$$-1 = 4mk \Rightarrow k = -\frac{1}{4m}.$$

Dosadíme do rovnice elipsoidu:

$$4m^2 + 16 \cdot \left(\frac{1}{4}m^2\right) + 8m^2 - 1 = 0$$

$$16m^2 = 1$$

$$m = \pm\frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm 1.$$

Tečné roviny jsou $x - 2y + 2z - 1 = 0$ a $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

7.3 Příklady k procvičení

Příklad 1: Napište rovnici tečné roviny τ ke kvadrice κ v bodě T:

a) κ: $x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 32y - 8z + 43 = 0;\ T = [2; 0; ?]$

b) κ: $3x^2 - 4y^2 + 2z^2 + 5xy - 4xz + x - 2y + 4z + 58 = 0; T = [-3; 2; ?]$

c) κ: $2x^2 + 4y^2 + 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 6y - z - 10 = 0; T = [1; -1; ?]$

d) κ: $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 4yz + x - 2y + z + 42 = 0;$
$T = [-4; ?; 2]$

e) κ: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy + 5yz - 6xz + 4x - 5z - 6 = 0; T = [0; 3; ?]$

Příklad 2:

a) Pro jakou hodnotu k se rovina $x - 2y - 2z + k = 0$ dotýká elipsoidu
$x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0.$ [2]

b) Pro jakou hodnotu k se rovina $2x - y - 2z + k = 0$ dotýká eliptického paraboloidu $4x^2 + 3y^2 - 24z = 0$. [2]

Příklad 3: Určete rovnici tečné roviny kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, která je rovnoběžná s rovinou $x + 2y - 2z + 15 = 0$. [2]

7.4 Výsledky

Příklad 1:

a) $T_1 = [2; 0; 5] => \tau_1: 6x - 16y - z - 7 = 0$

$T_2 = [2; 0; 3] => \tau_2: 6x - 16y + z - 15 = 0$

b) $T = [-3; 2; -4] => \tau: 9x - 33y + 93 = 0$

c) $T = [1; -1; 2] => \tau: 8x - 8y + 7z - 30 = 0$

d) $T_1 = [-4; -6; 2] => \tau_1: 9x + 10y + z + 94 = 0$

$T_2 = [-4; -16; 2] => \tau_2: 49x - 10y - 39z + 114 = 0$

e) $T_1 = [0; 3; -3] => \tau_1: 10x - 3y - 2z + 3 = 0$

$T_2 = [0; 3; -2] => \tau_2: 2x + y + z - 1 = 0$

Příklad 2:

a) $k = \pm 18$; body dotyku: $T_1 = [8; -4; -1]$ a $T_2 = [-8; 4; 1]$

b) $k = -4$; bod dotyku $T = [3; -2; 2]$

Příklad 3:

$\tau_1: x + 2y - 2z + 9 = 0$ a $\tau_2: x + 2y - 2z - 9 = 0$.

8. Pól a polární rovina

8.1 Pól a polární rovina

Definice: Rovina π:

$$(a_{11}r + a_{12}s + a_{13}u + a_{14})x + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23}u + a_{24})y + (a_{31}r + a_{32}s + a_{33}u + a_{34})z + a_{41}r + a_{42}s + a_{43}u + a_{44} = 0$$

se nazývá polární rovina bodu $R = [r,\ s,\ u]$ vzhledem ke kvadrice (1). Bod R nazýváme pól polární roviny. Pokud R je bodem kvadriky (1), pak je polární rovina rovinou tečnou. Tedy polární rovina je zobecněním pojmu tečná rovina.

Pro výpočet je vhodnější používat maticový zápis polární roviny π:

$$(r, s, u, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

8.2 Řešené příklady

Příklad: Najděte polární rovinu π v bodě $R = [2; 1; 4]$ vzhledem ke kvadrice $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 4z + 5 = 0$.

Dosadíme do maticového zápisu polární roviny:

$$\pi: (2; 1; 4; 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

tak získáme rovnici polární roviny $\pi: 5x - y + 2z + 1 = 0$.

8.3 Příklady k procvičení

Příklad: Najděte polární rovinu π v zadaném bodě R vzhledem ke kvadrice κ:

a) $\kappa: 9x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy - 4xz + 20yz + 2x - 4y - z + 4 = 0;$

$R = [-1; 0; 4]$;

b) $\kappa: 3x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 5xy + 13xz - 2yz + 8x + 16y + 32z = 0$;

$R = [2; -2; 1]$;

c) $\kappa: 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 6y - z - 12 = 0$;

$R = [1; -1; 6]$;

d) $\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z + 19 = 0$;

$R = [3; 4; -2]$;

e) $\kappa: 3x^2 + 2z^2 - 6xy + 4xz + 3yz - x - y + 2z - 7 = 0$;

$R = [0; 3; 5]$;

f) $\kappa: 16x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 8xy + 8xz - 4yz + 6x - 2y + 2z + 1 = 0$;

$R = [1; -1; 1]$;

8.4 Výsledky

Příklad:

a) $\pi: 32x - 78y - 43z - 2 = 0$

b) $\pi: 23x + 32y + 70z + 16 = 0$

c) $\pi: 24x - 24y + 7z - 38 = 0$

d) $\pi: -x + 6y - z + 13 = 0$

e) $\pi: x + 26y + 11z - 7 = 0$

f) $\pi: 19x + 5y + 10z + 6 = 0$

9. Klasifikace kvadrik

9.1 Charakteristická rovnice

Definice: Charakteristickou rovnicí kvadriky nazýváme rovnici:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

9.2 Klasifikace kvadrik – středové kvadriky

$$A \cdot K \cdot A^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{A_{44}} \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice kvadriky: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0.$

Regulární kvadriky: $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0}$, $\boldsymbol{A_{44} \neq 0, \Delta \neq 0}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$	všechna vlastní čísla mají stejná znaménka => **množina prázdná, imaginární elipsoid**
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$	všechna vlastní čísla mají stejná znaménka => **trojosý elipsoid, kulová plocha**
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$	vlastní čísla mají různá znaménka => **dvoudílný hyperboloid**
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$	vlastní čísla mají různá znaménka => **jednodílný hyperboloid**

Singulární kvadriky: $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0}$, $\boldsymbol{A_{44} \neq 0, \Delta = 0}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	**jediný bod $[0;0;0]$, imaginární kuželová plocha**
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	**kuželová plocha**

9.3 Klasifikace kvadrik – nestředové kvadriky

Regulární kvadriky: alespoň jedno z vlastních čísel $= \mathbf{0}$, $\Delta \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{A_{44}} = \mathbf{0}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $m \neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2mz = 0$	**eliptický paraboloid**
		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2mz = 0$	**hyperbolický paraboloid**

Singulární kvadriky: alespoň jedno z vlastních čísel $= \mathbf{0}$, $\Delta = \mathbf{0}, \boldsymbol{A_{44}} = \mathbf{0}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ $m \neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	**eliptická válcová plocha**
		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	**hyperbolická válcová plocha**
	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ $m = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	**přímky**
		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	**2 různoběžné roviny**
	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $m = 0$	$\frac{x^2}{a^2} = 0$	**dvojnásobná rovina**
	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $m \neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$	**množina prázdná**
		$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$	**rovnoběžné roviny**
	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $m \neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} + 2my = 0$	**parabolická válcová plocha**

9.4 Řešené příklady

Příklad: Vyšetřete kvadriku:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 14y + 4z + 69 = 0$

Nejprve určíme, zda se jedná o singulární, či regulární kvadriku:

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 & 69 \end{vmatrix} = 0 \text{ – singulární kvadrika.}$$

Dále zjistíme, zda jde o kvadriku středovou, nebo nestředovou:

$$A_{44} := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ – středová kvadrika.}$$

Z charakteristické rovnice následně vypočteme vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.$$

Nyní dosadíme vlastní čísla do kanonického tvaru rovnice kvadriky a určíme, o jakou kvadriku se jedná:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0$$

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 + \frac{0}{0} = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Řešením je středová singulární kvadrika o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, tedy bod.

9.5 Příklady k procvičení

Příklad: Vyšetřete kvadriku:

a) $6x^2 + 15y^2 - 7x^2 - 1 = 0$

b) $10x^2 - 6y^2 - 12z^2 - 4xy + 7xz + 17yz - 9x + y - 2z + 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - z^2 - 8x + 4y + 2z + 19 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 22 = 0$

e) $4x^2 + 49y^2 + 16z^2 - 9 = 0$

f) $9x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 12xy - 30xz + 20yz + 42x - 28y - 70z + 49 = 0$

g) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 16y - 20z + 173 = 0$

h) $3x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 5xy + 13xz - 2yz + 8x + 16y + 32z = 0$

9.6 Výsledky

Příklad:

a) jednodílný hyperboloid: $\frac{x^2}{\frac{1}{6}} + \frac{y^2}{\frac{1}{15}} - \frac{z^2}{\frac{1}{7}} = 1$; $\Delta = 630$; $A_{44} = -630$

b) 2 různoběžné roviny: $\left(-\frac{5\cdot\sqrt{34}}{2} - 4\right)x^2 + \left(\frac{5\cdot\sqrt{34}}{2} - 4\right)y^2 = 0$; $\Delta = 0$; $A_{44} = 0$

c) kuželová plocha: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $\Delta = 0$; $A_{44} = -1$

d) kulová plocha: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{36} - 1 = 0$; $\Delta = -36$; $A_{44} = 1$

e) elipsoid: $\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{49}} + \frac{z^2}{\frac{9}{16}} - 1 = 0$; $\Delta = -28224$; $A_{44} = 3136$

f) dvojnásobná rovina: $\frac{x^2}{\frac{1}{31}}$; $\Delta = 0$; $A_{44} = 0$

g) bod: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; $\Delta = 0$; $A_{44} = 1$

h) 2 různoběžné roviny: $\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{231}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{231}}{2}\right)y^2 = 0$; $\Delta = 0$; $A_{44} = 0$

10. Kulová plocha

Definice: Kvadriku o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ nazveme kulovou plochou se středem S v počátku a poloměrem r.

Pro řadu zajímavých vlastností bývá kulová plocha také nazývána „královnou“ mezi plochami. Jednou z nejvýznamnějších vlastností je izoperimetrická vlastnost – mezi všemi konvexními plochami o daném povrchu má kulová plocha největší objem.

10.1 Řešené příklady

Příklad 1: Napište rovnici kulové plochy, znáte-li:

a) střed $S = [2; -1; 3]$ a poloměr $r = 4$:

V tomto případě pouze dosadíme do obecné rovnice kulové plochy:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 16.$$

b) střed $S = [1; -1; 2]$ a bod $K = [3; 2; -1]$, který leží na kvadrice:

Souřadnice středu dosadíme do obecné rovnice kulové plochy:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = r^2.$$

Následně spočítáme poloměr r dosazením bodu K:

$$\begin{aligned}(3-1)^2 + (2+1)^2 + (-1-2)^2 &= r^2\\ 4+9+9 &= r^2\\ 22 &= r^2\end{aligned}$$

Rovnice této kulové plochy tedy bude ve tvaru:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 22.$$

c) střed $S = [-2; 2; 1]$ a rovinu $\rho: 5x - 2y - 6z + 7 = 0$, která se dotýká kulové plochy:

Dosazením středu S do obecné rovnice kulové plochy získáme:

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = r^2.$$

Poloměr r kulové plochy odpovídá vzdálenosti středu S od roviny ρ:

$$r = |S\rho| = \frac{|5\cdot(-2) - 2\cdot 2 - 6\cdot 1 + 10|}{\sqrt{5^2+2^2+6^2}} = \frac{10}{\sqrt{65}}$$

$$r^2 = \frac{100}{65} = \frac{20}{13}.$$

Rovnice hledané kulové plochy je tedy $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{20}{13}$.

d) 4 body, kterými kulová plocha prochází: $M_1 = [1; -2; -1], M_2 = [-5; 10; -1], M_3 = [4; 1; 11], M_4 = [-8; -2; 2]$. [2]

I. způsob:

Najdeme 3 roviny, které prochází středem úsečky mezi 2 body ze zadání a jsou na danou úsečku kolmé:

$$S_{M_1M_2} = \frac{M_1+M_2}{2} = [-2; 4; 1],\ \overrightarrow{M_1M_2} = (-6; 12; 0) \sim (1; -2; 0);$$

$$\rho_1: x - 2y + d = 0$$

$$\text{dosadíme } S_{M_1M_2}: -2 - 8 + d = 0 => d = 10$$

$$\rho_1: x - 2y + 10 = 0.$$

Stejným způsobem získáme i další dvě roviny:

$$S_{M_2M_3} = \frac{M_2+M_3}{2} = \left[-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}; 5\right],\ \overrightarrow{M_2M_3} = (9; -9; 12) \sim (3; -3; 4);$$

$$\rho_2: 3x - 3y + 4z - 2 = 0$$

$$S_{M_3M_4} = \frac{M_3+M_4}{2} = \left[-2; -\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right],\ \overrightarrow{M_3M_4} = (-12; -3; -9) \sim (4; 1; 3);$$

$$\rho_3: 4x + y + 3z - 11 = 0.$$

Střed kulové plochy je průsečíkem těchto tří rovin:

$$\rho_1: x - 2y + 10 = 0$$

$$\rho_2: 3x - 3y + 4z - 2 = 0$$

$$\underline{\rho_3: 4x + y + 3z - 11 = 0}$$

$$-7x - 13y = -38$$

$$\underline{x - 2y = -10}$$

$$y = 4$$

$$x - 8 = -10 => x = -2$$

$$z = \frac{6+12+2}{4} = 5.$$

Střed kulové plochy je tedy v bodě $S = [-2; 4; 5]$.

Obecná rovnice kulové plochy po dosazení středu S:

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = r^2.$$

Dosadíme například bod M_1:

$$9 + 36 + 36 = r^2$$

$$r^2 = 81.$$

Rovnice hledané kulové plochy je $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 81$.

II. způsob:

Každý bod dosadíme do obecné rovnice roviny a ze soustavy 4 rovnic o 3 neznámých pak vypočteme souřadnice středu – jediné řešení soustavy rovnic.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$(x+5)^2 + (y-10)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-11)^2 = 0$$

$$\underline{(x+8)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 0}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 20y + 100 + z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$x^2 - 8x + 64 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 22z + 121 = 0$$

$$\underline{x^2 + 16x + 64 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = 0}$$

$$(2)-(1) \qquad 12x-24y=-120$$
$$(3)-(1) \qquad -6x-6y-24z=-132$$
$$\underline{(4)-(1) \qquad 18x-6z=-66}$$
$$(2)-4(3) \qquad -78x-6y=132$$
$$\underline{12x-24y=-120}$$
$$4(1)-(2) \qquad -324x=648$$
$$x=-2$$
$$12\cdot(-2)-24y=-120 \Rightarrow y=4$$
$$18\cdot(-2)-6z=-66 \Rightarrow z=5.$$

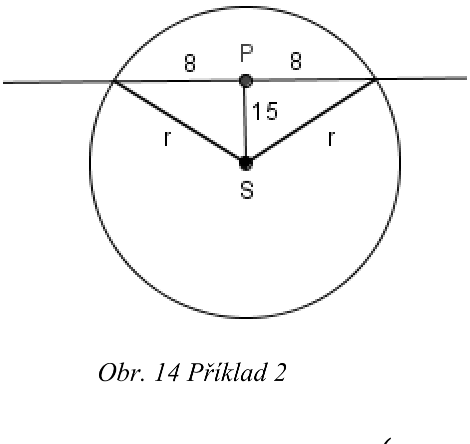
Obecná rovnice kulové plochy je $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=r^2$.

Poloměr vypočítáme dosazením některého z bodů M_1, M_2, M_3 nebo M_4:

$$M_1: 3^2+6^2+6^2=r^2$$
$$81=r^2.$$

Hledaná kulová plocha má tedy rovnici $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$.

Příklad 2: Určete rovnici kulové plochy se středem v bodě $S=[2;3;-1]$, která vytíná na přímce $p: x=-14-t, y=-\frac{50}{4}-\frac{2}{4}t, z=t$ tětivu délky 16. [2]



Obr. 14 Příklad 2

K výpočtu poloměru r potřebujeme nejprve určit vzdálenost přímky p od středu S. Tu zjistíme tak, že středem S vedeme rovinu ρ kolmou na přímku p. Průsečík roviny ρ a přímky p označíme P. Vzdálenost přímky p od středu S se pak rovná vzdálenosti průsečíku P od středu S.

Protože je rovina ρ kolmá na přímku p, směrový vektor přímky p $\vec{s}=\left(-1;-\frac{2}{4};1\right)$ je zároveň normálovým vektorem $\vec{n}$ hledané roviny ρ:

$$\rho\colon -x-\frac{2}{4}y+z+d=0.$$

Hodnotu d vypočteme dosazením středu S do roviny ρ:

$$-2-\frac{6}{4}-1+d=0 \Rightarrow d=\frac{9}{2}.$$

Rovina $\rho\colon -x-\frac{2}{4}y+z+\frac{9}{2}=0.$

K určení průsečíku roviny ρ a přímky p dosadíme parametrickou rovnici přímky p do rovnice ρ:

$$\begin{aligned} 14+t+\frac{100}{16}+\frac{4}{16}t+t+\frac{9}{2}&=0 \qquad /\cdot 16\\ 224+16t+100+4t+16t+72&=0\\ 36t&=-396\\ t&=-11\\ P&=[-3;-7;-11]. \end{aligned}$$

Vzdálenost středu S od průsečíku P:

$$\overrightarrow{SP}=(-5;-10;-10)$$
$$\left|\overrightarrow{SP}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-10)^2+(-10)^2}=\sqrt{225}=15.$$

Poloměr r určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} 15^2+8^2&=r^2\\ 289&=r^2. \end{aligned}$$

Rovnice hledané kulové plochy:

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289.$$

Příklad 3: Určete rovnici kulové plochy, která se dotýká roviny $\rho_1\colon 2x-4y+2z+10=0$ a roviny $\rho_2\colon 2x-4y+2z-12=0.$ Roviny ρ_1 se kulová plocha dotýká v bodě $M_1=[3;1;-6]$.

Z normálových vektorů rovin ρ_1 a ρ_2 je patrné, že jsou tyto roviny rovnoběžné, proto je vzdálenost mezi nimi rovna průměru hledané kvadriky. Určíme tedy vzdálenost mezi bodem M_1 a rovinou ρ_2:

$$|M_1\rho_2| = \frac{|2\cdot 3-4\cdot 1+2\cdot(-6)-12|}{\sqrt{2^2+4^2+2^2}} = \frac{|6-4-12-12|}{\sqrt{24}} = \frac{22}{\sqrt{24}},$$

$$r = \frac{22}{\sqrt{24}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{\sqrt{24}}.$$

Střed hledané kulové plochy je průsečíkem roviny ρ_3, která je rovnoběžná s ρ_1 a s ρ_2 a která leží uprostřed mezi nimi, a přímky p, která je kolmá na ρ_1 a na ρ_2 a která prochází bodem M_1:

$$\vec{s}_p = \vec{n}_{\rho_1} = \vec{n}_{\rho_2} = (2; -4; 2)$$

$$p: X = M_1 + t\cdot\vec{s}_p$$

$$x = 3 + 2t$$

$$y = 1 - 4t$$

$$z = -6 + 2t$$

$$\rho_3: 2x - 4y + 2z - 1 = 0.$$

Dosadíme parametrickou rovnici přímky p do rovnice roviny ρ_3:

$$6 + 4t - 4 + 16t - 12 + 4t - 1 = 0$$

$$24t = 11$$

$$t = \frac{11}{24}.$$

Průsečík roviny ρ_3 a přímky p a tedy i střed S kulové plochy:

$$S = \left[\frac{47}{12}; -\frac{10}{12}; -\frac{61}{12}\right].$$

Nyní sestavíme rovnici kulové plochy se středem S a poloměrem r, které jsme si již výše vypočítali:

$$\left(x - \frac{47}{12}\right)^2 + \left(y + \frac{10}{12}\right)^2 + \left(z + \frac{61}{12}\right)^2 = \frac{121}{24}.$$

10.2 Příklady k procvičení

Příklad 1: Určete střed S a poloměr r kulové plochy:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 4z - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 3z - 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 6y - 12z + 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 5z - 1 = 0$

Příklad 2: Napište rovnici kulové plochy, pokud znáte:

a) střed $S = [2; 0; 3]$ a bod $M = [3; 1; -2]$, kterým kulová plocha prochází

b) střed $S = [3; -3; 5]$ a bod $M = [-4; 0; 3]$, kterým kulová plocha prochází

c) střed $S = [0; 0; 0]$ a rovinu ρ: $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ [2]

d) střed $S = [3; -5; -2]$ a rovinu ρ: $2x - y - 3z + 11 = 0$ [2]

e) body $M_1 = [3; -2; 3], M_2 = [1; -2; 1], M_3 = [3; 0; 1], M_4 = [5; -2; 1]$

Příklad 3: Určete rovnici kulové plochy, pokud:

a) její střed leží na přímce $p: x = 2 - 9t, y = 1 + 6t, z = 1 + 6t$ a dotýká se rovin $\rho_1: x + 2y - 2z - 2 = 0, \rho_2: x + 2y - 2z + 4 = 0.$ [2]

b) její střed leží na přímce $p: x = 5 + 6t, y = -1 - 3t, z = -1 - 2t$ a dotýká se rovin $\rho_1: 6x + 3y - 2z - 35 = 0, \rho_2: 6x + 3y - 2z + 63 = 0.$ [2]

10.3 Výsledky

Příklad 1:

a) $S = [2; -3; 2], r = \sqrt{19}$

b) $S = \left[1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right], r = \sqrt{\frac{19}{2}}$

c) $S = \left[-\frac{1}{2}; -3; 6\right], r = \frac{\sqrt{161}}{2}$

d) $S = \left[2; -5; \frac{5}{2}\right], r = \frac{\sqrt{145}}{2}$

Příklad 2:

a) $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=27$

b) $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=62$

c) $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{64}{41}$

d) $x^2+y^2+z^2=9$

e) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$

f) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$

Příklad 3:

a) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$

b) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$

11. Kuželová plocha

Definice: Kuželová plocha je singulární kvadrika, pro kterou platí $a_{44} = 0$. Kvadrika, která má ve vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic rovnici:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

se nazývá kuželová plocha. Bod $V = [0; 0; 0]$ je vrchol kuželové plochy.

Jestliže $a = b$, potom tuto kuželovou plochu nazýváme rotační kuželovou plochou. Rotační kuželovou plochu dostaneme rotací přímky, která je různoběžná s osou rotace z.

11.1 Řešené příklady

Příklad 1: Dokažte, že rovnice $z^2 = xy$ je rovnicí kuželové plochy s vrcholem v počátku soustavy souřadnic. [2]

Při řešení tohoto příkladu postupujeme stejně jako při vyšetřovaní kvadriky:

$$\Delta := \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ – singulární kvadrika}$$

$$A_{44} := \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \text{ – středová kvadrika => } S = [0; 0; 0].$$

Charakteristická rovnice:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2};\ \lambda_2 = -\frac{1}{2};\ \lambda_3 = -1.$$

A nyní již pouze dosadíme do rovnice pro kanonický tvar:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - z^2 - 0 = 0,$$

po úpravě pak získáme rovnici:

$$-x^2 + y^2 + 2z^2 = 0.$$

Tato kanonická rovnice je rovnicí kuželové plochy, čímž jsme dokázali, že rovnice $z^2 = xy$ je rovnicí kuželové plochy.

Příklad 2: Osa z je osou rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku. Bod $M = [3; -4; 7]$ leží na kuželové ploše. Určete rovnici kuželové plochy. [2]

Ze zadání plyne, že se jedná o rotační kuželovou plochu rotující kolem osy z, proto bude obecná rovnice rotační kuželové plochy vypadat následovně:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Celou rovnici vynásobíme a^2 a získáme:

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{c^2} \cdot z^2 = 0, \qquad \frac{a^2}{c^2} = k > 0$$

$$x^2 + y^2 - kz^2 = 0.$$

Hodnotu k zjistíme po dosazení bodu M:

$$9 + 16 - 49k = 0$$

$$k = \frac{25}{49} = \frac{a^2}{c^2} => a = \pm 5, c = \pm 7, b = a = \pm 5.$$

Hledanou rovnicí rotační kuželové plochy je tedy rovnice:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{49} = 0.$$

Příklad 3: Osa y je osou rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku, jejíž tvořící přímky svírají s osou y úhel 60°. Určete její rovnici. [2]

Obecná rovnice rotační kuželové plochy rotující kolem osy y má tvar:

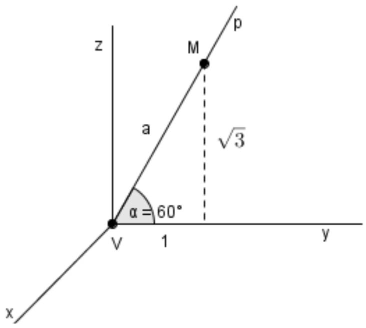
$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

po úpravě:

$$x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2 + z^2 = 0 \qquad \frac{c^2}{b^2} = k$$

$$x^2 - ky^2 + z^2 = 0.$$

Pomocí goniometrické funkce tangens určíme souřadnice bodu M, který leží na tvořící přímce:



Obr. 15 Příklad 3

$$tg60° = \frac{a}{1}$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$M = [0; 1; \sqrt{3}].$$

Dosadíme bod M do upravené obecné rovnice kuželové plochy:

$$-k + 3 = 0$$

$$k = 3.$$

Hledaná rovnice rotační kuželové plochy je $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$.

11.2 Příklady k procvičení

Příklad 1:

a) Osa z je osou rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku, bod $M = [0; 6; 3]$ leží na kuželové ploše. Určete rovnici rotační kuželové plochy.

b) Osa y je osou rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku, bod $M = [4; 3; 0]$ leží na kuželové ploše. Určete rovnici rotační kuželové plochy.

c) Osa x je osou rotační kuželové plochy s vrcholem v bodě $V = [2; 1; 0]$, bod $M = [4; 1; 2]$ leží na kuželové ploše. Určete rovnici rotační kuželové plochy.

Příklad 2:

a) Osa z je osou rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku. Její tvořící přímky svírají s osou z úhel $45°$. Určete rovnici kuželové plochy.

b) Osa y je osou rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku. Její tvořící přímky svírají s osou y úhel $30°$. Určete rovnici kuželové plochy.

11.3 Výsledky

Příklad 1:

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 0$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0$

c) $(x-2)^2 + (y-1)^2 - z^2 = 0$

Příklad 2:

a) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $M = [0; 1; 1]$

b) $x^2 - \frac{1}{3}y^2 + z^2 = 0$; $M = [0; 1; \frac{1}{\sqrt{3}}]$

Závěr

Ve své bakalářské práci jsem se věnovala příkladům na kvadratické plochy. Snažila jsem se podat srozumitelný návod k řešení typických příkladů a napomoci tak případným zájemcům v pochopení této problematiky.

I pro mě byla práce na tomto tématu velmi přínosná. Rozšířila jsem si své znalosti o kvadratických plochách a lépe porozuměla souvislostem týkajících se některých příkladů. Zároveň jsem se naučila pracovat s matematickými softwary Maple 9.5 a Derive 6.

V této bakalářské práci jsou zpracovány pouze typické a základní příklady odpovídající rozsahu výuky předmětu Geometrie I. Do budoucna tak zůstává prostor pro případné složitější příklady.

Seznam použité a citované literatury

[1] Hašek, R., Pech, P. *Kvadratické plochy a jejich reprezentace v programu Maple*. České Budějovice, JU v Č. Budějovicích, 2010.

[2] Kletenik, D., V. *Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii*. 14. vydání, Moskva, 1986.

[3] Klapka, J. *Analytická geometrie*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1960.

[4] Škrášek, J., Tichý Z. *Základy aplikované matematiky I*. Praha: SNTL, 1989.

[5] Bydžovský, B. *Úvod do analytické geometrie*. Praha: ČSAV, 1956.