Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

POSLOUPNOSTI A ŘADY (NEJEN) VE SLOVNÍCH ÚLOHÁCH

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petra FIŘTOVÁ

České Budějovice, duben 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Posloupnosti a řady (nejen) ve slovních úlohách jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 25. dubna 2013 ....

Petra Fiřtová

Chtěla bych poděkovat RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za její odborné vedení, za poskytnutí cenných rad, za trpělivost a čas, který mi při zpracování diplomové práce věnovala.

Abstrakt

Práce obsahuje sbírku úloh na posloupnosti a číselné řady na středních školách. Tato problematika je velice rozsáhlá a práce se převážně zaměřuje na využití posloupností a řad ve slovních úlohách, které jsou tématicky rozděleny podle zaměření jednotlivých úloh. Úlohy jsou členěny z pohledu historického, z pohledu aplikace v planimetrii a stereometrii, aplikace ve finanční matematice, atd. V části věnované posloupnostem je uvedena navíc kapitola věnovaná příkladům z matematických olympiád pro střední školy.

Klíčová slova

Posloupnost, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost, limita posloupnosti, (nekonečná) číselná řada, (nekonečná) geometrická řada.

Abstract

The dissertation is comprised of list of tasks with the sequences and set of numbers used to the high schools. This issue is very extensive and the dissertation is focused on application of the sequesces and set of numberss in word mathematic tasks which are thematicly devided into particular tasks according to their specialization. The tasks are classified from the point of historical view as well as from the point of application view - in planimetry and stereometry, in financial mathematics etc. In the part dedicated to sequences is stated extra chapter focused on excersises from mathematic olympics for high schools.

Keywords

The sequence, the arithemtical sequence, the geometrical sequence, the sequence limit, the infinite set of numbers, the infinite geometric series.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Téma posloupnosti a číselné řady jsem si vybrala hlavně proto, že si myslím, že je tato oblast matematiky velice zajímavá a na středních školách někdy trochu opomíjená a probrány pouze její základy. Velké množství současných středoškolských učebnic se této části příliš nevěnuje, a proto i řada příkladů uvedených v mé práci je čerpána z učebnic vydaných v 80. - 90. letech. Práce obsahuje sbírku řešených příkladů doplněných názornými obrázky k pochopení zadání. Příklady jsou určeny žákům středních škol.

Práce má dvě hlavní části - Posloupnosti a Číselné řady, které se dále dělí na podkapitoly. Obě hlavní části nejprve obsahují teoretický základ, vysvětlení potřebných pojmů a vztahů, které jsou později využity při výpočtech.

Část věnovaná posloupnostem obsahuje první podkapitolu nazvanou Historické úlohy, kde je na několika příkladech, někdy starých až tisíce let, ukázáno, jak to dříve matematici neměli vůbec jednoduché. Do dalších kapitol jsou příklady rozděleny podle tématu a to z hlediska zjišťování vlastností posloupností, použití v planimetrii a stereometrii, v technicky a přírodovědně zaměřených úlohách, atd. V závěru této části je uvedena podkapitola obsahující příklady z matematických olympiád pro střední školy a podkapitola zaměřená na obtížnější úlohy, které se obvykle na středních školách neprobírají.

V části Číselné řady je také první podkapitola nazvaná Historické úlohy. Mezi asi nejznámější patří úloha Achilles a želva. Následuje podkapitola zaměřená na řešení rovnic s nekonečnou číselnou řadu nebo přepsání periodického čísla na zlomek. V závěru je podkapitola zaměřená na úlohy obsahující geometrickou reprezentaci nekonečných řad.

Kapitola 2

Posloupnosti

2.1 Pojem posloupnost

Definice 2.1
Posloupnost reálných čísel se nazývá zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Nekonečnou posloupností se nazývá každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Konečnou posloupností se nazývá každá funkce, jejíž definiční obor je taková podmnožina přirozených čísel $\{n \in \mathbb{N}; n \leq n_0\}$, kde n_0 je pevně dané přirozené číslo.

Funkční hodnoty posloupností nazýváme členy příslušné posloupnosti. Posloupnosti značíme symbolem $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}_{n_0}^{\infty}$. Pokud definiční obor tvoří všechna přirozená čísla, lze použít jen zápis $\{a_n\}$. Číslo a_n se nazývá n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$ a číslu n se říká index prvku.

Budeme-li dále hovořit o posloupnosti, budeme tím myslet nekonečnou posloupnost.

Posloupnost můžeme určit několika způsoby. Jedním z nich je výčet jednotlivých prvků posloupnosti ve tvaru $a_1, a_2, ..., a_n$, který se používá převážně u konečných posloupností. U tohoto způsobu zápisu je důležité si uvědomit, že záleží na pořadí, ve kterém jsou členy posloupnosti zapsány. Např. posloupnost s výčtem prvků

$$3, 5, 8, 10, 13, 15$$

se nerovná posloupnosti s prvky

$$15, 3, 13, 5, 10, 8,$$

i když obsahuje přesně stejné číslice.[6]

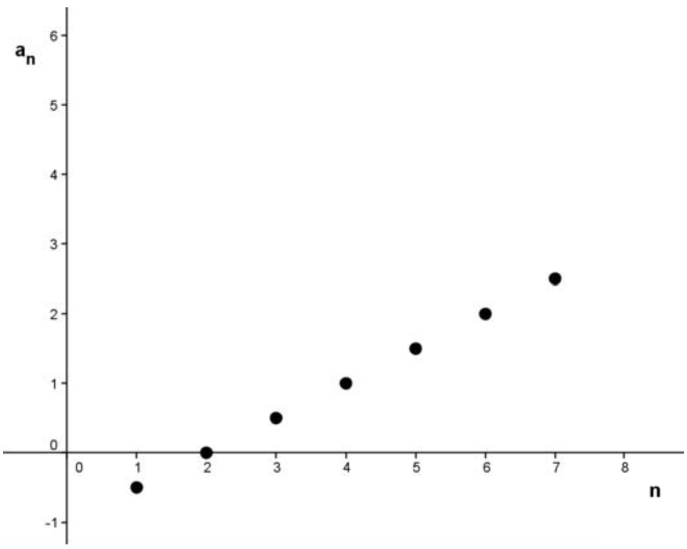
U dalšího způsobu určení posloupnosti říkáme, že posloupnost je dána vzorcem pro n-tý člen. Takto je určena například posloupnost

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Poslední způsob zadání se nazývá rekurentní určení posloupnosti, kdy je zadán první člen posloupnosti, resp. prvních k členů posloupnosti a současně vzorec pro výpočet $(n+1)$-tého členu, resp. $(n+k)$-tého členu posloupnosti. Např. níže uvedená posloupnost je zadaná rekurentně

$$a_1 = 1, a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n.$$

Pod pojmem posloupnost rozumíme speciální funkci, graf posloupnosti budeme sestrojovat stejným způsobem jako u jiných funkcí. Grafem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je množina bodů v rovině, které mají souřadnice $[1, a_1]$, $[2, a_2]$, …, $[n, a_n]$. Příklad graficky znázorněné posloupnosti je na obrázku 2.1. [8]



Obrázek 2.1: Graf posloupnosti $\left\{\frac{1}{2}n - 1\right\}$.

2.2 Vlastnosti posloupností

Jak už jsme dříve uvedli, posloupnost je speciální funkce. Proto i u posloupností lze hovořit o vlastnostech jako je monotónie a omezenost, jejichž definování je analogické s definicemi vlastností funkcí.

Definice 2.2

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} > a_n$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá klesající, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} < a_n$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \geq a_n$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \leq a_n$. [9]

Příkladem rostoucí posloupnosti je posloupnost kladných celých čísel 0, 1, 2, 3,... Příkladem klesající posloupnosti je posloupnost $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ zadaná vzorcem pro n-tý člen

$$\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Příkladem neklesající posloupnosti je posloupnost $1, 2, 5, 5, 7, 9, 11, 11, 13, \ldots$ Příkladem nerostoucí posloupnosti je posloupnost 8, 7, 6, 6, 5, 2, ...

Definice 2.3

Posloupnosti rostoucí a klesající se souhrnně nazývají ryze monotónní posloupnosti. Posloupnosti neklesající a nerostoucí se nazývají monotónní posloupnosti.

Definice 2.4

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá konstantní, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n$. [9]

Příkladem konstantní posloupnosti je posloupnost $5, 5, 5, \ldots$, tj. $\{5\}_{n=1}^{\infty}$. Existují i posloupnosti, které nejsou monotónní. Mezi takové patří například posloupnost $\{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž první členy jsou -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

Definice 2.5

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá zdola omezená, právě když existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq k$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá shora omezená, právě když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$.

Definice 2.6
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá omezená posloupnost, jestliže je zároveň zdola a shora omezená. Jinak řečeno, je-li posloupnost omezená, potom existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny členy této posloupnosti platí

$$|a_n| \leq M. \qquad [7]$$

Posloupnost může mít obě předchozí vlastnosti (monotónnost, omezenost) nebo jen jednu z nich nebo nemusí splňovat podmínky ani pro jednu z těchto vlastností. Příkladem posloupnosti, která není ani monotónní, ani omezená, je posloupnost $\{(-1)^{n+1} \cdot 2^n\}$.

2.3 Aritmetická posloupnost

Definice 2.7
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická, právě když existuje takové číslo d, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

neboli

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Číslo d se nazývá diference (aritmetické posloupnosti). [6]

Příkladem aritmetické posloupnosti je posloupnost

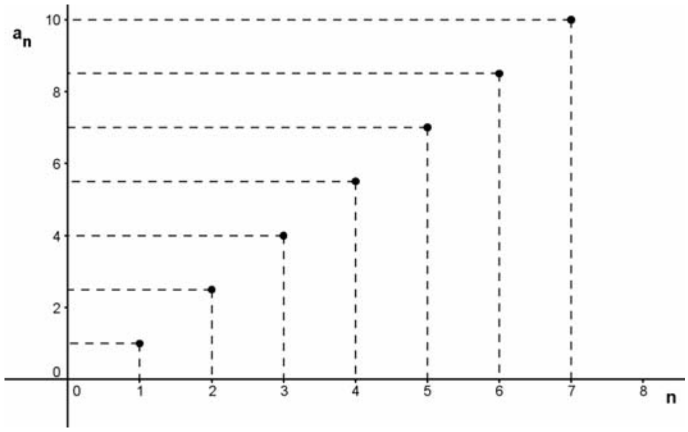
$$\left\{\frac{3n-1}{2}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

která je graficky znázorněna na obrázku 2.2.

Věta 2.1
Nechť je aritmetická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dána prvním členem a_1 a diferencí d, lze její $n-$tý člen vyjádřit vzorcem

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{2.1}$$

Důkaz:
Výše uvedenou větu dokážeme pomocí matematické indukce.



Obrázek 2.2: Graf aritmetické posloupnosti $\left\{\frac{3n-1}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

1. Nechť $n = 1$: Vztah pro dané n platí

$$a_1 = a_1 + (1-1)d.$$

2. Dokážeme, zda věta platí i pro $n+1$:

$$a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)d = a_1 + nd \tag{2.2}$$

Nyní vyjdeme z definice aritmetické posloupnosti. Víme, že platí

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{2.3}$$

Do vztahu (2.3) dosadíme za a_n rovnost (2.1), o které předpokládáme, že je pravdivá. Potom dostaneme rovnost

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd - d + d = a_1 + nd.$$

Tímto jsme dokázali, že vzorec (2.1) platí pro každé přirozené číslo n. [8]

Předchozí větu 2.1 můžeme zobecnit a to tak, aby platila pro libovolné dva členy arimetické posloupnosti.

Věta 2.2
Pro libovolné dva členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$a_s = a_r + (s-r)d.$$

Důkaz:
Při dokazování této věty vyjdeme ze vztahu uvedeného ve větě 3.1, podle které platí

$$a_s = a_1 + (s-1)d,$$

$$a_r = a_1 + (r-1)d.$$

Pokud od sebe tyto dvě rovnosti odečteme a upravíme, dostaneme požadovaný vztah

$$a_s - a_r = (s-1)d - (r-1)d = sd - d - rd + d = sd - rd = (s-r)d. \quad [8]$$

Aritmetická posloupnost s diferencí d určená vzorcem pro $n-$tý člen je

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

který můžeme upravit na takový tvar

$$a_n = dn + (a_1 - d), \tag{2.4}$$

který je analogický s rovnicí funkce

$$y = ax + b, \tag{2.5}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a pro $a = 0$ je funkce konstantní a pro $a \neq 0$ je funkce lineární. Porovnáme-li vztahy (2.4) a (2.5), můžeme o aritmetické posloupnosti s diferencí d říci, že pro $d = 0$ představuje konstantní funkci a pro $d \neq 0$ lineární funkci. Nyní můžeme vyslovit následující věty o omezenosti a monotónnosti aritmetické posloupnosti.[6]

Věta 2.3
Aritmetická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d je rostoucí pro $d > 0$ a klesající pro $d < 0$.

Věta 2.4
Pro aritmetickou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí:

- Je-li $d > 0$, pak je zdola omezená, ale není shora omezená.
- Je-li $d < 0$, pak je shora omezená, ale není zdola omezená.

- Je-li $d = 0$, pak je shora omezená i zdola omezená. [6]

Dále se u aritmetických posloupností zavádí součet prvních n členů posloupnosti, který je popsán v následující větě.

Věta 2.5
Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. pro $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ platí

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Důkaz:
Napíše vzorec pro součet prvních n členů a ještě jednou tento vzorec se sčítanci v opačném pořadí

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_r + a_{r+1} + \ldots + a_n,$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_s + a_{s-1} + \ldots + a_1.$$

Přitom r, s jsou celá kladná čísla, pro která platí $1 \leq r \leq n-1,\ 2 \leq s \leq n$, $r + s = n + 1$.

$$2s_n = (a_1 + a_n) + \ldots + (a_r + a_s) + (a_{r+1} + a_{s-1}) + \ldots + (a_n + a_1) \tag{2.6}$$

Vezmeme-li nyní dva libovolné „sousední“ sčítance z (2.6), tj. např. $a_r + a_s$ a $a_{r+1} + a_{s-1}$ a ukážeme, že se sobě rovnají

$$a_r = a_{r+1} - d$$

$$\underline{a_s = a_{s-1} + d}$$

$$a_r + a_s = a_{r+1} + a_{s-1}$$

Odtud plyne, že každý z n sčítanců v (2.6) je roven např. $a_1 + a_n$. Můžeme tedy psát

$$2s_n = n(a_1 + a_n),$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Tímto je vztah dokázán. [5]

2.4 Geometrická posloupnost

Definice 2.8
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, právě když existuje číslo q takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n q,$$

neboli pro $a_n \neq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti. [6]

U geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mohou nastat speciální situace pro hodnoty $a_1, q = 0$. Je-li první člen a_1 roven nule pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom je zřejmé, že i $n-$tý člen a_n je roven nule. Je-li kvocient q roven nule, potom i každý člen geometrické posloupnosti je roven nule kromě prvního členu. Proto tyto nestandartní situace budeme v následujících úvahách vynechávat a budeme předpokládat, že pro geometrickou posloupnost platí $a_1, q \neq 0$. [6]

Příkladem geometrické posloupnosti je posloupnost

$$\left\{2^{2n-5}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

která je graficky znázorněna na obrázku 2.3.

Věta 2.6
V geometické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

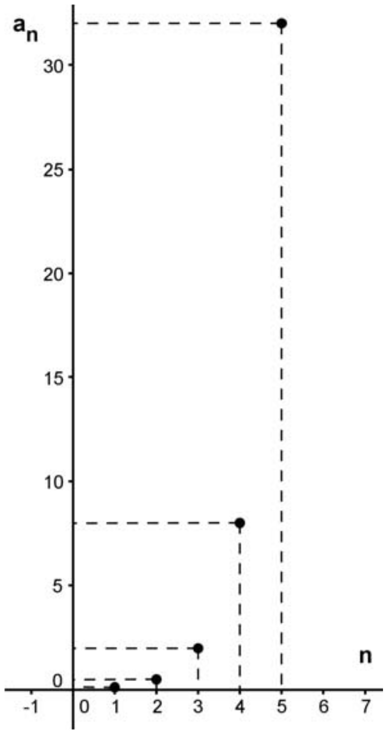
$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{2.7}$$

Důkaz:
Větu dokážeme pomocí matematické indukce.

1. Nechť $n = 1$. Potom zřejmě platí rovnost

$$a_1 = a_1 q^0 = a_1.$$

2. Předpokládáme, že uvedená věta platí pro všechna přirozená čísla n. Nyní



Obrázek 2.3: Graf geometrické posloupnosti $\{2^{2n-5}\}_{n=1}^{\infty}$.

ověříme, zda tvrzení platí také pro $n + 1$:

$$a_{n+1} = a_1 q^{n+1-1} = a_1 q^n.$$

Podle definice geometrické posloupnosti platí

$$a_{n+1} = a_n q.$$

Do uvedené definice za a_n dosadíme vztah (2.7), o kterém předpokládáme, že je pravdivý

$$a_{n+1} = a_1 q^{n-1} q = a_1 q^{n-1+1} = a_1 q^n.$$

Podle matematické indukce platí vzorec (2.7) pro všechna $n \in \mathbb{N}$. [8]

Věta 2.7

Nechť r, s jsou libovolná přirozená čísla, geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q. Potom platí

$$a_s = a_s q^{s-r}.$$

Důkaz:
Podle věty 2.6 platí pro členy geometické posloupnosti a_r, a_s následující vztahy

$$a_s = a_1 q^{s-1},$$

$$a_r = a_1 q^{r-1}$$

odtud pak lze vyjádřit

$$a_s = a_1 q^{r-1} q^{s-r} = (a_1 q^{r-1}) q^{s-r} = a_r q^{s-r}. \qquad [6]$$

Geometická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q ($q > 0$) definovaná vzorcem pro $n-$tý člen je

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

a po jednoduché úpravě získáme výraz

$$a_n = \frac{a_1}{q} q^n,$$

který je analogický s rovnicí exponenciální funkce

$$y = ka^x,$$

kde $k \in \mathbb{R}$ a $a > 0$. Takto definovaná geometrická posloupnost představuje exponenciální funkci o jedné proměnné n a definičním oborem $\mathbb{N}$. Nyní můžeme vyslovit věty o vlastnostech geometrické posloupnosti.

Věta 2.8
Geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q ($q, a_1 \neq 0$) je

- rostoucí právě tehdy, když $a_1 > 0, q > 1$ nebo $a_1 < 0, 0 < q < 1$;
- klesající právě tehdy, když $a_1 > 0, 0 < q < 1$ nebo $a_1 < 0, q > 1$;
- konstantní právě tehdy, když $q = 1$.

Věta 2.9
Geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q ($q, a_1 \neq 0$) je

- omezená právě tehdy, když $|q| \leq 1$;

- zdola omezená, ale není shora omezená právě tehdy, když $a_1 > 0, q > 1$;
- shora omezená, ale není zdola omezená právě tehdy, když $a_1 < 0, q > 1$;
- není ani shora ani zdola omezená právě tehdy, když $q < -1$. [6]

Věta 2.10
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem q. Potom součet prvních n členů posloupnosti

a) pro $q = 1$ je
$$s_n = na_1;$$

b) pro $q \neq 1$ je
$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Důkaz:

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $a_n = a_1$ a potom je
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = na_1.$$

b) Součet prvních n členů geometrické posloupnosti vyjádříme tak, že podle věty 2.6 je každý člen určen prvním členem posloupnosti a_1 a kvocientem q, potom
$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}, \tag{2.8}$$
$$qs_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n, \tag{2.9}$$
a po odečtení vztahu (2.8) od (2.9) dostaneme
$$s_n(q-1) = a_1 q^n - a_1,$$
který můžeme upravit do požadovaného tvaru, protože v předpokladech máme uvedeno, že $q \neq 1$. Nakonec tedy dostaneme
$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad [6]$$

2.5 Limita posloupnosti

Definice 2.9[1]

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\exists\, a \in \mathbb{R}^* \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon$$

Značíme

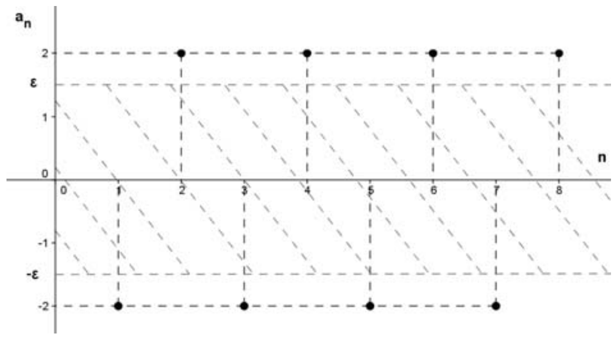
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

[Čteme: Limita a_n jdoucí k nekonečnu je rovna a.] [9]

Definice 2.10

Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konečnou (vlastní) limitu, nazývá se konvergentní,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \text{kde } a \in \mathbb{R}. \qquad [9]$$



Obrázek 2.4: Posloupnost $\{(-1)^n \cdot 2\}_{n=1}^{\infty}$ při zvolení libovolného ε (např. $\varepsilon = 1,5$) je pro všechna $n > n_0$ větší než zvolené ε. Posloupnost je tedy divergentní. [11]

Definice 2.11

Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nevlastní limitu nebo limita neexistuje, nazývá se divergentní,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \text{ nebo } \lim_{n\to\infty} a_n = neexist. \qquad [10]$$

[1]Označení $\mathbb{R}^*$ představuje uspořádání na rozšířené množině reálných čísel, tj. $\mathbb{R}^* \in \langle -\infty, \infty \rangle$.

Věta 2.11
Každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nejvýše jednu limitu. [5]

K podrobnějšímu nastudování lze důkaz této věty nalézt např. v [10], [5].

Věta 2.12
Každá konvergentní posloupnost je omezená. [10]

U předchozí věty 2.12 je nutné si uvědomit, že se jedná pouze o implikaci a ne o ekvivalenci. Můžeme najít takovou posloupnost, která je omezená, ale není konvergentní, tj. nemá konečnou limitu nebo limita posloupnosti neexistuje. Jako příklad můžeme uvést posloupnost $\{(-1)^n\}$, která pro lichá n má limitu rovnu číslu -1 a pro sudá n má limitu rovnu číslu 1. Tato posloupnost musí být zřejmě divergentní, protože se její členy neblíží k žádnému jedinému číslu. Posloupnosti tohoto typu se zpravidla nazývají oscilující. [9]

Věta 2.13
Každá omezená a monotónní posloupnost je konvergentní.

I u věty 2.13 si musíme uvědomit, že tvrzení je pouze implikace, a že obě podmínky (monotónie a omezenost) musí platit současně. Pokud bude posloupnost například pouze monotónní, nezaručuje nám to, že bude i konvergentní. Příkladem takové posloupnosti je posloupnost $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$, která je sice rostoucí posloupnost, ale diverguje k ∞. [10]

Důkazy k větám 2.12 a 2.13 naleznete např. v [10].

Věta 2.14
Jestliže posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ mají vlastní limity (jsou konvergentní),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

potom má limitu i posloupnost

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \lim_{n\to\infty} ka_n = ka \quad \text{pro } k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{pro } b_n, b \neq 0. \qquad [9]$$

Věta 2.15:

Nechť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

a nechť $\{c_n\}$ je taková posloupnost, že pro každé n platí $a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Věta 2.15 tedy říká, že leží-li posloupnost c_n mezi konvergentními posloupnostmi a_n a b_n, které mají tutéž limitu a, pak i posloupnost c_n je konvergentní a má také limitu a. [9]

Věta 2.16

Přehled důležitých limit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{2.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{pro } a > 0 \tag{2.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \tag{2.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \tag{2.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{pro } a \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad [10] \tag{2.15}$$

2.6 Historické úlohy

Úlohy 1 a 2 pocházejí z Rhindova (též Ahmosova) papyru nalezeného v egyptských Thébách v polovině 19. století. Papyrus pochází z doby asi 2 000 let před naším letopočtem. Úlohy jsou přeformulovány tak, aby byly srozumitelné v dnešním jazyce.

Příklad 1:
Rozděl jedno sto bochníků chleba mezi pět osob tak, aby druhý dostal o tolik víc než první jako třetí víc než druhý, čtvrtý víc než třetí a pátý víc než čtvrtý. Navíc první dva mají dostat sedmkrát méně než tři ostatní. Kolik má dostat každý z nich? [1, s. 147]

Řešení:
Ze zadání vyplývá, že množství chleba, které dostanou jednotliví účastníci, tvoří rostoucí aritmetickou posloupnost. Označíme-li první člen posloupnosti a_1 a diferenci d, potom platí

první dostal ...... a_1,

druhý dostal ...... $a_1 + d$,

třetí dostal ...... $a_1 + 2d$,

čtvrtý dostal ...... $a_1 + 3d$,

pátý dostal ...... $a_1 + 4d$.

Podle zadaných podmínek sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) &= 100 \\ \underline{(a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d)} &\underline{= 7[a_1 + (a_1 + d)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + 2d &= 20 \\ 11a_1 &= 2d \end{aligned}$$

Soustava rovnic má právě jedno řešení a to

$$a_1 = 1\frac{2}{3}, \qquad d = 9\frac{1}{6}.$$

Potom chléb musel být rozdělen mezi účastníky následovně

$$1\frac{2}{3},\ 10\frac{5}{6},\ 20,\ 29\frac{1}{6},\ 38\frac{1}{3} \text{ bochníků.}$$

Příklad 2:
Sedm lidí má po sedmi kočkách, každá kočka sežere sedm myší, každá myš sežere sedm klasů, z každého klasu může vyrůst sedm měřic ječmene. Kolik je všeho dohromady? [23, s. 71]

Řešení:
Úloha vede na součet geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 7$ a prvním členem $a_1 = 7$. Potom

$$s_n = a_1 = \frac{1-q^n}{1-q} = 7 \cdot \frac{1-16807}{1-7} = 19607$$

Ve starém Egyptě však neznali vztah pro součet geometrické posloupnosti a postupovali přes posloupnost součtů

$$s_1 = 7 \cdot 1 = 7$$

$$s_2 = 7 \cdot (1+7) = 56$$

$$s_3 = 7 \cdot (1+7+7^2) = 399$$

$$s_4 = 7 \cdot (1+7+7^2+7^3) = 2800$$

$$s_5 = 7 \cdot (1+7+7^2+7^3+7^4) = 19607.$$

Všeho dohromady je 19 607.

Ze středověké Evropy si uvedeme úlohu ze sbírky *Úlohy pro zdokonalení rozumu jinochů* od Alcuina (asi 735 - 805). Alcuin byl organizátor škol a autor řady učebnic matematiky, působil na dvoře francouzského krále Karla Velikého. Na posloupnosti obsahuje sbírka pouze dvě úlohy, my si uvedeme jednu z nich. [19]

Příklad 3:
Jeden žebřík měl sto příčlí. Na prvním seděl jeden holub, na druhém dva, na třetím tři, na čtvrtém čtyři, na pátém pět, a tak na všech příčlích až do stého. Řekni, kdo můžeš, kolik bylo celkem holubů. [24, s. 22]

Řešení:
Z dnešního pohledu ihned vidíme, že úloha vede na součet aritmetické posloupnosti,

jejíž první člen je $a_1 = 1$ a diference $d = 1$. Součet vypočítáme podle vzorce

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n),$$

$$s_{100} = \frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = 5050.$$

Tehdy ale takové znalosti o posloupnostech neměli. Alkuin uvádí návod k řešení spočívající v tom, že sčítá odpovídající si dvojice ze začátku a konce žebříku, tj.

1. příčka + 99. příčka = 100 holubů

2. příčka + 98. příčka = 100 holubů

3. příčka + 97. příčka = 100 holubů

$\vdots$

a padesátý a stý příčel nemají žádný do páru.
Celkový počet holubů je tedy 5050.

Následující úloha pochází od indického autora Nárájana ze 14. století. Řešení této úlohy vedlo k vytvoření rekurentní posloupnosti, která je obdobná se známou Fibonacciho posloupností.

Příklad 4:
Kráva každoročně rodí tele - jalovičku. Každá z těchto jaloviček, počítajíc čtvrtým rokem svého života, rodí na počátku roku také jalovičku. Kolik bude celkem hlav krav a telat po 20 letech? [19, s. 87]

Řešení:
V prvním roce existovala jedna kráva a telátko, které se narodilo na začátku roku, tj. dvě hlavy. Na počátku druhého roku byly tři hlavy, na počátku třetího roku byly čtyři hlavy. Na počátku čtvrtého roku se ale počet hlav zvětšil o dvě, protože jak kráva, tak jalovice z prvního roku dala po teleti, celkem tedy bylo 6 hlav. Na počátku pátého roku se počet hlav zvýšil o tři hlavy a celkem jich bylo už 9.
Počínaje čtvrtým rokem lze počet hlav ve stádu vyjádřit rekurentním vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$$

s počátečními podmínkami $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$.
Na začátku 20. roku bude ve stádu 2 745 hlav.

2.7 Užití posloupnosti ve (slovních) úlohách

2.7.1 Úlohy na vlastnosti posloupností

Příklad 5:
Určete, zda posloupnost

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

je rostoucí a omezená. [15, s. 576]

Řešení:
Vypíšeme si dva po sobě jdoucí členy posloupnosti a_n a a_{n+1}

$$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Musíme ověřit, zda pro všechna přirozená čísla n platí nerovnost $a_n < a_{n+1}$, tj. $a_n - a_{n+1} < 0$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

Rozdíl každých dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti je záporný, proto je tato posloupnost rostoucí.
Podle věty 2.12 stačí dokázat, že zadaná posloupnost konverguje a tím bude dokázáno, že je i omezená. Vypočteme limitu zadané posloupnosti a pokud vyjde vlastní limita, je tato posloupnost konvergentní.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Posloupnost má vlastní limitu, je tedy konvergentní a i omezená.

Příklad 6:
Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \log 3^n$. Vyjádřete ji rekurentně. [6, s. 67]

Řešení:
Nejdříve si vyjádříme, jakému vztahu se rovná $(n+1)-$tý člen. Pro každé přirozené číslo n platí

$$a_{n+1} = \log 3^{n+1}.$$

Podle pravidel pro počítání s logaritmy vztah upravíme takto

$$a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log(3^n \cdot 3) = \log 3^n + \log 3 = a_n + \log 3.$$

Zadanou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze rekurentně určit vztahem

$$a_1 = \log 3, \qquad a_{n+1} = a_n + \log 3.$$

Příklad 7:
Určete součet všech lichých čísel n, pro která platí $7 \leq n \leq 793$. [15, s. 577]

Řešení:
Zadaná nerovnost platí pro čísla $7, 9, 11, 13, \ldots, 791, 793$. Každé druhé číslo mezi hodnotami 7 a 793 je liché, proto počet lichých čísel mezi čísly 7 a 739 určíme

$$\frac{793 - 7}{2} = 393$$

K získanému číslu 393 musíme přičíst ještě číslo jedna, které představuje číslo 7, které do dané nerovnosti musíme také zahrnout. Lichých čísel je 394, tj. $n = 394$. Potom součet všech těchto lichých čísel vypočítáme podle vztahu pro součet aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$
$$s_n = \frac{394}{2} \cdot (7 + 793)$$
$$s_n = 157600$$

Součet všech lichých čísel splňující zadanou podmínku je 157 600.

Příklad 8:
Určete reálné číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti. [13, s. 67]

a) $a_1 = x^2 + x$, $a_2 = x^2 + 4x + 4$, $a_3 = 16$

b) $a_1 = \sin x$, $a_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $a_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Řešení:[2]

a) Podle definice 2.7 platí pro každé dva po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti $a_{n+1} - a_n = d$, kde d je diference dané posloupnosti. Potom musí platit

[2] Řešení není převzato z publikace [13]

rovnost

$$a_2 - a_1 = d = a_3 - a_2. \tag{2.16}$$

Zadané hodnoty jednotlivých členů posloupnosti dosadíme do vztahu (2.16), upravíme a vyjádříme hodnotu neznámého čísla x.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 - (x^2 + x) &= 16 - (x^2 + 4x + 4) \\ x^2 + 7x - 8 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x_1 = -8, x_2 = 1 \end{aligned}$$

Úloha má dvě řešení. Pro hodnotu $x_1 = -8$ má aritmetická posloupnost následující členy

$$\begin{aligned} a_1 = x^2 + x = (-8)^2 - 8 &= 56 \\ a_2 = x^2 + 4x + 4 = (-8)^2 - 4 \cdot 8 + 4 &= 36 \\ a_3 &= 16. \end{aligned}$$

Pro hodnotu $x_2 = 1$ má aritmetická posloupnost následující členy

$$\begin{aligned} a_1 = x^2 + x = 1^2 + 1 &= 2 \\ a_2 = x^2 + 4x + 4 = 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 &= 9 \\ a_3 &= 16. \end{aligned}$$

Zda zjištěné hodnoty tvoří skutečně členy aritmetické posloupnosti, ověříme zkouškou

$$\begin{aligned} \text{pro } x_1 = -8 \qquad 36 - 56 = -20 &= 16 - 36, \\ \text{pro } x_2 = 1 \qquad 9 - 2 = 7 &= 16 - 9. \end{aligned}$$

Ověřili jsme, že pro obě čísla $x_1 = -8, x_2 = 1$ platí vztah (2.16).

Úloha má dvě řešení a to pro reálná čísla $x_1 = -8, x_2 = 1$.

b) Podle definice 2.7 platí pro každé dva po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti $a_{n+1} - a_n = d$, kde d je diference dané posloupnosti. Potom musí platit rovnost

$$a_2 - a_1 = d = a_3 - a_2. \tag{2.17}$$

Zadané hodnoty jednotlivých členů posloupnosti dosadíme do vztahu (2.17) a získáme

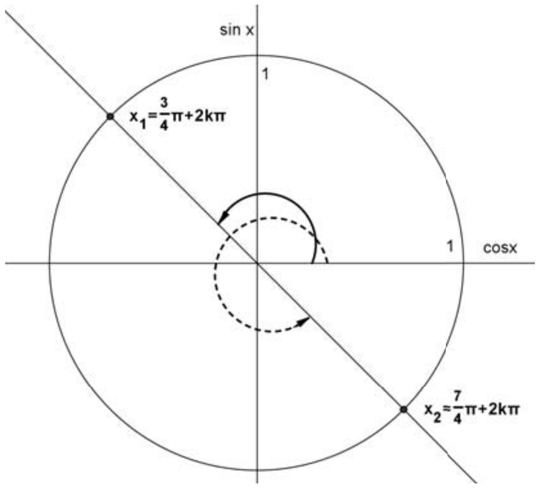
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

K úpravě rovnice použijeme součtový vzorec goniometrických funkcí $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ a vyjádříme hodnotu neznámého čísla x.

$$\begin{aligned}\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\sin x=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}-\\-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\sin x=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin x-\sin x+\sqrt{2}\cos x-\cos x&=0\\\left(\sqrt{2}-1\right)(\sin x+\cos x)&=0\\\sin x&=-\cos x\end{aligned}$$



Obrázek 2.5: Znázornění řešení rovnice $\sin x+\cos x=0$.

Na obrázku 2.5 vidíme, že úloha má dvě řešení a to $x_1=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ a $x_2=\frac{7}{4}\pi+2k\pi$. Pro hodnotu $x_1=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ má aritmetická posloupnost následující členy

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
a_2 &= \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\pi = 0\\
a_3 &= \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Pro hodnotu $x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ má aritmetická posloupnost následující členy

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
a_2 &= \sin\left(\frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\pi = 0\\
a_3 &= \sin\left(\frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{9}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Zda zjištěné hodnoty tvoří skutečně členy aritmetické posloupnosti, ověříme zkouškou

$$
\begin{aligned}
\text{pro } x_1 &= \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \qquad 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\\
\text{pro } x_2 &= \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \qquad 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0
\end{aligned}
$$

Ověřili jsme, že pro obě čísla $x_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ platí vztah (2.17).

Úloha má dvě řešení a to pro reálná čísla $x_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$.

Příklad 9:
Určete reálné číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti. [13, s. 68]

a) $a_1 = 1 + 2\log x$, $a_2 = 3 - 4\log x$, $a_3 = 3 + \log x$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 2^x$, $a_3 = 2^{x+2} + 12$

Řešení:[3]

a) Podle definice 2.8 platí pro každé dva po sobě jdoucí členy geometrické posloup-

[3] Řešení není převzato z publikace [13]

nosti $\frac{n+1}{a_n} = q$, kde q je kvocient dané posloupnosti. Potom musí platit rovnost

$$\frac{a_2}{a_1} = q = \frac{a_3}{a_2} \tag{2.18}$$

Zadané hodnoty jednotlivých členů posloupnosti dosadíme do zadání a upravíme

$$\begin{aligned} \frac{3 - 4\log x}{1 + 2\log x} &= \frac{3 + \log x}{3 - 4\log x} \qquad \text{pro } x > 0 \\ (3 - 4\log x)(3 - 4\log x) &= (3 + \log x)(1 + 2\log x) \\ 14\log^2 x - 31\log x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Zavedeme substituci $t = \log x$ a vypočítáme hodnoty t_1, t_2

$$14t^2 - 31t + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 2, t_2 = \frac{3}{14}.$$

Nyní dopočítáme hledané hodnoty neznámého čísla x z definice logaritmu, která říká

$$y = \log_a x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a^y.$$

Potom

$$\begin{aligned} 2 = \log x \qquad &\Rightarrow \qquad x_1 = 10^2 \\ \frac{3}{14} = \log x \qquad &\Rightarrow \qquad x_2 = 10^{\frac{3}{14}} \end{aligned}$$

Úloha má dvě řešení, protože oba výsledky vyhovují definičnímu oboru logaritmu, $x_1, x_2 > 0$. Pro hodnotu $x_1 = 10^2$ má geometrická posloupnost následující členy

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + 2\log x = 1 + 2\log 10^2 = 5 \\ a_2 &= 3 - 4\log x = 3 - 4\log 10^2 = -5 \\ a_3 &= 3 + \log x = 3 + \log 10^2 = 5 \end{aligned}$$

Pro hodnotu $x_2 = 10^{\frac{3}{14}}$ má geometrická posloupnost následující členy

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + 2\log x = 1 + 2\log 10^{\frac{3}{14}} = \frac{10}{7} \\ a_2 &= 3 - 4\log x = 3 - 4\log 10^{\frac{3}{14}} = \frac{15}{7} \\ a_3 &= 3 + \log x = 3 + \log 10^{\frac{3}{14}} = \frac{45}{14} \end{aligned}$$

Zda zjištěné hodnoty tvoří skutečně členy geometrické posloupnosti, ověříme zkouškou

$$\text{pro } x_1 = 10^2 \qquad \frac{-5}{5} = -1 = \frac{5}{-5},$$
$$\text{pro } x_2 = 10^{\frac{3}{14}} \qquad \frac{\frac{15}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{3}{2} = \frac{\frac{45}{14}}{\frac{15}{7}}.$$

Ověřili jsme tedy, že pro obě čísla $x_1 = 10^2, x_2 = 10^{\frac{3}{14}}$ platí vztah (2.18).

Úloha má dvě řešení a to pro reálná čísla $x_1 = 10^2, x_2 = 10^{\frac{3}{14}}$.

b) Podle definice 2.8 platí pro každé dva po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti $\frac{n+1}{a_n} = q$, kde q je kvocient dané posloupnosti. Potom musí platit rovnost

$$\frac{a_2}{a_1} = q = \frac{a_3}{a_2} \tag{2.19}$$

Zadané hodnoty jednotlivých členů posloupnosti dosadíme do vztahu (2.19) a upravíme

$$\frac{2^x}{1} = \frac{2^{x+2} + 12}{2^x}$$
$$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 12 = 0$$

Zavedeme substituci $z = 2^x$ a vypočítáme hodnoty z_1, z_2

$$z^2 - 4z - 12 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = 6, z_2 = -2.$$

Nyní dopočítáme hledané hodnoty neznámého čísla x tím, že exponenciální rovnici zlogaritmujeme

$$6 = 2^x$$
$$\log_2 6 = \log_2 2^x$$
$$x = \log_2 6$$
$$-2 = 2^x$$

Tato rovnice nemá řešení, protože obor hodnot exponenciální funkce jsou pouze kladná reálná čísla.
Úloha má tedy pouze jedno řešení. Pro hodnotu $x = \log_2 6$ má geometrická

posloupnost následující členy

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2^x = 2^{\log_2 6} = 6 \\ a_3 &= 2^{x+2} + 12 = 2^{\log_2 6+2} + 12 = 36. \end{aligned}$$

Zda zjištěné hodnoty tvoří skutečně členy geometrické posloupnosti, ověříme zkouškou

$$\frac{6}{1} = 6 = \frac{36}{6}.$$

Ověřili jsme, že pro hodnotu $x = \log_2 6$ platí vztah (2.19).
Úloha má jedno řešení a to pro reálné číslo $x = \log_2 6$.

Příklad 10:
V aritmetické posloupnosti známe první člen $a_1 = 18$ a diferenci $d = -5$. Určete pro všechna přirozená čísla n tak, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$. [13, s. 68]

Řešení:[4]
Podle věty 2.1 platí, že $n-$tý člen aritmetické posloupnosti lze vyjádřit vzorcem

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{2.20}$$

Podle vzorce (2.20) přepíšeme $n-$tý a $(n+3)-$tý člen posloupnosti

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d \\ a_{n+3} &= a_1 + [(n+3) - 1]d = a_1 + nd + 2d \end{aligned}$$

Nyní vztahy pro jednotlivé členy posloupnosti dosadíme do zadaného vztahu $a_n + a_{n+3} = -189$ a zjistíme, pro která n tato rovnost vyhovuje

$$\begin{aligned} a_1 + nd - d + a_1 + nd + 2d &= -189 \\ 2 \cdot 18 + 2 \cdot (-5) \cdot n - 5 &= -189 \\ 31 - 10 \cdot n &= -189 \\ n &= 22 \end{aligned}$$

[4]Řešení není převzato z publikace [13]

Abychom si byli jisti, že zadané hodnoty posloupnosti skutečně vyhovují pro členy posloupnosti a_{22} a a_{25}, provedeme zkoušku

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d = 18 + 21 \cdot (-5) = -87 \\ a_{n+3} &= a_1 + [(n+3)-1]d = 18 + 24 \cdot (-5) = -102 \\ &\Rightarrow \qquad -87 - 102 = -189 \end{aligned}$$

Úloha má jedno řešení pro $n = 22$.

Příklad 11:
Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_3 = 2 \\ &a_2 + a_7 = -8 \end{aligned}$$ [13, s. 68]

Řešení:[4]
Podle věty 2.1 je $n-$tý člen aritmetické posloupnosti vyjádřen $a_n = a_1 + (n-1)d$. Potom si pomocí tohoto vztahu můžeme vyjádřit členy a_2, a_3, a_7, tj.

$$a_2 = a_1 + d, \qquad a_3 = a_1 + 2d, \qquad a_7 = a_1 + 6d.$$

Předchozí vztahy dosadíme do zadané soustavy rovnic o dvou neznámých a zjistíme hledané hodnoty d a a_1.

$$a_1 + a_1 + 2d = 2$$

$$\underline{a_1 + d + a_1 + 6d = -8}$$

$$a_1 = 1 - d$$

$$2(1-d) + 7d = -8 \qquad \Rightarrow \qquad d = -2,4$$

$$a_1 = 1 - d = 1 - (-2,4) = 3,4$$

Pro ověření, že jsme počítali správně, provedeme zkoušku, vypočítané hodnoty dosadíme do první zadané rovnice

$$a_1 + a_3 = 3,4 + 3,4 - 2 \cdot 2,4 = 2.$$

Výsledek se shoduje s pravou stranou zadané rovnice, výpočet je správně. Zadaná posloupnost má první člen roven $a_1 = 3,4$ a diferenci $d = -2,4$.

Příklad 12:
Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - a_4 &= -110 \\ a_2 + a_3 - a_5 &= -220 \qquad [13, \text{s. } 68] \end{aligned}$$

Řešení:[5]
Podle věty 2.6 je $n-$tý člen geometrické posloupnosti vyjádřen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Potom si pomocí tohoto vztahu můžeme vyjádřit členy a_2, a_3, a_4, a_5, tj.

$$a_2 = a_1 \cdot q, \qquad a_3 = a_1 \cdot q^2, \qquad a_4 = a_1 \cdot q^3, \qquad a_5 = a_1 \cdot q^4.$$

Předchozí vztahy dosadíme do zadané soustavy rovnic o dvou neznámých a zjistíme hledané hodnoty q a a_1.

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 q - a_1 q^3 &= -110 \\ \underline{a_1 q + a_1 q^2 - a_1 q^4} &\underline{= -220} \end{aligned}$$

$$a_1(1 + q - q^3) = -110 \tag{2.21}$$

$$a_1 q(1 + q - q^3) = -220 \tag{2.22}$$

Vydělíme-li předchozí dvě rovnice, získáme hodnotu kvocientu q

$$\frac{a_1 q(1 + q - q^3)}{a_1(1 + q - q^3)} = \frac{-220}{-110},$$

$$q = 2.$$

Nyní dopočítáme první člen posloupnosti a_1 dosazením zjištěté hodnoty q do rovnice (2.22)

$$2a_1(1 + 2 - 2^3) = -220 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 22$$

Pro ověření, že jsme počítali správně, provedeme zkoušku, vypočítané hodnoty dosadíme do první zadané rovnice

$$a_1 + a_2 - a_4 = 22 + 22 \cdot 2 - 22 \cdot 2^3 = -110.$$

Výsledek se shoduje s pravou stranou zadané rovnice, výpočet je správně. Posloupnost má první člen roven $a_1 = 22$ a kvocient $q = 2$.

[5] Řešení není převzato z publikace [13]

Příklad 13:
Rozhodněte, zda dané posloupnosti jsou konvergentní, nebo divergentní. Pokud mají vlastní nebo nevlastní limitu, určete ji. [12, s. 461]

a) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\{2 + 1^n\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) Vypíšeme si několik členů této posloupnosti

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Je zřejmé, že se jedná o geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 2$ a kvocientem $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$. Jelikož ale $|q| > 1$, je tato posloupnost divergentní a má nevlastní limitu

$$\lim_{n \to \infty} 2^n = \infty.$$

b) Vypíšeme zase několik členů této posloupnosti

$$3, 3, 3, 3, 3, \ldots$$

Vidíme, že tato geometrická posloupnost je konstantní, její kvocient se rovná $q = 1$. Tato posloupnost je konvergentní a má vlastní limitu rovnu

$$\lim_{n \to \infty} = (2 + 1^n) = \lim_{n \to \infty} 2 + \lim_{n \to \infty} 1^n = 2 + 1 = 3.$$

c) Vypíšeme několik prvních členů této posloupnosti

$$-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$$

Je zřejmé, že se jedná o geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = -2$ a kvocientem $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$. Jelikož ale $|q| > 1$, je tato posloupnost divergentní. Geometrická posloupnost nemá nevlastní limitu, protože pro liché hodnoty n se limita posloupnosti rovná $-\infty$ a pro sudé hodnoty n se limita této posloupnosti rovná $+\infty$. Taková posloupnost se nazývá oscilující.

2.7.2 Úlohy na důkazy posloupností

Příklad 14:
Dokažte, že každá posloupnost, která je současně geometrická i aritmetická, je konstantní. [2, s. 32]

Řešení:
Vyjdeme z předpokladu, že pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ podle definic aritmetické a geometrické posloupnosti musí platit

$$a_{n+1} = a_n + d \qquad \wedge \qquad a_{n+1} = a_n q \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

Obě rovnice mají stejnou levou stranu, proto můžeme vytvořit novou rovnici

$$\begin{aligned} a_n + d &= a_n q \\ a_n(1-q) &= -d \\ a_n &= \frac{-d}{1-q} \\ a_n &= \frac{d}{q-1} \end{aligned}$$

Po úpravě rovnice jsme zjistili, že každý $n-$tý člen posloupnosti se rovná konstantě, protože diference d a kvocient q jsou reálná čísla.

Příklad 15:
Dokažte, že pro každé dvě konvergentní posloupnosti a_n a b_n platí vztah uvedený ve větě 2.14

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b. \qquad [5] \tag{2.23}$$

Řešení:
Podle předpokladů platí

$$|a_n - a| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \tag{2.24}$$

$$|b_n - b| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \tag{2.25}$$

Z definice limity posloupnosti vyplývá, že musí platit

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon. \tag{2.26}$$

Nerovnost ze vztahu (2.26) upravíme pomocí známé trojúhelníkové nerovnosti $|k + l| \leq |k| + |l|$, která je platná pro všechna $k, l \in \mathbb{R}$, a dostaneme

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Z předpokladů (2.24) a (2.25) vyplývá

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tímto jsme pomocí definice limity posloupnosti dokázali, že pro každé $n \geq n_0$ je vztah (2.23) platný.

Příklad 16:
Dokažte, že geometrická posloupnost $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, pro níž je $q \in (-1, 1)$, je konvergentní a její limita je rovna nule. [6, s. 108]

Řešení:
Podle definic 2.9 a 2.10 limity konvergentní posloupnosti musíme dokázat, že platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon \tag{2.27}$$

Nyní obě strany nerovnosti $|q^n| < \varepsilon$ zlogaritmujeme. Hodnoty na obou stranách nerovnosti jsou kladné, proto jejich logaritmy existují. Logaritmus se základem 10 je rostoucí funkce, proto znak nerovnosti zůstane zachován.

$$\log |q|^n < \log \varepsilon.$$

Po aplikaci věty o logaritmu mocniny získáme nerovnost, ze které už snadno vyjádříme neznámou n

$$\begin{aligned} n \log |q| &< \log \varepsilon \\ n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}, &\qquad \text{kde } |q| < 1 \end{aligned}$$

Vztah (2.27) platí pro $\forall n \geq n_0$, kde n_0 je přirozené číslo z intervalu

$$\left(\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}, \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} + 1 \right\rangle.$$

Příklad 17:
Utvořme posloupnost s prvním členem 49, jejíž každý další člen vznikne z předcházejícího tak, že do „jeho středu“ vložíme dvojčíslí 48:

$$49, 4489, 444889, 44448889, \ldots$$

Dokažte, že každý člen této posloupnosti je druhá mocnina přirozeného čísla.
[18, s. 29]

Řešení:
Je zřejmé, že $n-$tým členem této posloupnosti je číslo

$$a_n = 44 \ldots 488 \ldots 89,$$

které má na prvních n místech čtyřky, na dalších $(n-1)$ místech osmičky a na konci devítku. Obecně lze $n-$tý člen vyjádřit

$$a_n = 4\left(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^n\right) + 8\left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^1\right) + 9.$$

První závorka v přechozím vztahu $10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^n$ představuje geometrickou posloupnost, jejíž první člen je $b_1 = 10^{2n-1}$ a kvocient je roven $q_b = \frac{1}{10}$. Potom její součet je roven

$$s_b = 10^{2n-1}\frac{10^n - 1}{\frac{9}{10}} = 10^n\frac{10^n - 1}{9}.$$

Druhá závorka v předchozím vztahu $10^1 + \ldots + 10^{n-2} + 10^{n-1}$ představuje také geometrickou posloupnost, jejíž první člen je $c_1 = 10$ a kvocient je roven $q_c = 10$. Potom její součet je roven

$$s_c = 10\frac{10^{n-1} - 1}{9}.$$

Nyní $n-$tý člen vyjádříme jako

$$a_n = 4\cdot 10^n\frac{10^n - 1}{9} + 8\cdot 10\frac{10^{n-1} - 1}{9} + 9 = \frac{4\cdot 10^{2n} + 4\cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Číslo $\frac{2\cdot 10^n+1}{3}$ je přirozené číslo, protože pro všechna n je ciferný součet čísla $2\cdot 10^n + 1$ dělitelný třemi. Proto $n-$tý člen a_n dané posloupnosti je pro každé n druhá mocnina přirozeného čísla.

Příklad 18:
Dokažte, že součet prvních n lichých čísel je n^2. [13, s. 69]

Řešení 1:
Po sobě jdoucí lichá čísla $1, 3, 5, 7, \ldots$ představují aritmetickou posloupnost, o které víme, že platí

$$a_1 = 1 \qquad \wedge \qquad a_n = 2n - 1 \qquad \wedge \qquad d = 2.$$

Potom součet této posloupnosti určíme snadno podle vzorce

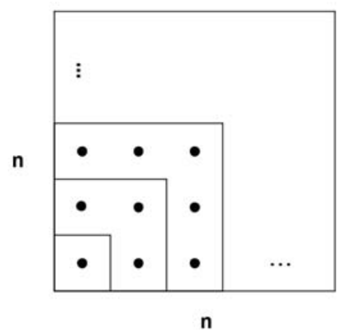
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Potom

$$s_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1)$$
$$s_n = n^2.$$

Součet prvních n lichých čísel je skutečně n^2.

Řešení 2:
Jiný způsob, jak dané tvrzení dokázat, je pomocí figurálních čísel. Figurální číslo je číslo dané počtem kamínků v obrazci. Toto třídění čísel podle tvarů začali jako první používat Pythagorejci ve starověkém Řecku. Pokud kamínky uspořádáme, jak je znázorněno na obrázku 2.6, obsah čtverce se rovná součtu prvních n lichých čísel, tj. n^2.



Obrázek 2.6: Odvození vztahu pro součet prvních n lichých čísel.

2.7.3 Úlohy s technickou a přírodovědnou tématikou

Příklad 19:
Stroj má mít 6 rychlostí, minimální otáčky 25, maximální otáčky 500. Určete počet otáček na jednotlivých stupních rychlosti, mají-li tvořit aritmetickou posloupnost. [3, s. 111]

Řešení:
Počet členů posloupnosti určuje počet stupňů rychlosti, první člen posloupnosti tvoří minimální hodnotu otáček a poslední člen tvoří maximální hodnotu otáček stroje.

$$n = 6, \qquad a_1 = 25, \qquad a_6 = 500$$

Abychom určili počet otáček na jednotlivých stupních a tyto otáčky tvořily aritmetickou posloupnost, musíme zjistit diferenci d. Využijeme vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti, kde známe všechny hodnoty kromě hledané diference.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$500 = 25 + (6-1)d$$

$$475 = 5d$$

$$d = 95$$

Počet otáček na jednotlivých stupní bude následující posloupnost $25, 120, 215,$ $310, 405, 500$.

Příklad 20:
Frézka o šesti rychlostech má nejmenší počet otáček za minutu 25, největší počet otáček za minutu 500. Přitom poměr počtů dvou „sousedních“ otáček je konstantní. Určete ho. [5, s. 75]

Řešení:
Poměr počtů dvou sousedních otáček je konstantní, proto počty otáček musí tvořit prvních šest členů geometrické posloupnosti, v níž je první člen roven $a_1 = 25$ a šestý člen je roven $a_6 = 500$. Hledaný poměr otáček představuje kvocient q této posloupnosti. K jeho určení využijeme vztahu pro $n-$tý člen geometrické posloupnosti

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Potom platí

$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$

$$q^5 = \frac{a_6}{a_1} = \frac{500}{25} = 20 \qquad \Rightarrow \qquad q = \sqrt[5]{20}.$$

Kvocient q přibližně vypočítáme tak, že zlogaritmujeme obě strany rovnice a upravíme podle pravidel pro počítání s logaritmy.

$$\log q = \log \sqrt[5]{20}$$

$$\log q = \frac{1}{5} \cdot \log 20$$

$$\log q \doteq 0,26 \qquad \Rightarrow \qquad q \doteq 1,82$$

Poměr počtu dvou sousedních otáček je přibližně $1,82$.

Příklad 21:

Traktor jede po přímé silnici rychlostí 10 $m \cdot s^{-1}$. V okamžiku, kdy projíždí místem M, vyjíždí z tohoto místa týmž směrem osobní auto, které za první sekundu ujede 3 m a za každou následující sekundu o 2 m více než za předcházející sekundu. Vypočtěte, za kolik sekund auto dohoní traktor. [12, s. 468]

Řešení:

Traktor ujede dráhu s_t v metrech za n sekund

$$s_t = v \cdot t = 10n.$$

Číselné hodnoty drah (v metrech), které ujede osobní auto za jednotlivé sekundy, tvoří členy aritmetické posloupnosti, kde

$$a_1 = 3, \qquad d = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2.$$

Dráha s_a, kterou ujede osobní auto, než dohoní traktor, se rovná součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti a platí

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}n(2a_1 + nd - d).$$

Po dosazení $a_1 = 3, d = 2$ dostaneme

$$s_n = 2n + n^2.$$

Když osobní auto dohoní traktor, musejí se jejich hodnoty ujetých drah rovnat

$$s_t = s_a$$

$$10n = 2n + n^2$$

$$n^2 - 8n = 0$$

$$n(n-8) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n_1 = 0, n_2 = 8.$$

První kořen $n_1 = 0$ odpovídá času 0 s, tj. kdy osobní auto i traktor vyjížděli ze stejného místa M. Druhý kořen $n_2 = 8$ odpovídá času 8 s a znamená dobu, za kterou osobní auto dohoní traktor.

Osobní auto za daných podmínek dohoní traktor za 8 sekund.

Příklad 22:
Pružná koule odskakuje po odrazu od vodorovné roviny do $\frac{4}{5}$ výšky, ze které dopadla. Po kolika odrazech dostoupí výšky menší, než je desetina výšky, z níž byla spuštěna? [4, s. 270]

Řešení:
Je-li v výška, z níž byla koule spuštěna, potom platí:

po prvním odrazu bude ve výšce $v_1 = \frac{4}{5}v$,

po druhém odrazu bude ve výšce $v_2 = \frac{4}{5}v_1$,

po třetím odrazu bude ve výšce $v_3 = \frac{4}{5}v_2$,

po $n-$tém odrazu bude ve výšce $v_n = \frac{4}{5}v_{n-1}$.

Z předchozího výpisu je zřejmé, že výšky $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{4}{5}$ a prvním členem $a_1 = \frac{4}{5}v$. Vyjádříme si nyní vztah pro $n-$tý člen této posloupnosti

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ kde } n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad v_n = \frac{4}{5}v \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = v \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Nyní spočítáme, po kolika odrazech se dosáhne výšky, která se rovná desetině původní výšky v, tedy

$$v_n = \frac{1}{10}v.$$

Položíme-li oba vztahy pro $n-$tý člen do rovnosti, vypočítáme hodnotu n. Platí

$$\frac{1}{10}v = v\cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

po zkrácení hodnotou v, o které víme, že musí být kladné číslo, dostaneme exponenciální rovnici

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

kterou vyřešíme zlogaritmováním obou stran rovnice

$$\log\frac{1}{10} = n\cdot \log\frac{4}{5}$$
$$-1 = n\cdot (\log 4 - \log 5)$$

$$n = \frac{1}{\log 5 - \log 4} = \frac{1}{0,09691} \doteq 10,3189. \tag{2.28}$$

Proměnná n může být pouze přirozené číslo. Proto z rovnice (2.28) vyplývá, že výška rovna $\frac{1}{10}v$ není mezi výškami, kterých se po odrazech dosahuje. Hodnota $\frac{1}{10}v$ není mezi členy geometrické posloupnosti. Pokud bychom ale vzali horní celou část[6] čísla $10,3189$, získali bychom tak index členu, od kterého bude koule vždy odskakovat do výšky menší než $\frac{1}{10}v$.

$$\lceil 10,3189 \rceil = 11$$

Od jedenáctého členu posloupnosti, tj. po 11 odrazech, bude koule odskakovat do výšky menší než desetina původní výšky v.

Příklad 23:
Těleso padající volným pádem urazí za první sekundu dráhu 5 m. Každou další sekundu urazí o 10 m více než v předchozí sekundě. Jakou dráhu těleso urazí za 10 sekund? [15, s. 592]

Řešení:
Dráhy, které těleso urazí v jednotlivých sekundách,

$$5, 15, 25, 35, 45, \ldots$$

představují členy rostoucí aritmetické posloupnosti, jejíž první člen je roven $a_1 = 5$ a diference $d = 10$. Potom nás zajímá, jaký bude součet prvních deseti členů s_{10} této posloupnosti. Abychom mohli použít vzorec pro součet prvních n členů aritmetické

[6] Horní celá část reálného čísla x představuje nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno číslu x.

posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \tag{2.29}$$

musíme nejprve zjistit hodnotu desátého členu této posloupnosti.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \Rightarrow \qquad a_{10} = 5 + 9\cdot 10 = 95$$

Po dosazení hodnoty $a_{10} = 95$ do vzorce (2.29) dostaneme

$$s_{10} = \frac{10}{2}(5 + 95) = 500.$$

Těleso za 10 sekund urazí dráhu 500 m.

Příklad 24:
Volně padající těleso vykoná v první sekundě dráhu $\frac{1}{2}\,g$, v každé následující sekundě dráhu o g větší než v předešlé. Jakou dráhu vykoná těleso za t sekund?[7] [22, s. 146]

Řešení:
Dráhy v jednotlivých sekundách tvoří aritmetickou posloupnost, v níž platí

$$a_1 = \frac{1}{2}g, \qquad d = g, \qquad n = t.$$

Součet drah za t sekund je hledaná dráha s_n. Platí tedy

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{t}{2}\left(\frac{1}{2}g + a_n\right).$$

K dokončení výpočtu potřebujeme ještě zjistit hodnotu $n-$tého členu

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{1}{2}g + (t-1)q = tg - \frac{1}{2}g.$$

Potom dráha s_n je rovna

$$s_n = \frac{t}{2}\left(\frac{1}{2}g + tg - \frac{1}{2}g\right) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Těleso proletí za t sekund dráhu $\frac{1}{2}gt^2$ cm.

Příklad 25:
Teplota Země roste s hloubkou na každých 33 metrů přibližně o 1°C. Jaká teplota

[7] Přitom $g \approx 981\,cm\cdot s^{-2}$, o čísle t předpokládáme, že je přirozené.

bude přibližně na dně dolu hlubokého 1 090 metrů, je-li v hloubce 100 metrů teplota 11°C? [11, s. 31]

Řešení:[8]

Zvyšující se hodnoty teploty po 33 metrech představují členy aritmetické posloupnosti, v níž první člen je $a_1 = 11$ a diference je $d = 1$. Musíme určit rozdíl hloubek, abychom věděli na kolika metrech se zvyšuje teplota Země, tj.

$$1090 - 100 = 990 \text{ metrů}.$$

Nyní ještě musíme spočítat, kolikátý člen posloupnosti odpovídá hloubce 1 090 metrů, tj.

$$990 : 33 = 30.$$

Zjistili jsme tedy, že teplota se třicetkrát zvýší, než bychom se dostali do požadované hloubky 1 090 metrů. K této hodnotě musíme přičíst ještě první člen posloupnosti (výchozí teplotu). Potom podle vzorce pro $n-$tý člen aritmetické posloupnosti platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$a_{31} = 11 + 30 \cdot 1 = 41.$$

V hloubce 1 090 metrů bude teplota Země 41°C.

Příklad 26:

Jistý druh bakterií se rozmnožuje v příznivých podmínkách tak, že každá baktérie se za půl hodiny rozdělí na dvě. Kolik bakterií by vzniklo takto z jedné baktérie za 12 hodin? [5, s. 80]

Řešení:[9]

Počet bakterií vzniklých každou půl hodinu představuje rostoucí geometrickou posloupnost, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a kvocient $q = 2$. Potom počet bakterií vzniklých za 12 hodin je člen posloupnosti a_{25}. Podle vzorce pro $n-$tý člen geometrické posloupnosti platí

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad \Rightarrow \qquad a_{25} = 1 \cdot 2^{24} = 2^{24}.$$

Po 12 hodinách vznikne z jedné bakterie 2^{24} bakterií.

[8] Řešení úlohy není převzato z publikace [11].

[9] Řešení úlohy není převzato z publikace [5].

2.7.4 Posloupnosti v planimetrii a stereometrii

Příklad 27:

Zjistěte, zda existuje konvexní $n-$úhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 100° a každý následující úhel je o 10° větší než předcházející. [12, s. 467]

Řešení:

Ze zadání je zřejmé, že vnitřní úhly konvexního $n-$úhelníku tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pro kterou platí

$$a_1 = 100 \qquad d = a_{n+1} - a_n = 10.$$

$n-$tý člen posloupnosti tvoří největší vnitřní úhel $n-$úhelníku, pro který platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 100 + (n-1)10 = 90 + 10n.$$

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, které tvoří vnitřní úhly n-úhelníku, se rovná

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n(100 + 90 + 10n) = \frac{1}{2}n(190 + 10n). \tag{2.30}$$

Z jednoho vrcholu $n-$úhelníku vychází $n-3$ úhlopříček, které rozdělí $n-$úhelník na $n-2$ trojúhelníků. Každý trojúhelník má součet vnitřních úhlů 180°. Proto součet velikostí vnitřních úhlů konvexního $n-$úhelníku je také roven

$$s_n = (n-2)180. \tag{2.31}$$

Porovnáním vztahů (2.30) a (2.31) dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n(190 + 10n) &= (n-2)180 \\ n^2 - 17n + 72 = 0 \qquad &\Rightarrow n_1 = 8 \wedge n_2 = 9. \end{aligned}$$

Kořeny n_1 a n_2 ještě nejsou konečnými výsledky. Do výpočtu budeme muset zahrnout podmínku, že velikost každého vnitřního úhlu konvexního $n-$úhelníku nesmí být větší než 180°. Stačí abychom tuto podmínku zkoumali u největšího vnitřního úhlu a_n

$$90 + 10n < 180 \qquad \Rightarrow \qquad n < 9.$$

Z této podmínky tedy vyplývá, že kořen n_2 nevyhovuje a úloha má pouze jedno řešení a to $n = 8$. To nám říká, že podmínkám zadání vyhovuje konvexní osmiúhelník, jehož vnitřní úhly jsou 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160 a 170.

Podmínkám úlohy vyhovuje konvexní osmiúhelník.

Příklad 28:
Určete velikost nejmenšího vnitřního úhlu pravoúhlého trojúhelníku, víte-li, že číselné hodnoty délek jeho stran v centimentrech jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. [12, s. 477]

Řešení:
Délky stran daného trojúhelníku tvořící geometrickou posloupnost označíme a, b, c, kde $a < b < c$. Nejmenší vnitřní úhel trojúhelníku musí ležet naproti nejkratší straně daného trojúhelníku. Podle našeho označení budeme určovat velikost vnitřního úhlu α. Pro kvocient této posloupnosti potom musí platit

$$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}. \tag{2.32}$$

Strany pravoúhlého trojúhelníku a, b, c lze vyjádřit pomocí goniometrických funkcí

$$a = c \sin\alpha, \qquad b = c \cos\alpha.$$

Takto vyjádřené strany a, b dosadíme do dříve uvedeného výpočtu kvocientu

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{c\cos\alpha}{c\sin\alpha} = \frac{c}{c\cos\alpha}$$

a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \sin\alpha \\ 1 - \sin^2\alpha &= \sin\alpha \\ \sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Úpravou jsme získali kvadratickou rovnici, ve které použijeme substituci $t = \sin\alpha$, a zjistíme, pro které t má rovnice řešení.

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \doteq 0,618 \qquad \Rightarrow \sin\alpha = 0,618 \Rightarrow \alpha \doteq 38°10'$$

$$t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \doteq -1,618,$$

což nevyhovuje, protože funkce sin má $D_f \in \langle -1, 1\rangle$.

Nyní si ještě dopočítáme velikost třetího vnitřní úhlu β. Ten vypočítáme z podmínky, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku se musí rovnat 180°.

$$\gamma = 180° - 38°10' - 90° = 51°50'$$

Velikost nejmenšího vnitřního úhlu α pravoúhlého trojúhelníku je přibližně $38°10'$, velikost úhlu β je $51°50'$.

Příklad 29:

Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhleníku je 96 cm. Vypočítejte délky stran. [13, s. 69]

Řešení:[10]

Předpokládáme, že platí $a < b < c$, potom si délky stran představující tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí d označíme jako

$$a = b - d, \qquad b = b, \qquad c = b + d. \tag{2.33}$$

Do vzorce pro obvod trojúhelníku $O = a+b+c$ dosadíme za proměnné a, b, c hodnoty (2.33) a vypočítáme hodnotu strany b.

$$(b-d) + b + (b+d) = 96$$

$$3b = 96 \qquad \Rightarrow \qquad b = 32$$

[10] Řešení úlohy není převzato z publikace [13].

Diferenci d posloupnosti vypočítáme z Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$, do které dosadíme zjištěnou hodnotu b a za a, c vztahy (2.33) a upravíme.

$$(b+d)^2 = (b-d)^2 + b^2$$

$$(32+d)^2 = (32-d)^2 + 1024$$

$$128d = 1024 \qquad \Rightarrow \qquad d = 8$$

Potom délky stran trojúhelníku se rovnají

$$a = b - d = 24\,cm, \qquad b = 32\,cm, \qquad c = b + d = 40\,cm.$$

Příklad 30:
Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je 64 cm^3. [13, s. 69]

Řešení:[10]
Délky hran kvádru představující tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem q označíme jako

$$a = \frac{b}{q}, \qquad b = b, \qquad c = b\cdot q. \tag{2.34}$$

Do vzorce pro objem kvádru $V = a\cdot b\cdot c$ dosadíme za proměnné a, b, c hodnoty (2.34) a vypočítáme hodnotu hrany b.

$$\frac{b}{q}\cdot b\cdot b\cdot q = 64$$

$$b^3 = 64 \qquad \Rightarrow \qquad b = 4$$

Kvocient q posloupnosti vypočítáme z druhé podmínky ze zadání, tj. že součet délek všech hran kvádru je 84 cm

$$4(a+b+c) = 84.$$

Do tohoto vztahu dosadíme zjištěnou hodnotu b a za a, c vztahy (2.34) a upravíme.

$$4\left(\frac{b}{q} + b + b\cdot q\right) = 84$$

$$\left(\frac{4}{q} + 4 + 4q\right) = 21$$

$$4q^2 - 17q + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = 4, q_2 = \frac{1}{4}$$

Pro rozměry kvádru jsme získali dvě řešení:

I. Pro $q_1 = 4$ platí:
$a = \frac{b}{q_1} = 1$
$b = 4$
$c = b \cdot q_1 = 16$

II. Pro $q_2 = \frac{1}{4}$ platí:
$a = \frac{b}{q_2} = 16$
$b = 4$
$c = b \cdot q_2 = 1$

Je vidět, že rozměry kvádru jsou u obou řešení stejné, jenom u řešení I. představují rozměry a, b, c rostoucí geometrickou posloupnost a u řešení II. přestavují klesající geometrickou posloupnost.

Rozměry kvádru jsou 1 cm, 4 cm, 16 cm.

Příklad 31:
Povrch kvádru je $S = 380\,cm^2$, tělesová úhlopříčka je $u = 14\,cm$ a rozměry a, b, c tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Vypočtěte hodnoty a, b, c. [4, s. 263]

Řešení:
Jsou-li rozměry kvádru a, b, c tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí d, potom tyto rozměry lze vyjádřit jako

$$a = b - d, \quad b = b, \qquad c = b + d. \tag{2.35}$$

Ze zadání víme, že pro povrch kvádru a tělesovou úhlopříčku platí rovnost

$$380 = 2(ab + ac + bc), \tag{2.36}$$

$$14^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{2.37}$$

Dosadíme-li do rovnic (2.36) a (2.37) za rozměry a, c hodnoty z rovnic (2.35), dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých b, d.

$$380 = 2\left[(b-d)b + (b-d)(b+d) + b(b+d)\right]$$

$$\frac{190 = b^2 - bd + b^2 - d^2 + b^2 + bd}{196 = (b-d)^2 + b^2 + (b+d)^2}$$

$$\frac{190 = b^2 - bd + b^2 - d^2 + b^2 + bd}{196 = b^2 - 2bd + d^2 + b^2 + b^2 + 2bd + d^2}$$

$$190 = 3b^2 - d^2$$

$$196 = 3b^2 + 2d^2$$

Po odečtení posledních dvou rovnic, dostaneme

$$6 = 3d^2 \qquad \Rightarrow \qquad d_1 = \sqrt{2},\ d_2 = -\sqrt{2}.$$

Potom dopočítáme neznámou b

$$190 = 3b^2 - 2, \qquad b^2 = 64, \qquad \Rightarrow b = 8.$$

U neznámé b nemůžeme počítat s řešením $b = -8$, protože rozměr kvádru nemůže být záporný. Pro rozměry kvádru jsme získali dvě řešení:

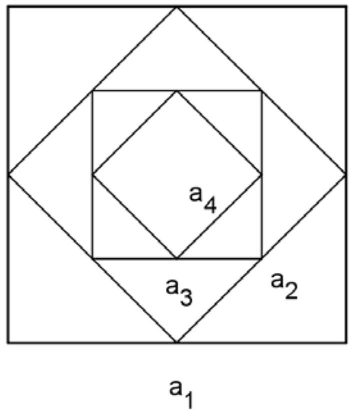
I. $a = b - d_1 = 8 - \sqrt{2}$
$b = 8$
$c = b + d_1 = 8 + \sqrt{2}$

II. $a = b - d_2 = 8 + \sqrt{2}$
$b = 8$
$c = b + d_2 = 8 - \sqrt{2}$

Je vidět, že rozměry kvádru jsou u obou řešení stejné, jenom u řešení I. představují rozměry a, b, c rostoucí aritmetickou posloupnost a u řešení II. přestavují klesající aritmetickou posloupnost.

Rozměry kvádru jsou $8 - \sqrt{2}$ cm, 8 cm, $8 + \sqrt{2}$ cm.

Příklad 32:
Půdorysem ocelové konstrukce sloupu jsou strany devíti čtverců, které jsou takto uspořádány: první čtverec o straně $a_1 = 4$ m je obrys půdorysu, druhý a další čtverce mají svoje vrcholy ve středech stran čtverců předcházejících (viz obrázek 2.7). Jak velké strany mají pátý a devátý čtverec? [4, s. 269]



Obrázek 2.7: Půdorys ocelového sloupu tvořený vnořenými čtverci.

Řešení:
Označíme-li si obsah prvního čtverce $S_1 = a_1^2$, obsah druhého čtverce $S_2 = \frac{S_1}{2}$, obsah třetího čtverce $S_3 = \frac{S_2}{2}, \ldots$, tvoří tyto obsahy čtverců

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$$

geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Potom podle vzorce pro $n-$tý člen geometrické posloupnosti určíme obsahy pátého a devátého čtverce

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

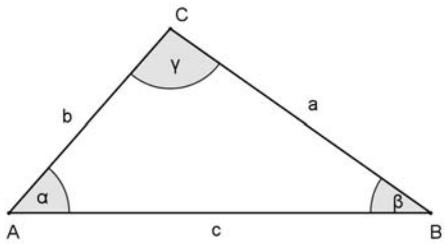
$$S_5 = S_1 q^4 = a_1^2 q^4 = 4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1,$$

$$S_9 = S_1 q^8 = a_1^2 g^8 = 4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{16}.$$

Potom hledaná strana pátého a devátého čtverce je rovna

$$a_5 = 1\,\mathrm{m}, \qquad a_9 = \frac{1}{4}\,\mathrm{m}.$$

Příklad 33:
Délky stran a, b, c trojúhelníku ABC tvoří tři za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti. Pro úhly v trojúhelníku platí $\sin\alpha = \frac{5}{6}, \sin\gamma = 0,9$. Určete velikost úhlu β. [15, s. 606]



Obrázek 2.8: Obecný trojúhelník ABC.

Řešení:
Tento příklad bychom mohli ihned vyřešit pomocí kalkulačky nebo tabulek s hodnotami goniometrických funkcí. Ukážeme si postup, jak se bez těchto pomůcek obejít.

Tvoří-li délky stran a, b, c po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem q, lze je vyjádřit jako

$$a = \frac{b}{q}, \qquad b = b, \qquad c = b\cdot q. \tag{2.38}$$

Známe hodnotu dvou vnitřních úhlů, proto pro výpočet úhlu β použijeme sinovou větu, do které za hodnoty a, c dosadíme vztahy (2.38).

$$\begin{aligned}\frac{a}{c} &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\\ \frac{\frac{b}{q}}{b\cdot q} &= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{9}{10}}\\ \frac{b}{b\cdot q^2} &= \frac{5\cdot 10}{6\cdot 9}\end{aligned}$$

Odtud už snadno zjistíme hodnotu kvocientu q

$$\begin{aligned}\frac{1}{q^2} &= \frac{25}{27}\\ q &= \pm\frac{3\sqrt{3}}{5}.\end{aligned}$$

Sinovou větu nyní použijeme ještě pro hodnoty a, b, za které dosadíme vztahy (2.38).

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{\frac{b}{q}}{b} = \frac{\frac{5}{6}}{\sin\beta}$$

$$\frac{b}{b \cdot q} = \frac{5}{6\sin\beta}$$

Potom vztah mezi úhlem β a kvocientem q je roven

$$\sin\beta = \frac{5}{6}q.$$

Pro úhel β jsme dostali dvě řešení:

I. $q_1 = \frac{3\sqrt{3}}{5}$

$$\sin\beta = \frac{5}{6} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \qquad \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \beta_1 = 60°$$

II. $q_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{5}$

$$\sin\beta = \frac{5}{6} \cdot \frac{-3\sqrt{3}}{5} \qquad \Rightarrow \sin\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \beta_2 = 240°$$

Výsledek β_2 nelze, jelikož součet vnitřních úhlů v trojúhelníku se rovná pouze 180°.

Zda jsme počítali správně, můžeme ověřit zkouškou tak, že dopočítáme ze zadání úhly α, γ

$$\sin\alpha = \frac{5}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \doteq 56°,$$

$$\sin\gamma = 0,9 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma \doteq 64°$$

a ověříme, že součet vnitřních úhlů je 180°

$$56 + 64 + 60 = 180.$$

Úloha má pouze jedno řešení a to $\beta_1 = 60°$.

Příklad 34:

Délky stran trojúhelníku jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete jeho obvod, jsou-li dány poloměry r a ρ kružnic tomuto trojúhelníku po řadě opsané a vepsané. [21, s. 30]

Řešení:
Označme-li $a \leq b \leq c$ délky stran uvažovaného trojúhelníku a S jeho obsah. Tvoří-li strany trojúhelníku po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí d, lze je vyjádřit jako

$$a = b - d, \qquad b = b, \qquad c = b + d. \tag{2.39}$$

Podle Heronova vzorce

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

po dosazení hodnot (2.39) dostaneme rovnost

$$S = \sqrt{\frac{3b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} - d\right) \cdot \left(\frac{b}{2} + d\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4} b \sqrt{b^2 - 4d^2}. \tag{2.40}$$

Podle dalších vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníku platí

$$S = \frac{abc}{4r} = \frac{(b-d)b(b+d)}{4r} = \frac{b(b^2-d^2)}{4r}, \tag{2.41}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2}\rho = \frac{(b-d)+b+(b+d)}{2}\rho = \frac{3}{2}b\rho. \tag{2.42}$$

Z rovnosti vztahů (2.40) a (2.42) po jednoduché úpravě získáme rovnost

$$b^2 - 4d^2 = 12\rho^2. \tag{2.43}$$

Z rovnosti vztahů (2.41) a (2.42) po jednoduché úpravě získáme rovnost

$$b^2 - d^2 = 6r\rho. \tag{2.44}$$

Tímto jsme získali soustavu dvou rovnic (2.43), (2.44) o dvou neznámých, odečteme-li rovnici (2.43) od čtyřnásobku rovnice (2.44), získáme vztah

$$b^2 = 4(2r\rho - \rho^2) \qquad \Rightarrow \qquad b = 2\sqrt{(2r-\rho)\rho}.$$

Obvod zadaného trojúhelníku vypočteme vzorcem $O = a + b + c$, potom

$$O = (b-d) + b + (b+d) = 3b = 6\sqrt{(2r-\rho)\rho}.$$

Obvod trojúhelníku dle zadaných podmínek je roven $6\sqrt{(2r-\rho)\rho}$ cm.

2.7.5 Užití geometrické posloupnosti ve finanční matematice

Geometrická posloupnost se často využívá ve finanční matematice k počítání úloh typu: vypočítat vzrůst obyvatel, vzrůst vkladu v bance nebo vzrůst výroby za dané časové období. Obdobné úlohy jsou samozřejmě i pro pokles například ceny nějakého zboží, výroby, atd. Tyto hodnoty se obvykle vyjadřují v procentech.

Označíme-li počáteční hodnoty v uvažované úloze a_0, n počet období (změn), za něž probíhá pravidelný vzrůst nebo pokles, konečné hodnoty a_n po n obdobích, p počet procent, o které počáteční hodnota za dané období vzroste nebo poklesne, můžeme potom psát

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \text{ jde-li o vzrůst,}$$

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n, \text{ jde-li o pokles.}$$

Oba tyto vztahy můžeme jednotně zapisovat

$$a_n = a_0 \cdot r^n,$$

přitom

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + 0,01p, \text{ jde-li o vzrůst,}$$

$$r = 1 - \frac{p}{100} = 1 - 0,01p, \text{ jde-li o pokles.}$$

Hodnoty $a_0, a_1, a_2, \cdots$ jsou členy geometrické posloupnosti, jejíž kvocient je roven $q = r = 1 \pm 0,01p$.

Vztah $a_n = a_0 \cdot r^n$ se užívá při výpočtu vkladu s úroky ($p\%$) po n úrokovacích obdobích, jestliže vklad a_0 se nemění. Ve finanční matematice se číslo r nazývá úročitel. [7]

Příklad 35:

Za jakou dobu klesne hodnota stroje na polovinu nákupní ceny, odepisuje-li se za každý rok používání 5% ceny stroje z předchozího roku? [7, s. 410]

Řešení:

Označme nákupní cenu stroje a_0. Podle podmínek v textu úlohy má být

$$a_n = \frac{1}{2} a_0,$$

tedy

$$\frac{1}{2}a_0 = a_0 \cdot r^n, \text{ kde } r = 1 - \frac{5}{100} = 0,95.$$

Z předchozího vztahu vyjádříme

$$r^n = \frac{1}{2}$$

$$0,95^n = 0,5$$

Exponenciální rovnici vyřešíme zlogaritmováním obou stran rovnice a upravením podle základních pravidel pro počítání s logaritmy.

$$n \cdot \log 0,95 = \log 0,5$$

$$n = \frac{\log 0,5}{\log 0,95}$$

$$n \doteq 14$$

Hodnota stroje klesne na polovinu nákupní ceny přibližně za 14 let.

Příklad 36:

O kolik procent je třeba každý rok zvýšit produktivitu práce, má-li se za pětiletku zvýšit $1,2-$násobně? [7, s. 411]

Řešení:

Předpokládáme pravidelný roční přírůstek produktivity práce, označíme produktivitu práce na počátku prvního roku pětiletky a_0. Podle zadání úlohy potom platí

$$1,2a_0 = a_0 \cdot r^5, \text{ kde } r = 1 + \frac{p}{100}.$$

Předchozí rovnici lze vydělit hodnotou a_0, o které ze zadání víme, že nebude nulová.

$$r = \sqrt[5]{1,2} \doteq 3,8\%$$

Roční zvýšení produktivity práce má být přibližně $3,8\%$.

Příklad 37:

Určete výši vkladu, který za 20 let při roční úrokové míře $2,5\%$ vzroste na 30 000 Kč. (Neuvažujte daň z úroků.) [15, s. 611]

Řešení:
Ze zadání úlohy známe následující hodnoty

$$a_n = 30000, \qquad n = 20, \qquad p = 2,5.$$

Potřebujeme jen určit počáteční hodnotu a_0, kterou zjistíme dosazením do vzorce a jeho jednoduchým upravením.

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$30000 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{20}$$

$$30000 = a_0 \cdot 1,025^{20}$$

$$a_0 = \frac{30000}{1,025^{20}}$$

$$a_0 \doteq 18308,30$$

Původní vklad za daných podmínek činil 18 308,30 Kč.

Příklad 38:
Za pět let se počet obyvatel ve městě X zvýšil o 12%. Jaký byl roční přírůstek? (Počítejte s přesností na desetiny). [13, s. 71]

Řešení:[11]
Ze zadání úlohy víme, že počet období n je rovno pěti a vzrůst p za pět let byl 12%, potom počet obyvatel po pěti letech můžeme vyjádřit jako

$$a_5 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right). \tag{2.45}$$

Pokud bychom ale počet obyvatel po pěti letech chtěli vyjádřit pomocí vzrůstu p za jeden rok, získali bychom rovnost

$$a_5 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5. \tag{2.46}$$

Položíme-li vztahy (2.45) a (2.46) do rovnosti, můžeme vypočítat hledaný roční přírůstek.

$$a_0 \cdot r^5 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right), \text{ kde } r = 1 + \frac{p}{100}$$

[11] Řešení není převzato z publikace [13]

Rovnici můžeme krátit hodnotou a_0, protože určitě víme, že původní počet obyvatel nebyl nulový. Potom

$$r^5 = 1 + \frac{12}{100}$$

$$r = \sqrt[5]{1,12}$$

$$r \doteq 1,023 \qquad \Rightarrow \qquad p = 0,023 = 2,3\%$$

Roční přírůstek obyvatel byl $2,3\%$.

2.7.6 Jiné

Příklad 39:

Sadař prodal prvnímu kupujícímu polovinu všech svých jablek a ještě půl jablka, druhému kupujícímu prodal polovinu zbylých jablek a ještě půl jablka, třetímu zase prodal polovinu zbylých jablek a půl jablka atd. Sedmému kupujícímu prodal polovinu zbylých jablek a ještě půl jablka, a to už bylo vše, co měl. Kolik jablek měl na začátku? [1, s.151]

Řešení:

Počet jablek, které měl sadař na začátku si označíme proměnnou x. Potom první kupující dostal

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2} \text{ jablek.}$$

Druhý kupující dostal

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2} \text{ jablek.}$$

Třetí kupující dostal

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{2^2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3} \text{ jablek.}$$

Tak bychom pokračovali, až sedmý kupující dostal

$$\frac{x+1}{2^7} \text{ jablek.}$$

Počet všech jablek, které měl sadař na začátku lze vyjádřit rovnicí

$$x = \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \frac{x+1}{2^3} + \ldots + \frac{x+1}{2^7},$$

kterou upravíme na tvar

$$x = (x+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^7}\right).$$

Druhá závorka v rovnici představuje členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = \frac{1}{2}$ a kvocient je roven $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. Potom součet prvních sedmi členů této posloupnosti vypočítáme podle věty 2.10 tak, že

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - 2^7.$$

Potom platí

$$\frac{x}{x+1} = 1 - 2^7 \qquad \Rightarrow \qquad x = 127.$$

Sadař měl na začátku prodeje 127 jablek.

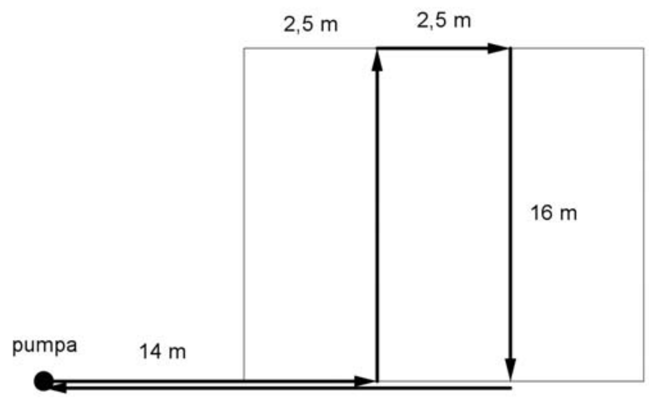
Příklad 40:
V zahradě je 30 záhonů, každý z nich je 16 m dlouhý a 2,5 m široký. Při zalévání záhonů nosí zahradník vodu ve vědrech od pumpy, která je 14 m od okraje zahrady a prochází mezi záhony. Přitom voda, kterou přinese najednou, stačí k zalití jednoho záhonu. Jak dlouhou cestu musí zahradník ujít, aby zalil celou zahradu? Začátek i konec cesty je u studny. [1, s.149]

Řešení:
Aby zahradník zalil první záhon, musí ujít vzdálenost s_1 m, kde musí obejít celý jeden záhon a dojít od pumpy k záhonu a zpět. Potom dostáváme

$$s_1 = 14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65.$$

Aby zahradník zalil druhý záhon, musí ujít vzdálenost s_2 m (viz obrázek 2.9), kde dostáváme

$$s_2 = 14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = 70.$$



Obrázek 2.9: Znázornění cesty zahradníka k zalití druhého záhonu.

Aby zalil třetí záhon, musí ujít vzdálenost s_3 m, kde dostáváme

$$s_3 = 14 + 2,5 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 2,5 + 14 = 75.$$

Z předchozích hodnot jsme vypozorovali, že při každém dalším zalití záhonu musí ujít cestu o 5 m delší než předcházející. Vzdálenosti, které musí zahradník ujít, aby zalil celou zahradu, představují aritmetickou posloupnost, jejíž první člen je $a_1 = 65$ a diference se rovná $d = a_{n+1} - a_n = 5$. Potom součet této posloupnosti bude představovat celkovou vzdálenost, kterou musí zahradník ujít

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_1 + (a_1 + (n-1)d)]$$

$$s_n = \frac{30 \cdot [65 + (65 + 29 \cdot 5)]}{2} = 4125.$$

Při zalévání celé zahrady ujde zahradník 4 125 m.

Příklad 41:

Pro 31 slepic jsme nakoupili zásobu krmiva na nějakou dobu. Každá slepice dostávala 10 l krmiva každý týden. Přitom jsme předpokládali, že se počet slepic nebude měnit. Ale protože každý týden ubyla jedna slepice, krmivo vystačilo dvakrát déle, než jsme původně předpokládali. Jak velká byla zásoba a na jak dlouho jsme krmivo plánovali? [1, s. 149]

Řešení:

Předpokládáme, že jsme nakoupili x l krmiva a toto množství krmiva mělo vystačit na y týdnů. Původní předpoklad byl, že krmivo bude určeno pro 31 slepic po 10 l na jednu slepici za týden, potom získáváme rovnici

$$x = 31 \cdot 10 \cdot y.$$

Spotřeba krmiva ale byla následující

1. týden .... 310 l

2. týden .... 300 l

3. týden .... 290 l

$$\vdots$$

V posledním týdnu (po dvojnásobné době než se předpokládalo) slepice spotřebovali krmiva

$$2y - \text{tý týden} \ldots\ldots\ldots 310 - 10(2y-1) = 310 - 20y + 10l$$

Potom celková zásoba krmiva se rovná

$$x = 310y = 310 + 300 + 290 + \ldots + (310 - 20y + 10)$$

Předchozí rovnice představuje aritmetickou posloupnost, jejíž první člen je $a_1 = 310$ a poslední $2y-$tý člen je roven $310 - 20y + 10$, potom součet této posloupnosti je

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Potom platí

$$\begin{aligned} s_{2y} &= \frac{2y \cdot (310 + 310 - 20y + 10)}{2} \\ 310y &= \frac{2y \cdot (310 + 310 - 20y + 10)}{2} \\ 310y &= (630 - 20y)y, \end{aligned}$$

Protože počet týdnů nemůže být rovno nule, můžeme danou rovnici vydělit proměnnou y. Potom dostaneme

$$31 = 63 - 2y \qquad \Rightarrow \qquad y = 16 \Rightarrow x = 310y = 4960.$$

Zásoba krmiva byla 4960 l a byla plánovaná na 16 týdnů.

Příklad 42:
Žáci poslední třídy se zavázali vykopat na školním pozemku příkop a zorganizovali na kopání brigádu. Kdyby celá brigáda pracovala v plném počtu, příkop by byl vykopán za 24 h. Ale ve skutečnosti nejprve kopal jen jeden člen brigády. Po nějaké době se k němu přidal druhý, za stejnou dobu pak třetí, za nimi po stejné době čtvrtý atd. až nakonec poslední. Ukázalo se, že první člen brigády pracoval jedenáckrát déle než poslední. Jak dlouho pracoval poslední člen brigády? [1, s. 150]

Řešení:
Předpokládejme, že poslední člen brigády pracoval x h, potom první člen brigády pracoval $11x$ h. Počet všech žáků ve třídě, kteří se zůčastnili brigády, označíme proměnnou y. Potom celkový počet hodin práce je roven součtu y členů klesající aritmetické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 11x$ a poslední člen je $a_n = x$. Součet posloupnosti je roven

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n),$$

$$s_n = \frac{y}{2}(11x + x) = 6xy.$$

Z dalších údajů ze zadání vyplývá také rovnost

$$s_n = 24y.$$

Musí tedy platit

$$6xy = 24y.$$

Rovnici můžeme vydělit číslem y, o kterém víme, že nemůže být rovno nule. Potom dostáváme

$$6x = 24 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4.$$

Žák, který přišel na brigádu poslední, pracoval 4 h.

Příklad 43:
Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé vrstvy horní zapadají do mezer vrstvy dolní. Do kolika vrstev se složí 90 rour, jsou-li v nejhořejší vrstvě 2 roury? Kolik rour je v nejspodnější vrstvě? [5, s. 79]

Řešení:[12]
Jednotlivé vrstvy rour představují členy aritmetické posloupnosti, o které platí

$$a_1 = 2, \qquad d = 1, \qquad s_n = 90.$$

Zajímá nás hodnota n, tj. kolik vrstev vznikne použitím 90 rour, a hodnota posledního členu posloupnosti a_n, tj. počet rour v nejspodnější vrstvě. Nejdříve si vyjádříme $n-$tý člen posloupnosti

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + n - 1 = n + 1.$$

Tento vztah dosadíme do vztahu pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, upravíme a vyjádříme hodnotu n.

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$90 = \frac{n}{2} \cdot (2 + n + 1)$$

$$n^2 + 3n - 180 = 0 \qquad \Rightarrow n_1 = -15,\ n_2 = 12$$

Protože proměnná n může být pouze přirozené číslo, řešení pro $n_1 = -15$ neexistuje. Úloha má tedy pouze jedno řešení a to $n = 12$. Hodnota dvanáctého členu je rovna

$$a_{12} = 2 + 11 \cdot 1 = 13.$$

Roury se složí do 12 vrstev a v nejspodnější vrstvě je 13 rour.

Příklad 44:
V posluchárně je 1 000 míst k sezení. Sedadla jsou uspořádaná do 10 řad tak, že počty sedadel v jednotlivých řadách tvoří členy aritmetické posloupnosti. V první řadě je 46 sedadel. Kolik sedadel je v poslední řadě? [15, s. 592]

Řešení:
O zadané aritmetické posloupnosti známe následující údaje

$$n = 10, \qquad s_{10} = 1000, \qquad a_1 = 46$$

[12]Řešení není převzato z publikace [5]

a chceme zjistit hodnotu posledního (desátého) členu $a_n = a_{10}$. K tomu použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Po dosazení a krátké úpravě dostaneme

$$1000 = \frac{10}{2} \cdot (46 + a_{10})$$

$$a_{10} = 154$$

V poslední řadě je 154 sedadel.

2.8 Zajímavé matematické problémy a posloupnosti

Příklad 1: Problém Hanojských věží[13]
Do dřevěné desky jsou vsazeny tři kolíky. Na prvním z nich je navlečeno n disků navzájem různých průměrů s otvory uprostřed tak, že tvoří pyramidu (nejníže leží disk s největším průměrem). Úlohou je přemístit všechny disky pomocí druhého kolíku na třetí. Jeden tah znamená přenesení jednoho disku z vrcholu jedné pyramidy na vrchol druhé. Přitom nesmí ležet disk s větším průměrem na disku s menším průměrem. Kolik tahů nejméně musíme provést? [2, s. 17]

Řešení:
Nejmenší možný počet tahů potřebný pro přenesení n disků označíme symbolem a_n a $a_1 = 1$. Pokud vynecháme triviální úlohu, že je potřeba přenést pouze jeden disk, a budeme předpokládat, že $n > 1$, budeme postupovat následovně:

1. Z prvního kolíku přeneseme $n - 1$ disků na druhý kolík, abychom uvolnili největší disk ve spodu pyramidy na prvním kolíku. K tomu je třeba a_{n-1} tahů.
2. Jedním tahem přesuneme největší disk z prvního kolíku na třetí kolík.
3. Z druhého kolíku přeneseme pomocí prvního $n-1$ disků na třetí kolík. K tomu opět potřebujeme a_{n-1} tahů.

Po sečtení provedených tahů v předchozím postupu získáme rekurentně zadanou posloupnost $\{a_n\}$

$$a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad \text{pro } n > 1.$$

Vypíšeme si několik členů této posloupnosti: $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$ Náš odhad je, že vzorec pro $n-$tý člen posloupnosti je

$$a_n = 2^n - 1,$$

který ověříme matematickou indukcí.

1. Nechť $n = 1 : a_1 = 2^1 - 1 = 1$

[13]Hanojské věže, patří mezi časté programátorské úlohy na cvičení rekurze. Časová složitost této úlohy je exponenciální a roste velmi rychle. Hlavolam je založený na staré legendě. Při stvoření světa bylo v jednom buddhistickém klášteře ve starobylém asijském městě na jednu ze tří jehel umístěno 64 posvátných disků. Od té doby mniši tohoto kláštera přerovnávají denně po jednom disku pyramidu 64 posvátných disků na cílovou jehlu. Legenda říká, že až mnichové přemístí poslední disk na cílovou jehlu, nastane konec světa. Toho se ale jen tak obávat nemusíme. Pro $n = 64$ je potřebný počet tahů roven asi $1,84 \cdot 10^{19}$, tedy pokud např. hráč přesune 1 disk za 3 sekundy, bude přesun celé pyramidy trvat $1,84 \cdot 10^{12}$ let.

2. Předpokládáme, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 2^n - 1$. Nyní ověříme, zda tvrzení platí i pro všechna $n + 1 \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

Pro rekurentně zadanou posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 1.$$

Tím je vztah $a_n = 2^n - 1$ dokázán.
Pro přemístění n disků je nejméně potřeba $2^n - 1$ tahů.

Příklad 2: Výpočet druhé odmocniny reálných čísel
Najděte alespoň jeden způsob pro přibližný výpočet druhé odmocniny kladného reálného čísla a. [6, s. 110]

Řešení:
Nejprve zvolíme libovolné kladné číslo x_1, jehož druhá mocnina je větší než číslo a. Pro číslo x_1 tedy platí $x_1^2 > a \Rightarrow x_1 > \sqrt{a}$, protože obě čísla a i x_1 jsou kladná. Víme, že platí

$$\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}} > \frac{a}{x_1}.$$

Potom musí platit nerovnost

$$\frac{a}{x_1} < \sqrt{a} < x_1. \tag{2.47}$$

Uvažujme dále posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je zadaná rekurentním vztahem

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right). \tag{2.48}$$

Potom můžeme říci, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má následující vlastnosti:

- $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a}{x_n} < \sqrt{a} < x_n$;
- posloupnost je klesající;
- posloupnost je omezená;
- posloupnost je konvergentní (podle věty 2.13).

U počítání limity posloupnosti nás zajímá její chování pro členy jdoucí do nekonečna (tedy pro hodně velká n). Proto je zřejmé, že posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, které se od sebe liší pouze o jeden člen, mají stejnou limitu c

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = c. \tag{2.49}$$

Podle rovnosti (2.49) lze v rekurentním vztahu (2.48) nahradit x_n hodnotou c a tím dostaneme

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + c\right) \\ 2c &= \frac{a}{c} + c \\ c &= \frac{a}{c} \\ c^2 &= a \\ c &= \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Tímto jsme zjistili, že limitou posloupností $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je iracionální číslo $\sqrt{a}$.

Pro lepší představu vypočítáme podle vztahu (2.48) druhou odmocninu čísla 2. Je-li $a = 2$, $x_1 = 2$, potom

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2} + 2\right) = \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12} = 1,416 \\ x_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\frac{17}{12}} + \frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408} = 1,414216 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na tomto příkladu je vidět, že jednotlivé členy posloupnosti konvergují k číslu $\sqrt{2}$ velmi rychle.

Příklad 3: Výpočet Ludolfova čísla π

Řecký matematik Archimédes ukázal, že pro číslo π platí nerovnost

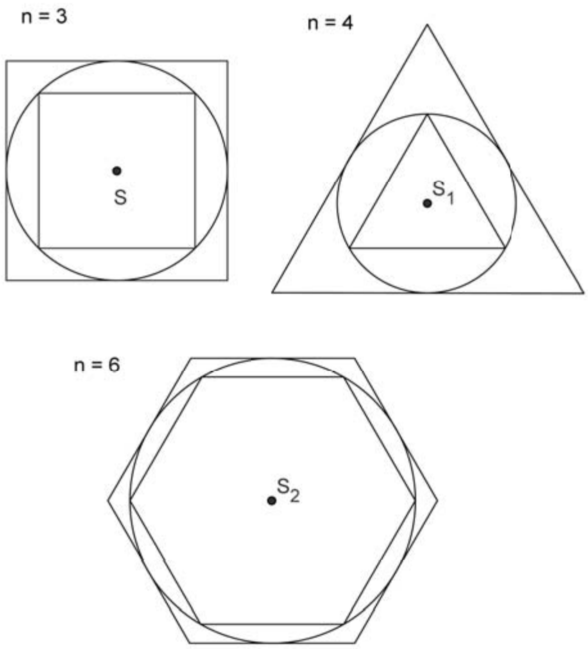
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

K tomuto vztahu dospěl tak, že porovnával délku kružnice s obvody pravidelných $n-$úhelníků, které jsou vepsány a opsány dané kružnici. Pokuste se tento postup zopakovat a stanovit hodnotu π. [11, s. 63]

Řešení:
Budeme uvažovat jednotkovou kružnici ($r = 1$), jejíž obvod je roven 2π. Označme $\{o_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost obvodů pravidelných $n-$úhelníků vepsaných do kružnice a $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost obvodů pravidelných $n-$úhelníků opsaných kružnici. Z obrázku 2.10 je zřejmé, že posloupnost $\{o_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená obvodem kružnice a posloupnost $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a omezená opět obvodem kružnice. Podle věty 2.13 je každá monotónní a omezená posloupnost konvergentní. Oba tyto předpoklady posloupnosti $\{o_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňují, můžeme tedy říct, že jsou konvergentní, tj. mají vlastní limitu. Je možné dokázat, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

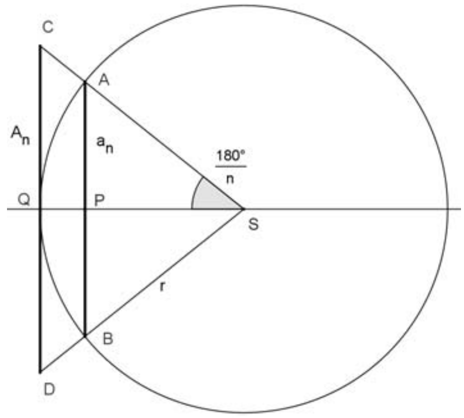
$$o_n < 2\pi < O_n \qquad \text{a navíc} \qquad \lim_{n\to\infty} o_n = \lim_{n\to\infty} O_n = 2\pi. \tag{2.50}$$

Nyní vyjádříme $n-$té členy posloupností $\{o_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ z obrázku 2.11, na



Obrázek 2.10: Znázornění pravidelného trojúhelníku, čtyřúhelníku a šestiúhelníku opsaného a vepsaného kružnici.

kterém je znázorněna jedna strana pravidelného $n-$úhelníku opsaného a vepsaného kružnici. Pro další odvození je nutné si uvědomit, že pravidelný $n-$úhelník je možné rozdělit na n rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhel proti straně daného $n-$úhelníku má velikost $\frac{360^\circ}{n}$.



Obrázek 2.11: Jedna strana pravidelného $n-$úhelníku opsaného a vepsaného kružnici.

Z pravoúhlého trojúhelníku APS plyne

$$\sin\frac{180°}{n} = \frac{\frac{a_n}{2}}{1} = \frac{a_n}{2}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku CQS plyne

$$\tan\frac{180°}{n} = \frac{\frac{A_n}{2}}{1} = \frac{A_n}{2}.$$

Odtud pro délky stran $n-$úhelníku vepsaného a opsaného kružnici získáme

$$a_n = 2\sin\frac{180°}{n}, \qquad A_n = 2\tan\frac{180°}{n}.$$

A pro obvody uvažovaného vepsaného a opsaného $n-$úhelníku potom platí vztah

$$o_n = 2n\sin\frac{180°}{n}, \qquad O_n = 2n\tan\frac{180°}{n}.$$

Dosazením do vztahů (2.50) a po krátké úpravě dostaneme

$$2\sin\frac{180°}{n} < 2\pi < 2\tan\frac{180°}{n}$$
$$\sin\frac{180°}{n} < \pi < \tan\frac{180°}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{180°}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\tan\frac{180°}{n}\right) = \pi.$$

Pokud bychom postupně dosazovali za n stále vyšší hodnoty, určili bychom číslo π na libovolný počet desetinných míst. Například pro 1000−úhelník získáme odhad čísla π s přesností na 5 desetinných míst

$$2 \cdot 3,14158 < 2\pi < 2 \cdot 3,14160 \qquad \Rightarrow \qquad \pi = 3,14159.$$

Pro srovnání číslo π s přesností na deset číslic je $\pi = 3,1415926535$.

Příklad 4: Fibonacciho posloupnost

Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisánský (kol. 1170 − 1250), byl jedním z nejvýznamnějších matematiků středověké Evropy. S Fibonacciho jménem se nejčastěji setkáváme v souvislosti s tzv. Fibonacciho čísly. Tyto čísla představují rekurentně zadanou posloupnost, která se objevuje v jedné úloze o růstu populace králíků ve Fibonacciho sbírce úloh *Liber abaci.* Tuto posloupnost jako první pojmenoval francouzský matematik Édouard Lucas (1842 − 1891), který ji označil jako Fibonacciho posloupnost a její členy Fibonacciho čísla. [19]

Úloha zní:

Jistý muž vlastnil jeden pár králíků. Tyto králíky umístil do uzavřené ohrady. Jeho přáním bylo zjistit, kolik párů králíků zplodí tento jeden pár za jeden rok. Přičemž se předpokládá, že žádný králík neuhyne ani se neztratí a že jeden pár dospělých králíků zplodí jeden pár králíků, kteří dospějí za dva měsíce a poté všechny produktivní páry zplodí po jednom páru králíků. [20, s. 277]

Řešení:

V „nultém“ měsíci existuje jeden pár králíků. Následující tabulka znázorňuje vývoj populace králíků behem jednoho roku.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
N_n	0	1	1	2	3	5	8	12	21	34	55	89	144
F_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Označení:

n ...... počet jednotlivých měsíců

S_n ...... počet starých původních párů králíků

N_n ...... počet nových párů králíků

F_n ...... počet všech králíků na konci $k-$tého měsíce

Poslední řádek tabulky lze vyjádřit jako součet dvou předcházejících čísel toho samého řádku a platí

$$F_n = S_n + N_n = S_n + S_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Čísla F_n jsou zadaná rekurentně a představují následující posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 133, 377, \ldots$$

Jednotlivé členy představují počet dospělých párů králíků v jednotlivých měsících. Potom po roce bude muž mít 377 králíků.

Fibonacciho posloupnost má řadu různých aplikací a zajímavých vlastností, např. vztah Fibonacciho čísla a Pascalova trojúhelníku (více se dozvíte v [18, s. 40]). My si nyní uvedeme dvě slovní úlohy, které propojují kombinatoriku a Fibonacciho posloupnost.

V následujících příkladech budeme Fibonacciho posloupností rozumět takovou posloupnost, jejíž $n-$tý člen je F_n pro $n > 2$ zadán následovně

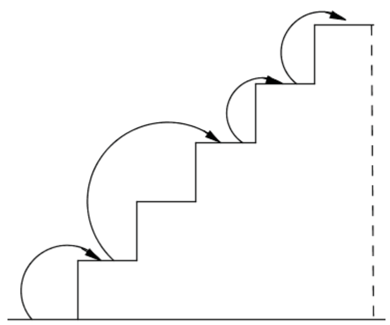
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ a počáteční podmínky jsou } F_1 = 1, F_2 = 2.$$

Příklad 4.1:
Určete počet způsobů, jimiž se dá vyjít schodiště o n schodech, jestliže se při každém kroku vynechá nejvýše jeden schod. [18, s. 38]

Řešení:
Na obrázku 2.12 je znázorněn jeden způsob, jak dané schodiště vyjít. Počet způsobů, jimiž se dá takto vyjít schodiště o n schodech, označíme proměnnou p_n. Tyto způsoby rozdělíme do dvou disjunktních množin podle toho, zda se šlápne na první schod, nebo zda se překročí. Šlápne-li se na první schod, zůstává $(n-1)$ schodů, které lze vyjít p_{n-1} způsoby. Pokud se ale první schod překročí, zůstává $(n-2)$ schodů, které lze vyjít p_{n-2} způsoby. Potom tedy platí

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \qquad \wedge \qquad p_1 = 1, p_2 = 2.$$

Potom má posloupnost p_n stejný rekurentní vzorec i počáteční podmínky jako Fibonacciho posloupnost, tj. $p_n = F_n$.



Obrázek 2.12: Jeden způsob, jak vyjít schodiště, pro $n = 5$.

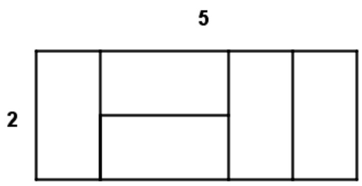
Schodište o n schodech se zadanými podmínkami se dá vyjít F_n způsoby.

Příklad 4.2:

Určete, kolika způsoby je možno vydláždit obdélníkovou chodbu $2 \times n$, je-li k dispozici neomezená zásoba obdélníkových dlaždic 2×1. [18, s. 39]

Řešení:

Na obrázku 2.13 je znázorněn jeden způsob, jak vydláždit zadanou obdélníkovou chodbu. Počet způsobů vydláždění chodby délky n označíme proměnnou p_n. Tyto

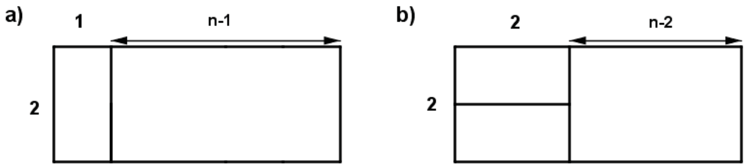


Obrázek 2.13: Jeden způsob, jak vydláždit obdélníkovou chodbu, pro $n = 5$.

způsoby rozložíme do dvou disjunktních množin podle toho, jak jsou umístěny první dlaždice. Je-li na začátku chodby položena svisle jedna dlaždice jako na obrázku 2.14 a), zůstává k vydláždění chodby ještě vzdálenost $(n-1)$. K tomu bude potřeba p_{n-1} dlaždic. Jsou-li na začátku chodby položeny vodorovně dvě dlaždice nad sebou jako na obrázku 2.14 b), zůstává k vydláždění chodby ještě vzdálenost $(n-2)$. K tomu bude potřeba p_{n-2} dlaždic.

Potom tedy platí rovnost

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \qquad \wedge \qquad p_1 = 1, p_2 = 2.$$



Obrázek 2.14: Možné způsoby umístění dlaždic na začátku chodby.

Potom má posloupnost p_n stejný rekurentní vzorec i počáteční podmínky jako Fibonacciho posloupnost, tj. $p_n = F_n$.

Chodbu $2 \times n$ lze vydláždit F_n způsoby.

2.9 Úlohy z matematických olympiád

Příklad 1:
Je dána posloupnost $\{a_n\}$, kde
$$a_n = \frac{n^2}{2^n}.$$
Dokažte, že tato posloupnost má největší člen a určete ho. [5. ročník MO, 1. kolo kategorie A]

Řešení:
Pro všechna přirozená čísla n platí $a_n > 0$. Přitom první členy posloupnosti jsou
$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{9}{8},\ a_4 = 1,\ a_5 = \frac{25}{32}, \dots$$
Pokusíme se dokázat, že se členy této posloupnosti $\{a_n\}$ od členu a_3 zmenšují, tj. že platí
$$a_n > a_{n+1} \text{ nebo } a_n - a_{n+1} > 0$$
pro všechny přirozená čísla $n \geq 3$.
Označíme-li $d = a_n - a_{n+1}$, potom platí
$$d = \frac{n^2}{2^n} - \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}},$$
$$d = \frac{2n^2 - (n^2 + 2n + 1)}{2^{n+1}},$$
$$d = \frac{n^2 - 2n - 1}{2^{n+1}}.$$
Chceme dokázat, že platí $d > 0$. To bude z předchozí rovnice platit, pokud dokážeme, že čitatel $x = n^2 - 2n - 1$ zlomku z předchozí rovnice je kladné číslo pro všechny $n \geq 3$. Čitatel lze upravit na tvar
$$x = (n-1)^2 - 2,$$
kde pro $n \geq 3$ je $n-1 \geq 2$. Druhé mocniny přirozených čísel větší než 1 jsou větší než číslo 2 a proto je číslo x kladné pro všechny přirozená čísla $n \geq 3$. Potom skutečně platí nerovnost $a_n > a_{n+1}$ pro $n \geq 3$. Dokázali jsme tedy, že člen $a_3 = \frac{9}{8}$ zadané posloupnosti je skutečně jejím největším členem.

Příklad 2:
Přirozená čísla $1, 2, 3 \ldots, n$ napsaná v nějakém pořadí označme $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jestliže je n číslo liché, je součin $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$ dělitelné 2. Dokažte. [17. ročník MO, 2. kolo kategorie D]

Řešení:
Mezi čísly $1, 2, 3 \ldots, n$ je při lichém n lichých čísel o jedno více než sudých. Proto v uspořádání $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stojí aspoň jedno liché číslo a_k na lichém místě k. Sudých míst je totiž o jedno méně. Rozdíl $a_k - k$ je potom dělitelný dvěma a proto i součin $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$ je dělitelný dvěma.

Příklad 3:
Pokud (nekonečná) aritmetická posloupnost přirozených čísel obsahuje třetí mocninu přirozeného čísla, potom obsahuje nekonečně mnoho takových mocnin. Dokažte. [12. ročník MO, 1. kolo kategorie A]

Řešení:
Předpokládejme, že aritmetická posloupnost s diferencí d $(d > 0)$ obsahuje mocninu a^3, kde a je přirozené číslo. Potom podle vlastností aritmetické posloupnosti obsahuje také mocninu $(a + kd)^3$, kde k je libovolné přirozené číslo. Pro diferenci d platí $a_{n+1} - a_n = d$, potom

$$(a + kd)^3 - a^3 = kd[(a + kd)^2 + (a + kd)a + a^2] = md \text{ pro } m \text{ celé,}$$

které lze upravit na tvar

$$(a + kd)^3 = a^3 + md.$$

Tím jsme dokázali, že každý člen posloupnosti lze vyjádřit jako třetí mocnina přirozeného čísla.

Příklad 4:
Budiž dána posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n \neq 0$ pro každé přirozené n. Jestliže tato posloupnost $\{a_n\}$ má limitu různou od nuly, pak posloupnost $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ má také limitu, při čemž

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

Dokažte. [3. ročník MO, 1. kolo kategorie A]

Řešení:

Předpokládáme, že je dána konvergentní posloupnost $\{a_n\}$. Vynecháme-li první člen této posloupnosti, dostaneme posloupnost a_{n+1}, která je také konvergentní posloupností a má stejnou limitu jako posloupnost $\{a_n\}$. Zajímá nás čemu se tyto posloupnosti rovnají pro hodně veliká n, proto vynechání jednoho členu výsledek konvergence neovlivní. Podle věty 2.14, která říká, že limita podílu je rovna podílu limit, a za předpokladu, že $\lim a_n \neq 0$, tudíž i $\lim a_{n+1} \neq 0$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim a_n}{\lim a_{n+1}} = 1.$$

Příklad 5:

Z cifer $nula, jedna$ je utvořena posloupnost 10100100010000..., za $n-$tou jedničkou stojí n nul ($n = 1, 2, ...$). Kolik jedniček stojí na prvním milionu míst této posloupnosti? Na kolikátém místě stojí poslední z nich? [27. ročník MO, 1. kolo kategorie C]

Řešení:

Uvažujeme začátek dané posloupnosti až po $n-$tou jedničku a za ní stojící nuly, kterých je právě n. Označme a_n počet cifer n v tomto konečném úseku dané posloupnosti, na kterém je n jedniček a $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ nul. Platí proto

$$a_n = n + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+3).$$

Potom první členy této posloupnosti budou

$$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 9, \ldots$$

Je-li p počet jedniček stojících na prvních k místech dané posloupnosti, pak je $k-$tá cifra buď $p-$tou jedničkou, nebo je některou z p nul, stojících za $p-$tou jedničkou. Musí tedy platit $a_{p+1} < k \leq a_p$ a číslo p je těmito nerovnostmi jednoznačně určeno číslem k. V našem případě je $k = 10^6$, hledaný počet p dostaneme z nerovností

$$\frac{1}{2}(p-1)(p+2) < 10^6 \leq \frac{1}{2}p(p+3),$$

které upravíme na tvar

$$\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 < 2000000,25 \leq \left(p + \frac{3}{2}\right)^2.$$

Hodnota $r = \sqrt{2000000,25}$ leží mezi hodnotami $1414,2$ a $1414,3$. Pro p pak platí nerovnosti

$$p + 0,5 < r < 1414,3 \qquad \wedge \qquad 1414,2 < r \leq p + 1,5.$$

Tedy

$$1412,7 < p \leq 1413,8$$

a protože p je přirozené číslo, je $p = 1413$. To je počet jedniček stojících v dané posloupnosti nejvýše na miliontém místě. Poslední z nich stojí na místě s pořadovým číslem $a_{p-1} + 1 = 998991$.

Kapitola 3

Číselné řady

3.1 Zavedení pojmu číselná řada

Definice 3.1
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se nazývá nekonečná řada. Čísla a_n se nazývají členy řady. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná předpisem

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice 3.2
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá konvergentní, je-li příslušná posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. V opačném případě se řada nazývá divergentní.
Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, potom existuje

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

a nazývá se součet řady. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Divergentní řada nemá součet. Jinak řečeno, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $\pm\infty$, jestliže posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $\pm\infty$. [10]

Věta 3.1
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost. Potom k ní příslušná řada

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

se nazývá (nekonečná) geometrická řada.
Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tvar

- $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$,
- $s_n = n$ pro $q = 1$.

Pokud $|q| < 1$, je geometrická řada konvergentní, protože platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Pokud $|q| \geq 1$, geometrická řada diverguje. [10]

Věta 3.2
Jsou-li řady $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a jejich součty jsou s_a, s_b, potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

je také konvergentní a její součet je $\alpha s_a + \beta s_b$.
Pro $\alpha = 1, \beta = 1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad [10]$$

Je třeba si uvědomit, že pokud určujeme součet konečného počtu sčítanců, můžeme použít asociativní vlastnost operace sčítání. Této vlastnosti však nelze využít, pokud budeme sčítat nekonečně mnoho čísel. V tomto případě nejde o součet v běžném smyslu slova, ale metodou výpočtu je „limitování“. [6]

3.2 Historické úlohy

Příklad 1: Achilles a želva

Úloha *Achilles a želva* patří mezi poměrně známé Zenonovy aporie (logické paradoxy). V upravené formě úloha zní:

Achilles a želva spolu závodí v běhu na 100 m, Achilles je rychlejší a tak dá želvě náskok 10 m. Když závod začne a Achilles se dostane na startovní místo želvy, tj. 10 m z celkové trasy, želva už má před ním náskok v podobě jedné desetiny, tj. 1 m. Když se Achilles dostane na 11 m, želva má opět náskok 0,1 m. Celý závod se tak rozdělí i časově na nekonečně mnoho malých kousků (ale s neprázdnou délkou) a jejich součet bude nekonečný. Achilles se k želvě stále přibližuje, ale nikdy ji nedohoní. V čem se Zenon ve své úvaze mýlil?

Řešení:

Náskok želvy v jednotlivých úsecích tvoří klesající geometrickou posloupnost

$$10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots,$$

kterou lze sečíst vztahem pro součet nekonečné geometrické řady, jejíž první člen je $a_1 = 10$ a kvocient je $q = \frac{1}{10}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} \doteq 11,\overline{1}$$

Zenon se mýlil v základní myšlence, že nekonečná řada může mít konečný součet. Achilles tedy želvu dohoní po uběhnutí $11,\overline{1}$ m.

Příklad 2:

Kalif z Bagdádu dovolil jednomu matematikovi, aby si přál, co chce. Matematik se zatvářil nevinně a řekl: „Velký kalife, mám skromné přání. Odměň mě pšeničnými zrny, a to takto: Dej mi tolik pšeničných zrn, kolik jich bude muset být na posledním poli šachovnice, jestliže na první položíme jedno zrno a na každé následující dvojnásobek toho množství, které bude na předcházejícím poli.“ Kalif se zasmál a ochotně souhlasil. Domníval se, že matematik nedostane ani tolik zrní, aby si mohl upéci bochník chleba. Velmi se však podivil, když mu matematik vypočítal, že jeho přání se nedá splnit. Je to možné? [14, s. 25]

Řešení:

Podle matematikových instrukcí je na prvním poli šachovnice jedno zrno, na druhém poli budou 2 zrna, na třetím poli budou 4 zrna, na čtvrtém poli bude 8 zrn, atd. Počet jednotlivých zrn na každém poli představuje členy geometrické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a kvocient posloupnosti je $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$. Podle věty 3.1 je geometrická řada tvořená z této posloupnosti divergentní a její součet jde k nekonečnu, protože $|q| \geq 1$. Jenom počet zrn na posledním poli šachovnice je roven číslu $2^{63} = 9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808$.

Mohli bychom ještě určit, kolik pytlů se zrním představuje 2^{63} zrní, když jeden pytel váží 60 kg a jedno zrno váží přibližně 0,04 g. Potom by jeden pytel obsahoval 1 500 000 zrn a zrna na posledním poli šachovnice by se vešla do 6 146 914 691 236 a půl pytle. I toto číslo je jen těžko představitelné. Proto bychom množství zrn na posledním poli šachovnice mohli určit počtem vagónů, které naplní. Běžný vagón uveze 50 tun nákladu, tj. 1 250 000 000 zrn. Potom 2^{63} zrn by se muselo naložit do 7 378 697 629,5 vagónů.

Tvrzení na konci úlohy, že se přání matematika nedá splnit, je pravdivé.

Příklad 3:

Vypočítejte obsah obrazce utvořeného z nekonečně mnoha pravoúhelníků, jestliže se délky jejich vodorovných stran zmenšují v poměru 4:1 a délky jejich svislých stran se zvětšují v poměru 1:2 (viz obrázek 3.1).[1] [19, s. 118]

Řešení:

Obsahy jednotlivých pravoúhelníků představují členy nekonečné geometrické řady

$$48 + 24 + 12 + 6 + \dots$$

[1] Úloha byla uvedena v traktátu *O konfiguraci kvalit* od italského matematika Nicole Oresme (kol. 1323 - 1328). Text úlohy i její řešení bylo upraveno podle dnešního vyjadřování a zápisu. Stěžejní myšlenka Oresmeho důkazu zůstala však zachována.

Obrázek 3.1: Obrazec tvořený z nekonečně mnoha pravoúhelníků. [19, s. 119]

Tato řada je konvergentní, protože její kvocient $q = \frac{1}{2}$ splňuje podmínku $|q| < 1$. Potom součet této řady je

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{48}{1-\frac{1}{2}} = 96.$$

Zadaná nekonečná řada má obsah 96 j^2.

Příklad 4: Odškodnění vojákovi[2]

Voják dostal odškodnění za každou ránu, kterou utrpěl v bitvě, a to podle těchto pravidel: za první ránu 1 kopejku, za druhou ránu 2 kopejky, za třetí 4 kopejky atd. Když se spočítala všechna zranění, voják dostal jako odškodnění 655 rublů a 35 kopejek[3]. Kolik měl voják ran? [1, s.153]

Řešení:

Ze zadaných údajů sestavíme rovnici, kde na levé straně máme výši celkového odškodnění vojáka a na pravou stranu jsme dosadili výši odškodnění za jednotlivé rány, kde neznámá x představuje hledaný celkový počet ran

$$65535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{x+1}.$$

Hodnoty na pravé straně rovnice představují členy konečné geometrické řady, jejíž součet získáme

$$s = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1.$$

[2]Úloha pochází z ruské učebnice Úplný kurs čisté matematiky, kterou v roce 1795 sestavil učitel speciální matematiky Jefim Vojtgachovskij.

[3]100 kopejek = 1 rubl

Potom dostaneme rovnost

$$65535 = 2^x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 16$$

Voják v bitvě utržil 16 ran.

Příklad 5: Koupě koně[4]

Kdosi prodal koně za 156 rublů. Nicméně kupující se nakonec rozhodl koně nekoupit a vrátit ho majiteli se slovy: „Není důvod, proč bych si měl nechat za tuto cenu koně, který nestojí za takové peníze.“ Na to mu prodávající nabídl jiné podmínky: „Jestliže je podle tvého názoru cena za koně vysoká, kup si jenom jeho hřebíky z podkov; koně pak dostaneš bezplatně. Hřebíků je v každé podkově šest. Za první hřebík mi dej pouze $\frac{1}{4}$ kopejky, za druhý $\frac{1}{2}$ kopejky, za třetí 1 kopejku, ...“
Kupující byl velmi potěšen nízkou cenou, chtěl dostat koně zadarmo a tak přijal podmínky prodávajícího. Myslil si přitom, že nebude muset zaplatit dohromady víc než 10 rublů. Kolik při této dohodě kupující prodělal? [1, s.153]

Řešení:

Jednotlivá množství peněz za 24 hřebíků z podkov představují členy konečné geometrické řady

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{24-3}.$$

Potom součet řady je roven

$$s = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_{24} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{24} - 1}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303\frac{3}{4} \text{ kopejek.}$$

Kupující by za 24 hřebíků a koně zdarma zaplatil $4194303\frac{3}{4}$ kopejek, což je téměř 42 000 rublů.

[4] Úloha pochází z ruské aritmetiky od Magnického staré 200 let.

3.3 Užití řad ve (slovních) úlohách

Příklad 6:

Zjistěte součet následující řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right). \qquad [12, s. 491] \tag{3.1}$$

Řešení:

Nejprve si vypíšeme několik členů této řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$$

Vidíme, že zadanou řadu můžeme rozdělit na dvě nekonečné řady, jejichž vlastnosti budeme určovat pro každou řadu zvlášť.

První řada

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

je nekonečná geometrická řada, jejíž první člen je $a_1=\frac{1}{2}$ a s kvocientem $q_a=\frac{1}{2}$. Jelikož $|q_a|<1$, je tato řada konvergentní a její součet se rovná

$$s_a=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Druhá řada

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}-\ldots-\frac{1}{3^n}-\ldots$$

je také nekonečná geometrická řada, jejíž první člen je $b_1=-\frac{1}{3}$ a s kvocientem $q_b=\frac{1}{3}$. Jelikož $|q_b|<1$, je tato řada opět konvergentní a její součet se rovná

$$s_b=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}.$$

Zadanou řadu (3.1) tvoří dvě konvergentní řady, proto i řada (3.1) musí být konvergentní podle věty 3.2. Součet řady (3.1) je součtem obou dílčích řad

$$s=s_a+s_b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Daná řada (3.1) má součet $\frac{1}{2}$.

Příklad 7:
Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}. \qquad [16, s. 3]$$

Řešení:
Podle definice 3.1 určíme nejdříve $n-$tý částečný součet zadané řady a podle definice 3.2 provedením limitního přechodu určíme její součet.

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} \tag{3.2}$$

Po vydělení rovnosti dvěma získáme

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \ldots + \frac{n}{2^{n+1}}. \tag{3.3}$$

Odečteme-li rovnici (3.3) od (3.2) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{s_n}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \\ s_n &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Podle věty 3.2 můžeme danou posloupnost částečných součtů rozdělit na dvě části a každou řešit samostatně. První posloupnost částečných součtů představuje geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \frac{1}{2}$ a kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Protože $|q| < 1$, víme, že tato řada bude konvergovat

$$\lim_{n\to\infty} s_{n1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1. \tag{3.4}$$

Součet druhé posloupnosti částečných součtů vypočteme pomocí limity

$$\lim_{n\to\infty} s_{n2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = 0. \tag{3.5}$$

Součet zadané řady je roven součtu výsledných hodnot rovnic (3.4) a (3.5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2\cdot \lim_{n\to\infty} (s_{n1} + s_{n2}) = 2.$$

Příklad 8:
Určete součet nekonečné řady

$$\frac{1}{\log 2\cdot \log 4}+\frac{1}{\log 4\cdot \log 8}+\cdots+\frac{1}{\log 2^{n}\cdot \log 2^{n+1}}+\cdots \qquad [18,\ \text{s. } 41] \tag{3.6}$$

Řešení:
Nejprve upravíme $n-$tý člen této řady podle vlastností logaritmu, kdy platí $\log_a\ x^n\ =\ n\cdot\ \log_a\ x$ a dostaneme

$$\frac{1}{\log 2^{n}\cdot \log 2^{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{\log^2 2}.$$

Potom posloupnost s_n prvních n částečných součtů se rovná

$$s_n=\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]\cdot\frac{1}{\log^2 2}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\log^2 2}.$$

Podle definice 3.2 se součet řady (3.6) rovná

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{\log^2 2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{\log^2 2}.$$

Nekonečná řada (3.6) má součet $s=\frac{1}{\log^2 2}$.

Příklad 9:
Rozhodněte o konvergenci nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}. \qquad [17,\ \text{s. } 22] \tag{3.7}$$

Řešení:
Uvedenou řadu si upravíme podle základních vlastností logaritmů, kdy platí $\ln\frac{a}{b}\ =\ \ln a-\ln b$ a dostaneme

$$\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\ldots+\ln(n+1)-\ln n.$$

Vidíme, že se nám jednotlivé členy řady odečtou kromě členu $-\ln 1$ a $\ln(n+1)$. Hodnota logaritmu v jedničce je ale nula, takže nám pro určení konvergence, resp.

divergence řady zůstane jenom člen $\ln(n+1)$. Potom podle definice 3.2 platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Řada (3.7) má nevlastní limitu, proto diverguje.

Příklad 10:

Dokažte, že harmonická řada[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{3.8}$$

diverguje. [16, s. 7]

Řešení 1:

Důkaz provedeme odhadem prvních 2^n členů této řady

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}\\
s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}\\
s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + + \frac{2}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} &= 1 + \frac{3}{2}\\
s_1 6 = s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} &>\\
1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} &= 1 + \frac{4}{2}\\
&\vdots\\
s_n > s_2^n &\geq 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Pokud pro index posloupnosti částečných součtů platí $n > 2^n$, bude součet prvních n členů harmonické řady vždy větší než jakékoli předem dané číslo. Proto harmonická řada diverguje k nekonečnu.

K posouzení konvergence, resp. divergence číselné řady existují tzv. kritéria kon-

[5]Harmonická se nazývá proto, že každý její člen je harmonickým průměrem dvou sousedních členů, tj. platí

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2}.$$

Harmonická řada byla první řadou, u které se poprvé dokázalo, že diverguje. Důkaz provedl francouzský matematik Nicole Oresme takovým způsobem, který jsme si uvedli v řešení tohoto příkladu. [16]

vergence, udávající postačující podmínky pro konvergenci, resp. divergenci řady. Mezi taková kritéria patří např. srovnávací kritérium, limitní srovnávací kritérium, odmocninové kritérium, limitní odmocninové kritérium, atd. Více se o jednotlivých kritériích konvergence dozvíte např. v [10], [16], [17].
Mezi tato kritéria patří také integrální kritérium, pomocí kterého si ukážeme další způsob, jak dokázat divergenci harmonické řady. Integrální kritérium zní:
Nechť f je nezáporná a klesající funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel taková, že $a_n = f(n)$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)dx$ buď současně konvergují nebo současně divergují. [10]

Řešení 2:
Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je na intervalu $\langle 1, \infty)$ klesající funkce. Pro hodnoty $x = n$ je $f(n) = \frac{1}{n}$. Potom podle integrálního kritéria je řada konvergentní, resp divergentní, jestli konverguje, resp. diverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$. A platí

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln x - \lim_{x\to\infty} \ln 1 = \infty.$$

Nevlastní integrál je roven nevlastní limitě a proto diverguje. Ze znění integrálního kritéria vyplývá, že i nekonečná řada (3.8) diverguje. [17, s. 29]

Příklad 11:
Napište jako zlomky s celočíselným čitatelem a jmenovatelem tato čísla:

a) $a = 0,\overline{8}$

b) $b = 0,53\overline{9}$ [13, s. 73]

Řešení:[6]

a) Číslo $a = 0,\overline{8}$ je ryze periodické číslo. Zadané číslo lze přepsat do tvaru

$$0,8 + 0,08 + 0,008 + \dots$$

Vidíme, že předchozí výpis čísla $0,\overline{8}$ tvoří nekonečnou geometrickou řadu, pro kterou platí

$$a_1 = 0,8 \qquad \wedge \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{0,08}{0,8} = 10^{-1}.$$

[6] Řešení není převzato z publikace [13]

Tato řada je konvergentní, protože $|q| < 1$. Proto můžeme určit její součet

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,8}{1-10^{-1}} = \frac{8}{9}.$$

Číslo $a = 0,\overline{8}$ lze napsat jako zlomek $\frac{8}{9}$.

b) Číslo $b = 0,53\overline{9}$ je neryze periodické číslo, 53 je předperioda a číslice 9 je perioda. Zadané číslo můžeme napsat ve tvaru

$$0,53 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 + \ldots$$

Vidíme, že čísla $0,009 + 0,0009 + 0,00009 + \ldots$ tvoří nekonečnou geometrickou řadu, protože platí

$$a_1 = 9 \cdot 10^{-3} \qquad \wedge \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-3}} = 10^{-1}.$$

Tato řada je konvergentní, protože $|q| < 1$. Proto můžeme určit její součet

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{1-10^{-1}} = 10^{-2}.$$

Číslo $b = 0,53\overline{9}$ lze tedy napsat takto

$$0,53\overline{9} = 0,53 + 10^{-2} = \frac{53+1}{100} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}.$$

Příklad 12:

Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$

a) $\sum_{i=1}^{\infty} (3\log_2 x - 2)^i = \frac{1}{3}$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} (x+2)^{2i} = \frac{1}{3}$ [13, s. 73]

Řešení:[6]

a) Levá strana rovnice představuje nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = 3\log_2 x - 2$. Protože pravá strana rovnice je reálné číslo, musí geometrická řada konvergovat k tomuto číslu, aby zadaná rovnost byla splněna. Podle věty 3.1 musí být splněna podmínka $|q| < 1$, tedy

$$\begin{aligned} |3\log_2 x - 2| &< 1 \\ 1 < 3\log_2 x &< 3 \\ \frac{1}{3} < 3\log_2 x &< 1. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme levou stranu rovnice pomocí vzorce pro součet nekonečné geometrické řady a z dané rovnosti vypočítáme neznámou x

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\log_2 x - 2}{1-(3\log_2 x - 2)} &= \frac{1}{3} \\ \frac{3\log_2 x - 2}{1-\log_2 x} &= 1 \\ 3\log_2 x - 2 &= 1 - \log_2 x, \end{aligned}$$

rovnici jsme mohli vynásobit jmenovatelem $1-\log_2 x$, protože z podmínky pro kvocient plyne, že $\log_2 x < 1$, potom

$$\log_2 x = \frac{3}{4}$$

a z definice logaritmu $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ vypočteme hodnotu x

$$x = 2^{\frac{3}{4}}$$

Rovnice má řešení pro $x = 2^{\frac{3}{4}}$.

b) Levá strana rovnice představuje nekonečnou geometrickou řadu

$$(x+2)^2 + (x+2)^4 + (x+2)^6 + \dots$$

Řada je určena prvním členem $a_1 = (x+2)^2$ a kvocientem $q = (x+2)^2$. Aby řada byla konvergentní a mohla se rovnat reálnému číslu $\frac{1}{3}$ na pravé straně rovnice, musí kvocient splňovat podmínku

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad |(x+2)^2| < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-3,-1).$$

Pro neznámou x z intervalu $x \in (-3,-1)$ je řada konvergentní a existuje její součet, potom

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{(x+2)^2}{1-(x+2)^2} &= \frac{1}{3} \\
\frac{x^2+4x+4}{-x^2-4x-3} &= \frac{1}{3} \\
4x^2+16x+15 &= 0 \\
x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Úloha má dvě řešení, protože obě hodnoty x_1 a x_2 leží v intervalu $x \in (-3, -1)$.

Rovnice má řešení pro $x_1 = -\frac{5}{2}$ a $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Příklad 13:

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{x^3} \cdot \ldots = 8. \qquad [12, s.492]$$

Řešení:

Definiční obor funkcí v nekonečném součinu na levé straně rovnice tvoří všechna nezáporná reálná čísla. Levou stranu rovnice upravíme na tvar

$$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{x^3} \cdot \ldots = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{3}{8}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{3}{2n}} \cdot \ldots = x^{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{3}{2n}+\ldots}.$$

Přitom exponent čísla x tvoří nekonečnou geometrickou řadu, protože platí

$$a_1 = \frac{3}{2} \qquad \wedge \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Řada je konvergentní, neboť $|q| < 1$ a můžeme určit její součet

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

To znamená, že levá strana rovnice se rovná číslu x^3. Nyní stačí vyřešit jednoduchou exponenciální rovnici

$$x^3 = 8 \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}_0^+.$$

Zadaná rovnice má jediné řešení $x = 2$.

Příklad 14:
Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$

$$2 - 4x + 8x^2 - 16x^3 + \ldots = 1. \qquad [13, s. 73]$$

Řešení:[7]
Levou stranu rovnice tvoří nekonečná geometrická řada, jejíž první člen je $a_1 = 2$ a její kvocient je $q = -2x$. Aby zadaná řada byla konvergentní, musí kvocient splňovat podmínku $|q| < 1$ a platí tedy

$$|2x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Po stanovení podmínek konvergence řady můžeme spočítat její součet

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a_1}{1-q} \\ \frac{2}{1-2x} &= 1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Úloha nemá řešení, protože hodnota $-\frac{1}{2}$ nepatří do intervalu $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Příklad 15:
Daný zlomek zapište pomocí nekonečné geometické řady

a) $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$

b) $\frac{1}{1-x}$, kde $x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 1$ [13, s. 73]

Řešení:[7]

a) Zadaný zlomek představuje vzorec pro součet nekonečné geometrické řady, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a její kvocient je roven $q = \frac{3}{4}$. Tato řada bude mít tvar
$$1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

b) Zadaný zlomek opět představuje vzorec pro součet nekonečné geometrické řady, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a její kvocient je roven $q = x$. Podmínka pro konvergenci řady $|q| < 1$ je splněna omezením definičního oboru neznámé x

[7] Řešení není převzato z publikace [13]

v zadání úlohy. Tato řada bude mít tvar

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (x)^{n-1}.$$

Příklad 16:
Jestliže s výrazem $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$[8] (až do nekonečna) budeme počítat podle pravidel pro konečný počet sčítanců, můžeme dostat různé výsledky, které ukazují, že s takovou nekonečnou řadou nelze vždy počítat podle pravidel o sčítání konečného počtu čísel. Přesvědčte se o tom. [14, s. 147]

Řešení:
Lze postupovat několika způsoby za použití jedné z vlastností sčítání konečného počtu čísel, a to asociativnosti.

1. V tomto případě použijeme asociativnost ke spojení dvou jednotek, které se odečítají, pomocí závorek a získáme

   $$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots + = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

   Zjistili jsme, že součet této řady je nula.

2. Druhý způsob spojování jednotek je takový, že pomocí závorek spojíme každé dvě jednotky a začneme až od druhé číslice

   $$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1.$$

   Zjistili jsme, že součet řady je jedna.

3. Jako poslední způsob zvolíme zápis řady v tomto tvaru

   $$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S \qquad \Rightarrow \qquad 2S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}.$$

   Zjistili jsme, že součet řady je také $\frac{1}{2}$.

Pro jednu řadu nám vyšly tři možné hodnoty jejího součtu. Je tedy zřejmé, že při předchozích postupech jsme museli postupovat chybně a ani jeden výsledek není správný. Tímto jsme se přesvědčili, že opravdu vlastnosti pro konečný počet čísel nelze aplikovat na součet nekonečné řady. Daná řada je divergentní, protože k ní

[8]Mezi prvními matematiky, kteří zkoumali součet této řady, byl i italský matematik Guido Grandi, po kterém se dnes tato řada nazývá Grandiho řada. [16, s. 8]

příslušná limita posloupnosti částečných součtů neexistuje.
Pro lepší představu si vypíšeme několik členů posloupnosti částečných součtů této řady, kde uvidíme, že se částečné součty nepřibližují k jednomu číslu, ale oscilují mezi hodnotami 1 a 0.

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1-1=0 \\ s_3 &= 1-1+1=1 \\ s_4 &= 1-1+1-1=0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Než pokročíme k dalšímu příkladu, připomeneme si, jak převádět reálné číslo z desítkové soustavy do jiné soustavy a opačně. Pro převod celého čísla N do desítkové soustavy platí vztah

$$N = a_{m-1}Z^{m-1} + a_{m-2}Z^{m-2} + a_{m-3}Z^{m-3} + \ldots + a_1Z^1 + a_0Z^0, \qquad (3.9)$$

kde Z je základ soustavy, ze které číslo převádíme, m je počet řádových míst a a_i je koeficient. Například číslo v osmičkové soustavě převedeme do desítkové soustavy takto

$$(324)_8 = 3\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0 = 192 + 16 + 4 = (212)_{10}.$$

Pro převod desetinného čísla N do desítkové soustavy platí vztah

$$N = a_{m-1}Z^{m-1} + a_{m-2}Z^{m-2} + \ldots + a_0Z^0 + a_{-1}Z^{-1} + a_{-2}Z^{-2} + \ldots + a_{-n}Z^{-n}, \quad (3.10)$$

kde Z je základ soustavy, ze které číslo převádíme, m je počet řádových míst, a_i je koeficient a n je počet desetinných míst. Například desetinné číslo ve dvojkové soustavě převedeme do desítkové soustavy takto

$$(11001,11)_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} =$$

$$= 16 + 8 + 1 + 0,5 + 0,25 = (25,75)_{10}.$$

Pokud bychom chtěli převádět opačným směrem, tj. z desítkové soustavy do jiné libovolné soustavy, postupujeme tak, že číslo $(N)_{10}$ postupně dělíme základem soustavy, do které číslo chceme převést, a zbytky po dělení sepisujeme v opačném pořadí.

Například číslo 25 převedeme do dvojkové soustavy takto

$$\begin{array}{ll} 25:2=12 & 1 \\ 12:2=6 & 0 \\ 6:2=3 & 0 \\ 3:2=1 & 1 \\ 1:2=0 & 1 \end{array}$$

Dostali jsme rovnost $(25)_{10} = (11001)_2$.

Často se stává, že reálné číslo, které lze v desítkové soustavě zapsat pomocí konečného počtu cifer, pro zápis ve dvojkové soustavě vyžaduje cifer nekonečně mnoho. Například číslo $(0,7)_{10}$ vychází ve dvojkové soustavě jako periodické číslo $(0,\overline{10110})_2$. Jak ale postupovat, pokud bychom chtěli ověřit, že jsme číslo převedli bez chyby? Vztahy (3.9) a (3.10) by nám v tomto případě nepomohli.

Příklad 17:

Ověřte, že převod čísel z desítkové soustavy do dvojkové soustavy byl správný. Převeďte zadané číslo zpět do desítkové soustavy a ověřte, zda se čísla shodují.

a) $(0,7)_{10} = (0,1\overline{0110})_2$

b) $(0,4)_{10} = (0,\overline{0110})_2$

Řešení:

a) Každou cifru, která není periodická přepíšeme standartně podle vztahu (3.10). Periodické cifry zapíšeme jako nekonečnou geometrickou řadu tak, aby každý člen této řady představoval umístění v desetinném rozvoji, pokud bychom si periodu více rozepsali. Například cifra 1 je v čísle $0,1\overline{0110}$ na 3. desetinném místě, 6. místě, 9. místě, atd. Při další úpravě nahradíme nekonečné řady jejich součtem podle věty 3.1.

$$(0,1\overline{0110})_2 = 1\cdot 2^{-1} + 0 + \sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot 2-(3+4k) + \sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot 2-4(k+1) + 0 =$$

$$= 0,5 + \frac{1}{8}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-4k}\right) + \frac{1}{16}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-4k}\right) =$$

$$= 0,5 + \frac{1}{8}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{16}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = 0,5 + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = 0,7$$

b) Postupujeme jako v předchozím příkladě. Každou periodickou cifru si přepíšeme pomocí nekonečné geometrické řady a vypočítáme její součet.

$$(0,\overline{0110})_2 = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot 2-(2+4k) + \sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot 2-(3+4k) + 0 =$$

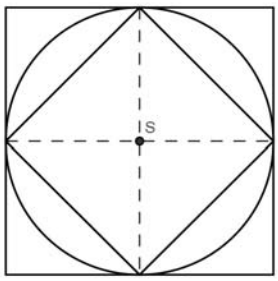
$$= \frac{1}{4}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-4k}\right) + \frac{1}{8}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-4k}\right) = \frac{1}{4}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{8}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

3.4 Úlohy na zajímavou geometrickou reprezentaci nekonečných řad

Příklad 18:

Do čtverce o straně a je vepsána kružnice. Do této kružnice je vepsán čtverec, do něho opět kružnice a tak dále. Vypočítejte součet obsahů všech takto vzniklých čtverců. [8, s. 79]

Řešení:



Obrázek 3.2: Znázornění zadání příkladu 18.

Je zřejmé, že první čtverec má obsah a^2. Na obrázku 3.2 je sestrojený $n-$tý a $(n+1)-$ní čtverec. Z obrázku je patrné, že obsah $(n+1)-$ního čtverce se rovná polovině obsahu $n-$tého čtverce. Protože platí

$$b_1 = a^2 \qquad \wedge \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} = q,$$

můžeme říci, že obsahy čtverců tvoří geometrickou posloupnost $\{b_n\}$. Jelikož $|q| < 1$, jedná se o konvergentní nekonečnou geometrickou řadu, která má součet

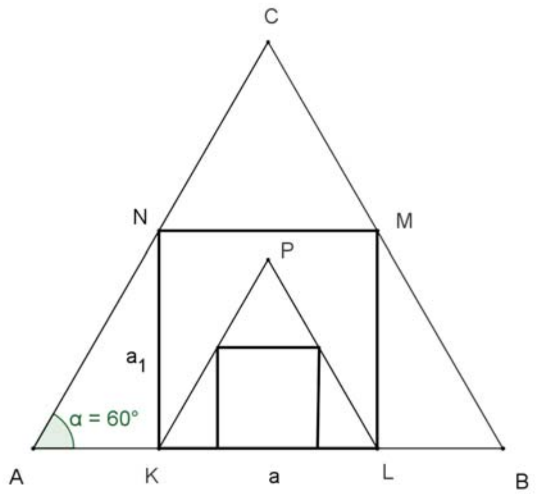
$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2.$$

Součet obsahů všech vepsaných čtverců je roven dvojnásobku obsahu prvního čtverce.

Příklad 19:

Do rovnostranného trojúhelníku ABC se stranou délky a je vepsán čtverec $KLMN$ tak, že strana KL je částí úsečky AB. Úsečka KL je pak stranou dalšího rovnostranného trojúhelníku, kterému je opět stejným způsobem vepsán čtverec atd. (viz obrázek 3.3). Vypočtěte součet obsahů všech takto vzniklých čtverců. [12, s. 496]

Řešení:



Obrázek 3.3: Znázornění zadání příkladu 19.

Ze zadání víme, že $|AB| = a$. Dále označíme stranu $|KL| = a_1$ a $|AK| = \frac{1}{2}(a - a_1)$. Potom v pravoúhlém trojúhelníku AKN platí

$$\tan 60^\circ = \frac{a_1}{\frac{1}{2}(a-a_1)}$$

$$\sqrt{3} = \frac{2a_1}{a-a_1}.$$

Z poslední rovnice vyjádříme proměnnou a_1

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}a - \sqrt{3}a_1 &= 2a_1 \\
a_1 &= \frac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}} \\
a_1 &= \left(2\sqrt{3}-3\right) a.
\end{aligned}$$

Stejně bychom mohli vyjádřit vztah pro stranu a_2 čtverce vepsaného do rovnostranného trojúhelníku KLP, kde bychom dostali rovnost

$$a_2 = \left(2\sqrt{3}-3\right) a_1 = \left(2\sqrt{3}-3\right)^2 a.$$

Délky stran čtverců vepsaných do rovnostanných trojúhelníků tvoří geometrickou posloupnost

$$a_n = \left(2\sqrt{3}-3\right)^n a, \qquad \text{kde } n \in \mathbb{N},$$

jejíž první člen je $a_1 = \left(2\sqrt{3}-3\right) a$ a kvocient je

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2 a}{\left(2\sqrt{3}-3\right) a} = 2\sqrt{3}-3.$$

Součet s obsahů všech vzniklých čtverců vypočteme takto

$$s = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots$$

Daný součet s představuje nekonečnou geometrickou řadu

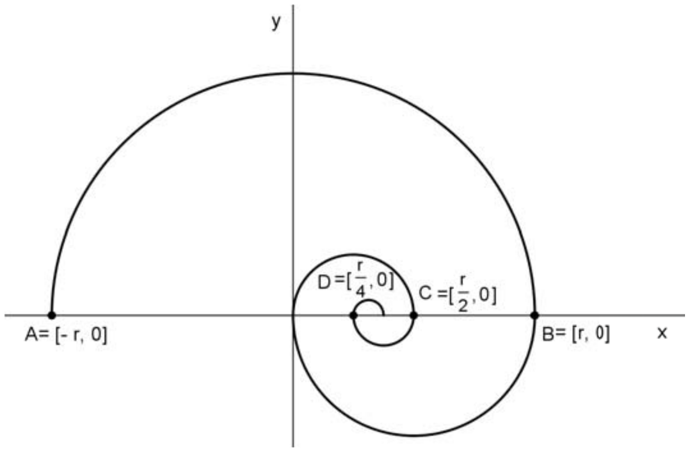
$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n,$$

kde $s_1 = a_1^2 = \left(2\sqrt{3}-3\right)^2 a^2 = \left(21-12\sqrt{3}\right) a^2$ a kvocient $q_s = \left(2\sqrt{3}-3\right)^2 = \left(21-12\sqrt{3}\right)$. Protože platí $|q_s| < 1$, je řada s_n konvergentní a existuje její součet

$$\begin{aligned}
s &= \frac{s_1}{1-q_s} = \frac{\left(21-12\sqrt{3}\right) a^2}{1-21+12\sqrt{3}} \\
s &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{8} a^2.
\end{aligned}$$

Součet obsahů všech takto vzniklých čtverců je $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{8}a^2$.

Příklad 20:
Spirála je tvořena polokružnicemi tak, že poloměr každé následující kružnice je dvakrát menší než poloměr kružnice předcházející. Určete délku spirály, je-li počet polokružnic, které ji tvoří, neomezený. [8, s. 77]



Obrázek 3.4: Znázornění nekonečné spirály k příkladu 20.

Řešení:
Na obrázku 3.4 je znázorněna část nekonečné spirály. Označíme-li poloměr první polokružnice r, potom poloměr druhé polokružnice je $\frac{r}{2}$, poloměr třetí polokružnice je $\frac{r}{4}, \ldots$ Tyto hodnoty jsou zřejmé ze souřadnic bodů C, D vyznačených na obrázku 3.4, kde bod C je střed druhé polokružnice a bod D je střed třetí polokružnice.
Délky polokružnic tvoří nekonečnou geometrickou řadu

$$\pi r + \pi \frac{r}{2} + \pi \frac{r}{4} + \pi \frac{r}{8} + \ldots,$$

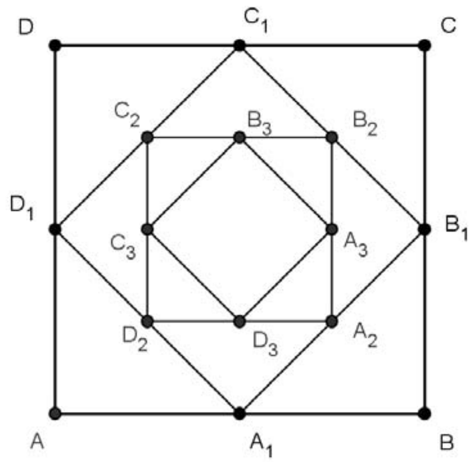
jejíž první člen je $a_1 = \pi r$ a kvocient $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. Jelikož $|q| < 1$, existuje součet této řady. Potom

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\pi r}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r.$$

Délka spirály je rovna $2\pi r$.

Příklad 21:
Do čtverce $ABCD$ o délce strany 1 je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že body A_1, B_1, C_1, D_1 jsou postupně středy stran AB, BC, CD, DA. Obdobně vepíšeme čtverec $A_2B_2C_2D_2$ do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. (viz obrázek 3.5). Vypočítejte součet

obvodů všech takto vzniklých čtverců. [6, s. 117]



Obrázek 3.5: Znázornění zadání příkladu 21.

Řešení:[9]
Na obrázku 3.5 je znázorněno několik vnořených čtverců do výchozího čtverce $ABCD$. Vypočítáme několik obvodů prvních čtverců. Čtverec $ABCD$ s délkou strany 1 má obvod $O_1 = 4\cdot 1 = 4$, čtverec $A_1B_1C_1D_1$ s délkou strany $\frac{\sqrt{2}}{2}$ má obvod $O_2 = 4\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, čtverec $A_2B_2C_2D_2$ s délkou strany $\frac{1}{2}$ má obvod $O_3 = 4\cdot \frac{1}{2} = 2, \ldots$ Je zřejmé, že obvody jednotlivých čtverců tvoří nekonečnou geometrickou řadu

$$4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1 + \ldots,$$

pro kterou platí

$$a_1 = 4, \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Jelikož $|q| < 1$, je tato řada konvergentní a můžeme vypočítat její součet

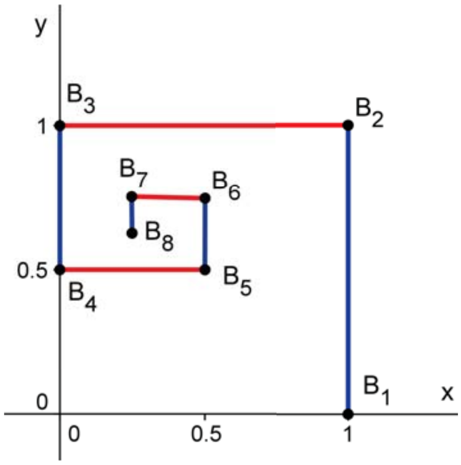
$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 + 4\sqrt{2}.$$

Součet obvodů za daných podmínek vzniklých čtverců je $8 + 4\sqrt{2}$.

Příklad 22:
Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry, která se skládá s úseček B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, $B_4B_5, \ldots$ Souřadnice krajních bodů úseček jsou $B_1 = [1, 0]$, $B_2 = [1, 1]$,

[9] Řešení není převzato z publikace [6]

$B_3 = [0,1]$, $B_4 = [0, \frac{1}{2}]$, $B_5 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $B_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $B_7 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, $B_8 = [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$, ... [13, s. 74]



Obrázek 3.6: Lomená čára složená s úseček B_1B_2, B_2B_3, $B_3B_4, \ldots$ k příkladu 22.

Řešení:[10]

Na obrázku 3.6 je znázorněna část nekonečné lomené čáry, která tvoří nekonečnou geometrickou řadu

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ldots \tag{3.11}$$

Tuto řadu si můžeme rozdělit na dvě části (na dvě řady). První řadu $\sum a_n$ tvoří jen úsečka B_1B_2 a všechny úsečky s ní rovnoběžné, tj. $B_3B_4, B_5B_6, \ldots$ (na obrázku 3.6 zvýrazněny modrou barvou). Tato řada $\sum a_n$ má první člen $a_1 = 1$ a kvocient $q_a = \frac{1}{2}$. Druhá řada $\sum b_n$ je tvořena pouze úsečkou B_2B_3 a všemi úsečkami s ní rovnoběžnými, tj. $B_4B_5, B_6B_7, \ldots$ (na obrázku 3.6 zvýrazněny červenou barvou). Tato řada $\sum b_n$ má první člen $b_1 = 1$ a kvocient $q_b = \frac{1}{2}$. Obě řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ mají stejnou hodnotu prvního členu i kvocientu. Proto součet řady 3.11 získáme

$$s_n = 2 \cdot \frac{a_1}{1-q} = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

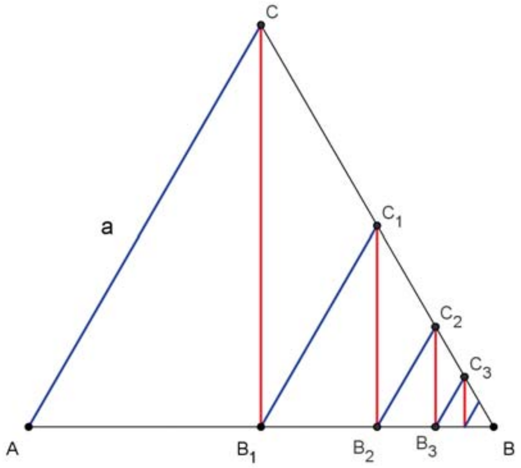
Délka zadané nekonečné lomené čáry je 4 cm.

Příklad 23:

V daném rovnostranném trojúhelníku ABC o straně $a = 6$ cm sestrojte kolmici z vrcholu C na stranu AB, patu kolmice označte B_1. Bodem B_1 veďte rovnoběžku se stranou AC, průsečík této rovnoběžky se stranou BC označte C_1. Patu kolmice

[10]Řešení není převzato z publikace [13]

z bodu C_1 na stranu AB označte B_2, průsečík strany BC a rovnoběžky se stranou AC vedené bodem B_2 označte C_2. Patu kolmice z bodu C_2 na stranu AB označte B_3, průsečík strany BC a rovnoběžky s AC vedené bodem B_3 označte C_3. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $ACB_1C_1B_2C_2B_3C_3\ldots$, která vznikne uvedeným způsobem. [13, s. 74]



Obrázek 3.7: Lomená čára $ACB_1C_1B_2C_2B_3C_3\ldots$ k příkladu 23.

Řešení:[10]
Z obrázku 3.7 je patrné, že úsečky, ze kterých se lomená čára skládá, tvoří nekonečnou řadu $\sum c_n$ a že tuto řadu můžeme rozdělit na dvě části a samostatně vypočítat jejich součet. První řada $\sum a_n$

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \ldots$$

(na obrázku 3.6 zvýrazněna modrou barvou) je tvořena úsečkou AC a všemi úsečkami s ní rovnoběžnými, tj. $B_1C_1, B_2C_2, \ldots$ První člen této řady je $a_1 = a$ a kvocient $q_a = \frac{1}{2}$. Jelikož $|q_a| < 1$, je tato řada konvergentní a můžeme vypočítat její součet

$$s_{n1} = \frac{a_1}{1 - q_a} = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}} = 2a.$$

Druhá řada $\sum b_n$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{8}a + \ldots$$

(na obrázku 3.6 zvýrazněna červenou barvou) je tvořena úsečkou CB_1 a všemi úsečkami s ní rovnoběžnými, tj. $C_1B_2, C_2B_3, \ldots$ První člen této řady je $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ a kvocient $q_b = \frac{1}{2}$. Jelikož $|q_b| < 1$, je tato řada konvergentní a můžeme vypočítat její součet

$$s_{n2} = \frac{b_1}{1 - q_b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}a.$$

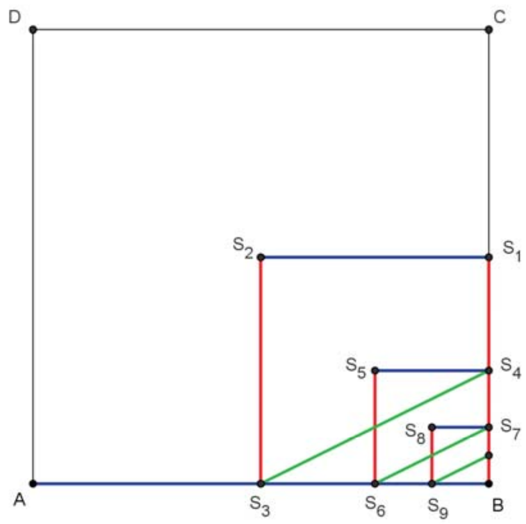
Potom součet řady $\sum c_n$ je roven

$$s_n = s_{n1} + s_{n2} = 2a + \sqrt{3}a = 2 \cdot 6 + \sqrt{3} \cdot 6 = 12 + 6\sqrt{3}.$$

Délka lomené čáry $ACB_1C_1B_2C_2B_3C_3\ldots$ je rovna $12 + 6\sqrt{3}$ cm.

Příklad 24:

Ve čtverci $ABCD$, $|AB| = 6$cm, postupně vyznačte „nekonečnou“ lomenou čáru spojením následujících bodů: A, B, S_1 (střed BC), S_2 (střed AC), S_3 (střed AB), S_4 (střed BS_1), S_5 (střed S_1S_3), S_6 (střed BS_3), S_7 (střed BS_4), S_8 (střed S_4S_6), ... (viz obrázek 3.8). Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $ABS_1S_2S_3S_4\ldots$ [13, s. 74]



Obrázek 3.8: Lomená čára $ABS_1S_2S_3S_4\ldots$ k příkladu 24.

Řešení:[11]

Je zřejmé, že jednotlivé úsečky lomené čáry tvoří členy nekonečné geometrické řady $\sum a_n$, kterou si podle obrázku 3.8 můžeme rozdělit na 3 nekonečné řady a postupně vyřešit každou zvlášť.

První řada $\sum b_n$ je tvořena úsečkou AB a všemi úsečkami s ní rovnoběžnými, tj. $S_1S_2, S_4S_5, \ldots$ (na obrázku 3.8 jsou zvýrazněny modrou barvou). Tato řada s kvo-

[11] Řešení není převzato z publikace [13]

cientem $q_b = \frac{1}{2}$ má členy

$$6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Potom její součet je roven

$$s_{n1} = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}} = 12.$$

Druhá řada $\sum c_n$ je tvořena úsečkou BS_1 a všemi úsečkami s ní rovnoběžnými, tj. $S_2S_3, S_5S_6, \ldots$ (na obrázku 3.8 jsou zvýrazněny červenou barvou). Tato řada má následující členy

$$3, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Z výpisu členů vidíme, že první dva členy se opakují. Proto součet této řady budeme počítat až od druhého členu a první člen $a_1 = 3$ přičteme až k součtu této řady. Kvocient řady je $q_c = \frac{1}{2}$, potom její součet je roven

$$s_{n2} = 3 + \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6.$$

Třetí řada $\sum d_n$ je tvořena úsečkou S_3S_4 a všemi úsečkami s ní rovnoběžnými, tj. $S_6S_7, S_9S_{10}, \ldots$ (na obrázku 3.8 jsou zvýrazněny zelenou barvou). Tato řada s kvocientem $q_d = \frac{1}{2}$ má členy

$$\frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{4}, \frac{3\sqrt{5}}{8}, \ldots$$

Potom její součet je roven

$$s_{n3} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\sqrt{5}.$$

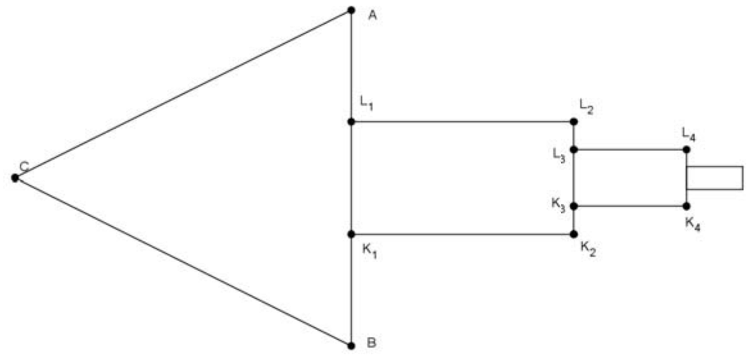
Na závěr musíme sečíst všechny tři řady dohromady a získáme celkovou délku lomené čáry.

$$s_n = s_{n1} + s_{n2} + s_{n3} = 12 + 6 + 3\sqrt{5} = 21 + 3\sqrt{5}$$

Délka lomené čáry $ABS_1S_2S_3S_4\ldots$ je rovna $21 + 3\sqrt{5}$ cm.

Příklad 25:

Sestavte následujícím způsobem „nekonečnou“ šipku. V daném rovnostranném trojúhelníku ABC, kde $a = 6cm$, sestrojte body K_1, L_1 na straně AB tak, aby platilo $|AK_1| = |K_1L_1| = |L_1B|$. Sestrojte obdélník $K_1L_1K_2L_2$, kde $|K_1K_2| = 2|K_1L_1|$, tak, aby s trojúhelníkem ABC měl společnou jen úsečku K_1L_1. Nyní na straně K_2L_2 sestrojte body K_3L_3 tak, aby platilo $|K_2K_3| = |K_3L_3| = |L_3L_2|$. Sestrojte další obdélník $K_3L_3K_4L_4$, kde $|K_3K_4| = 2|K_3L_3|$, tak, aby s obdélníkem $K_1L_1K_2L_2$ měl společnou jen úsečku K_3L_3. Tento postup při konstrukci dalších obdélníků neustále opakujte (viz obrázek 3.9). Vypočítejte obsah plochy „nekonečné“ šipky, kterou tvoří daný trojúhelník a obdélníky sestrojené uvedeným způsobem. [13, s. 74]



Obrázek 3.9: Znázornění nekonečné šipky k příkladu 25.

Řešení:[11]

Obsah šipky S se skládá z obsahu trojúhelníku ABC a obsahů obdélníků, které tvoří nekonečnou geometrickou řadu. Tato řada má následující členy

$$8, \frac{8}{9}, \frac{8}{81}, \frac{8}{729}, \ldots$$

První člen je roven $a_1 = 8$ a kvocient $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{9}$. Jelikož $|q| < 1$, je tato řada konvergentní a existuje její součet, tj. součet obsahů obdélníků

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{9}} = 9.$$

Nyní stačí jen dopočítat obsah trojúhelníku ABC a přičíst k hodnotě součtu nekonečné řady.

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$$

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{6\cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

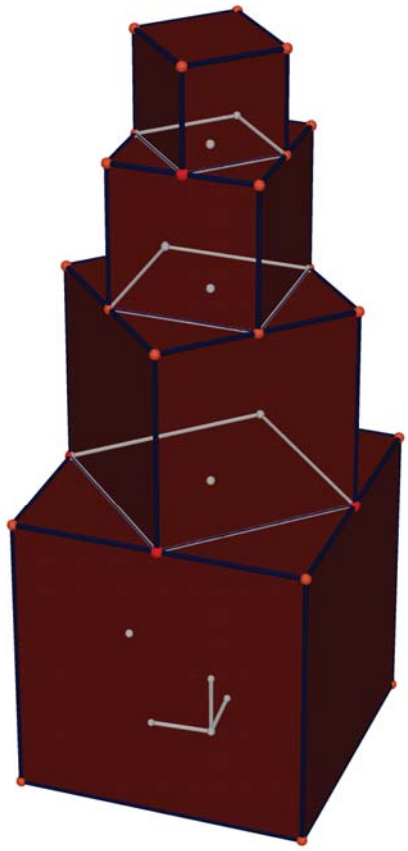
Potom platí

$$S = s_n + S = 9 + 9\sqrt{3}.$$

Šipka vytvořená dle zadaných podmínek má obsah $9 + 9\sqrt{3}\,cm^2$.

Příklad 26:

V krychli $ABCDEFGH$ o hraně $a = 6$cm označte postupně A_1, B_1, C_1, D_1 středy hran EF, FG, GH, HE. Čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tvoří podstavu další krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$, která je postavená na původní krychli. Označte postupně A_2, B_2, C_2, D_2 středy hran $E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1, H_1E_1$. Čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tvoří podstavu další krychle $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$, která je postavená na předchozí krychli. Tento postup stále opakujte (viz obrázek 3.10). Vypočítejte objem „nekonečné“ pyramidy, která takto vznikne. [13, s. 75]



Obrázek 3.10: Nekonečná pyramida tvořená krychlemi k příkladu 26.

Řešení:[12]

Jednotlivé krychle na obrázku 3.10 představují členy nekonečné řady a hledaný objem „nekonečné pyramidy“ je součet této řady. Její první člen je objem krychle $ABCDEFGH$ o hraně $a = 6$cm, tj. $a_1 = 6^3 = 216$. Nyní potřebujeme zjistit hodnotu kvocientu q této řady, který se rovná poměru dvou sousedních členů. Proto Pythagorovou větou vypočteme hranu druhé krychle a pomocí poměru prvního a

[12] Řešení není převzato z publikace [13]

druhého členu řady určíme kvocient.

$$c = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Potom objem druhé krychle se rovná $a_2 = (3\sqrt{2})^3 = 27\sqrt{8}$ a hledaný kvocient je roven

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{27\sqrt{8}}{216} = \frac{\sqrt{8}}{8}.$$

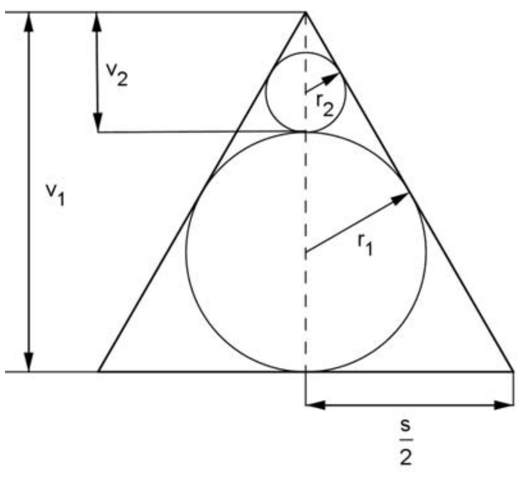
Jelikož kvocient $|q| < 1$, můžeme vypočítat součet objemů krychlí pomocí vztahu pro součet nekonečné geometrické řady

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{216}{1 - \frac{\sqrt{8}}{8}} = \frac{8 \cdot 216}{8 - \sqrt{8}} = \frac{216(8+\sqrt{8})}{7} = \frac{432(4+\sqrt{2})}{7}$$

Objem nekonečné pyramidy je $\frac{432(4+\sqrt{2})}{7}$ m^3.

Příklad 27:

Do rovnostranného kužele o straně řezu s je vepsána koule, nad ní druhá, třetí, ... (viz obrázek 3.11). K čemu se blíží součet povrchů vepsaných koulí? [22, s. 173]



Obrázek 3.11: Znázornění řezu rovnostranného kužele a do něj vepsané koule.

Řešení:

Označíme-li po sobě jdoucí poloměry vepsaných koulí $r_1, r_2, r_3, \ldots$, získáme tím jednotlivé členy nekonečné řady

$$S = 4\pi \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots\right). \tag{3.12}$$

Ze zadání ale známe pouze hodnotu s. Proto si musíme odvodit vztah mezi poloměry jednotlivých koulí a stranou řezu s. Označme si ještě $v_1, v_2, v_3, \dots$ výšky pomocných rovnostranných kuželů. Potom platí

$$\underbrace{r_1 = \frac{1}{3}v_1, \qquad v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}s}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}s,$$

$$\underbrace{r_2 = \frac{1}{3}v_2, \qquad v_2 = \frac{1}{3}v_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}s}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}s$$

$$\vdots$$

Po dosazení přechozích vztahů do vzorce pro výpočet povrchu koule (3.12) získáme nekonečnou geometrickou řady

$$S = 4\pi\left(\frac{3s^2}{36} + \frac{3s^2}{324} + \dots\right),$$

jejíž kvocient je roven $q = \frac{1}{9}$. Kvocient $|q| < 1$, proto lze vypočítat součet této řady

$$S = 4\pi\frac{\frac{3s^2}{36}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8}\pi s^2.$$

Součet povrchů vepsaných koulí se blíží k číslu $\frac{3}{8}\pi s^2$.

Kapitola 4

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit studii o zajímavých posloupnostech a číselných řadách použitých v příkladech pro žáky středních škol. Mojí snahou bylo ukázat těmto žákům (a nejen jim), že se této oblasti matematiky nemusejí obávat a že obsahuje velké množství zajímavých aplikací. U každého příkladu jsem uvedla možné řešení s komentovaným postupem kroků. Předložené postupy samozřejmě nejsou jediné možné, ale slouží žákovi pochopit daný příklad a pomoci mu při řešení jiných obdobných úloh.

Zaznamenat všechny zákoutí rozličností a použití posloupností a číselných řad daleko přesahuje rozsah této práce. Zaměřila jsem se převážně na příklady, které by čtenáře mohly zaujmout a zvýšit jeho zájem o tuto oblast matematiky. Ideální čtenář vezme tuto práci jako startovní můstek a ponoří se více do těchto tajů matematiky.

K vytvoření obrázků a grafů uvedených v textu jsem použila programy pro geometrii Geogebra a Cabri 3D v2. Samotná práce byla vysázena v jazyce LATEX v programu TexMaker.

Seznam obrázků

Literatura

[1] PERELMAN, Jakov I. *Zajímavá algebra.* 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1985, 169 s.

[2] JANDOVÁ, Jiřina. *Posloupnosti a řady v učivu středních škol.* České Budějovice, 1995. Diplomová práce. Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Vedoucí práce RNDr. Jiří Špilauer.

[3] GRUNDMAN, Zdeněk. *Řešené příklady z matematiky pro střední průmyslové školy.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967, 164 s.

[4] POSPÍŠIL, Antonín, František KEJLA, Eduard KRIEGELSTEIN a Václav PELANT. *Matematika pro II. ročník středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 283 s.

[5] ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. *Stereometrie a posloupnosti pro III. ročník studijních oborů SOU.* 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.

[6] SÝKORA, Václav, Oldřich ODVÁRKO a Josef SMIDA. *Matematika pro gymnázia: sešit 6, část 2.* 3. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984, 128 s.

[7] ODVÁRKO, Oldřich, Miloš BOŽEK, Marta RYŠÁNKOVÁ a Josef SMIDA. *Matematika pro II. ročník gymnázií.* 1. vyd. Státní pedagogické nakladatelství: Praha, 1985, 480 s.

[8] MÜLLEROVÁ, Jana, Václav SÝKORA a Ondrej ŠEDIVÝ. *Matematika pro střední pedagogické školy - III. díl.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979, 164 s.

[9] REKTORYS, Karel. A SPOLUPRACOVNÍCI. *Přehled užité matematiky.* 3. nezm. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1973, 1136 s.

[10] DRÁBEK, Pavel a Stanislav MÍKA. *Matematická analýza I.* 5. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2003. ISBN 80-708-2978-8.

[11] SMIDA, Jozef. *Matematika pro III. ročník gymnázií: Posloupnosti a řady reálných čísel.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-042-4340-1.

[12] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 631 s. ISBN 80-719-6140-X.

[13] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* 1. vyd. Praha, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

[14] NOVOVESKÝ, Štefan, Karol KRIŽALKOVIČ a Imrich LEČKO. *Zábavná matematika.* Vyd. 3. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979, 328 s. Knižnice všeobecného vzdělávání mládeže.

[15] KOVÁČIK, Ján. *Řešené příklady z matematiky pro střední školy: k maturitní zkoušce, k přijímacím zkouškám na vysokou školu.* 2., rozš. a dopl. vyd. Praha: ASPI, 2006. ISBN 80-735-7146-3.

[16] DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady.* 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007, iv, 113 s. ISBN 978-802-1043-343.

[17] MAŠEK, Josef. *Řešené úlohy z matematiky: posloupnosti a nekonečné řady.* 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, Katedra matematiky, 2001, 60 s. ISBN 80-708-2833-1.

[18] CALDA, Emil. *Sbírka řešených úloh: středoškolská matematika pod mikroskopem.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 131 s. ISBN $80 - 719 - 6319 - 4$.

[19] KONFOROVIČ, Andrej Grigorjevič. *Významné matematické úlohy.* Vydání 1. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 208 s. ISBN 80-04-21848-2.

[20] BEČVÁŘ, Jindřich a kol. *Matematika ve středověké Evropě.* 1. vydání. Praha : Prometheus, 2001. 445 s. ISBN 80-7196-232-5.

[21] ŠVRČEK, Jaroslav a Pavel CALÁBEK. *Sbírka netradičních matematických úloh.* 1. vyd. Praha: Prometheus, c2007, 186 s. ISBN 978-807-1963-417.

[22] MAŠKA, Otokar. *Řešené úlohy z matematiky: aritmetika a algebra.* Vyd. 1. Praha: SNTL - Státní nakladatelství technické literatury, 1958, 213 s.

[23] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 371 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 23. ISBN 80-719-6255-4.

[24] MAČÁK, Karel. *Tři středověké sbírky matematických úloh: Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 101 s., [1] l. obr. příl. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 15. ISBN 80-719-6215-5.