



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Rovinné mechanismy

Vypracoval: Jan Hoffman
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, PhD.

České Budějovice 2013

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 30. 4. 2013

.....
Jan Hoffman

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu katedry matematiky pedagogické fakulty prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho trpělivost při snaze vzdělat a vychovat generace budoucích pedagogů a vedoucímu diplomové práce Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za pomoc při volbě tématu práce, poskytnutí zahraniční literatury a objektivní kritiku.

Dále děkuji svým rodičům za jejich podporu při studiu, bratru Davidovi a svojí přítelkyni Mgr. Lucii Fourové za pomoc ve chvílích nejtěžších.

Obsah

Úvod.....	7
1. Historie.....	10
2. Programy používané k návrhu a analýze mechanismů.....	12
2.1 GeoGebra.....	14
3. Základní pojmy.....	16
3.1 Členy.....	16
3.2 Kinematické dvojice.....	17
3.2.1 Pohyblivost soustavy – stupně volnosti.....	18
3.3 Kinematické řetězce.....	19
3.4 Mechanismy.....	20
4. Matematické vyšetřování mechanismů.....	22
4.1 Kinematické vyšetřování mechanismů.....	22
4.1.1 Kinematická analýza.....	22
4.1.1.1 Analytické kinematické metody.....	22
4.1.1.1.1 Geometrická metoda.....	23
4.1.1.1.2 Vektorová metoda.....	23
4.1.1.1.3 Maticová metoda.....	25
4.1.1.2 Grafické analytické metody.....	31
4.1.1.3 Experimentální analytické metody.....	32
4.1.2 Kinematická syntéza.....	32
4.1.2.1 Geometrická syntéza kloubových mechanismů.....	33
4.2 Statické řešení soustav těles.....	34
4.3 Dynamické vyšetřování mechanismů.....	35
4.4 Kmitání mechanických soustav.....	37
5. Mechanismy používané pro kreslení křivek.....	37
5.1 Mechanismy pro kreslení kuželoseček.....	38
5.1.1 Paralineál.....	38
5.1.2 Redukční odpichovátko.....	39
5.1.3 Elipsograf.....	40
5.1.4 Parabolograf.....	41

5.1.5	Affinograf a koordinatograf.....	44
5.2	Pantograf.....	44
5.3	Mechanismy pro kreslení rovné čáry.....	47
5.3.1	Wattův mechanismus.....	48
5.3.2	Další mechanismy aproximující přímočarý pohyb.....	49
5.3.3	Peaucellierův-Lipkinův mechanismus.....	52
5.4	Kempeho zevšeobecňující věta (Kempe's Universality Theorem).....	55
6.	Řešené úlohy.....	56
	Závěr.....	59

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá tématem rovinných mechanismů, soustřeďuje se na vymezení dané oblasti, výčet jednotlivých možností matematického popisu mechanismů a možnosti jejich modelování s využitím výpočetní techniky. Zejména se jedná o program Geogebra, v němž je vytvořena většina schémat a modelů uvedených mechanismů. Vytvořené modely jsou zaznamenány na přiloženém CD. Důležitou kapitolou práce jsou mechanismy používané ke kreslení rovinných křivek, zakončenou mechanismy pro kreslení přímkou.

Annotation

This work thesis is dealing with planar mechanisms. It's concentrated on definition the topic, enumeration methods of mathematical description of mechanisms and occasion of simulation with usage information technology. It's going mainly on GeoGebra program, in which were created most of schemes and models mechanisms. Created models are recorded on attached CD. Important charter of this theses are mechanisms used to draving planar curves, ending with mechanisms used to drawing straight line.

Úvod

K výběru rovinných mechanismů jako tématu mojí diplomové práce mě vedlo hned několik důvodů. Jedná se oblast prostupující několika vědními obory zahrnující i oba moje studijní obory – matematiku a fyziku, dále pak historii a informatiku. S trochou nadsázky si dovoluji tvrdit, že rozvoj mechanismů se promítá i do vyložené humanitních disciplín, jelikož dle mého názoru ovlivnil vývoj společnosti, tzn. sociálních, kulturních ekonomických a demografických vztahů. Toto téma mne oslovilo i kvůli možnosti pracovat s matematickým programem GeoGebra, jehož popularita neustále roste a i mě si okamžitě získal. Měl jsem možnost během praxe prováděné v rámci studia využít program Geogebra ve výuce na gymnáziu a byl jsem mile překvapen kladnou odezvou studentů. Napadla mne otázka, s jakým úspěchem by se dal tento program využít k tvorbě materiálů například z oblasti fyziky. Jedním z prvotních impulsů byla tedy i snaha ověřit možnosti využití tohoto programu v oblasti pro níž nebyl primárně určen.

Nezasvěcený čtenář bude možná překvapen, jak hluboko do minulosti se táhne výskyt a vývoj mechanismů. Podobně jako jiná odvětví má i toto svá významnější historická období, na začátku mé diplomové práce jsem se tedy pokusil vyzdvihnout alespoň některé pozoruhodné mechanismy a zařízení pracující na mechanickém principu.

Další částí práce je pak přehled různých počítačových programů, jichž je možno využít při matematickém vyšetřování mechanismů. Přehled obsahuje komerčně využívané i volně dostupné programy, z nichž ne všechny jsou primárně určeny pro analýzu nebo modelování mechanismů. Samostatným oddílem je úsek zaměřený na program GeoGebra. Mým cílem zde bylo představit tento nástroj čtenáři nevtíravou formou tak, abych podal základní informace a přitom nekopíroval díla jiných autorů, kterých je vzhledem k rostoucí oblibě GeoGebry velký počet. Odkazuji tedy na práce, které se zabývají charakteristikou tohoto programu a jeho využití ve výuce.

Při hlubším studiu tématu jsem narazil na množství metod a úhlů pohledu, jimiž lze k problematice přistupovat. Z technického hlediska jde mnoho z těchto metod nad rámec výuky na střední škole a překračuje i rámec této práce. Jedná se zejména o metody dynamického vyšetřování mechanismů, metody kinematické i dynamické syntézy nebo oblast věnovanou poznatkům o chování reálných mechanismů a materiálovému inženýrství. Přesto však jsou tyto metody součástí nauky o mechanismech a připadalo mi nevhodné, alespoň se o nich nezmínit. Matematický aparát využívaný při popisu mechanismů je velice obsáhlý a různě obtížný, od vektorů, přes geometrické metody, operace s maticemi až po diferenciální rovnice a operátory. Větší část je věnována homogenním souřadnicím a maticovým metodám, pro jejich níže zmiňované přednosti.

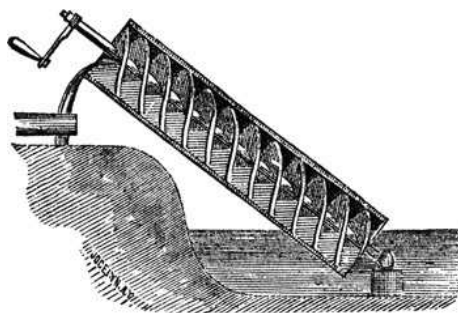
Vzhledem k šíři tohoto odvětví, jsem se konkrétně zaměřil pouze na mechanismy sloužící ke kreslení rovinných křivek a možnost jejich simulace ve zvolených počítačových programech. Myšlenka na konstrukci takových mechanismů sahá zpět až do 19. století a jako taková tedy není nikterak nová. Původní mechanismy se uplatňovaly v raných vynálezech jako parní stroj, později automobil, kde bylo mechanismu zapotřebí k transformaci sil a pohybů, k přenesení hnací síly z motoru na kola, k převedení posuvného pohybu na otáčivý a naopak. Odtud tedy plynula potřeba mechanismu kreslicího rovnou čáru. Existovali ale i mechanismy využívané v geometrii a topologii právě pro kreslení křivek, vynášení souřadnic apod. Některé takové mechanismy ve své práci rovněž popisují.

Při pohledu na konstrukci nejrůznějších specializovaných strojů, robotických manipulátorů a hydraulických ramen je zřejmé, že jejich konstrukce mají svůj původ právě v rovinných mechanismech. Existuje obrovské množství literatury věnované pokročilým prostorovým mechanismům s mnoha stupni volnosti pohybu a jejich modelování za pomoci profesionálních nástrojů, avšak relativně obtížně se hledá práce, která by komplexně postihovala právě rovinné mechanismy.

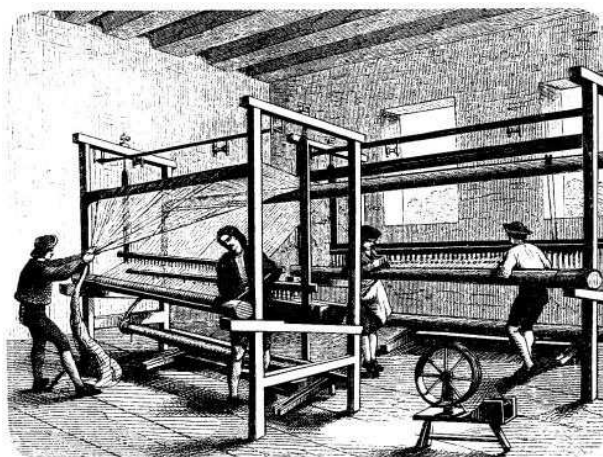
V závěru diplomové práce se pokouším o celkové shrnutí poznatků, které jsem při studiu tohoto tématu získal, zhodnocení průvodních obtíží, příp. úspěchů a o vyslovení domněnek ohledně budoucích perspektiv tohoto tématu.

1. Historie

Za dobu největší slávy mechanismů bychom mohli bezesporu prohlásit období průmyslové revoluce, dějiny jejich vývoje jsou ale mnohem delší a pestřejší. Vzpomeňme alespoň Archimédův šroub (obrázek 1) určený k čerpání vody, tkalcovské stavy (obrázek 2), jeřáby nebo vojenské vrhací stroje.¹



Obrázek 1 (převzato z [www12](#))



Obrázek 2 (převzato z [www13](#))

Důkazy o použití různých mechanismů se dochovali na mnohých kresbách a uměleckých dílech, například kronikář Petr de Ebulo zobrazuje na jedné svojí iluminaci použití jednoduchého vahadlového vrhacího stroje (obrázek 3) při obléhání Neapole roku 1191.

¹ Zcela nové světlo na schopnosti starověkých národů z oblasti stavby a používání mechanismů vrhá nález a rekonstrukce tzv. Mechanismu z Antikythéry. Jednalo se o soustavu několika desítek ozubených bronzových kol a podle odborníků mohl sloužit k výpočtu pohybu nebeských těles. (Hadrava, Hadravová 2007) Na adrese [[www7](#)] je video zachycující chod rekonstruovaného mechanismu.



Obrázek 3 (převzato a upraveno podle www14)

Za zmínku stojí i orloj na Staroměstském náměstí² z 15. století a všichni jistě znají kresby nejrůznějších mechanismů Leonarda da Vinci jen o málo starších. Dřevoryt Wilhelma Hoffmana (obrázek 4) z roku 1609 zobrazuje další revoluční mechanismus, a sice mušketu s mechanickou spouští.



Obrázek 4 (převzato z www15)

A tím se pomalu dostáváme k 18. století a ke skotskému mechanikovi a vynálezci Jamesi Wattovi, jehož jméno nese jeden z mechanismů zmiňovaný v mojím i ve všech podobných pracích. V 19. století je parní stroj zastíněn objevy z oblasti elektrotechniky a fotografie, výjimku tvoří například vynález

² O pražském orloji, se kromě jiných publikací, můžeme dočíst například ve článku Zdislava Šímy (2009). Článek odkazuje i na dalšího autora badatelsky spojeného s orlojem. Kromě popisu jednotlivých částí orloje, uvádí i překvapivá fakta o stáří orloje.

bubínkového revolveru. Na počátku 20. století způsobuje Henry Ford bezmála další průmyslovou revoluci zavedením montážní linky do procesu výroby (www16). Renesanci zažívají mechanismy ve druhé polovině 20. století s rozvojem robotiky, ale jejich uplatnění je, jak ukáží níže, mnohem širší.

Co se týče mechanismů používaných pro kreslení křivek, Tiamina (2007) zmiňuje například Archiméda v souvislosti s mechanismem určeným ke konstrukci elipsy (obrázek 19), jež funguje na principu tzv. proužkové konstrukce elipsy. Dále zmiňuje Leonarda da Vinci, nebo nizozemského státníka a politika 17. století Johana de Witt. Jednu z nejvýznamnějších prací pak publikoval roku 1877 Sir Alfred Bray Kempe pod názvem *How to Draw a Straight Line*, ačkoliv na jeho jméno narazíte pravděpodobně častěji v souvislosti s „problémem čtyř barev“, o jehož důkaz se pokusil o dva roky později.

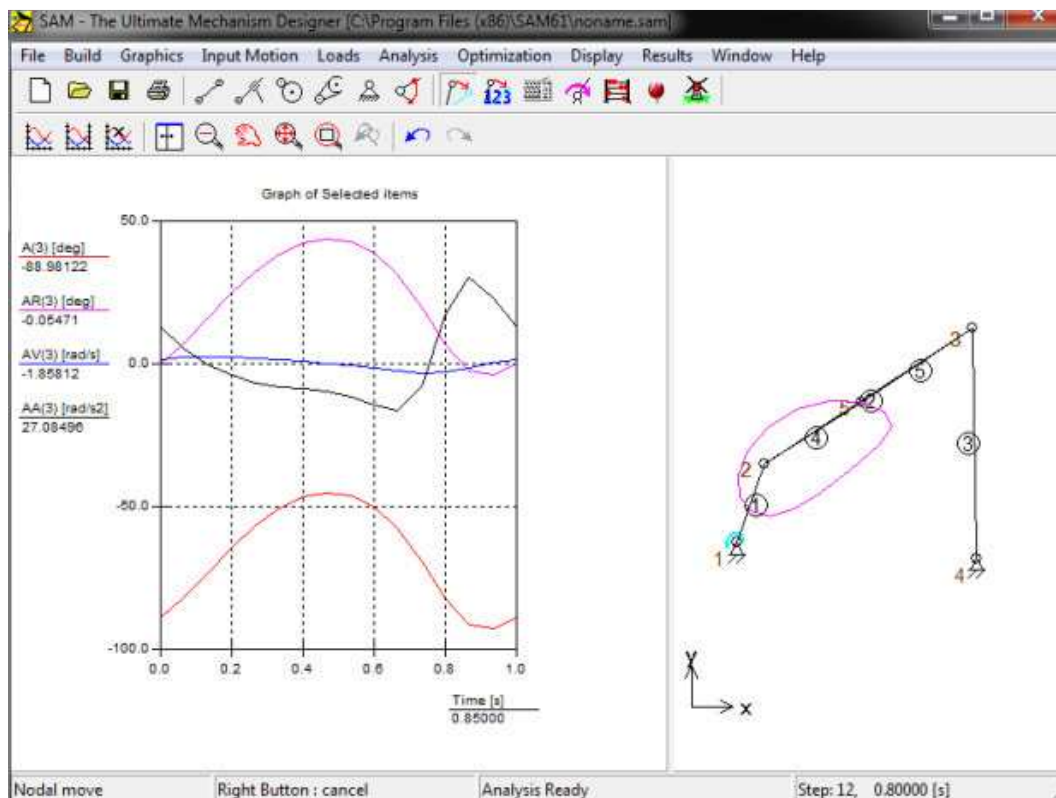
Podobné mechanismy byli naprosto nezbytné ještě ve druhé polovině 20. století, několik pěkných vyobrazení pantografů a koordinátografů firmy G. Coradi z Zurichu uvádí Hruška (1952). V této době dochází k rozvoji moderní výpočetní techniky, přičemž nelze opomenout dílo československého profesora Antonína Svobody (Durnová 2007).

2. Programy používané k návrhu a analýze mechanismů

Existuje množství specializovaných počítačových programů, které jsou určeny k tvorbě modelů rovinných mechanismů a jejich analýze. Nejvíce mne oslovily zejména *SAM – The Ultimate Mechanism Designer*³ a *Geometry Expressions*⁴, oba dva jsou velice silné nástroje. Nicméně jejich nevýhodou může být (stejně jako u většiny podobných programů) vysoká pořizovací cena licence pohybující se v prvním případě v řádu desítek tisíc korun, u druhého jmenovaného jsem cenu nenalezl.

³ <http://www.artas.nl/>

⁴ <http://www.geometryexpressions.com/>



Obrázek 5

Na obrázku 5 je ukázka analýzy čtyřčlenného mechanismu s náhodně zvolenými parametry v programu *SAM – The Ultimate Mechanism Designer*. Z obrázku je patrné uspořádání uživatelského rozhraní s předdefinovanými nástroji včetně grafu zobrazujícího hned několik veličin, což ukazuje na propracovanost ovládání i na množství jednotlivých funkcí. Bohužel se mi s pomocí tohoto softwaru podařilo získat pouze numerické výsledky a graficky určené funkční závislosti pohybu jednotlivých členů mechanismu na čase, nikoliv však rovnice popisující pohyb jednotlivých členů. Rozhodl jsem se tak tento program pro další práci nevyužít.

Hodně rozšířený a v technické praxi k podobným účelům používaný je další komerční produkt – nástroj Simulink úzce spojený s programem Matlab. K numerickým výpočtům je možné použít například program Maple (Karger, Kargerová 2000). Grepl (2007) uvádí kromě Maplu, Matlabu a příslušných toolboxů ještě program ADAMS.

Jen pro zajímavost uvádím program *Linkage Mechanism Simulator*, který je určen pro nekomerční využití a je volně dostupný, nicméně nabízí velmi málo funkcí, a proto jsem o jeho využití dále neuvažoval.

V minulosti se mi osvědčil program z oblasti dynamické geometrie (DGS) zvaný *GeoGebra*⁵, který splňuje hned několik předpokladů pro využití v pedagogické praxi – je snadno ovladatelný, nabízí množství nástrojů a pokročilých funkcí, podporuje mnoho jazyků a jeho základní verze je zdarma.

Alternativou k tomuto programu by mohl být například *EucliDraw*⁶ nebo *Algodo*⁷ (dříve známý jako *Phun*).

Program *Phun* (ver. 5.28) jsem okrajově použil díky zajímavé možnosti využít nástroj zobrazující rovnici trajektorie zvoleného bodu mechanismu, tento nástroj (služba) *Aleph for Phun* je dostupný pouze na internetu⁸. *Phun* byl zřejmě vyvinut pro podporu výuky mechaniky obecně, pro konstrukci přesných mechanismů se zcela konkrétními parametry se však dle mého názoru příliš nehodí, což se muselo odrazit i na přesnosti níže uvedených rovnic. Nicméně soubory generované (ač ve stejném formátu) jeho pokročilejším nástupcem nejspíš nejsou kompatibilní s nástrojem *Aleph for Phun*, a proto jsem sáhl po starší verzi.

K řešení rovnic nebo například maticových transformací je možné s úspěchem využít program *wxMaxima*, níže uvádím některé příklady využití. Program je jednoduchý na obsluhu a jistě obstojí i v porovnání s některými zpoplatněnými programy.

2.1 GeoGebra

Pro vytvoření modelů rovinných mechanismů jsem si z výše uvedených důvodů vybral program *GeoGebra*, v němž jsem rovněž vytvořil většinu schémat, která jsou zde uvedena.

⁵ <http://www.geogebra.org/>

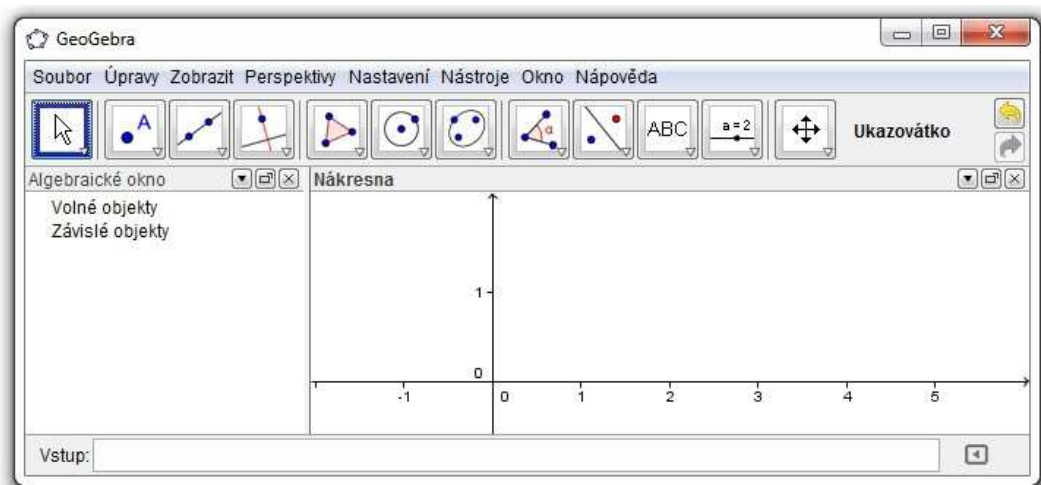
⁶ <http://www.euclidraw.com/>

⁷ <http://www.algodo.com/>

⁸ <http://nash.sip.ucm.es/ALEPH/index.html>

Tento software si získal ve světě velkou popularitu, vznikly a vznikají sdružení GeoGebra Institut, konají se konference, ale oblíbenost tohoto programu dokazuje i velké množství digitálních materiálů vytvářených pedagogy a studenty, kteří nejsou takto organizováni⁹.

Na obrázku 6 je základní obrazovka – uživatelské rozhraní programu, aktuálně je zapnutá funkce Ukazovátka, což signalizuje modrý čtvereček a nápověda zobrazující se automaticky vedle panelu nástrojů. Velikou předností je pak možnost zadávat algebraické výrazy do pole označeného Vstup a celá řada předdefinovaných příkazů ukrývajících se pod šipkou vpravo dole. GeoGebra se ale neustále vyvíjí, takže poslední verze nabízejí dokonce podporu dvou skriptovacích jazyků – Javascript a GGBScript. Pro bližší seznámení se s programem doporučuji nejen manuál, ale i některé diplomové práce a výukové materiály zabývající se přímo výukou matematiky s využitím programu GeoGebra¹⁰.



Obrázek 6

⁹ <http://www.geogebra.org/>

¹⁰ Užití počítačů ve výuce matematiky na základní škole -

http://theses.cz/id/c8yt8o/Diplomova_prace_Macha.pdf

GeoGebra ve vzdělávání matematice -

http://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar/Havelkova_DP.pdf

Dvacítka řešených úloh v programu GeoGebra -

http://www.gymkrom.cz/web/ict/materialy/Dvacitka_GGB.pdf

3. Základní pojmy

Dříve než se budu věnovat jednotlivým mechanismům, je potřeba vymezit základní pojmy a představit metody, používané při popisu jednotlivých mechanismů.

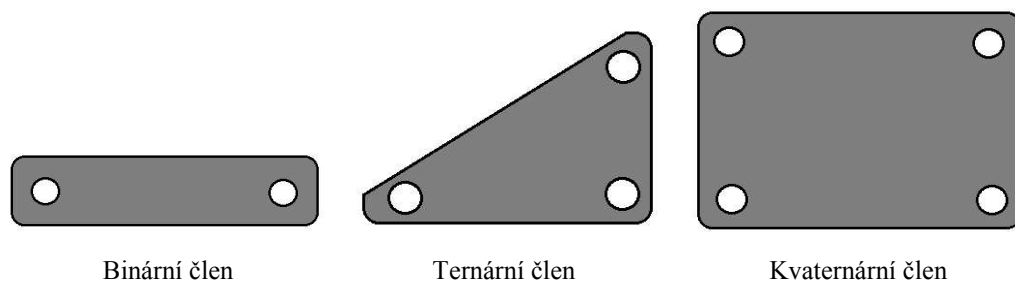
Jak uvádí například Záhorec a Caban (1992) nebo Brát (1981) stroje, konstrukce a zařízení určené k různým operacím se souhrnně označují jako soustavy těles. „*Teorie složení* soustav těles se zabývá jejich popisem, metodami vytváření a rozboru.“ (Brát 1981: 36) V anglicky psané literatuře se používají označení *mechanical linkage* nebo pouze *linkage*, ve smyslu řetězce. Toto označení užívá už Kempe (1877). Jednotlivé prvky, nebo chcete-li tělesa soustavy, se nazývají *členy*. (Brát 1981) Jeden z členů, ke kterému budeme vztahovat pohyb ostatních členů, nazveme *ram* (Záhorec, Caban 1992).

Později se ve svých úvahách a příkladech omezím pouze na rovinné soustavy, které, jak uvádí Laš, Hlaváč a Vacek (2001) musí splňovat tyto podmínky:

- všechna tělesa mají rovinu symetrie,
- všechny vazby jsou rovinné,
- silové zatížení tvoří rovinnou silovou soustavu.

3.1 Členy

Jsou to v podstatě stavební kameny každého mechanismu. Dále v textu přesně definuji význam pojmů kinematický řetězec a jemu nadřazený pojem mechanismus, s tím potom koresponduje tvrzení Nortona (1999), který jako stavební kameny mechanismu označuje ony řetězce (*linkages*) a dále definuje jednotlivé členy jako: „...tuhá tělesa, která jsou osazena nejméně dvěma uzlovými body, což jsou místa pro připojení k ostatním členům.“ (Norton 1999: 24) Autor dělí členy soustavy podle počtu uzlových bodů na binární, ternární a kvaternární, vizte obrázek 7. Záhorec a Caban (1992) používají obdobné rozdělení, binární členy označují jako členy druhého stupně, ternární jsou členy třetího stupně, atd. Obecně pak platí, že: „Člen, který je se sousedními členy spojen s kinematickými dvojicemi, je *s*-tého stupně.“ (Záhorec, Caban 1992:7)



Obrázek 7 (Norton 1999: 24)

3.2 Kinematické dvojice

Pojem kinematické dvojice (KD) můžeme chápat v zásadě dvojitým způsobem. Literatura shodně uvádí, že: „Dva členy, které jsou navzájem pohyblivě vázány (spojeny), a to tak, že je pohyblivost jednoho vůči druhému omezena, tvoří *kinematickou dvojici*.“ (Brát 1981: 36) Můžeme se ale setkat i s označením *vazba* (Záhorec, Caban 1992) nebo s anglickým ekvivalentem *joint* (Norton 1999), čímž se dostáváme k dalšímu významu tohoto termínu. Pod pojmem kinematická dvojice totiž častěji rozumíme druh onoho spojení mezi členy řetězce¹¹. Jedno z možných rozdělení KD je podle Záhorce a Cabana (1992) na *nižší*, jejichž členy se dotýkají v ploše a *vyšší*, jejichž členy se dotýkají v bodě nebo na přímce. Brát (1981) uvádí příklady následujících nižších KD:

- a) rotační
- b) posuvná
- c) šroubová
- d) válcová (cylindrická)
- e) sférická
- f) plochá (rovinová)

Oproti tomu Jančina, Pekárek a Stareček (1982) rozlišují pouze rotační, valivé a posuvné nižší KD a vyšší dvojice označují jako smykové.

¹¹ Pokud daný mechanismus nebo i samostatnou kinematickou dvojici zkoumáme z hlediska kinematiky, neuvažujeme materiálové vlastnosti jednotlivých prvků dvojice, tzn. ani případné působící tření.

Kinematické dvojice rozdělujeme též na třídy. Říkáme, že dvojice je j-té třídy, jestliže ubírá relativnímu pohybu obou členů j stupňů volnosti.

Má-li kinematická dvojice i stupňů volnosti, je vzájemná poloha obou členů dvojici tvořících určena i souřadnicemi, které nazýváme souřadnice kinematické dvojice. Brát (1981:38)

Přehled kinematických dvojic, jejich značení a schémata naleznete v přílohách 1 a 2.

3.2.1 Pohyblivost soustavy – stupně volnosti

„Podle počtu a druhu kinematických vazeb se pohyblivost původně nevázaných (volných) těles snižuje. Pohyblivost soustavy určuje *počet stupňů volnosti pohybu (PSVP)*.“ (Záhorec, Caban 1992: 6) Jak tyto autoři dále uvádějí PSVP definujeme jako počet nezávislých souřadnic délkového nebo úhlového rozměru, kterými je jednoznačně určena poloha uvažované soustavy.

Laš, Hlaváč a Vacek (2001) publikují vazbovou rovnici, čili vztah pro výpočet stupňů volnosti rovinné soustavy a jejich rozdělení v závislosti na této hodnotě.

$$n = 3(m - 1) - 2(r + p + v) - o$$

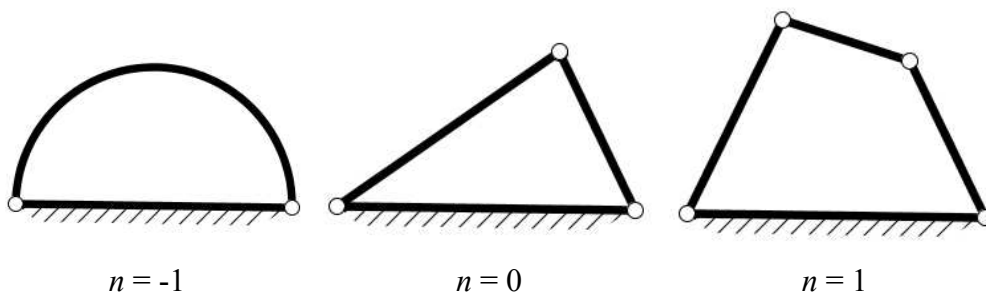
Písmeno n označuje počet stupňů volnosti soustavy, m je počet těles soustavy včetně rámu (ten bývá značen jako těleso číslo 1), ostatní písmena označují počty rovinných vazeb soustavy (r rotační, p posuvné, v valivé, o obecné).

Dělení soustav podle velikosti n (obrázek 8):

$n < 0$ staticky neurčité nepohyblivé

$n = 0$ staticky určité nepohyblivé

$n > 0$ pohyblivé (z toho $n = 1$ – mechanismy)



Obrázek 8 (Norton 1999: 33)

Poloha tělesa v prostoru závisí na šesti nezávislých souřadnicích, tři označují polohu a tři orientaci tělesa (Eulerovy úhly).¹² (Záhorec, Caban 1992)

3.3 Kinematické řetězce

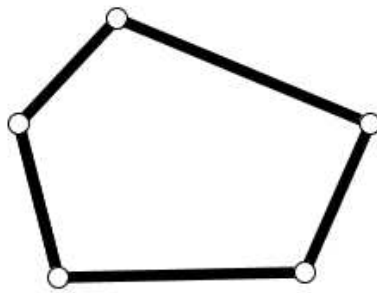
Spojíme-li několik členů (těles) kinematickými dvojicemi, dostaneme kinematický řetězec. Kinematické řetězce dělíme podle různých hledisek na otevřené, uzavřené a smíšené, jednoduché a složené, rovinné, sférické a prostorové.

(Brát 1981: 38)

Jednoduché kinematické řetězce obsahují pouze členy prvního a druhého stupně, ostatní řetězce nazýváme složené. Pro zavedení ostatních typů rozdělení je potřeba definovat pojem kinematická smyčka, což jak uvádí Brát (1981: 38) je: „Prostorový mnohoúhelník (obrazec), jehož strany jsou v kinematickém schématu¹³ tvořeny členy řetězce a jehož vrcholy jsou tvořeny kinematickými dvojicemi, se nazývá kinematická smyčka,...“ Vyobrazení příkladu takové smyčky je na obrázku 9.

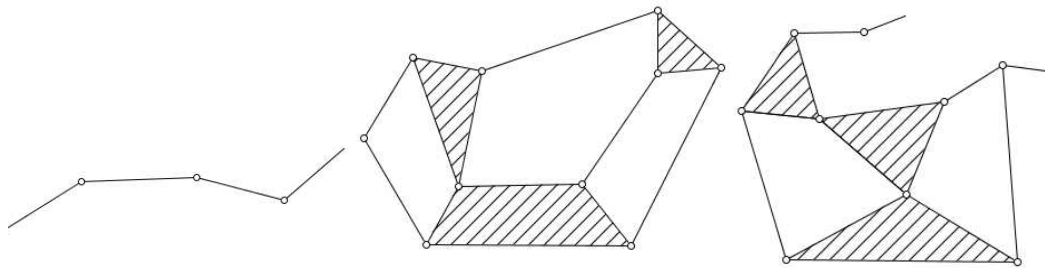
¹² Karger, Kargerová 2000 píše o používání robotů s více než šesti stupni volnosti.

¹³ Obrázky 3, 4, 5 a jim podobné se nazývají kinematické schéma.



Obrázek 9 (Brát 1981: 38)

Na obrázku 10 jsou vyobrazena schémata otevřeného, uzavřeného a smíšeného kinematického řetězce.



Obrázek 10

Nejrůznější kinematické řetězce a mechanismy můžeme nalézt v předmětech denní potřeby – stojany, věšáky; ručním nářadí – kleště, nůžky; ve strojích a zařízeních – bagry, jeřáby, zdvižné plošiny; dokonce i ve vlastním těle, v příloze č. 3 jsem se pokusil zkompileovat alespoň některé z nich.

3.4 Mechanismy

Slovo *mechanismus* se v současnosti uplatňuje v nejrůznějším kontextu, často může označovat i zcela abstraktní objekty, duševní pochody a filosofické názory.

Ve svém původním smyslu, a tak je tento termín používán i zde, označuje zařízení sloužící k transformaci pohybu a přenosu sil. (Norton 1999)

Definice mechanismu jednotlivých autorů se v zásadě neliší a může být formulována i následujícím způsobem. Upevníme-li některý ze členů uzavřeného

kinematického řetězce, dostaneme *mechanismus*. (Jančina, Pekárek, Stareček 1982) Pevný člen mechanismu se nazývá *rám*. (Brát 1982)

*Zařízení, která vzniknou z ostatních typů kinematických řetězců tím, že se některý jejich člen stane rámem, budeme nazývat vázané kinematické řetězce, ..., i když se v technické praxi často mluví o mechanismech i v tomto případě.*¹⁴

(Brát 1982: 40)

Rozdělení mechanismů obecně je velmi rozsáhlé¹⁵, pro potřeby této práce si vystačím rozdělením na rovinné a prostorové, jednoduché a složené mechanismy. Ve větším počtu jsou zde uvedeny jmenovitě čtyřčlenné mechanismy (obrázek 11), například pantograf, Wattův a Tchebicheffův mechanismus, popsané níže.

Jako samostatnou kapitolu bychom mohli označit tzv. diferenciály, což:

... jsou soustavy těles se dvěma stupni volnosti ($n = 2$). Jejich použití bývá nejčastější jakožto děličů silového toku. Patří obvykle mezi prostorové soustavy těles a jejich analýza přesahuje rámec skript předmětu technické mechaniky (Zeman, Laš 2001: 92).

V návaznosti na definici mechanismu pomocí kinematických řetězců uvádí Brát (1981: 40) následující: „Byl-li původní řetězec jednoduchý, mluvíme o *jednoduchém* mechanismu, byl-li složený, mluvíme o *složeném* mechanismu.“

Rovinným mechanismem budeme dále rozumět zařízení složené z pevných částí, pohyblivě spojených, jehož veškerý pohyb je realizován v ploše. Ve většině případů jsou této spojení realizována výlučně rotačními kinematickými dvojicemi, jejichž osy otáčení jsou všechny navzájem rovnoběžné a kolmé na plochu, v níž je uskutečňován pohyb.

Rovinným pohybem tělesa rozumíme případ, kdy se všechny jeho body pohybují v navzájem rovnoběžných rovinách. (Jones 1919)

¹⁴ V kapitolách týkajících se kreslení křivek, rovněž označuji slovem *mechanismus* soustavy, jež svojí konstrukcí odpovídají definici vázaného mechanického systému.

¹⁵ Zájemce o tuto problematiku tímto odkazují například na obsáhlou publikaci N. Sclatera (2007), která je bohatě ilustrovaná a obsahuje od nejjednodušších strojů, přes zde uvedené mechanismy, až po současně vyvíjená zařízení.

Jako *prostorový* označíme takový mechanismus, jehož alespoň jeden člen koná pohyb mimo plochu určenou pohybem ostatních členů, případně (s ohledem na Jonesovu definici rovinného pohybu) na mechanismus jehož členy se pohybují v navzájem různoběžných rovinách.

4. Matematické vyšetřování mechanismů

K matematickému vyšetřování mechanismů existují dva hlavní přístupy, z hlediska kinematiky a z hlediska dynamiky. U obou pak rozlišujeme analytické a syntetické řešení s množstvím rozličných metod.

4.1 Kinematické vyšetřování mechanismů

4.1.1 Kinematická analýza

„Při kinematické analýze mechanismů vyšetřujeme vztah mezi polohou, rychlostmi a zrychleními hnaných a hnacích členů. Dále vyšetřujeme tvar drah, průběh rychlostí a zrychlení bodů členů mechanismu.“ (Záhorec, Caban 1992: 23)

V podstatě jde o stanovení závislosti polohy, rychlosti, zrychlení (natočení úhlů, úhlové rychlosti, úhlové zrychlení) zkoumaných členů a bodů v závislosti od pohybu hnacího členu. (Jančina, Pekárek, Stareček 1982)

Existuje množství metod kinematického vyšetřování, které se dají rozdělit do třech hlavních proudů:

- analytické metody,
- grafické metody,
- experimentální metody.

4.1.1.1 Analytické kinematické metody

Tyto metody jsou zaměřené hlavně na využití poznatků analytické geometrie, tenzorového a maticového počtu, komplexních proměnných, ... , jsou spojené se souřadnicovými systémy a vedou ke skalárním rovnicím pro hledané veličiny.

(Záhorec, Caban 1992:25)

Záhorec a Caban (1992) dále uvádějí, že porovnáním jednotlivých analytických metod se jako nejefektivnější jeví vektorový počet, jelikož je možné řešit úlohy v explicitní formě a vyhnout se tak algebraickým rovnicím vysokých stupňů.¹⁶

Při analytickém vyšetřování postupujeme tak, že nejprve rozkryjeme vztahy mezi veličinami určujícími polohu hnaných členů v závislosti na poloze hnacích členů, což se nazývá úloha polohy, jež bývá jak uvádí Záhorec a Caban (1992) zpravidla nejtěžší část celého řešení. Vztahy pro rychlost a zrychlení pak dostaneme z rovnosti

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

4.1.1.1.1 Geometrická metoda

Tato metoda se uplatňuje dobře při řešení jednoduchých rovinných mechanismů. Spočívá většinou tak, že obrazec daný kinematickým schématem (modelem) rozdělíme na vhodné (pravoúhlé) trojúhelníky, v kterých figurují zadané i hledané délkové a úhlové veličiny, jako strany a úhly trojúhelníka a ty vyřešíme trigonometricky. Tato metoda tedy bývá někdy označována jako trigonometrická (Záhorec, Caban 1982).

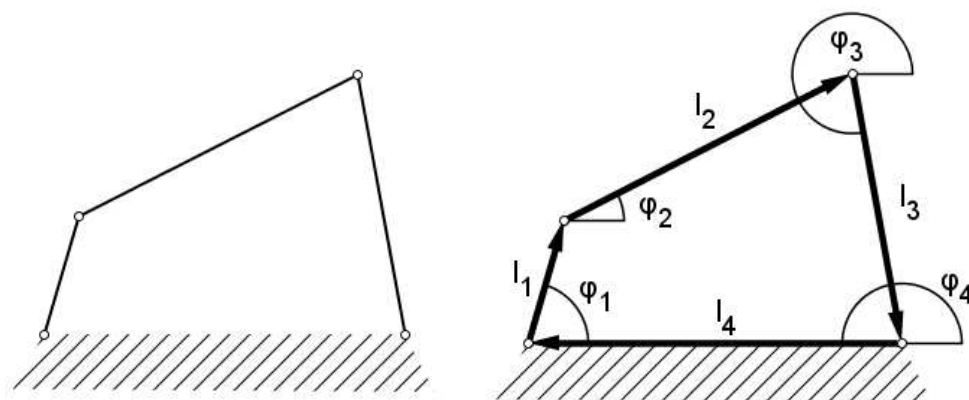
Cílem je nalézt tolik vztahů mezi polohovými veličinami hnaných a hnacích členů, kolik je neznámých. (Jančina, Pekárek, Stareček 1982)

4.1.1.1.2 Vektorová metoda

Je to všeobecná metoda určená k řešení rovinných i prostorových mechanismů. Polohy jednotlivých členů jsou vyjádřeny schematicky vektory, jejichž krajní body leží v místech kinematických dvojic. Na obrázku 10 je příklad kinematického schématu jednoduchého čtyřčlenného mechanismu a jeho znázornění vektorovým čtyřúhelníkem. Vektorové obrazce charakterizující

¹⁶ Existují i jiné zde neuvedené analytické metody, Jančina, Pekárek a Stareček (1982) zmiňují například ještě metodu převodové funkce.

mechanismus se při pohybu mechanismu mění, ale zůstávají uzavřené¹⁷. Z čehož plynou tzv. podmínky uzavřenosti. Vhodným průmětem do souřadnicových do souřadnicových os lze většinou získat potřebné skalární geometrické vztahy mezi souřadnicemi jednotlivých členů, tyto tvoří soustavu transcendentních rovnic, které je ve složitějších případech nutné řešit numericky. (Záhorec, Caban 1992)



Obrázek 11

Pro jednoduchý rovinný mechanismus, jehož kinematické schéma je popsáno uzavřeným vektorovým mnohoúhelníkem výše na obrázku, platí podmínka uzavřenosti, kterou lze napsat ve tvaru¹⁸:

$$\sum_{i=1}^4 \vec{l}_i = \vec{0}$$

Pokud promítneme jednotlivé vektory do os x, y zvolené¹⁹ souřadnicové soustavy dostaneme dvě skalární rovnice.

$$x: \sum_{i=1}^4 l_i \cos \varphi_i = 0$$

$$y: \sum_{i=1}^4 l_i \sin \varphi_i = 0$$

¹⁷ vyjma případu, kdy dojde k rozpojení kinematických vazeb

¹⁸ Pro obecný rovinný mechanismus o N členech budou mít následující rovnice stejný tvar, ale sumarizace bude od 1 do N .

¹⁹ Volba souřadnicového systému (umístění počátku souřadnicového systému) může zásadním způsobem ovlivnit složitost řešení daného problému. V tomto případě by zřejmě bylo vhodné umístit počátek kartézské soustavy souřadnic do počátečního bodu vektoru l_1 .

Rovnice pro x-ovou a y-ovou složku rychlosti pak dostaneme derivací podle času:

$$\sum_{i=1}^4 (\dot{l}_i \cos \varphi_i - l_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 (\dot{l}_i \sin \varphi_i + l_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i) = 0$$

Rovnice pro zrychlení dostaneme další derivací

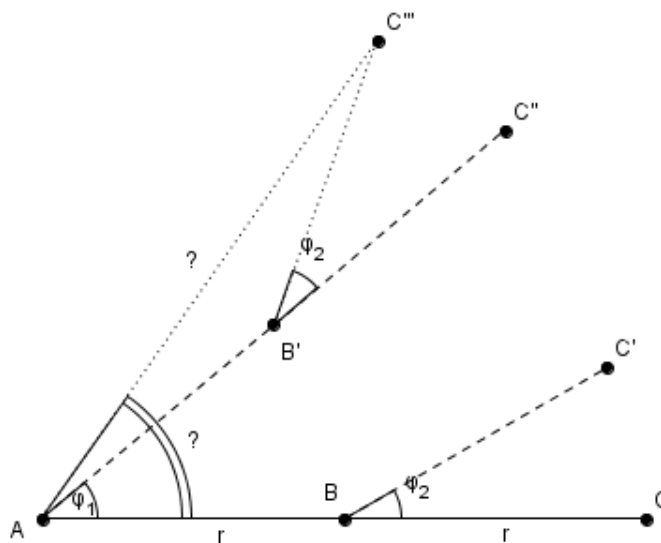
4.1.1.1.3 Maticová metoda

Předností maticové metody, resp. formulace problému pomocí matic, je srozumitelnost tohoto zápisu pro počítače, z čehož plyne možnost využít k analýze za pomoci maticového přístupu téměř libovolný počítačový program z kategorie CAS (Computer Algebra System).

Jak již bylo výše uvedeno, pro popis kinematických řetězců a vázaných mechanických systémů (mechanismů) lze s úspěchem použít polohové vektory, maticové metody tuto myšlenku dále rozvíjejí²⁰.

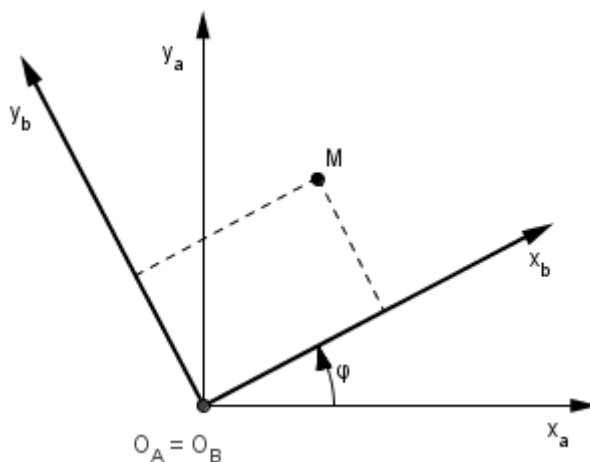
Na obrázku 12 je otevřený kinematický řetězec, kde bod A je pevně spojený, ale umožňuje rotaci mechanismu v rovině, bod C se otáčí okolo bodu B o úhel φ_2 , který se otáčí okolo bodu A o úhel φ_1 . Pokud použijí pro popis polární souřadnice, situaci to značně zjednoduší. Takže je snadné popsat polohu bodu C vzhledem k bodu B , při rotaci bodu B se však otáčí i souřadnicový systém s tímto bodem spojený a určení polohy bodu C vzhledem k základnímu souřadnicovému systému se středem v bodě A už tak jednoduché není. Tím narážím na problém transformace souřadnic při přechodu mezi jednotlivými systémy.

²⁰ Maticovým metodám je věnovaná práce V. Bráta (1981), ve které se však autor zaměřuje především na netriviální prostorové mechanismy.



Obrázek 12

Situaci se zjednoduší, pokud se zaměříme nejprve na vzájemné natočení dvou souřadnicových systémů kolem totožné osy z .



Obrázek 13 (Grepl 2007)

Na obrázku 13 jsou souřadnicové systémy a, b reprezentované osami x, y a počátkem v bodě O vzájemně pootočené o úhel φ . Známe-li souřadnice bodu M v systému b , můžeme (např. na základě znalostí o podobnosti trojúhelníků) určit jeho souřadnice v systému a , jak uvádí např. Grepl (2007):

$$x_a = \cos \varphi x_b - \sin \varphi y_b$$

$$y_a = \sin \varphi x_b + \cos \varphi y_b$$

Tyto dvě rovnice přepíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{r}_a^M = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{ba} \mathbf{r}_b^M$$

kde \mathbf{r}_a^M a \mathbf{r}_b^M jsou polohové vektory bodu M v souřadnicích systému a resp. b , \mathbf{R}_{ba} je rotační matice ze systému b do a . (Grepl 2007: 20)

Tím jsme získali polohový vektor bodu M v systému a . Z definice okamžité rychlosti jako změny polohy v čase, můžeme získat vztah pro výpočet rychlosti pohybu bodu M derivací vektoru \mathbf{r}_a^M podle času. Ještě jednou uvádím výpočet polohového vektoru, tentokrát pro ilustraci použití zkratk goniometrických funkcí (kosinus – c, sinus – s), jež se v literatuře často vyskytuje.

$$\mathbf{r}_a^M = \mathbf{R}_{ba} \mathbf{r}_b^M = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \mathbf{r}_b^M$$

Při derivaci vektoru \mathbf{r}_a^M je potřeba mít na paměti pravidlo pro derivování součinu dvou výrazů. Je zřejmé, že veličina rychlost je rovněž reprezentována vektorem, tečky nad písmeny označují podle konvencí derivaci podle času.

$$\dot{\mathbf{r}}_a^M = \mathbf{v}_a^M = \dot{\mathbf{R}}_{ba} \mathbf{r}_b^M + \mathbf{R}_{ba} \dot{\mathbf{r}}_b^M$$

Jak uvádí Grepl (2007) systém b je v tomto případě spojen s tělesem M , tudíž polohový vektor \mathbf{r}_b^M je v čase konstantní, tzn. $\dot{\mathbf{r}}_b^M = 0$ a výpočet se zredukuje na vztah:

$$\mathbf{v}_a^M = \dot{\mathbf{R}}_{ba} \mathbf{r}_b^M$$

kde

$$\dot{\mathbf{R}}_{ba} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} s\varphi & -\dot{\varphi} c\varphi \\ +\dot{\varphi} c\varphi & -\dot{\varphi} s\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

a derivace $\dot{\varphi}$ je v podstatě úhlová rychlost ω , indexy z naznačují, že osa otáčení má směr osy z .

$$\boldsymbol{\Omega}_{ba} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

Derivaci rotační matice můžeme potom podle Grepla (2007) zapsat takto:

$$\dot{\mathbf{R}}_{ba} = \mathbf{R}_{ba}\boldsymbol{\Omega}_{ba}$$

Dvě postupné rotace

Uvažujeme ještě dvě po sobě jdoucí rotace tělesa. Budeme je chápat jako vzájemné transformace mezi třemi souřadnicovými systémy.

Mějme tedy systém c (pevně spojen s tělesem), který je natočen vůči b a ten je natočen vůči a (nehybný systém, rám). Analogicky předchozím úvahám můžeme psát:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_{ba}\mathbf{r}_b$$

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{R}_{cb}\mathbf{r}_c$$

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_{ba}\mathbf{r}_b = \mathbf{R}_{ba}\mathbf{R}_{cb}\mathbf{r}_c = \mathbf{R}_{ca}\mathbf{r}_c$$

Dostáváme tedy důležitý vztah pro rotaci mezi systémy a a c . Zdůrazňujeme, že záleží na pořadí násobení rotačních matic.

$$\mathbf{R}_{ca} = \mathbf{R}_{ba}\mathbf{R}_{cb}$$

Vidíme, že celkovou rotaci lze vyjádřit pomocí dílčích rotací.

Derivací poslední rovnice získáme vztahy podstatné pro výpočet (úhlové) rychlosti a zrychlení dvou systémů c , a pomocí dílčích matic.

Transformace v rovině

Nejprve se opět soustředíme na názorný rovinný případ. Uvažujeme dva souřadnicové systémy. Naším cílem bude vyjádřit polohu bodu M v systému a známe-li jeho souřadnice v systému b . Oba systémy jsou vůči sobě pootočený a posunuty. Poznamenejme, že ačkoli se jedná o rovinnou úlohu, budeme již všechny skroty a matice psát v prostorovém tvaru (tedy všechna $z = 0$)

Se znalostí rotační matice můžeme snadno psát:

$$\mathbf{r}_a^M = \mathbf{R}_{ba}\mathbf{r}_b^M + \mathbf{r}_a^{Ob}$$

kde význam jednotlivých matic je tento:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_a^M = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_b^M + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_a^{Ob}$$

Maticový zápis v posledním případě se viditelně liší, došlo k rozšíření transformační matice. Toto rozšíření značí přechod k tzv. *homogenním souřadnicím*. Motivací pro zavedení homogenních souřadnic ve dvojdimenzionálním prostoru může být snaha najít řešení všech vzájemných poloh dvou přímek, tzn. rozšíření o nevlastní body (ležící v nekonečnu). Homogenní souřadnice jsou používány zejména v projektivní geometrii, počítačové grafice, nebo např. při analýze pohybu mechanismů.

Důvodem je skutečnost, že pomocí násobení transformačních matic jednotlivých základních pohybů lze získat výsledný pohyb mechanismu (Brát 1981). Základními pohyby označuje Brát (1981) otočení a posunutí ve směrech souřadnicových os. Tímto maticovým násobením se můžeme vypořádat s různými typy transformací (zobrazení).

Mnou uvedení autoři k důvodům pro zavedení homogenních souřadnic neuvádějí většinou nic nebo jako např. Martišek (2002: 158): „*Homogenní souřadnice využijeme k výhodnějšímu vyjádření transformací v rovině.*“ Problém v použití klasických kartézských souřadnic však nastane v případě posunutí o vektor. V rovině nelze toto zobrazení $(x, y) \rightarrow (x + u_x, y + u_y)$ realizovat násobením vektoru souřadnic maticí typu 2×2 , proto počítáme v homogenních souřadnicích.

Přechod od kartézských k homogenním souřadnicím vypadá takto: $M(x, y) \rightarrow M_h(x, y, w)$, kde M_h je zápis bodu v homogenních souřadnicích.

Obecně můžeme vyjádřit vztah pro přechod mezi souřadnicemi bodu M v souřadnicových systémech a, b spojených s rozdílnými tělesy následující transformační rovnicí (Brát 1971):

$$\begin{array}{cccccc} x_{aM} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & x_{bM} \\ y_{aM} & = & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \cdot y_{bM} \\ z_{aM} & = & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \cdot z_{bM} \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Samotnou transformační matici můžeme rozdělit na čtyři části, koeficienty a_{11} až a_{33} určují otočení, zvětšení nebo zkosení a koeficienty a_1 až a_3 určují posunutí, řádek nul jako nulový vektor a jednička v rohu jsou poslední dvě oblasti. Toto rozdělení nám umožní například jednodušší zápis rozsáhlé transformační matice jako matice typu 2x2, jejíž jednotlivé prvky však jsou další matice.

Kromě rotační transformace, potřebujeme znát ještě translační transformační matici:

Posunutí o vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

$$T(\vec{u}) = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Můžeme najít i další transformační matice pro ostatní typy lineárních zobrazení, většinu uvádí Martišek (2002).

Nyní můžeme zkusit složit několik transformací a sledovat, jak bude vypadat výsledná transformační matice. Například co vznikne složením dvou posunutí. K výpočtům jsem použil program wxMaxima (obrázek 13), nejprve jsem zadal obě transformační matice s rozdílným vektorem posunutí a posléze je jednoduchým příkazem maticově vynásobil. Z tvaru výsledné transformační matice je zřejmé, že celková transformace je opět posunutí.

```

(%i1) T1: matrix(
      [1,0,u1],
      [0,1,u2],
      [0,0,1]
      );
(%o1) [1 0 u1]
      [0 1 u2]
      [0 0 1]

(%i2) T2: matrix(
      [1,0,v1],
      [0,1,v2],
      [0,0,1]
      );
(%o2) [1 0 v1]
      [0 1 v2]
      [0 0 1]

(%i3) T1*T2;
(%o3) [1 0 u1 v1]
      [0 1 u2 v2]
      [0 0 1]

```

Obrázek 13

Na obrázku 14 jsou již pouze výsledky, vlevo vidíme výsledek násobení dvou rotací o různý úhel, výsledek opět nápadně připomíná rotační matici. Vpravo pak je výsledek násobení rotační a translační matice výsledkem je stejnoolehlost se středem v počátku a koeficientem $\cos(\theta)$.

$$\begin{array}{l}
r^*R; \\
\begin{bmatrix} c(\phi) & c(\theta) & s(\phi) & s(\theta) & 0 \\ s(\phi) & s(\theta) & c(\phi) & c(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
r^*T; \\
\begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & c(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Obrázek 14

4.1.1.2 Grafické analytické metody

Při grafickém řešení postupujeme člen od členu, zpravidla začínáme u členu hnacího a jednotlivé kinematické veličiny řešíme ve vhodně zvoleném bodě každého členu, jehož pohyb rozkládáme na skutečné nebo myšlené současně konané pohyby. (Záhorec, Caban 1992)

Záhorec a Caban (1992: 40) dále uvádějí, že: „Význam grafických metod pro vlastní kinematické vyšetřování mechanismů klesá, stále víc se uplatňují

analytické metody,...“ Nevýhodou grafických metod je rovněž nutnost řešit každou kinematickou veličinu v mnoha bodech mechanismu i relativní nepřesnost takto získaných výsledků, která závisí i na poloze mechanismu²¹.

4.1.1.3 Experimentální analytické metody

O experimentálních metodách uvádí Záhorec a Caban (1992: 25) následující:

Experimentální metody jsou založené na měření různých parametrů pohybu při provozu skutečných mechanismů nebo na jejich modelech. Spojení výpočetní techniky s měřicími přístroji ... umožňuje měření rychle se měnících parametrů pohybu, zvyšuje se přesnost měření.

4.1.2 Kinematická syntéza

Kinematická syntéza je odvětví kinematiky postupující takřka opačným směrem než kinematická analýza. Jejím úkolem je totiž na základě známých parametrů – technologických a funkčních požadavků navrhnout odpovídající mechanismus, tento proces se nazývá *inverzní úloha polohy*.

Záhorec a Caban (1992) rozdělují tento postup do třech základních kroků:

- Volba typu mechanismu – kloubový, vačkový, hydraulický (Sclater 2007) – v závislosti na účelu použití mechanismu.
- Volba struktury a kinematických dvojic mechanismu – jednoduchý, složený mech.
- Volba konkrétních rozměrů mechanismu

Hlavním odvětvím této oblasti je kinematická syntéza kloubových a vačkových mechanismů. (Záhorec, Caban 1992)

Vačkové mechanismy mohou realizovat libovolný pohyb bodu nebo tělesa přesně, kloubové mechanismy s 1 SVP jen přibližně. Kloubové mechanismy

²¹ Například paralelogram v degenerativní poloze, kdy všechny členy splývají v přímce.

*s větším počtem SVP mohou realizovat takovýto pohyb opět přesně, čehož se využívá u mechanismů průmyslových robotů a manipulátorů.*²²

(Záhorec, Caban 1992: 58)

4.1.2.1 Geometrická syntéza kloubových mechanismů

Pokud již máme určený typ mechanismu, potřebujeme určit jeho rozměry tak, aby závislost mezi polohou s hnaného a polohou q hnacího členu anebo členská závislost popisující dráhu určitého bodu některého členu, měla daný průběh

$$s = f(q), q_o \leq q \leq q_k,$$

resp. např.

$$y = f(x), x_o \leq x \leq x_k.$$

Nalezení přesné funkční závislosti může být neočekávaně obtížné a funkce generovaná námi navrženým mechanismem se nemusí shodovat s předepsanou funkcí, v obecném případě pak lze učinit pouze přibližné řešení. (Záhorec, Caban 1992).

Početní metody využívané v geometrické syntéze můžeme rozdělit do dvou skupin:

- Kolokační metody – Jejich podstatou je navržení mechanismu tak, aby splňoval požadovanou funkci pouze v několika diskrétních bodech. Jančina, Pekárek a Starček (1982) uvádějí řešení některých mechanismů pro 2 nebo 3 zadané body. Tyto metody jsou realizované početně i graficky.
- Metody nejmenších odchylek – Tuto skupinu jsem takto nazval, protože všechny obsažené metody si kladou určité podmínky na odchylku získané a požadované funkce. Tzn., aby tyto odchylky byli minimální, příp. aby integrál odchylek (integrál druhých mocnin odchylek) nabýval minimálních hodnot (Záhorec, Caban 1992)

²² Karger, Kargerová 2000 uvádějí několik příkladů rozdělení manipulátorů podle počtu SVP (3, 5, 6, více) v závislosti na jejich použití.

4.2 Statické řešení soustav

Ať rovinné, či prostorové mechanismy jsou ve skutečnosti soustavy pružných těles, které mají své materiálové vlastnosti, především hmotnost, odkud vyplývá i působení dalších fyzikálních veličin na jednotlivé členy mechanismu. Na mechanismus v klidu i v pohybu působí gravitace ve formě tíhové síly, určité síly působí i mezi jednotlivými členy, z materiálových vlastností jednotlivých členů plyne chování reálných mechanismů.

Cílem statického řešení nepohyblivých soustav těles je vyšetření reakcí v kinematických vazbách pro dané akční (zátěžné) síly a danou polohu. U pohyblivých soustav těles se vyšetřují reakce v závislosti na poloze a přídavné akční síly (silové dvojice) tak, aby soustava těles byla v rovnováze. Přídavné akční síly musí představovat tolik neznámých nezávislých parametrů, kolik má soustava stupňů volnosti (Zeman, Laš 1991: 93)

Při statickém řešení mechanismů rozlišujeme podle Záhorce a Cabana (1992) dva případy:

- Mechanismus je v klidu – Určujeme účinky reakčních sil ve vazbách, ale i přídavné účinky potřebné pro udržení mechanismu v klidu. Je jich právě tolik, kolik stupňů volnosti pohybu mechanismus má a musí být přiřazeny těm členům, které konají nezávislý pohyb. Výjimku tvoří mechanismus s reálnými vazbami, které mohou mít vliv na pohyblivost soustavy (její snížení). Při statickém řešení nepohyblivých soustav a mechanismů v klidu většinou uvažujeme ideální kinematické vazby. Reálné vazby svými účinky způsobí, že se úlohy o rovnováze většinou stávají staticky neurčitými. Nepřesnosti ve výsledcích jsou pak daní za podstatné zjednodušení výpočtů.
- Mechanismus je v pohybu – V tomto případě se soustředíme na přibližné řešení stavu rovnováhy, při zanedbání setrvačných silových účinků pohybujících se součástí mechanismu. Při statickém řešení mechanismu za pohybu je ve většině případů potřeba pasivní odpory v reálných vazbách respektovat. I zde je však účelné problém

zjednodušit jejich zanedbáním, pokud můžeme předpokládat jejich malý vliv na rovnováhu soustavy.

Statické řešení soustavy vytváříme na jejím statickém modelu, který je rozšířením modelu kinematického o údaje potřebné k statickému řešení (např. o souřadnice těžišť členů, koeficienty pasivních odporů apod.) (Záhorec, Caban 1992).

Nejobecnější metodou statického řešení je metoda uvolňování. Je založena na větě: Má-li být soustava těles v rovnováze, musí být v rovnováze každé její uvolněné těleso nebo uvolněná skupina těles. Uvolnění těles si představíme myšlenými řezy, vedenými kinematickými dvojicemi nebo příčně pruty. Účinek ostatních těles a rámu, s nimiž bylo uvolněné těleso v soustavě vázáno kinematickými dvojicemi, vyjádříme reakčními silami (reakcemi). Při přechodu na sousední uvolněné těleso respektujeme zákon akce a reakce změnou smyslu vnitřních reakcí (v kinematických vazbách mezi tělesy). Pro každé uvolněné těleso nebo uvolněnou skupinu těles píšeme podmínky rovnováhy. U soustav těles bez pasivních odporů podmínky rovnováhy představují soustavu lineárních algebraických rovnic (Zeman, Laš 1991: 93).

Jelikož jsou pohybové rovnice formulovány pomocí zobecněných zrychlení popisujících jednotlivé pohyby těles, je potřeba doplnit pro jejich vyjádření na kinematickém stavu hnacího členu rovněž zdvihové závislosti a převodové funkce. Po vyloučení reakcí, tak dostaneme jedinou vlastní pohybovou rovnici mechanismu, ve které vystupují pouze kinematické veličiny q , \dot{q} , \ddot{q} popisující pohyb hnacího členu. Opět se zde hodí podotknout, že zohlednění reálných vazeb může mít negativní dopad na řešitelnost.

4.3 Dynamické vyšetřování mechanismů

Při návrhu konstrukcí a řízení mechanických (mechatronických) soustav velmi často vystačíme s kinematickým modelem. Typickým příkladem může být řízení stacionárního průmyslového robotu, např. při svařování. Bude-li požadovaná rychlost pohybu relativně malá a pohony robotu dostatečně

předimenzované, pak budou dynamické síly zanedbatelné a pro řízení lze použít pouze kinematiku.

(Grepl 2007: 92)

Cílem dynamického vyšetřování soustav těles, je na rozdíl od kinematického vyšetřování zahrnutí, i silového působení mezi jednotlivými členy mechanismu.

Pod *dynamickým modelem* tu ve všeobecnosti rozumíme soustavu vzájemně vázaných, dokonale tuhých těles, který obsahuje všechny podstatné parametry vyšetřovaného strojního zařízení potřebné pro řízení dynamiky daného problému (např. geometricky- hmotové veličiny, charakteristiky pružně- tlumících prvků, akční silové účinky apod.) (Záhorec, Caban 1992)

Úlohy dynamicky pak výše uvedení autoři rozdělují na dva typy:

- a) Případy, kdy vyšetřujeme silové poměry odpovídající předepsanému (vypočítanému) pohybu.
- b) Případy, kdy vyšetřujeme pohyb členů soustavy na základě známých silových účinků.

Typ a) se pak nazývá *dynamickou analýzou mechanismů* a typ b) *dynamickou syntézou mechanismů*. Grepl (2007: 95, 96) to označuje přímo a nepřímo úlohu dynamiky. Zároveň uvádí tři metody pro sestavení dynamického modelu:

- metoda Lagrangeových rovnic druhého druhu (analytická dynamika)
- metoda uvolňování vycházející z druhého Newtonova zákona (vektorová dynamika)
- metoda redukce použitelná převážně pro 1D problémy (typicky rotorové a převodové soustavy)

Po definici dynamického modelu je dalším bodem sestavení *matematického modelu*, který je tvořený systémem pohybových rovnic, vazbových závislostí (t.j. vztahy mezi geometrickými a kinetickými veličinami vyskytujícími se v pohybových rovnicích) a vztahy pro pasivní odpory v reálných vazbách. (Záhorec, Caban 1992)

Pro sestavení *pohybových rovnic* můžeme použít různé metody, jež lze rozdělit v postatě takto

- metody vektorové mechaniky, vycházející ze vztahů mezi vektorovými veličinami
- metody analytické mechaniky, vycházející z energetické bilance (vyjádřené skalárními veličinami)

Záhorec a Caban (1992) uvádějí, že když vyloučíme z pohybových rovnic závislé geometricko – kinematické veličiny, zůstane v pohybových rovnicích soustavy s n stupni volnosti jen n nezávislých souřadnic, když pak ještě z těchto rovnic vyloučíme všechny reakce vazeb, dostaneme systém pohybových rovnic, udávajících vztahy mezi akčními silami a veličinami pohybu (rychlosti, zrychlení), tzv. *vlastní pohybové rovnice*. Řešením určíme základní veličiny pohybu, což je důležitým předpokladem pro vyšetřování kinematických a silových poměrů ostatních členů soustavy.

4.4 Kmitání mechanických soustav

Obsah této kapitoly by jistě vydal za samostatnou knihu a jde zcela nad rámec této práce. Kmitání mechanismů můžeme téměř vždy označit jako nežádoucí jev, při kterém dochází k energetickým ztrátám a nadměrnému opotřebením mechanismu.²³

Vědní disciplína zabývající se materiálovými vlastnostmi jako jsou pevnost, pružnost, deformace se nazývá elastostatika (Zeman, Laš 1991).

5. Mechanismy používané pro kreslení křivek

Moderní výpočetní technika, může jistě přinést mnoho pozitivního do každé oblasti lidského konání, nejinak je tomu v matematice a příbuzných oborech. Tvorba technické dokumentace je dnes realizována snad už jedině pomocí počítačů a specializovaného programového vybavení, narýsování přesných algebraických křivek se tak stalo zcela automatizovanou záležitostí.

Pokud bychom však byli nuceni sestavit například některou z kuželoseček klasicky s pomocí pravítka a kružítka s co největší možnou přesností, bylo by

²³ Zevrubně o této problematice pojednává Záhorec a Caban (1992).

k tomu zapotřebí velkého počtu kroků, množství pomocných konstrukcí i značná manuální zručnost.

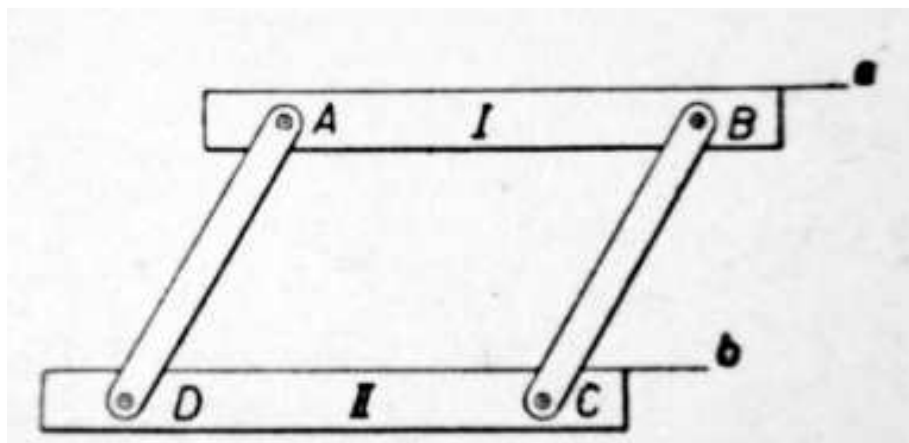
V minulosti se uplatňovaly různé pomůcky – zařízení a mechanismy, jejichž účelem bylo zrychlit a zefektivnit konstrukce používané v geometrii. První dvě zde uvedené pomůcky sice nesloužily k nakreslení křivky, ale vzhledem k jejich historické příslušnosti k tématu, mi přišlo nevhodné se o nich alespoň nezmínit.

Potřeba mechanismů, jejichž členy, případně určené body nebo i jediný bod opisují určitou předepsanou křivku, nesahá pouze do úzké oblasti geometrie nebo matematiky a není tudíž věcí zastaralou a překonanou, ale v daleko větší míře se váže k technické praxi. Mohlo by se zdát, že i zde mechanismy ztrácejí své uplatnění jsouce nahrazovány elektronickými součástkami. Oproti nim však mechanické konstrukce vykazují vyšší odolnost například proti mechanickému, tepelnému nebo elektromagnetickému poškození a mohou tak leckde konkurovat jako levnější, jednodušší a někdy i jediné řešení.

5.1 Mechanismy pro kreslení kuželoseček

5.1.1 Paralineál

Sestrojení rovnoběžek s pomocí pravítka a trojúhelníku, je obecně známý postup. Pokud však není nákresna v klidu (na lodi, v letadle, apod.), může být obtížné tuto konstrukci provést. (Hruška 1952). Nejen tyto situace mělo zjednodušit použití paraleneálu (obrázek 15), což jsou v podstatě dvě pravítka (I a II) udržovaná v rovnoběžné poloze dvojicí stejně dlouhých táhel upevněných v bodech A, B, C, D tvořících vrcholy rovnoběžníka. Dokazovat, že přímky sestavené pomocí paraleneálu jsou skutečně rovnoběžné, považují za bezpředmětné, jelikož tento důkaz plyne ze samotné definice paraleneálu (pantografu).



Obrázek 15 (Hruška 1952: 23)

5.1.2 Redukční odpichovátko

Tento nástroj (obrázek 16) sloužil k zvětšování a zmenšování úseček v racionálním poměru²⁴ $p : q$ a jejich dělení na celý počet stejně velkých dílů. Jedná se o dvě stejně dlouhá ramena opatřená na koncích hroty a pohyblivě spojená v bodě O , který dělí jejich délku v poměru:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{CO}{OD} = \frac{p}{q}$$

Z podobnosti trojúhelníků AOC a BOD pak plyne i následující vztah

$$\frac{AC}{DB} = \frac{p}{q}$$

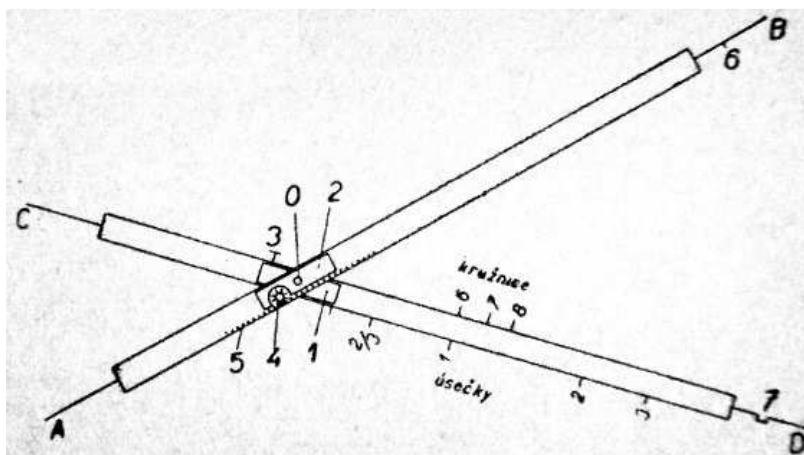
jehož úpravou dostaneme

$$|AC| = |DB| \frac{p}{q}$$

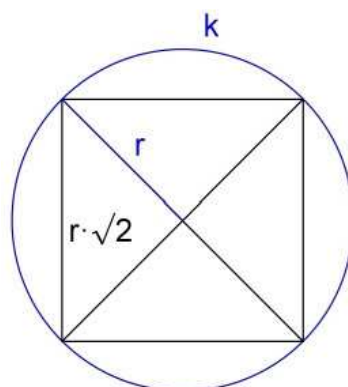
Redukčním odpichovátkem se dala rozdělit nejen úsečka, ale i obvod kružnice. Nastavování redukčního poměru se dělo pomocí stupnic na obou stranách tohoto odpichovátko (jedna pro úsečku, druhá pro kružnici) (Hruška 1952). Pokud se rozhodneme použít redukční odpichovátko k rozdělení obvodu kružnice (o známém poloměru) na n stejných částí, zdaleka ne vždy se nám to podaří při nastavení dělicího poměru pomocí celých čísel. Hruška (1952) uvádí jako příklad rozdělení kružnice na šest stejných částí, n je tedy 6, ale dělicí poměr

²⁴ tzv. redukční poměr

na stupnici pro úsečku je 1 : 1. Kdybychom se rozhodli rozdělit kružnici na 4 části ($n = 4$), museli bychom nastavit poměr 1 : $\sqrt{2}$ (obrázek 17). V dalších případech tomu bude podobně, aby tedy bylo odpichovátko přesné a jeho použití mělo smysl, bylo potřeba jej ocejchovat dvěma stupnicemi.



Obrázek 16 (Hruška 1952: 28)



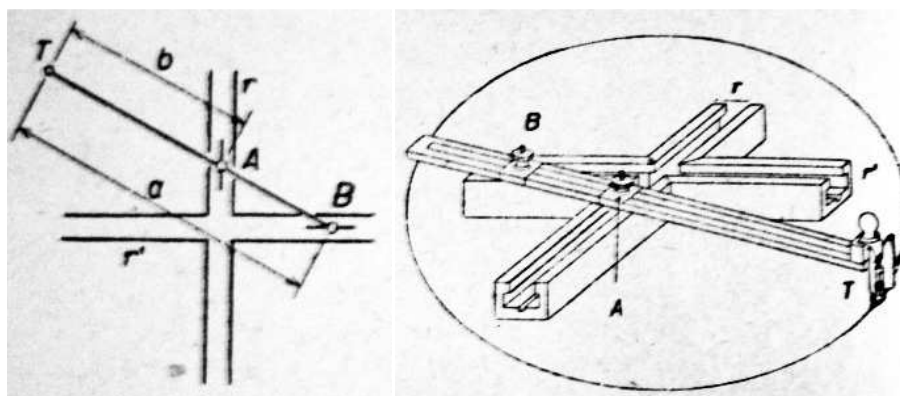
Obrázek 17

5.1.3 Elipsograf

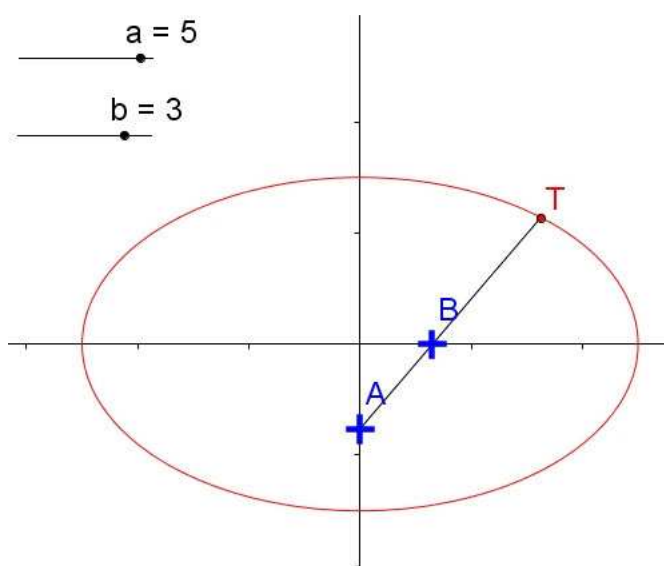
Jak je patrné z názvu, elipsograf je přístroj používaný k nakreslení elipsy.

Bylo vynalezeno mnoho přístrojů tohoto druhu. Většinou byly však vyrobeny pouze jednou svým vynálezcem. Pokud jsem mohl zjistit dotazem u odborných firem, dnes se po továrně vyrábí pouze elipsograf založený na sestavení elipsy posouváním konců úsečky stálé délky po osách (Hruška 1952: 37).

Na obrázku 18 je schéma a vyobrazení elipsografu, na obrázku 19 pak jeho model vytvořený v programu GeoGebra. Tato konstrukce elipsy bývá označována jako *rozdílová proužková konstrukce elipsy* (Pech 2004), jelikož vzdálenost bodů A, B je rovna rozdílu délek hlavní a vedlejší poloosy elipsy a pomocí proužku papíru, na jehož hranu vyznačíme body A, B, T můžeme přikládáním bodů A, B na dvě kolmé osy sestrojít libovolný počet bodů elipsy.



Obrázek 18 (Hruška 1952: 38)



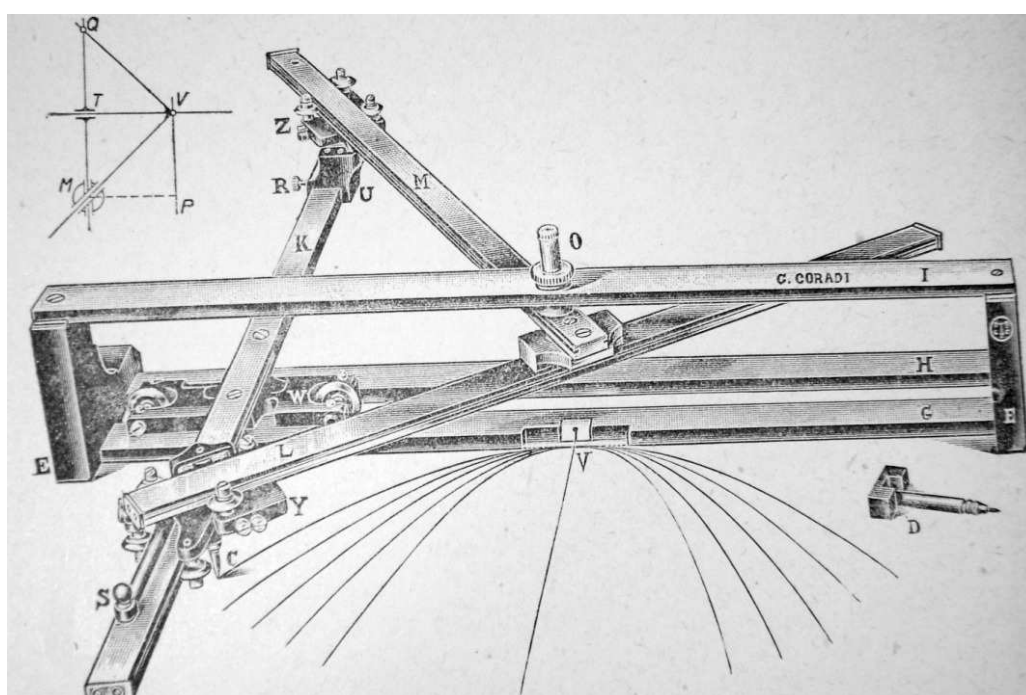
Obrázek 19

5.1.4 Parabolograf

Na obrázku 20 je další z mechanismů pro kreslení křivek zvané parabolograf, v levém horním rohu obrázku je patrné schéma tohoto přístroje. Na

obrázku 22 je model parabolografu v GeoGebře, oranžovou barvou jsou vyvedeny členy mechanismu, černá křivka představuje množinu bodů křivky opisované mechanismem, zelené body představují jednotlivé polohy bodu M .

Princip jeho použití je následovný, přímka spojující body V a T je tečnou kreslené paraboly a tvoří rám konstrukce. Rameno QM je vždy kolmé na rám konstrukce, po kterém se pohybuje a je spojeno v bodě Q otočnou vazbou s pákou QVM , Body QVM svírají pravý úhel. Bod M se může současně pohybovat po přímce procházející body QT i po rameni MV . Posouváním bodu Q se nastavuje parametr paraboly. (Hruška 1952)

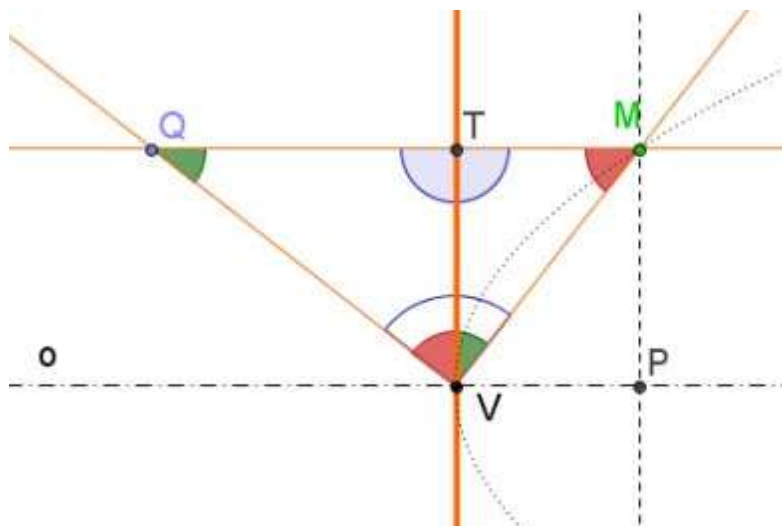


Obrázek 20 (Hruška 1952: 36)

Pokud z bodu M spustíme kolmici na osu paraboly a představíme si celý obrázek pootočený o 90° tak, že tečna paraboly představuje osu y , bod V leží v počátku soustavy souřadnic a bod P leží v kladném směru osy x , snadno nahlédneme, že rovnice paraboly ve tvaru $y^2 = 2px$ koresponduje se vztahem

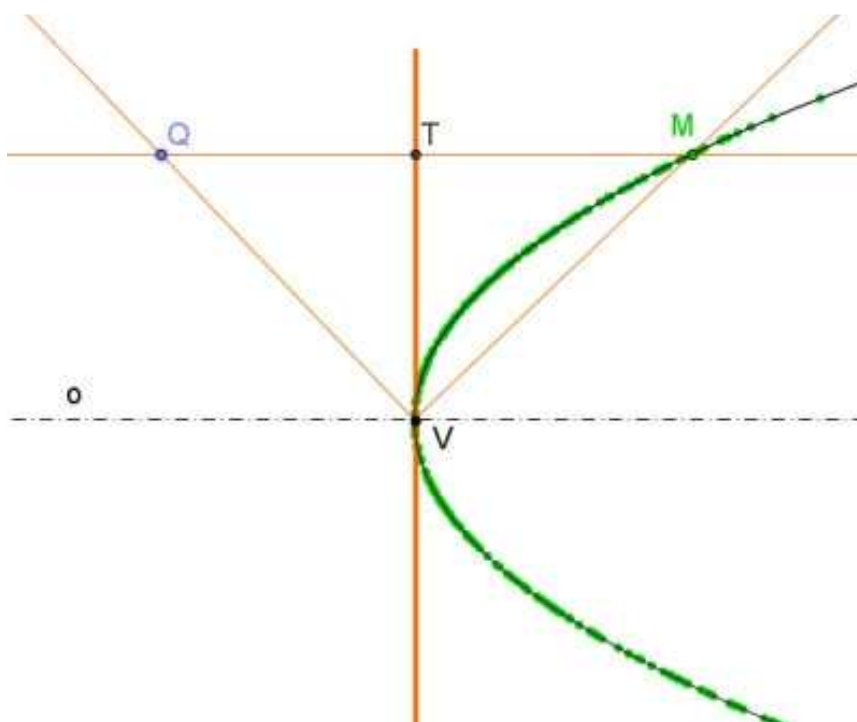
$$|MP|^2 = |TV|^2 = |TM| \cdot |TQ| = |VP| \cdot |TQ|$$

kde $|TQ| = 2p$.



Obrázek 21

Pro lepší představu uvádím popsané schéma (obrázek 21). Při rozboru situace využívám některé vlastnosti paraboly a matematické věty²⁵ zmiňované v mnoha matematických publikacích. Kuželosečkám a jejich vlastnostem se ve své práci věnuje například prof. Pech (2004).



Obrázek 22

²⁵ Na webových stránkách <http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/index.html> jsou matematické věty a příklady nejen z oblasti kuželoseček. Příklady jsou vytvořeny rovněž v programu GeoGebra.

Abych si situaci zjednodušil, zvolil jsem orientaci modelu v rovině tak, že vrchol V paraboly jsem umístil do počátku soustavy souřadnic, osa paraboly o splývá s osou x souřadnicového systému a přímka VT tvořící rám mechanismu je totožná s osou y . Souřadnice bodu Q udělujícího mechanismu pohyb jsem označil Q_1, Q_2 a souřadnice bodu M jednoduše x, y .

Nyní hledám vyjádření závislosti polohy bodu M v závislosti na poloze bodu Q . Souřadnice Q_1 , je na začátku pevně zvolena a během pohybu mechanismu se nemění, přímka QTM zůstává rovnoběžná s osou $o = x$ a díky tomu je $Q_2 = y$. Pravoúhlé trojúhelníky QTM a VMT jsou podobné podle věty o třech shodných úhlech. Pokud tedy označím $QT = Q_1$, $VT = Q_2$, $MT = x$, z poměrů odpovídajících si stran jednoduchou úpravou dostaneme vztah $y^2 = x \cdot Q_1$, který nápadně připomíná rovnici shodně orientované paraboly.

Hrot zasazený v bodě M tedy kreslí skutečně parabolu s vrcholem v bodě V , tečnou VT a parametrem $p = \frac{1}{2} |TQ|$.

5.1.5 Affinograf a koordinátograf

V příloze č. 4 je vyobrazen mechanismus firmy Coradi sloužící ke kreslení obrazců ležících v afinitě. V příloze č. 5 je detailní²⁶ pravoúhlý koordinátograf a v příloze 6 pak polární koordinátograf téže firmy. Oba tyto přístroje sloužily k přesnému vynášení a odečítání souřadnic.

5.2 Pantograf

Pantografový mechanismus je v technické praxi velmi rozšířen i v dnešní době můžeme najít spoustu příkladů jeho aplikací. Tímto pojmem bývají označovány i některé typy železničních lokomotiv, jejichž sběrač proudu je obdobný čtyřčlenný mechanismus, v příloze č. 3 vlevo dole, je typická ukázka využití pantografového mechanismu v předmětech denní potřeby. V příloze č. 9 jsou pak ukázky moderních pantografů používaných pro obrábění dřeva a gravírování (jejich konstrukce se od níže popsaného schématu příliš neliší).

²⁶ Označení detailní je v tomto případě chápáno jako přesný.

Na obrázku 23 je schéma pantografu. Jak je patrné, jedná se o čtyřčlenný mechanismus, jednotlivé klouby (rotační kinematické dvojice) jsou označeny písmeny A, B, C, D , přičemž tyto klouby tvoří vrcholy rovnoběžníka. Spojíme-li bod F (libovolně umístěný na členu 1) s bodem D , protne tato myšlená přímka spojnici bodů AB , jak je tomu na obrázku 12. Trojúhelníky DFC a DBZ jsou podobné, z čehož vyplývá, následující rovnost

$$\frac{DZ}{DF} = \frac{DB}{CF} = \text{konstanta}$$

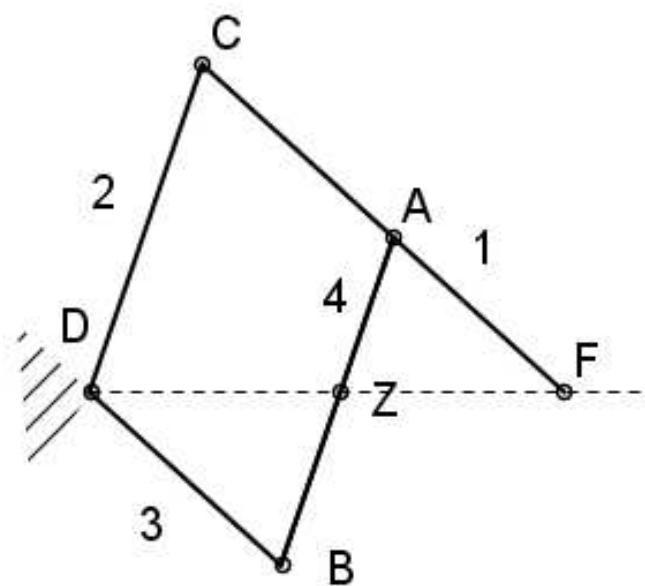
Bod D upevníme na plochu, do bodu F umístíme hrot a do bodu Z tužku, opisujeme-li pak hrotem v bodě F libovolný obrazec, kreslí tužka zasazená v bodě Z obrazec jemu podobný, stejně orientovaný, ale zmenšený v poměru zmenšení z .

$$z = \frac{DB}{CF} = \frac{DZ}{DF} = \frac{CA}{CF}$$

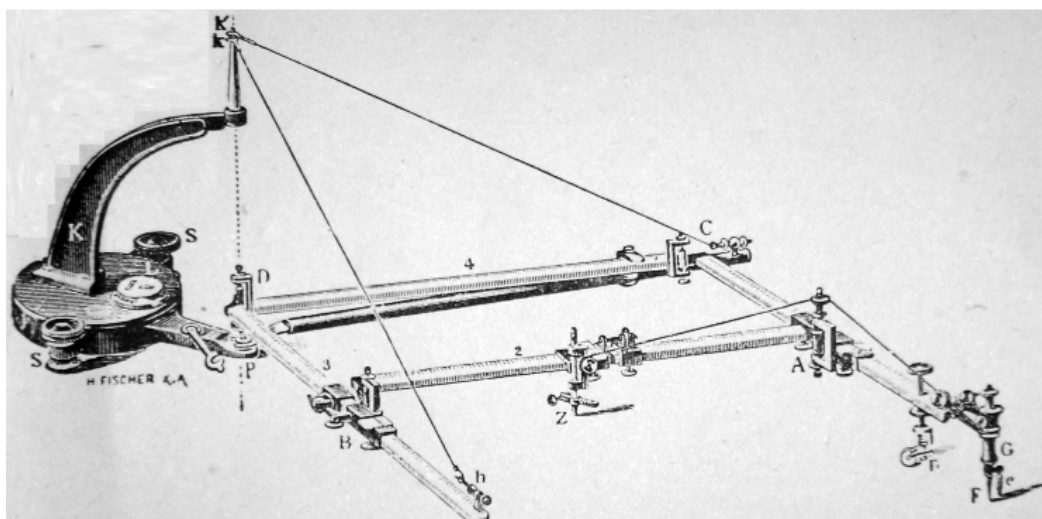
Zaměníme-li tužku a hrot v bodech Z a F bude pantograf obraz naopak zvětšovat a to v poměru $1 : z$. (Hruška 1952)

Na obrázcích 24 a 25 jsou vyobrazeny přehledné konstrukce dvou pantografů. Obrázek 24 zdá se koresponduje s uvedeným schématem, zatímco na obrázku 24 je na první pohled patrné odlišné uchycení, důvodem je omezení plynoucí z konstrukce tak, jak je uvedena na obrázku 23.

Blíží-li se poměr zmenšení 1, přiblíží se k sobě body F a Z natolik, že tato konstrukce ztrácí praktické využití pro které byla navržena, protože by kresba (rytí, soustružení) zasahovala do předlohy.

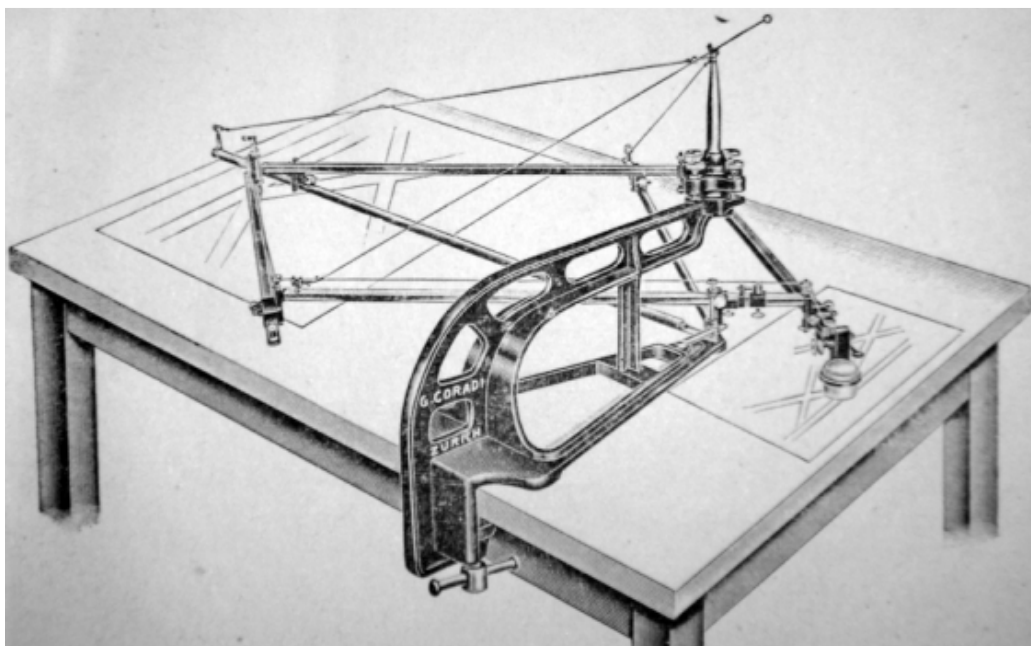


Obrázek 23



Obrázek 24 (Hruška 1952: 31)

Tento nedostatek byl odstraněn odlišným uchycením pantografu v bodě Z, bod F opisuje předlohu a hrot umístěný v bodě D vytváří obraz, tak jak je znázorněno na obrázku 23 .



Obrázek 25 (Hruška 1952: 31)

5.3 Mechanismy pro kreslení rovné čáry

Tento oddíl je již věnován problematice narýsování části přímky – rovné čáry. Ačkoliv se zdá tento úkol naprosto triviální, jelikož jsme zvyklí používat například pravítko nebo dnes už možná spíše nějaký matematický software, může nastat problém už při samotné definici „rovné čáry“. Otázka využití výpočetní techniky, spolehlivosti jejích metod je v tuto chvíli naprosto bezpředmětná.

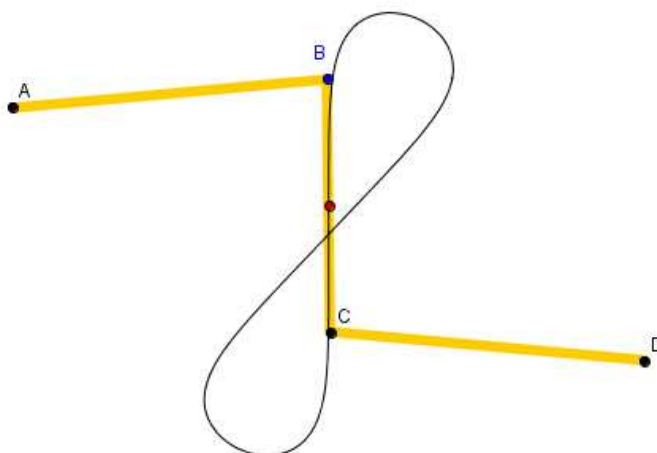
Odpovědí na otázku „Co je to rovná čára?“ může být celá řada, ne všechny definice vedou k řešení problému, jak ji sestrojít, na což poukazuje například již Kempe (1877), když se obrací k Euklidovým *Základům geometrie*. Po Euklidovi, jak známo, je pojmenovaná velice rozsáhlá oblast geometrie, jejíž krása a jednoduchost spočívají v možnosti řešit geometrické úlohy pouze s pomocí pravítka a kružítka (přímky a kružnice), jenže zde právě vyvstává otázka, jak získat dokonale rovné pravítko. Vynechám Kempeho úvahu o technologické přesnosti výroby daných součástí, faktem však zůstává, že narýsovat kružnici, nebo ještě lépe – získat zdroj relativně rovnoměrného otáčivého pohybu je o poznání snazší, než dobrat se pohybu přímočarému. Při hledání definice přímky většinou narazíme na slovní spojení „nekonečně dlouhá dokonale rovná křivka“ a ani Euklidovy definice (různě překládané) zde příliš nepomohou. Přece jen

přímka jako *délka bez šířky* nebo *nejkratší spojnice dvou vzdálených bodů* nedávají dostatečné mantinely. Přímku lze ale definovat i jako průsečnici dvou rovin, nebo jako množinu všech bodů majících od dvou různých bodů ležících v téže rovině stejnou vzdálenost (osa úsečky). Našly by se určitě i další a neotřelé způsoby, jak definovat rovnou čáru potažmo přímku, polopřímku – tenký světelný paprsek, trajektorie volného pádu, atd.

Myšlenky ohledně konstrukce „dokonale rovné čáry“ se zcela zjevně objevují v takto významné míře v období časově velice vzdáleném od dob Euklida a dalších řeckých myslitelů, ale i tak za nimi zřejmě stála ryze praktická potřeba na aplikace v dynamicky se rozvíjejícím průmyslu 19. století a hledání řešení se tak soustředilo na oblast rovinných mechanismů.

5.3.1 Wattův mechanismus

Kempe (1877) uvádí, že první, kdo se přiblížil k řešení tohoto problému, byl právě James Watt, který sestrojil mechanismus znázorněný na obrázku 26.

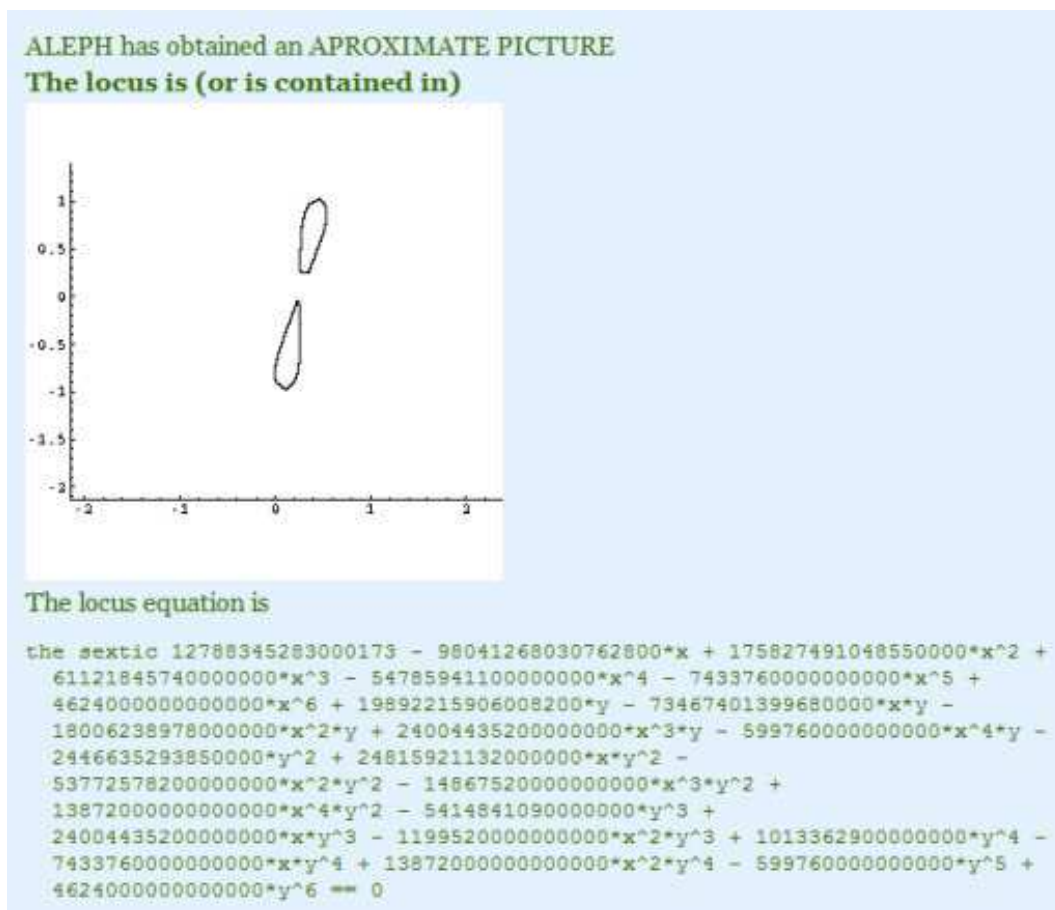


Obrázek 26

Mechanismus je v bodech A a D připevněn k rámu, vzdálenosti AB a CD jsou stejně velké a červený bod²⁷ (trasovač, kreslicí hrot) umístěný uprostřed úsečky BC opisuje při pohybu mechanismu křivku ve tvaru středově souměrné osmičky, kterou můžeme v literatuře najít pod označením Wattova křivka nebo

²⁷ V anglicky psané literatuře bývá označován jako *tracer*, *tracing point*.

Wattova lemniskáta. Oblast okolo střední části této křivky může relativně přesně nahradit část přímky, jedná se ovšem pouze o aproximaci, neboť jak uvádí Kempe (1877), jednotlivé segmenty uzavřené algebraické křivky nemohou obsahovat přímku. Obrázek 27 je ukázkou vyhodnocení dané křivky nástrojem *Aleph* včetně její rovnice, která potvrzuje, že se jedná o křivku šestého stupně.



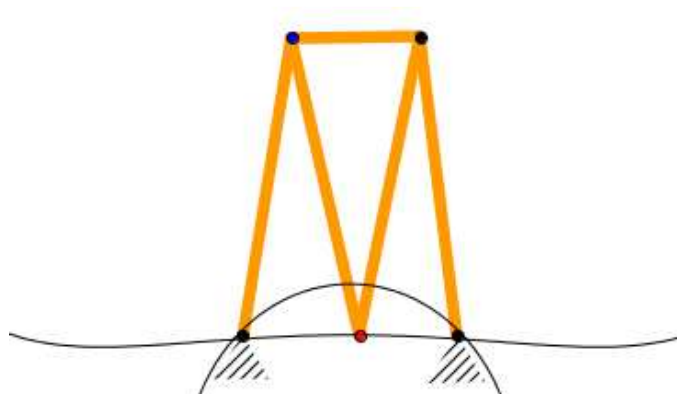
Obrázek 27

Wattův mechanismu se pod názvem Wattův přímovod uplatnil například v mechanismu řízení a zavěšení náprav osobních automobilů, kde se používá dodnes [www8],[www9].

5.3.2 Další mechanismy aproximující přímočarý pohyb

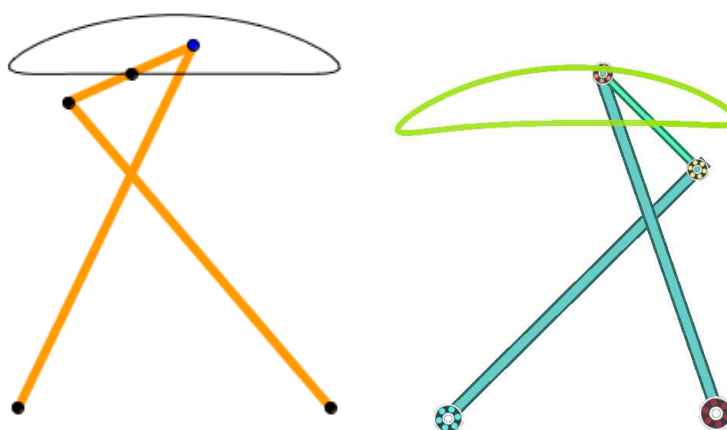
Předchozí mechanismus byl, jak uvádí Kempe (1877), první z řady mechanismů aproximujících v nějaké části pohybu určitého svého bodu přímočarý pohyb, nebyl ovšem jediný. Sám Kempe (1877) uvádí příklady dalších dvou nesoucí jména svých vynálezců Richarda Robertse (obrázek 28) a profesora

Tchebicheffa (obrázek 29). Na obrázku 29 vlevo je konstrukce modelu v programu GeoGebra, vpravo je stejná konstrukce v programu Phun. Robertsův mechanismus je v dolních bodech uchycen k rámu, jak naznačuje šrafování, hrot uprostřed (znázorněný červeně) se pohybuje po vyznačené křivce²⁸,



Obrázek 28

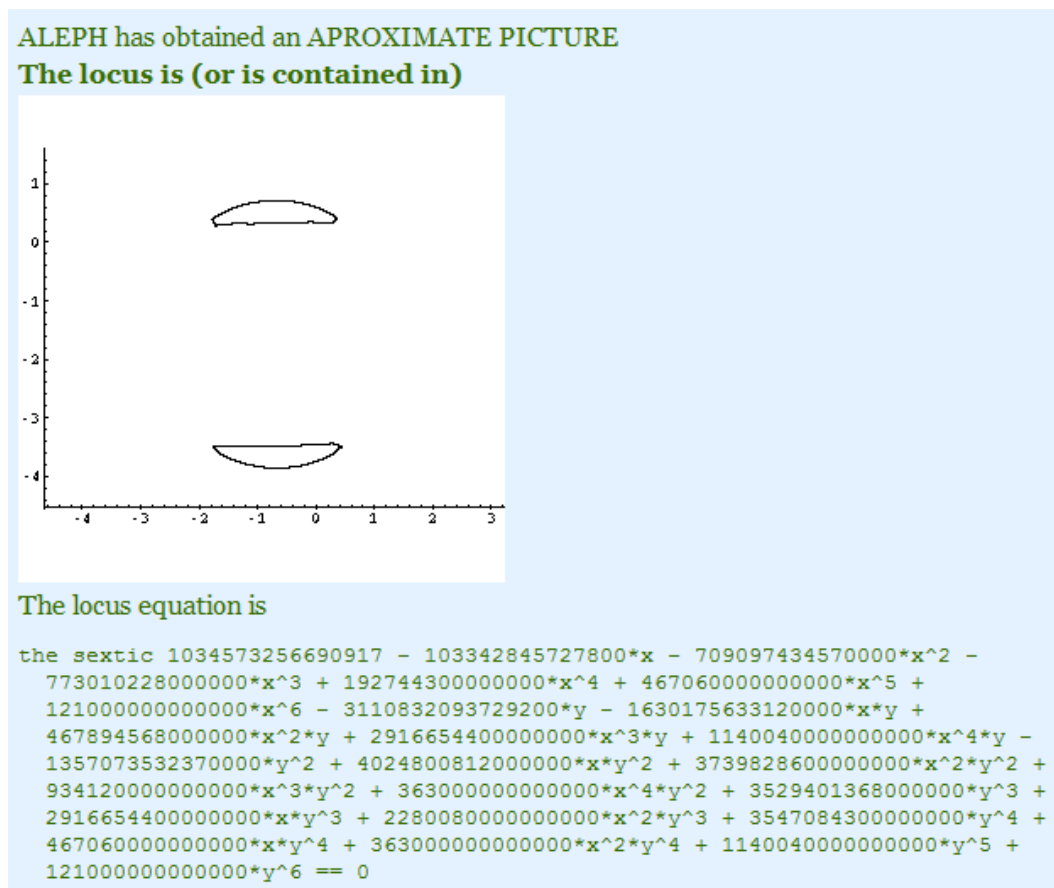
Tchebicheffův mechanismus může vzdáleně připomínat Wattův mechanismus, jelikož se k jeho konstrukci dostaneme pouhým přesmyknutím jednotlivých členů.



Obrázek 29

²⁸ Zdánlivě neopodstatněný oblouk uprostřed je součástí druhé větve křivky odpovídající teoretickému překlopení mechanismu do spodní poloviny a nekoresponduje s reálným kmitavým pohybem do stran. Bohužel se mi jej vzhledem ke konstrukci modelu nepodařilo odstranit.

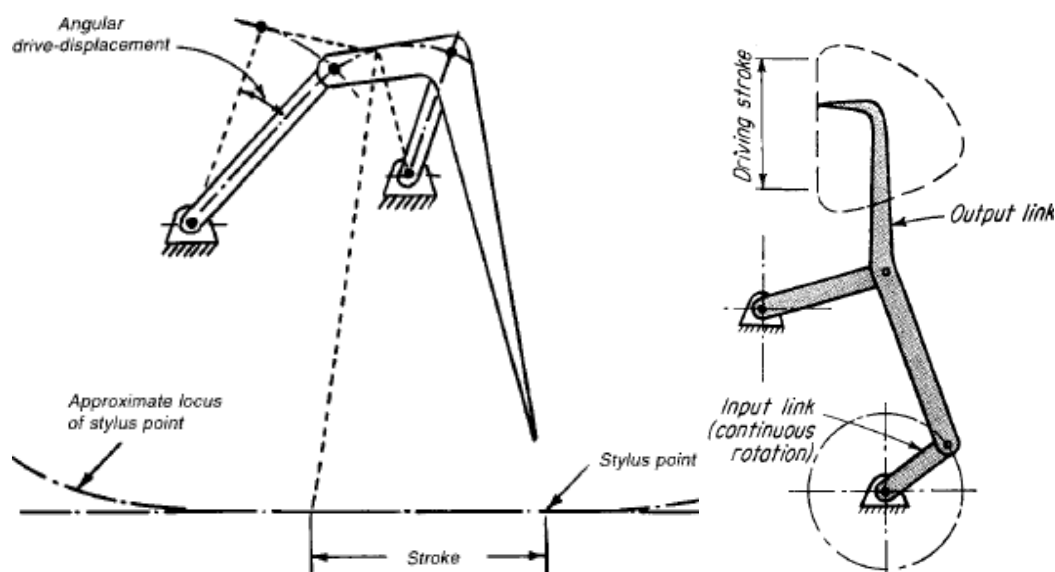
Na obrázku 30 je opět analýza mechanismu pomocí programu Aleph for Phun. I zde, podobně jako v případě Wattova mechanismu se jedná o křivku šestého stupně.



Obrázek 30

Další takové mechanismy prezentuje Sclater (2007), vizte obrázek 31, na levé straně je Four-bar (=čtyřčlenný) mechanismus, jeho konstrukce vykazuje velmi malou odchylku opisované křivky na relativně dlouhém úseku této dráhy. Na pravé straně je pak mechanismus nazvaný D-stroke, podle tvaru křivky kterou opisuje hrot tohoto mechanismu a jeho předností, jak uvádí Sclater (2007), je rychlý přechod po zakřivené části trajektorie oproti pohybu v její rovné části.

Zde uvedené mechanismy nejsou samozřejmě jediné, našla by se řada dalších, tyto ovšem obsahují i jiné druhy kinematických dvojic například posuvné.



Obrázek 31 (Sclater 2007: 86)

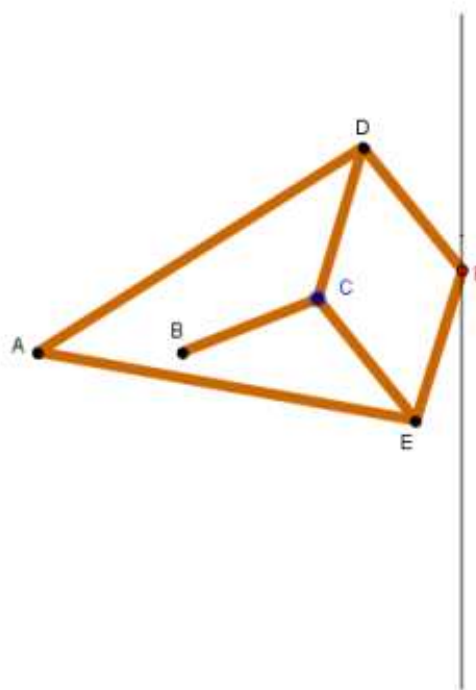
5.3.3 Peaucellierův-Lipkinův mechanismus

Tento mechanismus nese jména obou svých objevitelů²⁹, Kempe (1877) uvádí, že prvním, kdo mechanismus objevil, byl francouzský důstojník Peaucellier, ale jeho řešení nebylo uznáno jako správné a téměř upadlo v zapomnění, než jej „znovuobjevil“ ruský student Lipkin a po jeho ocenění byl Peaucellier rehabilitován, tolik historie. Faktem zůstává, že je tento mechanismus (obrázek 32) označován jako první generující rovnou čáru – úsečku.

Program GeoGebra nabízí mezi svými nástroji možnost ověřit vztah dvou objektů, proto jsem si položil otázku, zda by nebylo možné při vhodné volbě umístění mechanismu v systému souřadnic zkonstruovat přímkou rovnoběžnou s domnělým směrem úsečky generované tímto mechanismem a následně ověřit, rovnoběžnost obou těchto objektů. Jak jsem ale zjistil, program dokáže uvedenou množinu pouze zobrazit. Pokusil jsem se tedy sestavit model mechanismu v programech *Phun* a *SAM*, ale ani v jednom z nich se mi nepodařilo dodržet níže uvedené podmínky, kladené na rozměry jednotlivých členů. V programu *Phun* jsem měl navíc problémy s vícenásobnými spoji v bodech *C*, *D* a *E*, i když se mi podařilo model sestavit, nechoval se tak, jak jsem předpokládal, nástroj Aleph for

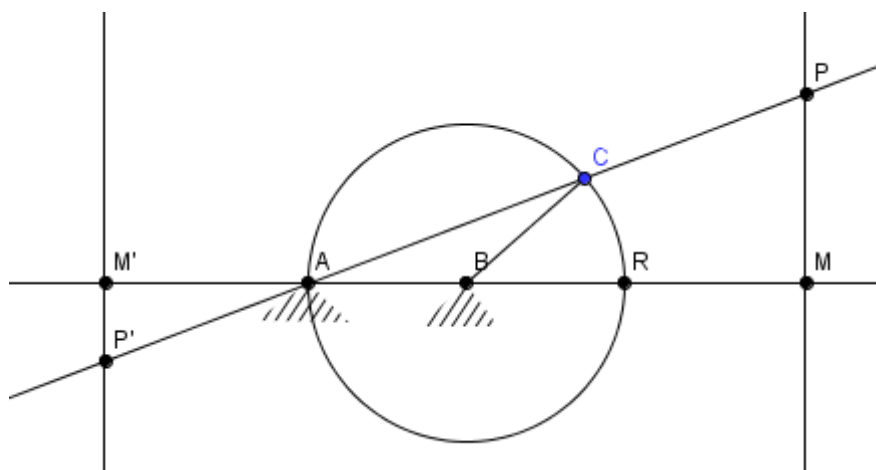
²⁹ V anglicky psané literatuře je označován podle svojí konstrukce jako Peaucellier-Lipkin Cell, slovo Cell označuje celou komoru, ... Bývají tak označovány i jiné mechanismy podobné konstrukce.

Phun rovněž nedokázal vzniklou křivku vyhodnotit, uvádím tak pouze obrázek modelu vytvořený v GeoGebře (obrázek 32). Nezbývá tedy než analytické vyšetření mechanismu tak, jak ukazuje Kempe (1877).



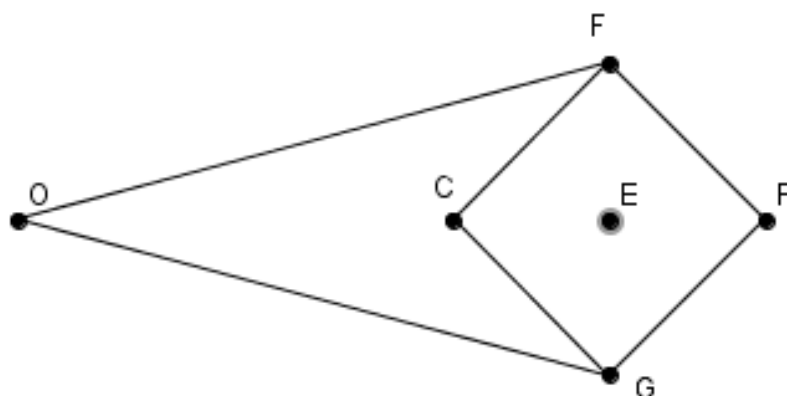
Obrázek 32

Tento mechanismus je na první pohled složitější, než několik předcházejících, sám Kempe (1877) jej při svém rozboru rozdělil na dvě části, jejichž fungování popsal odděleně. Přidržím se jeho postupu a nejprve se zaměřím na střed mechanismu, tzn. na body A , B , C a schéma prozatím zjednoduším podle obrázku 33.



Obrázek 33 (Kempe 1877: 14)

Jak je vidět body A a B jsou pevně spojené s rámem a bod C se pohybuje po kružnici o poloměru $|BC| = |AB|$, nebo jak uvádí Kempe, po kružnici ACR . Přímky PM a $P'M'$ jsou kolmé na přímku procházející body $MRBAM'$. Jelikož bod C opisuje kružnici nad průměrem AR , je podle Thaletovy věty trojúhelník ACR pravouhlý. A podle věty o podobnosti trojúhelníků se shodnými úhly, jsou zjevně trojúhelníky ACR a AMP podobné. Potom platí rovnost $\frac{AC}{AR} = \frac{AM}{AP}$ mezi poměry délek stran. Jednoduchou úpravou dostaneme $AC \cdot AP = AM \cdot AR$, kde AM a AR jsou konstantní (jak je patrné z obrázku 33), odtud vyplývá, že i součin na levé straně je konstantní. Pokud tedy navíc body A, C, P leží na jedné přímce, je přímka PM kolmá na přímku procházející body $M'ABRM$, to samé platí pro opačnou stranu a body $P'M'$.



Obrázek 34 (Kempe 1877: 15)

Obrázek 34 zobrazuje druhou část uvedeného mechanismu. Všechny úsečky (členy) si při pohybu zachovávají svoji délku, je tudíž zřejmé, že body O , C , P leží neustále na jedné přímce. Bod E je totožný s průsečíkem spojnic protilehlých vrcholů F , G a C , P . Pomocí Pythagorovy věty snadno zapíšeme vztahy:

$$OF^2 = OE^2 + EF^2,$$

$$FP^2 = EP^2 + EF^2,$$

jejich vzájemným odečtením dostaneme:

$$OF^2 - FP^2 = OE^2 - EP^2.$$

Pravou stranu rovnice upravíme podle vztahu $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$ a dostaneme:

$$OF^2 - FP^2 = OC \cdot OP,$$

jelikož jsou vzdálenosti OF a FP konstantní, musí být i součin na pravé straně konstantní.

Přenesením obou těchto případů do jednoho obrázku tak, aby bodu O odpovídal bod A a body C se překrývaly, přičemž bod C se bude pohybovat po kružnici, jak je uvedeno na obrázku 33, získáme původní mechanismus, ale již je jasné, že při pohybu mechanismu opisuje bod P rovnou čáru – úsečku.

Kempe (1877) ve svém díle tento princip opakuje u dalších mechanismů, které tak vznikají řetězením různě velkých smyček ve tvaru papírového draka³⁰.

5.4 Kempeho zevšeobecňující věta (Kempe's Universality Theorem)

Jméno Sira Alfreda Breye Kempeho bývá spojováno nejčastěji s dvěma na první pohled rozdílnými oblastmi matematiky, tím prvním může být tzv. Problém čtyř barev a tím druhým jsou zde prezentované rovinné mechanismy. V souvislosti s mechanismy se dostal do povědomí skrze svou matematickou větu nazývanou Universality Theorem.

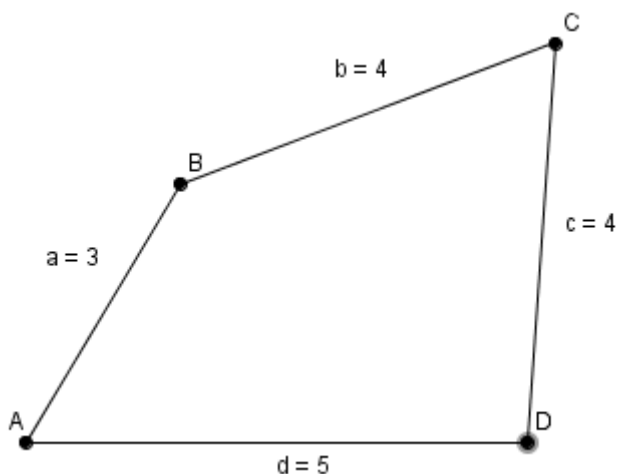
³⁰ Kempe (1877) skutečně tyto další odvozené konstrukce nazývá kites = draci.

How to Draw a Straight Line nebylo první Kempeho pojednání o mechanismech, o rok dříve v roce 1876 mu vyšel článek³¹, ve kterém vyslovuje domněnku, že část libovolné křivky v prostoru \mathbf{R}^2 dané polynomiální rovnicí lze nakreslit pomocí rovinného mechanismu, její platnost pro dvojdimenzionální prostor zde také dokázal. Podařilo se mi najít dva soudobé důkazy avšak pouze v elektronické podobě. Starší z nich je dílem M. Kapoviche a J. J. Millsona³², ten mladší je prací T. J. Tabbotta³³. Bohužel nedokážu posoudit jejich správnost a nemohu se tak relevantně vyjádřit k jejich obsahu.

6 Řešené úlohy

V této poslední kapitole chci představit dvě úlohy souvisejících s tématem Rovinné mechanismy, jež by bylo možné využít při výuce na střední škole.

- a) Určete rozsah pohybu hnacího a hnaného členu mechanismu na obrázku 35.



Obrázek 35

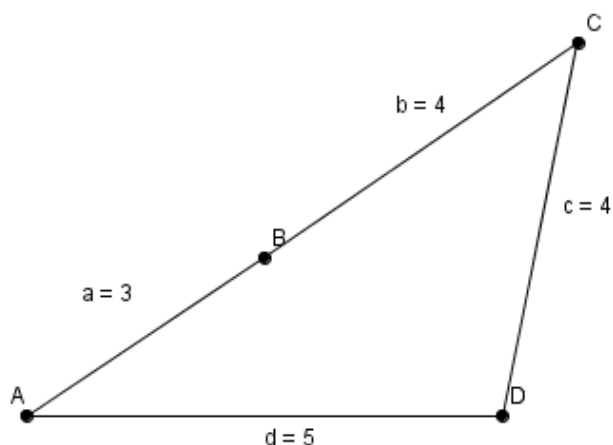
³¹ Bohužel se mi nepodařil zjistit název onoho sborníku (díla), v němž tento článek vyšel. Zde uvádím odkaz kde je článek k dispozici: http://courses.engr.illinois.edu/tam212/aml_PLMS-1875-Kempe-213-6.pdf

³² <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040938301000349>

³³ <http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>

Řešení:

U mechanismu hledáme mezní polohy, kdy se obrazec mechanismu zredukuje na trojúhelník, vizte obrázky 36a, 36b



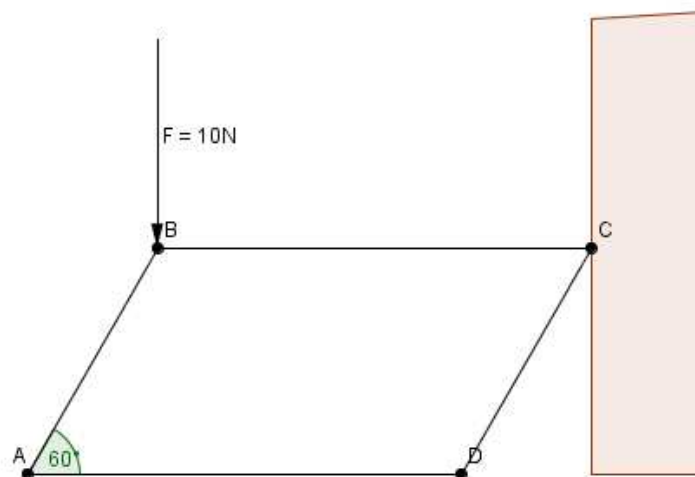
Obrázek 36a



Na obrázku 36a je obecný trojúhelník, z něhož pomocí kosinovy věty vypočteme velikost úhlu CDA , odtud pak doplňkový úhel do přímého úhlu. Z obrázku 36b je patrné že druhou mezní polohu nabývá hnaný člen pro úhel 180° , tím máme dán rozsah jeho pohybu. Hnací člen není ve svém pohybu nijak omezen.

Obrázek 36b

- b) Na kloub mechanismu působí tlaková síla o velikosti 10N ve směru kolmo dolů, tak jak je znázorněno na obrázku 37. Body A , D tvoří rám mechanismu a jsou pevně spojené s podložkou. Jak velkou silou působí mechanismus na překážku?



Obrázek 37

Řešení:

Sílu rozložíme vektorově do dvou složek na složku ve směru vektoru AB a na složku vektoru BC, která jediná nás zajímá. Z pravoúhlého trojúhelníka se známými úhly a jednou známou přeponou lehce vypočítáme velikost druhé přepony, tj. velikost síly působící kolmo na překážku podle vztahu:

$$|F_{BC}| = 10 \cdot \text{tg}30^\circ$$

Závěr

Mechanismy zcela nepochybně zaujmají významnou pozici v životě každého z nás, jsou součástí mnoha předmětů, s nimiž denně přicházíme do styku. Jakkoliv se zdají být jednoduché a všední, jejich přesný matematicko-fyzikální popis bývá mnohdy obtížný, zejména oprostíme-li se od modelových situací a snažíme se obsáhnout všechny aspekty jejich reálného chování.

Právě modelování mechanismů za pomoci výpočetní techniky a nástroje k tomu určené jsou jedním z okruhů postupujících napříč celou touto prací. Věřím, že se mi podařilo uvést vedle řekněme tradičních a ověřených i moderní a méně známé programy, tak aby si čtenář zajímavější se blíže o tuto problematiku mohl vybrat optimální cestu k hlubšímu poznávání. Výčet, který zde uvádím, není zdaleka vyčerpávající, ale domnívám se, že je relativně dobrým obrazem současné situace na poli modelovacího softwaru, použitelného pro tvorbu modelů rovinných mechanismů.

Při psaní mé diplomové práce jsem použil v podstatě dva tyto nástroje *Phun* a *GeoGebra*. Oba mají zcela jistě své přednosti, nicméně jejich přímé porovnání není dost dobře možné. *Phun* zaujme na první pohled předdefinovanými materiálovými vlastnostmi prostředí a jednotlivých objektů a zdá se tedy jako dobrá volba pro nejrůznější technické (fyzikální) simulace. *GeoGebra* při porovnání nabízí velké množství nástrojů, určitou „čistotu“ zpracování a hlavně přesnost při práci. Právě přesnost je jednou z věcí, které lze *Phunu* vytýkat, kvůli vzájemným kolizím a absenci souřadnic je zejména u složitějších modelů velmi obtížné odhadnout měřítko, nehledě na fakt, že jednotlivé objekty včetně vazeb vykazují určitou pružnost a na modelu jsou pak patrné vibrace, které mohou způsobovat zcela neočekávané chování modelu. Ani tak bych ale *Phun* (Algodo) úplně nezatracoval, vyplňuje totiž jinak prázdné místo v segmentu simulačních nástrojů, které jsou volně dostupné a mají relativně vysoký vzdělávací potenciál. Program *Geogebra* tedy vyšel z celého porovnání velmi dobře, i když se v oblasti modelování rovinných mechanismů nemůže měřit se specializovanými programy.

Další velkou kapitolu mé práce tvoří kategorizace jednotlivých metod matematického popisu mechanismů. Při studiu tohoto okruhu jsem zjistil, že navzdory velké škále možností jak nahlížet na danou problematiku se zdaleka ne všechny metody, které se používají k analýze prostorových mechanismů, se hodí k popisu rovinných mechanismů a naopak. Vhodná volba použité metody tak může mít rozhodující význam na složitost řešení. Jako téměř univerzální se pak jeví maticová metoda, a to pro její jednoduchý zápis srozumitelný výpočetní technice, jejíž využití v analýze a syntéze mechanismů a mechanických systémů je nutností.

Ke konci práce jsem se soustředil na mechanismy sloužící ke kreslení rovinných křivek. Zde se mi podařilo najít a popsat relativně velké množství rovinných mechanismů, ačkoliv ne všechny splňovali podmínku, aby takový mechanismus obsahoval pouze rotační kinematické dvojice. Domnívám se, že to mou práci obohatilo. Celá teorie ohledně rovinných mechanismů je velice zajímavá a jméno Sira A. B. Kempeho je s ní neodmyslitelně spojeno, proto jsem si neodpustil poznámku ohledně důkazu jeho věty, ačkoliv jsem tuto myšlenku ve své práci nikde nerozvíjel.

V samotném závěru jsem uvedl dvě jednoduché úlohy, které mohou být bez problémů využity při výuce matematiky na střední škole. Jak již bylo řečeno v úvodu, téma této diplomové práce prolíná mnoha technickými obory, je proto poněkud nesnadné najít zde úlohy, které nepůsobí demotivujícím dojmem kvůli jakémusi fyzikálnímu nádechu. Tím chci naznačit, že i možná zde se nachází prostor pro další práci. Například soubor úloh v programu GeoGebra z dané oblasti řešitelných prostředky středoškolské matematiky.

Zpracovávané téma pro mne bylo mnohdy neprobádanou oblastí plnou nových poznatků a sama (ne)zkušenost s tvorbou práce tohoto formátu byla určitou výzvou. Ačkoliv se domnívám, že se mi podařilo do určité míry úspěšně splnit zadané úkoly, necítím plné uspokojení z odvedené práce, jelikož cítím, že jsem se mnohdy jen letmo dotknul kapitol, které by možná stály za hlubší prozkoumání.

Literatura

- Brát, V. *Maticové metody v analýze a syntéze prostorových vázaných systémů*. Praha : Academia, 1981, 212s.
- Durnová, H. Antonín Svoboda (1907 – 1980) – průkopník výpočetní techniky v Československu. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 2007, roč. 52, č. 4, s. 322 – 329. ISSN 0032-2423
- Grepl, R.: *Kinematika a dynamika mechatronických systémů*. Brno : CERM, 2007, 158s., ISBN 978-80-214-3530-8
- Hadrava, P., Hadravová A. Mechanismus z Antikythéry. *Vesmír*, 2007, roč. 86, č. 12, s. 802 – 807. ISSN 1214-4029
- Hruška, V. *Počet grafický a graficko – mechanický*. Praha : Přírodovědecké vydavatelství, 1952, 1072s.
- Jančina, J., Pekárek, F., Stareček, F. *Mechanika II*. Bratislava : Edičné stredisko SVŠT, 1982, 193s.
- Jones, F. D. *Mechanisms and Mechanical Movements*. New York: The Industrial Press, 1919
- Laš, V., Hlaváč, Z., Vacek, V. *Technická mechanika v příkladech*. Plzeň : Západočeská univerzita, 2001, 160 s.
- Karger, A.; Kargerová, M.: *Základy Robotiky a prostorové kinematiky*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2000, 256s., ISBN 80-01-02183-1
- Kempe, A. B. *How to draw a straight line*. London : MacMillan and Co., 1877
- Martišek, D. *Matematické principy grafických systémů*. Brno: CENTA, 2002, ISBN 80-85763-19-2
- Norton, R. L. *Design of machinery*. USA : McGraw-Hill, 1999, ISBN 0-07-048395-7
- Pech, P. *Kuželosečky*. České Budějovice : Jihočeská univerzita, 2004, ISBN 80-7040-755-7
- Sclater, N. *Mechanisms and Mechanical Devices Sourcebook*. USA : McGraw-Hill, 2007, ISBN-13: 978-0-07-146761-2
- Slavík, J.; Stejskal, V.; Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997, 319s., ISBN 80-01-01622-6

Šíma, Z. Za tajemstvím pražského orloje: otázky a odpovědi. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 2009, roč. 54, č. 4, s. 269 – 275. ISSN 0032-2423

Tiamina, D. Historical Mechanisms for Drawing Curves. In Shell-Gellash, A. *Hands on History*. USA : Mathematical Association of America, 2007. p. 89 – 105. ISBN 978-0-88385-910-6

Tsai, L. W.: *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, USA, 1999, 520s., ISBN: 978-0-471-32593-7

Záhorec, O.; Caban S.: *Aplikovaná mechanika*. OLYMPIA, Košice, 1992, 458s., ISBN 80-7099-150-X

Zeman, V.; Laš, V.: *Technická mechanika*. ZU v Plzni, Plzeň, 2001, 191s., ISBN 80-7082-789-0

Internetové zdroje:

[www1] [online] [cit. 2013-1-1] Dostupný z WWW:
<<http://www.bellarose.cz/dekorace/stolni-lampa-wood/>>

[www2] [online] [cit. 2013-1-1] Dostupný z WWW:
<<http://www.partnercompany.cz/pronajem-nakladace-mikrobusu-dodavky-valniku.html>>

[www3] [online] [cit. 2012-12-5] Dostupný z WWW:
<<http://www.pronar.cz/festa-kleste-katskup360.php>>

[www4] [online] [cit. 2013-1-2] Dostupný z WWW:
<<http://www.branoslovakia.sk/en/index.php?id=24>>

[www5] [online] [cit. 2013-1-1] Dostupný z WWW:
<<http://www.e-domov.cz/susak-na-pradlo-x-tower-kovovy/>>

[www6] [online] [cit. 2013-1-2] Dostupný z WWW:
<<http://cvicbni-pomucky.kupteonline.cz/kostra-dolni-koncetiny-s-kycelni-kosti-prava-56048>>

[www7] [online] [cit. 2012-5-20] Dostupný z WWW:

<http://www.youtube.com/watch?v=e32h7Cm44s4>

[www8] [online] [cit. 2013-3-25] Dostupný z WWW:
<http://cs.autolexicon.net/articles/wattuv-primovod/>

[www9] [online] [cit. 2013-4-1] Dostupný z WWW:
<http://www.auto.cz/opel-astra-podvozek-4005>

[www10] [online] [cit. 2012-12-1] Dostupný z WWW:
<http://www.gravotech.sk/img/produkty/stroje/im3-velky.jpg>

[www11] [online] [cit. 2012-12-1] Dostupný z WWW:
<http://www.gravotech.sk/img/produkty/stroje/txl-velky.jpg>

[www12] [online] [cit. 2013-4-27] Dostupný z WWW:
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Archimedes_screw.JPG

[www13] [online] [cit. 2013-4-27] Dostupný z WWW:
<http://www.skolatextilu.cz/history/img/tkhist10.jpg>

[www14] [online] [cit. 2013-4-27] Dostupný z WWW:
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/57/Jind%C5%99ich_VI._obl%C3%A9h%C3%A1_Neapol_%281191%29.jpg

[www15] [online] [cit. 2012-11-27] Dostupný z WWW:
<http://www.mortaigne.com/zrod-dila-cviceni-se-zbranemi-jacoba-de-gheyn.a140.html>

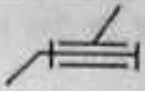

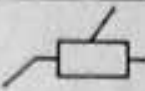
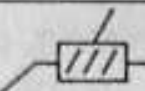






[www16] [online] [cit. 2013-4-27] Dostupný z WWW:
<http://www.ford.cz/AboutFord/Corporateinformation/Heritage/The%20EvolutionofMassProduction>

Přílohy

- Příloha č. 1: Tabulka prostorových kinematických dvojic dle V. Bráta
- Příloha č. 2: Tabulka rovinných kinematických dvojic dle Záhorce a Cabana
- Příloha č. 3: Příklady některých běžně používaných mechanismů.
- Příloha č. 4: Affinograf
- Příloha č. 5: Detailní pravoúhlý koordinatograf
- Příloha č. 6: Polární koordinatograf
- Příloha č. 7: Pantograf v technické praxi

Příloha č. 1: Tabulka prostorových kinematických dvojic dle V. Bráta

Převzato od Bráta 1981

NÁZEV DVOJICE	POČ. ST. VOL- NOSTI	TŘÍ- DA	KINEMATICKÉ SCHEMA	OZNAČENÍ	
ROTAČNÍ	1	5		R	 N
POSUVNÁ	1	5		P	
ŠROUBOVÁ	1	5		H	
VÁLCOVÁ (CYLINDRICKÁ)	2	4		C	
SFÉRICKÁ	3	3		S	
PLOCHÁ (ROVINOVÁ)	3	3		F	
OBECNÁ	5	1		G	
LIBOVOLNÁ DVOJICE	i	$6-i$		K, K_i	
ROZPOJENÁ DVOJICE	-	-		-	

Příloha č. 2: Tabulka rovinných kinematických dvojic dle Záhorce a Cabana

Převzato Záhorce a Cabana 1992

P.č.	NÁZOV	SCHÉMATICKÉ ZNÁZORNĚNIE	ZNAČKA	TRIEDA	TYP	NEREALIZOVANÉ POHYBY	PARAMETRE REAKCIÍ	SKLÁTKA N. ZVU
1	bodová (všeobecná)			1	f_1	v_y	R_y	g o
2	otáčavá (rotačná)			2	f_2	v_x, v_y	R_x, R_y	r
3	posuvná (translačná)			2	f_2	v_y ω_z	R_y M_{Rz}	p
4	valivá			2	f_2	$v_y, v_x = v_k = 0$	$R_y = F_n, R_x = F_t$ $ F_t \leq \mu F_n$	v

Příloha č. 3: Příklady některých běžně používaných mechanismů.

Převzato z [www1]



Převzato z [www2]



Převzato z [www3]



Převzato z [www4]



Převzato z [www5]

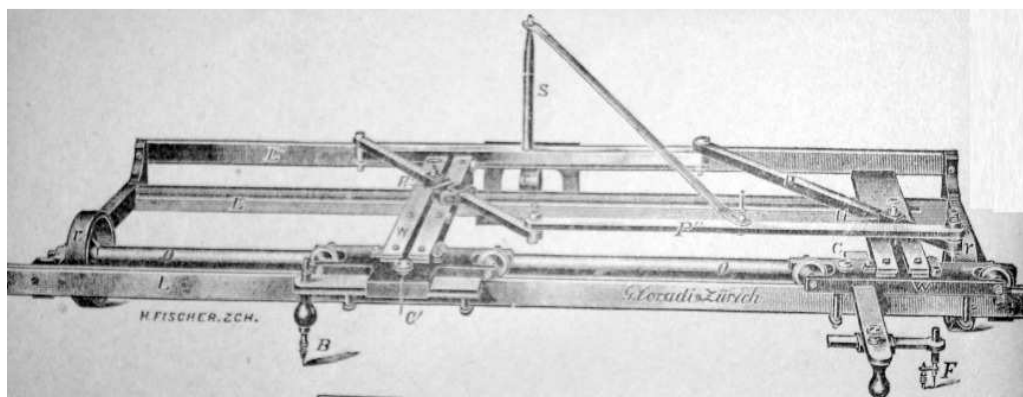


Převzato z [www6]



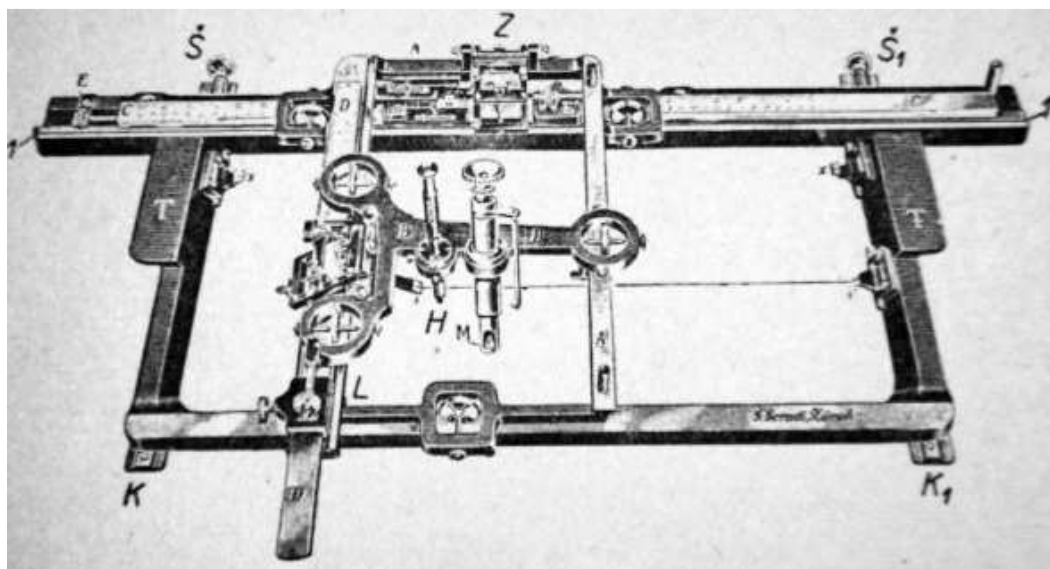
Příloha č. 4: Affinograf

Převzato z Hruška (1952: 32)



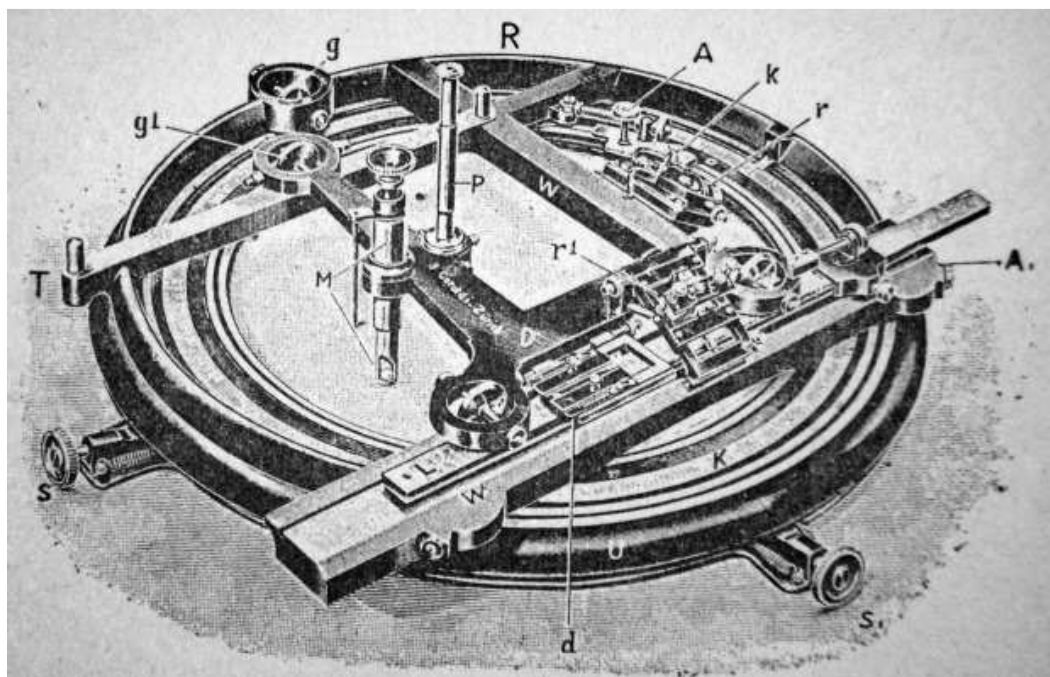
Příloha č. 5: Detailní pravouhlý koordinatograf

Převzato z Hruška (1952: 39)



Příloha č. 6: Polární koordinátograf

Převzato z Hruška (1952: 42)



Příloha č. 7: Pantograf v technické praxi

Převzato z [www10]



Převzato z [www11]

