Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Diferenciální rovnice s programem GeoGebra

Vypracovala: Michaela Opavová
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Diferenciální rovnice s programem GeoGebra jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ……………… …………………………………

Michaela Opavová

Poděkování

Touto cestou bych chtěla především poděkovat vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, připomínky a také za trpělivost a vstřícný přístup během zpracování mé práce. Také děkuji rodině za morální a finanční podporu během studia a v neposlední řadě bych chtěla poděkovat mým kamarádům za veškerou pomoc.

Anotace

Hlavním cílem této bakalářské práce na téma Diferenciální rovnice s programem GeoGebra je vytvořit přehlednou sbírku s řešenými příklady. Příklady jsou nejprve vyřešeny početně a poté následuje jejich grafická interpretace pomocí matematického programu GeoGebra. Ilustrace příkladů nám zobrazují zajímavá řešení. Dalším cílem je přiblížit studentům program GeoGebra, jako nástroj, s jehož pomocí se dá příklad elegantně vyřešit. Práce je rozdělena do tří kapitol, které se zabývají diferenciálními rovnicemi základního typu, metodou separace proměnných a lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Jsou uvedené stručnou základní teorií a poté řešenými příklady. V těchto kapitolách je vybraná většina typů příkladů, se kterými se setká student v předmětu Matematická analýza III. Proto je tato sbírka vhodná jako studijní materiál pro studenty matematických oborů.

Klíčová slova: diferenciální rovnice, GeoGebra.

Abstract

The main aim of this bachelor thesis called Differential equations with GeoGebra is to create a transparent collection of solved examples. Examples are numerically solved first, followed by their graphic interpretation by using mathematical program GeoGebra. Illustrations show us interesting solutions of examples. Another objective is to introduce students the program GeoGebra as a tool through which you can elegantly solve the example. The work is divided into three chapters, which deal with the basic type of differential equations, the method of separation of variables and linear differential equations with constant coefficients and zero right side. They are shown of the basic theory and then resolved examples. In These chapters are selected types of examples which meets student in Mathematical Analysis III. Therefore, this collection is useful as a study material for students of mathematical disciplines.

Keywords: differential equations, GeoGebra.

Obsah

1 ÚVOD

Tato bakalářská práce je postavena především na praktické části sbírky příkladů na téma Diferenciální rovnice s programem GeoGebra.

První kapitola je zaměřena na diferenciální rovnice základního typu. V práci je uvedena záměrně, aby si student osvěžil učivo z předešlých Matematických analýz I. a II. a byl připravený na učební látku Matematické analýzy III.

První kapitola je uvedena nutnou teorií k porozumění daných příkladů a pak následuje podrobný postup jednotlivých řešení, který je vždy na konci příkladu doplněn barevným grafickým znázorněním různých řešení rovnice. Jsou zde uváděny různé typy příkladů, které jsou řazené podle obtížnosti.

Druhá kapitola se zabývá metodou separace proměnných, která je opět uvedena základní teorií. Kapitola je znovu rozdělená na různé skupiny příkladů. Snažila jsem se, aby byly v kapitole zastoupeny všechny typy funkcí. Po nich následují příklady, u kterých nevzniká technická podmínka a příklady s technickou podmínkou.

Poslední kapitola se zabývá lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Jsou zde zastoupeny všechny možné typy fundamentálních systémů.

Každá kapitola je rozdělena na příklady bez počáteční podmínky a na příklady s počáteční podmínkou.

Když jsem používala program GeoGebra pro tvorbu ilustračních obrázků, velice mi při práci s GeoGebrou pomohly internetové stránky [7], ve kterých jsou uvedeny všechny potřebné příkazy.

V práci jsou uvedené příklady, které jsou převzaté z literatury [1], [2], [3], [4], [5], [6] a [8]. Dále tu jsou příklady, kterými jsem se inspirovala a pozměnila jsem jejich zadání a v neposlední řadě jsou tu vlastní příklady.

Práce obsahuje 47 obrázků vytvořených v programu GeoGebra.

2 ZÁKLADNÍ TYP

„Základním typem diferenciálních rovnic jsou rovnice tvaru

$$y' = g(x),$$

tedy rovnice, ve kterých se nevyskytuje y. Při řešení těchto rovnic využíváme neurčitý integrál – řešením je

$$y = \int g(x)\, dx,$$

a to včetně konstanty $c \in \mathbb{R}$.
Diferenciální rovnice základního typu má tedy nekonečně mnoho řešení.“
(Samková, [5], s. 88)

Příklady jsou nejdříve vyřešeny početně a poté následuje grafická prezentace pomocí matematického programu GeoGebra. Grafická podoba bude demonstrována na vybraném počtu různých konstant c, které příklad přehledně ukážou, jak se rovnice chová pro konkrétní konstanty c.

Tato kapitola je čerpaná výhradně z literatury [2], [4], [5], [6]. Pro podkapitolu bez počáteční podmínky jsou z literatury převzata jen zadání neurčitých integrálů a následně je na ně vytvořen příklad. U podkapitoly s počáteční podmínkou už jsou z literatury [5] převzata kompletní zadání.

2.1 Bez počáteční podmínky

2.1.1 Příklad 1

$\int (2x+3)^2\, dx$ ([6], str. 85)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = (2x+3)^2$.

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int (2x+3)^2\, dx$.

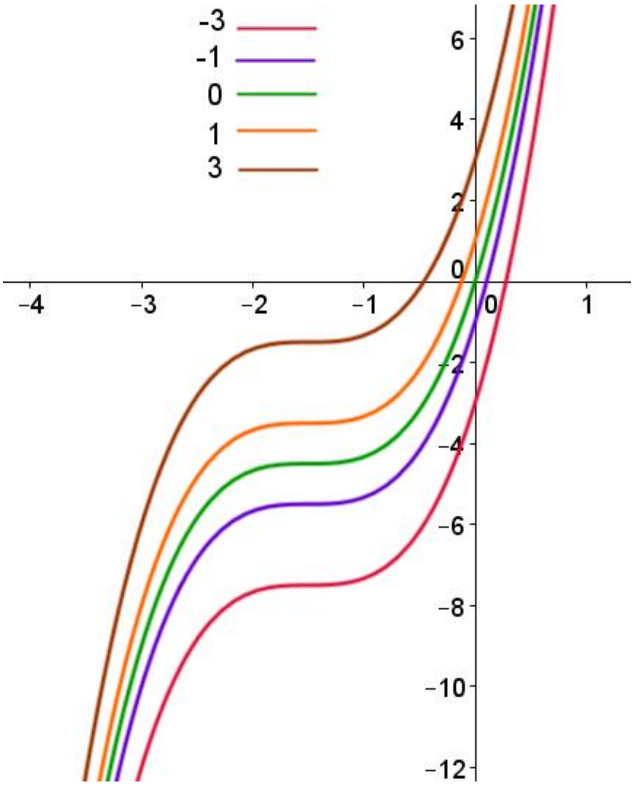
Vypočítáme integrál: $\int (2x+3)^2\, dx$

$$= \int 4x^2 + 12x + 9\, dx = \frac{4x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 9x + c =$$

$$= \frac{4x^3}{3} + 6x^2 + 9x + c.$$

Výsledkem je: $y = \frac{4x^3}{3} + 6x^2 + 9x + c$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = (2x+3)^2$, a to pro $c = -3, -1, 0, 1, 3$.



Obr. 1: Grafické řešení příkladu 2.1.1

Křivky vyplní celou rovinu.

2.1.2 Příklad 2

$\int \frac{x^3-2x+1}{x^3}\, dx$ ([2], str. 5)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $\boldsymbol{y' = \frac{x^3-2x+1}{x^3}}$**.**

Ze zadání určíme podmínku: $x \neq 0$.

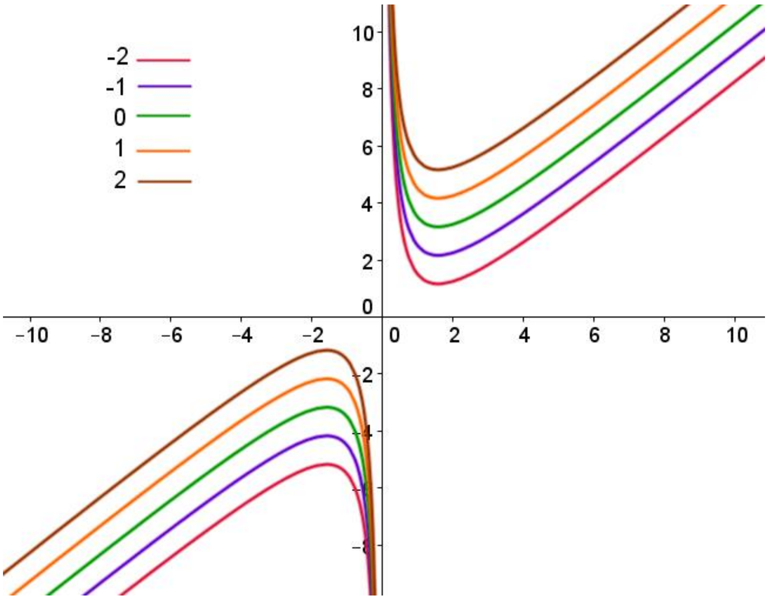
Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \frac{x^3-2x+1}{x^3}\ dx$.

Vypočítáme integrál: $\int \frac{x^3-2x+1}{x^3}\ dx$

$$= \int \frac{x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\ dx = \int 1 - 2x^{-2} + x^{-3}\ dx = x + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} + c.$$

Výsledkem je: $y = x + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} + c$, kde $x \neq 0, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \frac{x^3-2x+1}{x^3}$, a to pro $c = -2, -1, 0, 1, 2$.



Obr. 2: Grafické řešení příkladu 2.1.2

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

2.1.3 Příklad 3

$\int x \cdot \sqrt{x}\, dx$ ([6], str. 84)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = x \cdot \sqrt{x}$.

Ze zadání určíme podmínku: $x \geq 0$.

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int x \cdot \sqrt{x}\ dx$.

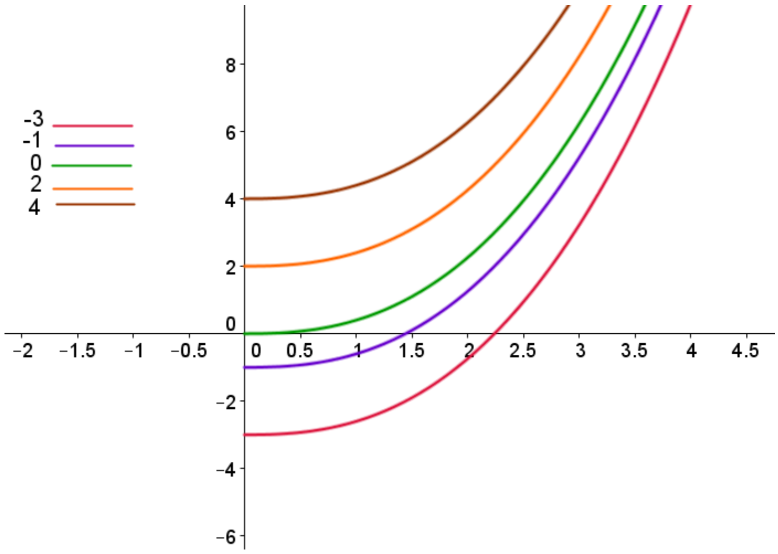
Vypočítáme integrál: $\int x \cdot \sqrt{x}\ dx$

úpravami dostaneme $\int x \cdot x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} + c = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot x} =$

$$= \frac{2}{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} + c.$$

Výsledkem je $y = \frac{2}{5} \cdot x^2\sqrt{x} + c$, kde $x \geq 0, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = x \cdot \sqrt{x}$, a to pro $c = -3, -1, 0, 2, 4$.



Obr. 3: Grafické řešení příkladu 2.1.3

Křivky vyplní celou polorovinu $x \geq 0$.

2.1.4 Příklad 4

$\int x \cdot \sqrt{2 + x^2}\ dx$ (vlastní příklad)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = x \cdot \sqrt{2 + x^2}$.

Ze zadání nedostaneme žádnou podmínku, protože v našem příkladu bude výraz pod odmocninou vždy ≥ 0.

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int x \cdot \sqrt{2 + x^2}\, dx$.

Vypočítáme integrál: $\int x \cdot \sqrt{2 + x^2}\, dx$

pomocí substituce: $2 + x^2 = t$

$$2x\, dx = dt$$

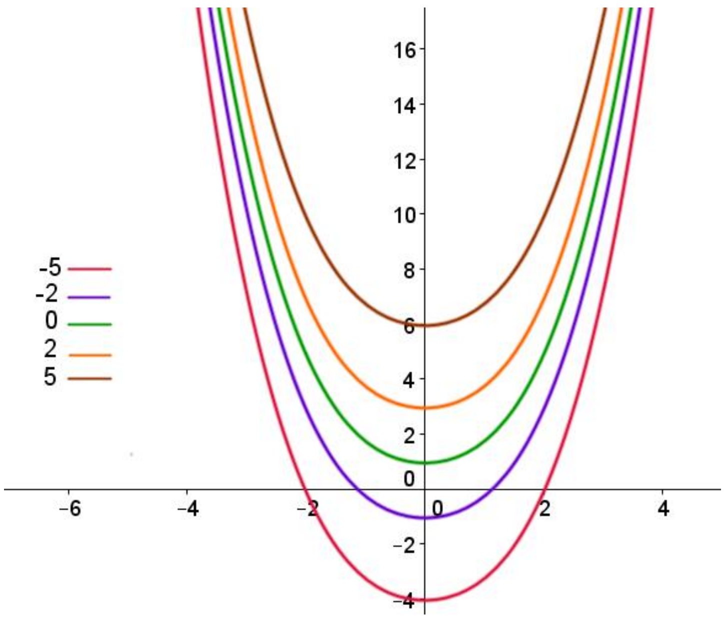
$$dx = \frac{dt}{2x}$$

dostaneme: $\frac{1}{2} \int \sqrt{t}\, dt$.

$$\int x \cdot \sqrt{2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{t^3} + c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2+x^2)^3} + c.$$

Výsledkem je $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2+x^2)^3} + c$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = x \cdot \sqrt{3+x^2}$, a to pro $c = -5, -2, 0, 2, 5$.



Obr. 4: Grafické řešení příkladu 2.1.4

Křivky vyplní celou rovinu.

2.1.5 Příklad 5

$\int \sin(3x+4)\, dx$ ([6], str. 90)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \sin(3x+4)$.

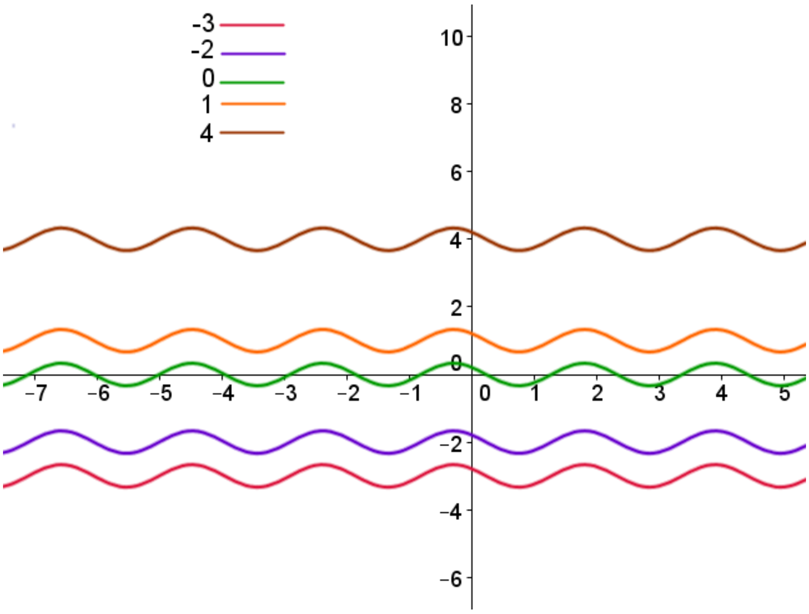
Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \sin(3x+4)\, dx$.

Vypočítáme integrál: $\int \sin(3x+4)\, dx$

$$= \frac{-\cos(3x+4)}{3} + c = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x+4) + c.$$

Výsledkem je $y = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x+4) + c$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \sin(3x+4)$, a to pro $c = -3, -2, 0, 1, 4$.



Obr. 5: Grafické řešení příkladu 2.1.5

Křivky vyplní celou rovinu.

2.1.6 Příklad 6

$\int \frac{3}{1+\cos 2x}\, dx$ ([2], str. 6)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{3}{1+\cos 2x}$.

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \frac{3}{1+\cos 2x}\, dx$.

Vypočítáme integrál: $\int \frac{3}{1+\cos 2x}\, dx$

využijeme znalost vzorců: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

$1 = \sin^2 x + \cos^2$.

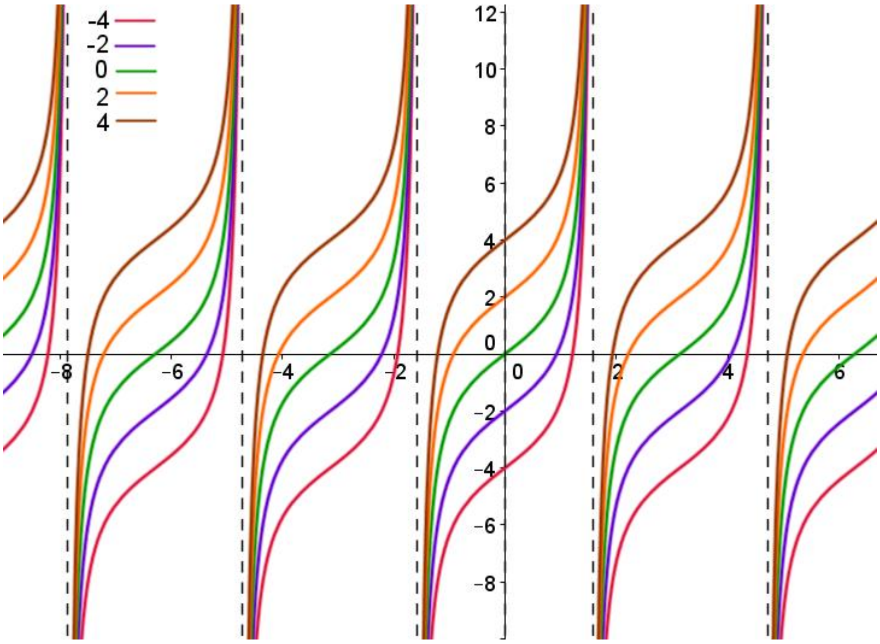
$$\int \frac{3}{1+\cos 2x}\, dx = \int \frac{3}{1+(\cos^2 x - \sin^2 x)}\, dx = \int \frac{3}{(1-\sin^2 x)+\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{3}{\cos^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int \frac{3}{2\cdot\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2}\,\mathrm{tg}x + c.$$

Výsledkem je: $y = \frac{3}{2}\,\mathrm{tg}x + c$, kde $x \neq \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\cdot\pi, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \frac{3}{1+\cos 2x}$, a to pro $c = -4, -2, 0, 2, 4$.



Obr. 6: Grafické řešení příkladu 2.1.6

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímek $x = \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi$.

2.1.7 Příklad 7

$\int x \cdot \cos 3x \, dx$ ([4], str. 112)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = x \cdot \cos 3x$.

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int x \cdot \cos 3x \, dx$.

Vypočítáme integrál: $\int x \cdot \cos 3x \, dx$

použijeme metodu per partes: $\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$

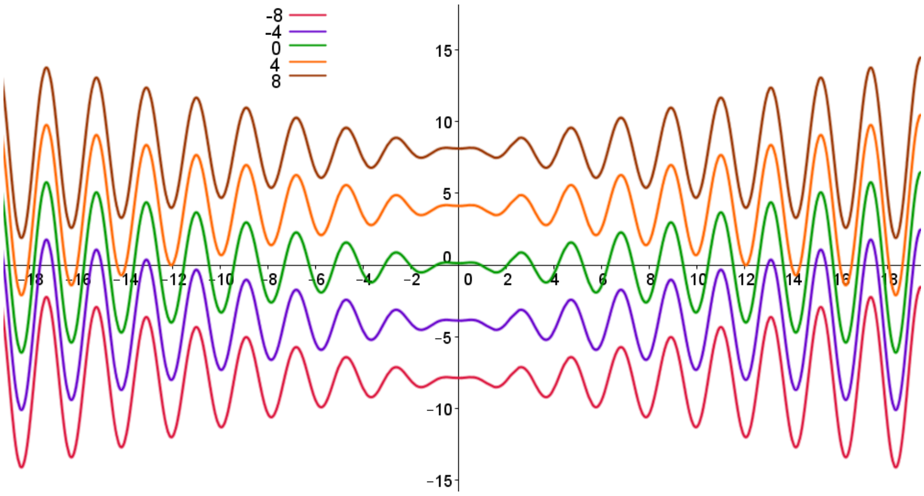
$$\left| \begin{array}{ll} f'(x) = \cos 3x & f(x) = \dfrac{\sin 3x}{3} \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{array} \right|$$

$$= \frac{\sin 3x}{3} \cdot x - \int \frac{\sin 3x}{3} dx = \frac{x \cdot \sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int \sin 3x \, dx =$$

$$= \frac{x \cdot \sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) + c = \frac{x \cdot \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c.$$

Výsledkem je $y = \frac{x \cdot \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = x \cdot \cos 3x$, a to pro $c = -8, -4, 0, 4, 8$.



Obr. 7: Grafické řešení příkladu 2.1.7

Křivky vyplní celou rovinu.

2.1.8 Příklad 8

$\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^3}}\,dx$ ([6], str. 84)

Napište všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3}}$.

Nejprve určíme podmínku: $x \neq 0$. (Dosáhli jsme jí úpravou výrazu: $\frac{3}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{3}{x^{\frac{3}{3}}} = \frac{3}{x}$;

z výrazu $\frac{3}{x}$ jasně podmínka vyplývá.)

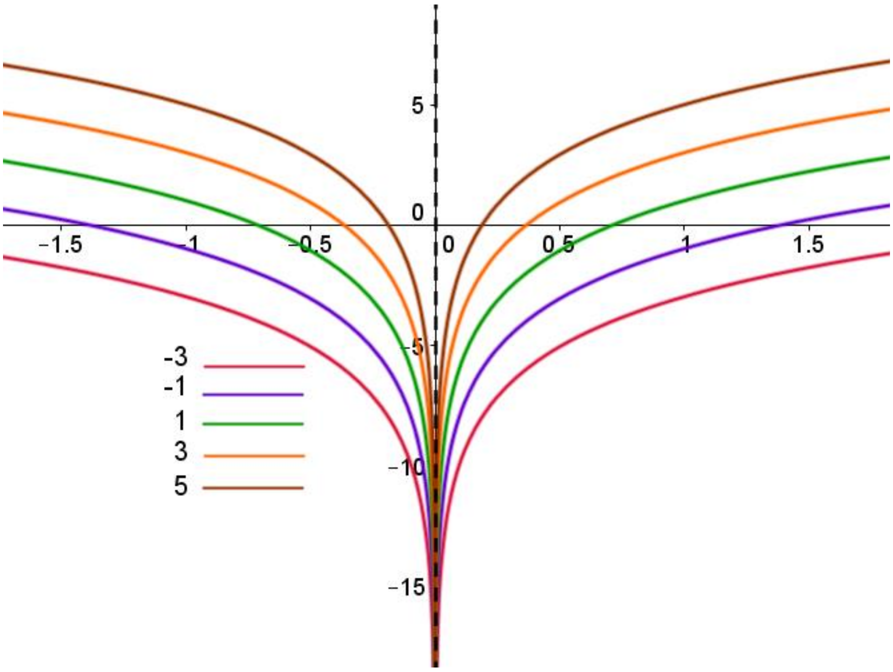
Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \frac{3}{\sqrt[3]{x^3}}\,dx$.

Vypočítáme integrál: $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^3}}\,dx$

$$= \int \frac{3}{x}\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx = 3\ln|x| + c.$$

Výsledkem je $y = 3\ln|x| + c$, kde $x \neq 0, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3}}$, a to pro $c = -3, -1, 1, 3, 5$.



Obr. 8: Grafické řešení příkladu 2.1.8

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

2.1.9 Příklad 9

$\int \frac{4x^2}{2x+1}\, dx$ ([2], str. 8)

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' = \frac{4x^2}{2x+1}$.

Ze zadání určíme podmínku: $2x + 1 \neq 0$

$$x \neq -\frac{1}{2}.$$

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \frac{4x^2}{2x+1}\, dx$.

Vypočítáme integrál: $\int \frac{4x^2}{2x+1}\, dx$

pomocí dělení polynomů $(4x^2):(2x + 1)$ vyjde výraz $2x - 1$ se zbytkem 1,

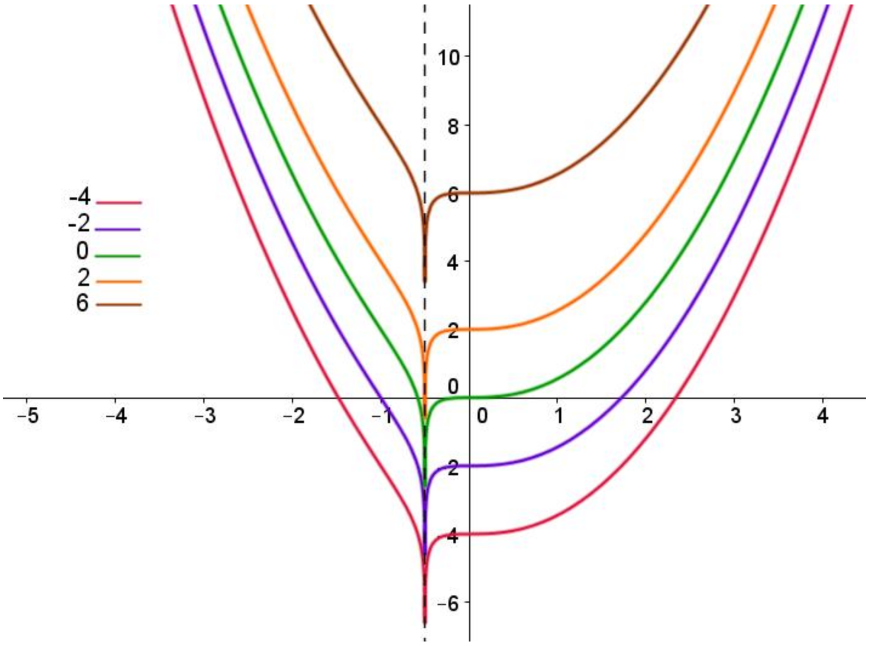
upravíme integrál do tvaru: $\int (2x - 1) + \frac{1}{2x+1}\, dx$ a dopočteme:

$$\int \frac{4x^2}{2x+1}\, dx = \int (2x - 1)\, dx + \int \frac{1}{2x+1}\, dx = \int (2x - 1)\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1 \cdot 2}{2x+1}\, dx =$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{2} \cdot \ln|2x + 1| + c.$$

Výsledkem je $y = x^2 - x + \frac{1}{2} \cdot \ln|2x + 1| + c$, kde $x \neq -\frac{1}{2}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \frac{4x^2}{2x+1}$, a to pro $c = -4, -2, 0, 2, 6$.



Obr. 9: Grafické řešení příkladu 2.1.9

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $x = -\frac{1}{2}$.

2.1.10 Příklad 10

$\int \frac{x}{x^2-1}\, dx$ ([4], str. 119)

Napište všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{x}{x^2-1}$.

Ze zadání určíme podmínku: $x^2 - 1 \neq 0$

$$x \neq \pm 1.$$

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \frac{x}{x^2-1}\, dx$.

Vypočítáme integrál: $\int \frac{x}{x^2-1}\, dx$

Než se pustíme do výpočtu, vidíme, že v čitateli je derivace jmenovatele, jen chybí v čitateli dvojnásobek x.

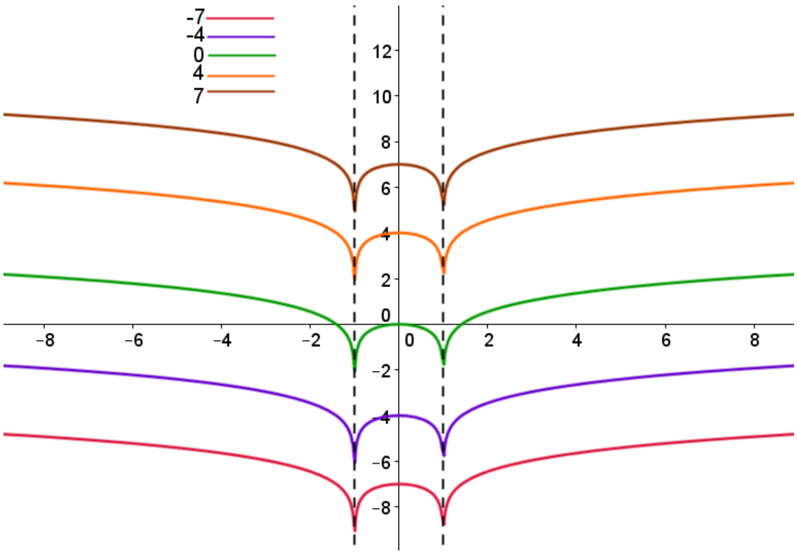
Podle věty: Nechť funkce g má spojitou derivaci, $\forall x \in (a, b): f(x) \neq 0$, pak $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c.$

Čitatel vynásobíme číslem 2, a aby se nezměnilo řešení, tak celý integrál vynásobíme $\frac{1}{2}$ a dopočítáme:

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2-1| + c.$$

Výsledkem je $y = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2-1| + c$, kde $x \neq \pm 1, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \frac{x}{x^2-1}$, a to pro $c = -7, -4, 0, 4, 7$.



Obr. 10: Grafické řešení příkladu 2.1.10

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímek $x = -1$ a $x = 1$.

2.2 S počáteční podmínkou

Pokud nechceme všechna řešení diferenciální rovnice, ale chceme jedno konkrétní řešení, tedy řešení, které splňuje počáteční podmínku, tak toto řešení nazýváme partikulárním řešením. (Samková, 5)

U těchto příkladů nás zajímá 1 konkrétní řešení, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce. I přesto jsem do obrázků dala i další řešení, abychom viděli, jak vypadá celková situace.

2.2.1 Příklad 1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce: $\boldsymbol{y' = \cos(2x), y(0) = 3}$. ([5], str. 92)

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \cos(2x)\ dx$.

Vypočítáme integrál: $\int \cos(2x)\, dx$

$$= \frac{\sin(2x)}{2} + c.$$

Výsledkem je: $y = \frac{\sin(2x)}{2} + c$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \cos(2x)$, a to pro $c = -2, -1, 0, 3, 5$.

Křivky vyplní celou rovinu.

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínku $y(0) = 3$. Tedy po dosazení $x = 0$ vyjde $y = 3$.

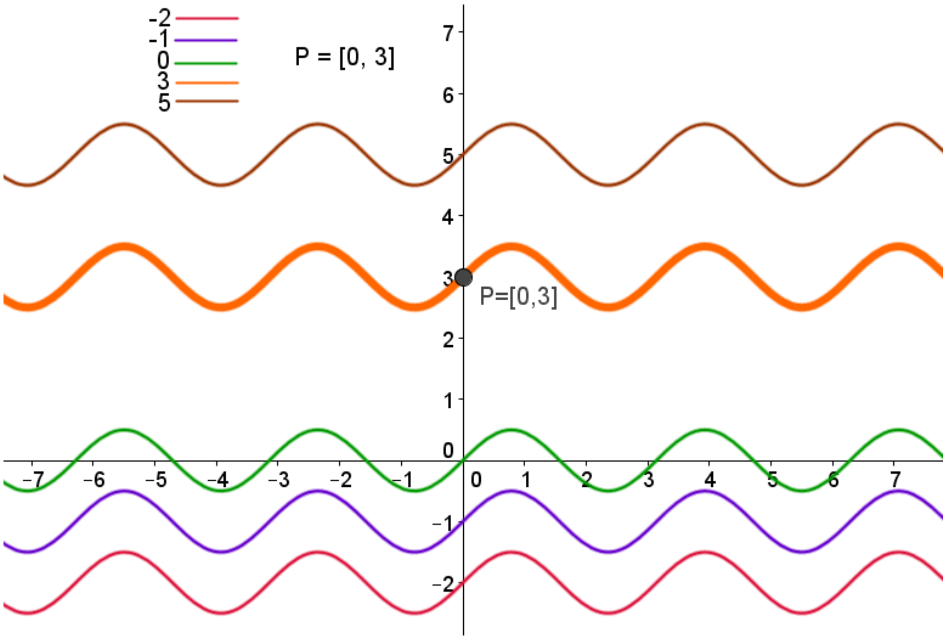
$$y(0) = 3$$

$$\frac{\sin(2\cdot 0)}{2} + \mathrm{c} = 3$$

$$c = 3$$

Hledaným partikulárním řešením je funkce $y = \frac{\sin(2x)}{2} + 3, x \in \mathbb{R}$.

V obrázku je řešení tučně zvýrazněno.



Obr. 11:Grafické řešení příkladu 2.2.1

2.2.2 Příklad 2

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce: $\boldsymbol{y' = \mathrm{e}^{7-x}, y(6) = -e}$. ([5], str. 92)

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int e^{7-x}\,dx$.

Vypočítáme integrál: $\int e^{7-x}\,dx$

$$= -e^{7-x} + c.$$

Výsledkem je: $y = -e^{7-x} + c$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice$y' = \mathrm{e}^{7-x}$, a to pro $c = -4, -2, 0, 1, 3$.

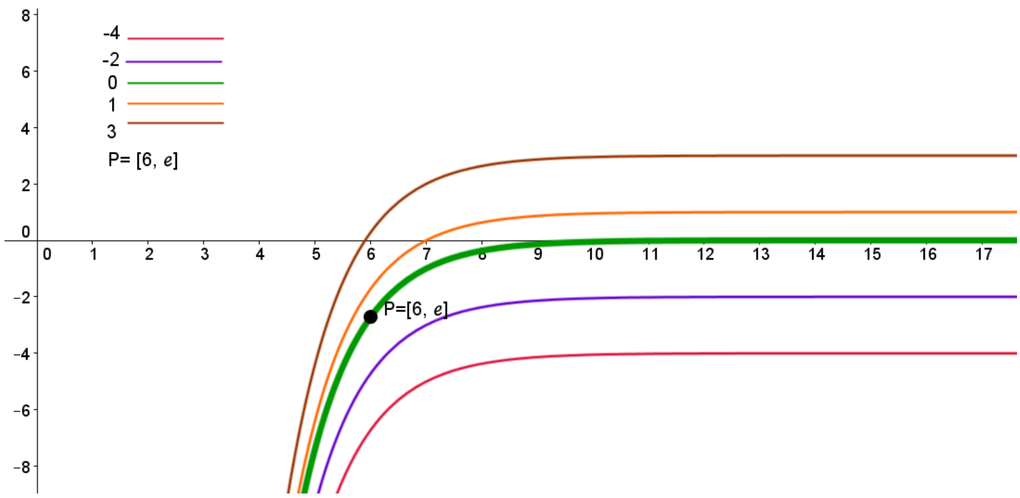
Křivky vyplní celou polorovinu $x \geq 0$.

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínku $y(6) = -e$. Tedy po dosazení $x = 6$ vyjde $y = -e$.

$$y(6) = -e$$
$$-e^{7-6} + c = -e$$
$$c = 0$$

Hledaným partikulárním řešením je funkce $y = -e^{7-x}, x \in \mathbb{R}$.

V obrázku je řešení tučně zvýrazněno.



Obr. 12: Grafické řešení příkladu 2.2.2

2.2.3 Příklad 3

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce: $y' = \frac{1}{(x-6)^2}\,dx,\ y(7) = 1$. ([5], str. 92)

Ze zadání určíme podmínku: $x \neq 6$.

Řešením rovnice budou všechny funkce ve tvaru: $y = \int \frac{1}{(x-6)^2}\,dx$.

Vypočítáme integrál $\int \frac{1}{(x-6)^2}\,dx$

pomocí substituce: $x - 6 = t$

$$dx = dt$$

dostáváme: $\int \frac{1}{t^2}\,dt$.

$$\int \frac{1}{(x-6)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x-6} + c.$$

Výsledkem je: $y = -\frac{1}{x-6} + c$, kde $x \neq 6, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \frac{1}{(x-6)^2}$, a to pro $c = -2, -1, 0, 2, 4$.

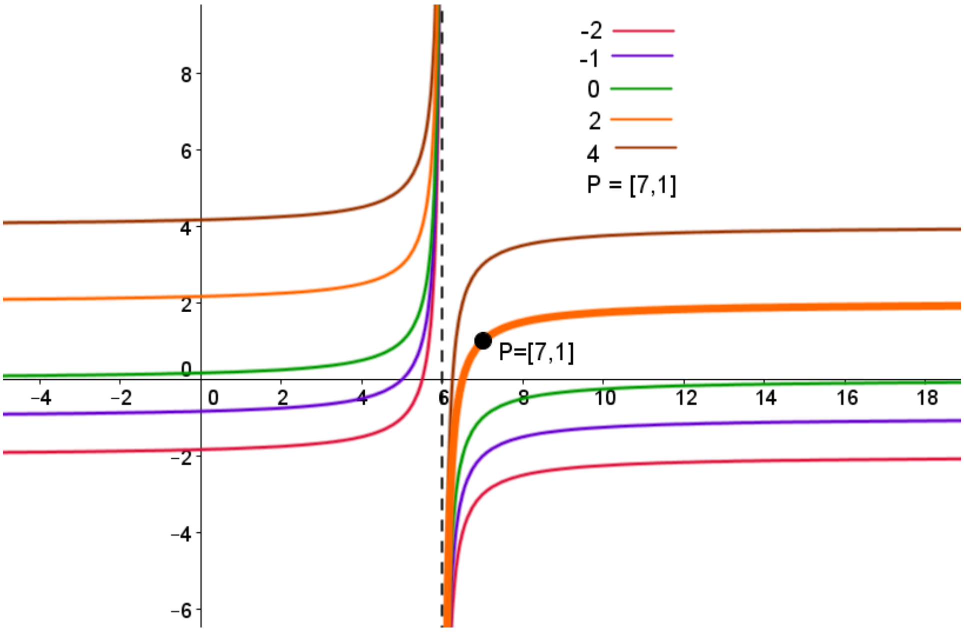
Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $x \neq 6$.

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínku $y(7) = 1$. Tedy po dosazení $x = 7$ vyjde $y = 1$.

$$y(7) = 1$$
$$-\frac{1}{7-6} + c = 1$$
$$c = 2$$

Hledaným partikulárním řešením je funkce$y = -\frac{1}{x-6} + 2, x \in (6, \infty)$.

V obrázku je řešení tučně zvýrazněno.



Obr. 13: Grafické řešení příkladu 2.2.3

3 METODA SEPARACE PROMĚNNÝCH

„Tato metoda se používá pro diferenciální rovnice, ve kterých se vyskytuje y i y', a které se dají upravit do tvaru

$$y' \cdot g(y) = h(x),$$

tedy všechna y převést na jednu stranu rovnice a všechna x na druhou.
Řešením takové diferenciální rovnice je y splňující rovnici

$$\int g(y)dy = \int h(x)\, dx\,,$$

včetně konstanty c, kterou stačí psát pouze na pravou stranu rovnice.“
(Samková, [5], s. 93)

Postup je stejný jako u předchozí kapitoly.

Tato kapitola je čerpaná výhradně z literatury [2], [5], [6] a z vlastních příkladů. Některá zadání jsou kompletně převzatá, jen u malé části příkladů je zadání trochu pozměněné.

3.1 Bez počáteční podmínky

3.1.1 Příklad 1

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' \cdot y^2 = \cos x$. ([6], str. 114)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot y^2 = \cos x$$

$$\int y^2\, dy = \int \cos x\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \sin x + c$$

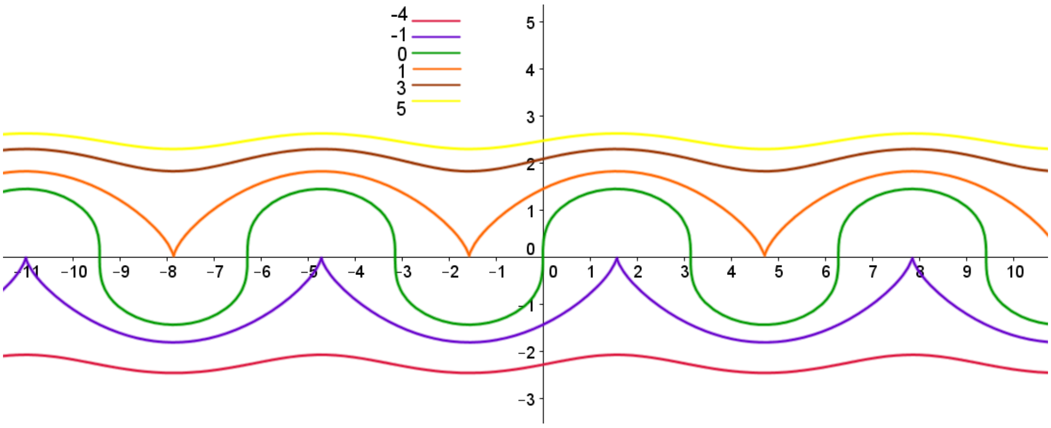
$$y^3 = 3\sin x + 3c$$

$$y = \sqrt[3]{3\sin x + 3c}$$

pro $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Řešením rovnice $y' \cdot y^2 = \cos x$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = \sqrt[3]{3\sin x + 3c}$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' \cdot y^2 = \cos x$, a to pro $c = -4, -1, 0, 1, 3, 5$.



Obr. 14: Grafické řešení příkladu 3.1.1

Křivky vyplní celou rovinu.

3.1.2 Příklad 2

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' \cdot y^2 = 2\sin x$. ([5], str. 97)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot y^2 = 2\sin x$$

$$\int y^2\, dy = \int 2\sin x\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = -2\cos x + c$$

$$y^3 = -6\cos x + 3c$$

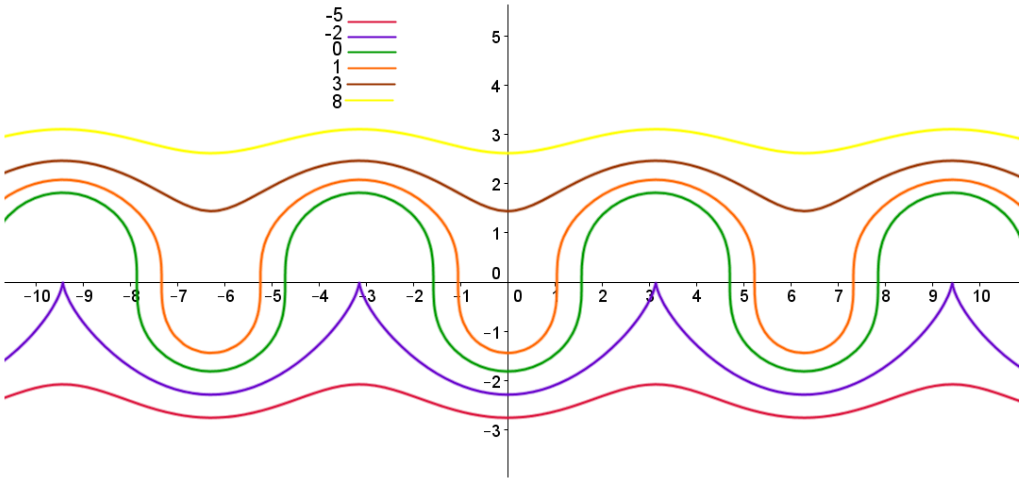
$$y = \sqrt[3]{-6\cos x + 3c}$$

$$y = \sqrt[3]{3c - 6\cos x}$$

pro $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Řešením rovnice $y' \cdot y^2 = 2\sin x$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = \sqrt[3]{3c - 6\cos x}$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' \cdot y^2 = 2\sin x$, a to pro $c = -5, -2, 0, 1, 3, 8$.



Obr. 15: Grafické řešení příkladu 3.1.2

Křivky vyplní celou rovinu.

3.1.3 Příklad 3

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' \cdot y = \mathrm{x}^3 + 6$. (vlastní příklad)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot y = \mathrm{x}^3 + 6$$

$$\int y\, dy = \int \mathrm{x}^3 + 6\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{\mathrm{x}^4}{4} + 6x + c$$

$$y^2 = \frac{x^4}{2} + 12x + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + 12x + 2c}.$$

Protože výraz pod odmocninou z poslední rovnice musí být ≥ 0, dostáváme podmínku:

$$\frac{x^4}{2} + 12x + 2c \geq 0.$$

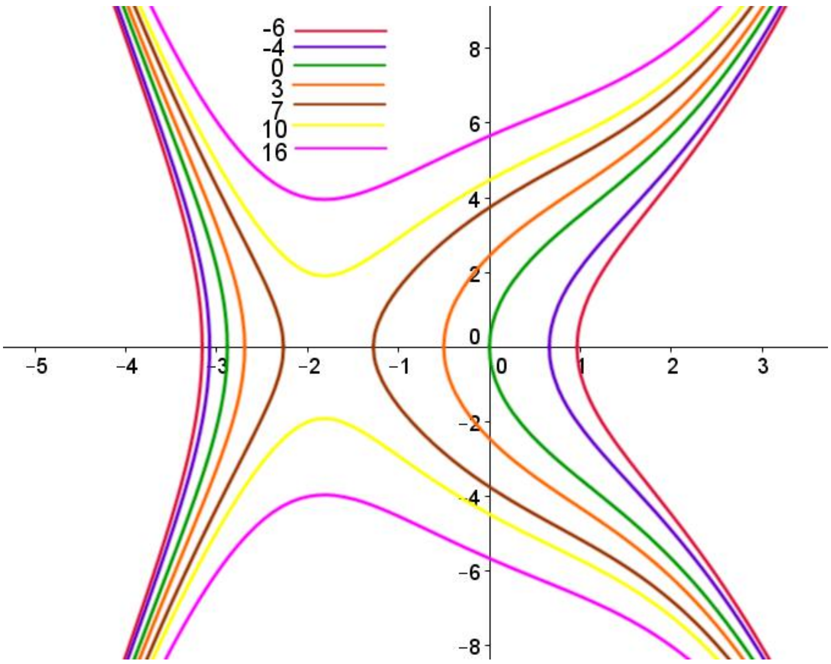
Řešení nerovnice je složité, neboť pro různá c nám vyjdou různá x. Pro každé x bychom měli jinou podmínku. Podrobněji podmínku rozebereme s konkrétním c.

Řešením rovnice $y' \cdot y = \mathrm{x}^3 + 6$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + 12x + 2c}$,

kde $\frac{x^4}{2} + 12x + 2c \geq 0, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' \cdot y = \mathrm{x}^3 + 6$, a to pro

$c = -6, -4, 0, 3, 7, 10, 16$.



Obr. 16: Grafické řešení příkladu 3.1.3

Křivky vyplní celou rovinu.

Nyní se znovu vrátíme k podmínce: $\frac{x^4}{2} + 12x + 2c \geq 0$, podrobněji si ji nyní rozebereme s konkrétní hodnotou c. Zvolíme si $c = 0$.

$$\frac{x^4}{2} + 12x + 2 \cdot 0 \geq 0$$

$$\frac{x^4}{2} + 12x \geq 0$$

$$x^4 + 24x \geq 0$$

$$x \cdot (x^3 + 24) \geq 0$$

Mohou nastat dva případy (oba výrazy budou buď kladné anebo záporné), ve kterých bude nerovnost platit:

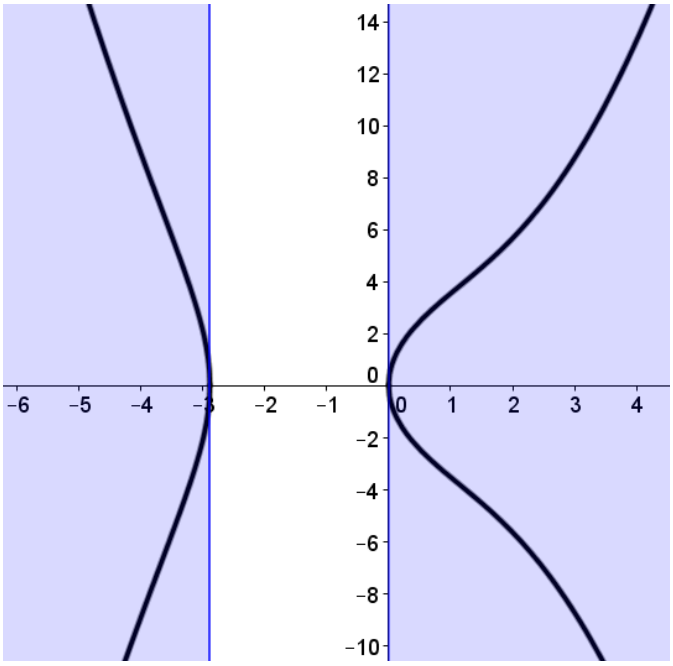
pokud $x < 0$, tak $x^3 + 24 < 0$ $\quad\wedge\quad$ pokud $x > 0$, tak $x^3 + 24 > 0$

$$x^3 + 24 < 0 \qquad\qquad x^3 + 24 > 0$$

$$x^3 < -24 \qquad\qquad x^3 > -24$$

$$x^3 < \sqrt[3]{-24} \qquad\qquad x > \sqrt[3]{-24}$$

vyhovují $\forall x > 0$



Obr. 17: Podrobný náhled na řešení pro $\boldsymbol{c = 0}$

Z obrázku je vidět, že pro $c = 0$ má rovnice $y' \cdot y = x^3 + 6$ konkrétní podmínku, a to $x \cdot (x^3 + 24) \geq 0$.

Zvolíme si ještě jednu konkrétní hodnotu c pro názornější představu. Zvolíme si $c = 16$.

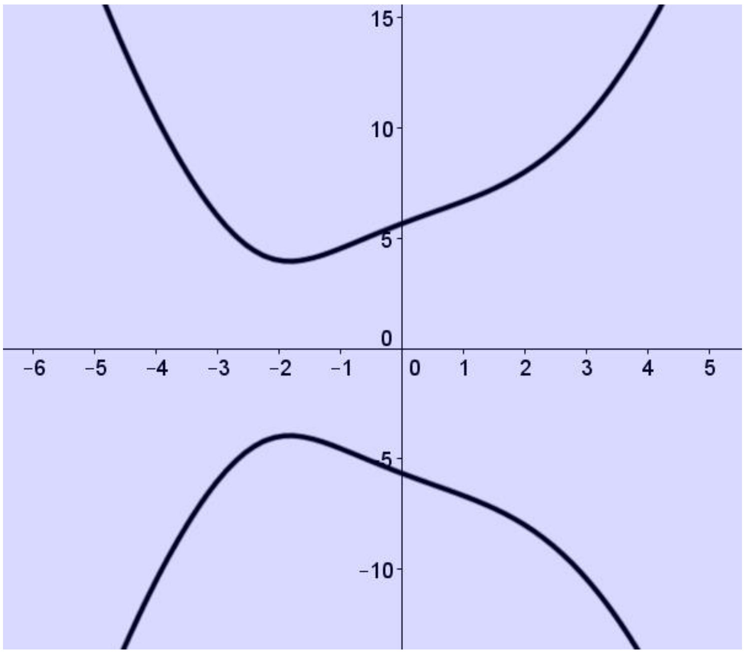
$$\frac{x^4}{2} + 12x + 2 \cdot 16 \geq 0$$

$$\frac{x^4}{2} + 12x + 32 \geq 0$$

$$x^4 + 24x + 64 \geq 0$$

Pokud si do matematického programu GeoGebra zadáme levou stranu nerovnice ($x^4 + 24x + 64$) jako funkci, tak zjistíme, že všechny hodnoty funkce jsou kladné. Tudíž nerovnost $x^4 + 24x + 64 \geq 0$ je splněna pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Řešení rovnice $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + 12x + 32}$ je definované na celém oboru $\mathbb{R}$.



Obr. 18: Podrobný náhled na řešení pro $\boldsymbol{c = 16}$

3.1.4 Příklad 4

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $\boldsymbol{y' \cdot y^6 = 2x^6 - \frac{3}{4}}$. (vlastní příklad)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot y^6 = 2x^6 - \frac{3}{4}$$

$$\int y^6 \, dy = \int 2x^6 - \frac{3}{4} \, dx$$

$$\frac{x^7}{7} = \frac{2x^7}{7} - \frac{3}{4}x + c$$

$$y^7 = 2x^7 - \frac{21}{4}x + 7c$$

$$y = \sqrt[7]{2x^7 - \frac{21}{4}x + 7c}$$

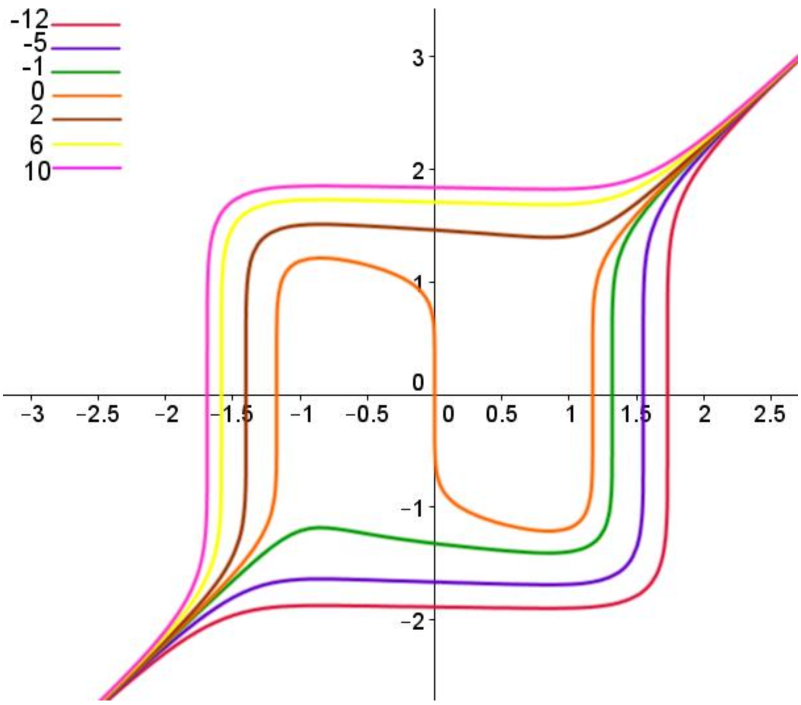
pro $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Řešením rovnice $y' \cdot y^6 = 2x^6 - \frac{3}{4}$ jsou všechny funkce ve tvaru:

$y = \sqrt[7]{2x^7 - \frac{21}{4}x + 7c}$, kde $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' \cdot y^6 = 2x^6 - \frac{3}{4}$, a to pro

$c = -12, -5, -1, 0, 2, 6, 10$.



Obr. 19: Grafické řešení příkladu 3.1.4

Křivky vyplní celou rovinu.

3.1.5 Příklad 5

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. ([6], str. 115)

Ze zadání určíme podmínku: $x \geq 0 \ \wedge \sqrt{x} \neq 0$, z toho vyplývá, že: $x > 0$.

Zlomek $\frac{y'}{2\sqrt{y}}$ můžeme napsat jako $y' \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Pak postupně řešíme:

$$y' \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c \qquad (1)$$

$$y = (2\sqrt{x} + c)^2.$$

Protože z rovnice (1) je zřejmé, že levá strana je vždy kladná, musí být kladná i pravá strana rovnice. Z toho vyplývá, že dostáváme podmínku pro x:

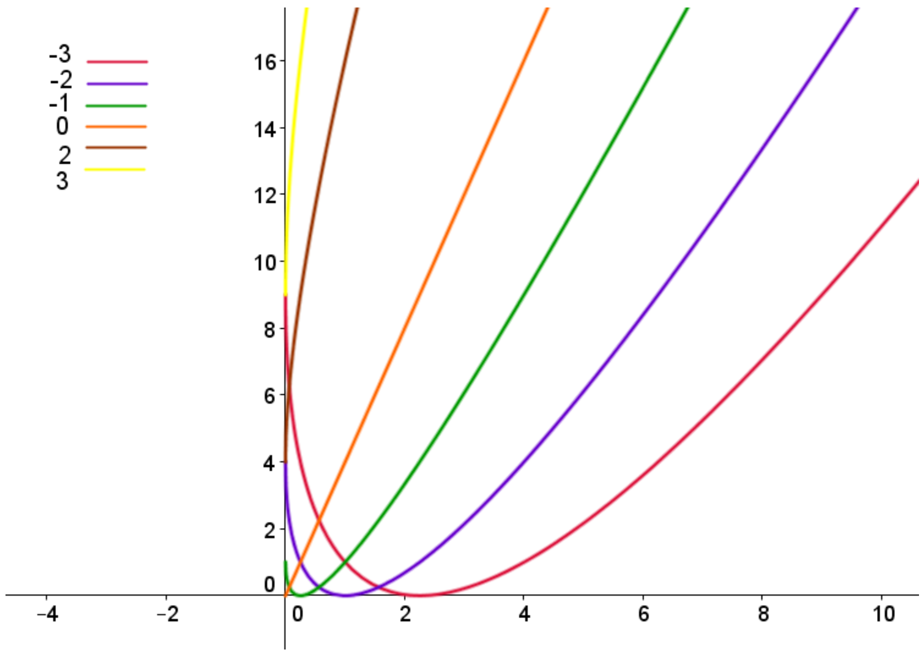
$$2\sqrt{x} + c > 0$$

pokud: $c > 0$	pokud $c = 0$	pokud $c < 0$
nerovnost platí automaticky pro $\forall x$	$2\sqrt{x} > 0$	$2\sqrt{x} < -c$
$x \in \mathbb{R}$	$x > 0$	$\sqrt{x} < \frac{-c}{2}$
		$x < \frac{c^2}{4}$

Řešením rovnice $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = (2\sqrt{x} + c)^2$,

kde $x \in \mathbb{R}$ pro $c > 0$; $x > 0$ pro $c = 0$; $x < \frac{c^2}{4}$ pro $c < 0$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, a to pro $c = -3, -2, -1, 0, 2, 3$.



Obr. 20: Grafické řešení příkladu 3.1.5

Křivky vyplní pouze I. kvadrant.

3.1.6 Příklad 6

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $\boldsymbol{y' \cdot \frac{4}{\sqrt{y^3}} = 9x^2 + 1}$**.** (vlastní příklad)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot \frac{4}{\sqrt{y^3}} = 9x^2 + 1$$

$$\int \frac{4}{\sqrt{y^3}}\, dy = \int 9x^2 + 1\, dx$$

$$\int 4 \cdot y^{-\frac{3}{2}}\, dy = \int 9x^2 + 1\, dx$$

$$4 \cdot \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{9x^3}{3} + x + c$$

$$-\frac{8}{\sqrt{y}} = 3x^3 + x + c$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{-3x^3 - x - c}{8}$$

můžeme upravit do tvaru:
$$\sqrt{y} = \frac{8}{-3x^3 - x - c} \tag{1}$$

$$\sqrt{y} = -\frac{8}{3x^3 + x + c} \tag{2}$$

$$y = \left(-\frac{8}{3x^3 + x + c}\right)^2.$$

V rovnici (1) jsme využili znalost převrácené hodnoty. Z rovnice (2) je zřejmé, že levá strana je vždy kladná, proto totéž platí i pro pravou stranu. Z toho vyplývá, že dostáváme podmínku pro x:

$$\frac{-8}{3x^3 + x + c} > 0. \tag{3}$$

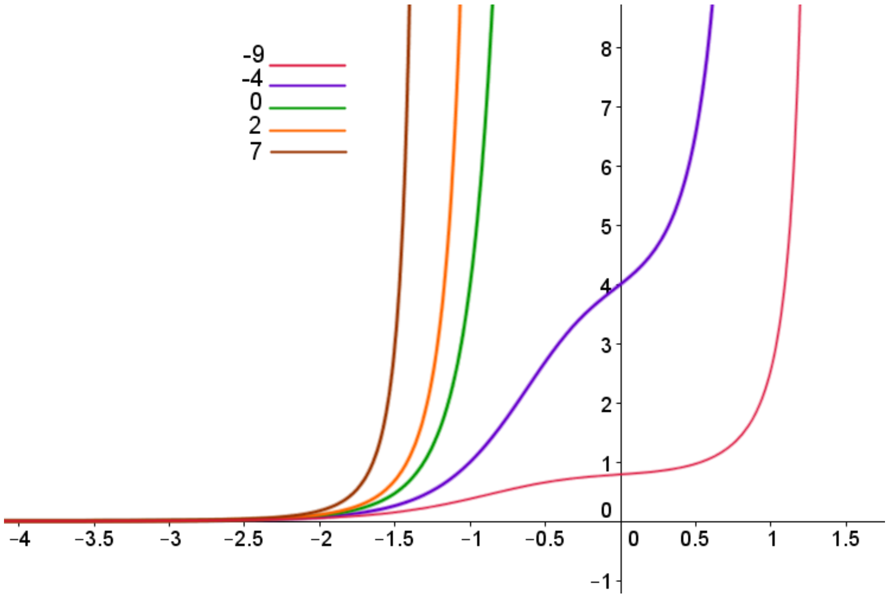
Nerovnost bude platit, když čitatel i jmenovatel budou kladné nebo oba dva budou záporné.

V našem případě z nerovnice (3) vyplývá, že se budeme zabývat jen jmenovatelem $3x^3 + x + c$, který musí být záporný, protože čitatel je také záporný.

$$3x^3 + x + c < 0$$

Řešením rovnice $y' \cdot \frac{4}{\sqrt{y^3}} = 9x^2 + 1$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = \left(\frac{8}{3x^3+x+c}\right)^2$, kde $c \in \mathbb{R}$ a jsou omezené podmínkou: $3x^3 + x + c < 0$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' \cdot \frac{4}{\sqrt{y^3}} = 9x^2 + 1$, a to pro $c = -9, -4, 0, 2, 7$.



Obr. 21: Grafické řešení příkladu 3.1.6

Křivky vyplní pouze polorovinu $y > 0$.

Nyní se znovu vrátíme k podmínce: $\frac{-8}{3x^3+x+c} > 0$, kde se budeme zabývat výrazem $3x^3 + x + c < 0$. Podrobněji si ji rozebereme s konkrétní hodnotou c. Zvolíme si $c = -4$.

$$3x^3 + x + c < 0$$

$$3x^3 + x - 4 < 0$$

Vhodně zvoleným x zjistíme kořen nerovnice.

Dosadíme za $x = 1$ a zkusíme, zda není náhodou kořenem:

$$3 \cdot 1^3 + 1 - 4 = 0.$$

$$x = 1 \text{ je kořen.}$$

Výraz $(3x^3 + x - 4)$ půjde vydělit výrazem $(x - 1)$:

$$(3x^3 + x - 4) : (x - 1) = 3x^2 + 3x + 4$$

$$\underline{-3x^3 + 3x^2}$$

$$3x^2 + x - 4$$

$$\underline{-3x^2 + 3x}$$

$$4x - 4$$

$$\underline{-4x + 4}$$

$$0$$

Výraz $3x^3 + x - 4$ lze tedy rozepsat na součin:

$$3x^3 + x - 4 = (x - 1) \cdot (3x^2 + 3x + 4)$$

$$\Lsh D = b^2 - 4ac$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4$$

$$D = -39 < 0$$

výraz nelze rozložit,

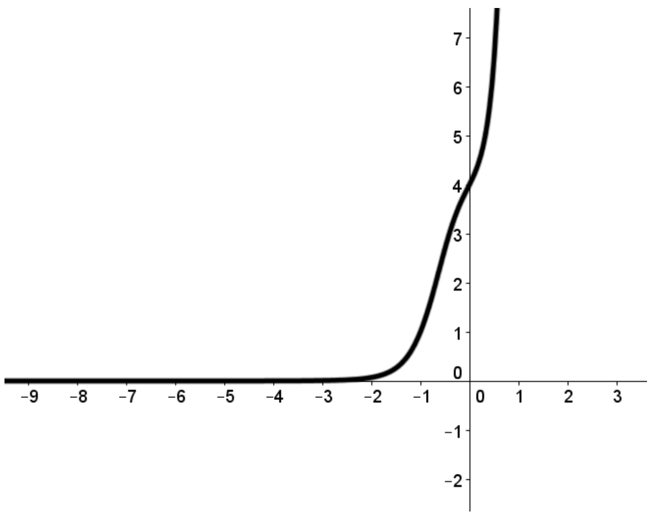
výraz $(3x^2 + 3x + 4)$ bude vždy kladný, protože se nedá rozložit. O podmínce nám tedy rozhodne výraz $(x - 1)$:

nastanou 2 případy → pokud $x > 1$ tak $3x^3 + x - 4 > 0$

↘ pokud $x < 1$ tak $3x^3 + x - 4 < 0$.

My chceme $3x^3 + x - 4 < 0$, takže pro $c = -4$ je definiční obor řešení:

$Df = (-\infty, 1)$.



Obr. 22: Podrobný náhled na řešení pro $c = -4$

Zvolíme si ještě jednu konkrétní hodnotu c pro názornější představu. Zvolíme si $c = 0$.

$$3x^3 + x + c < 0$$

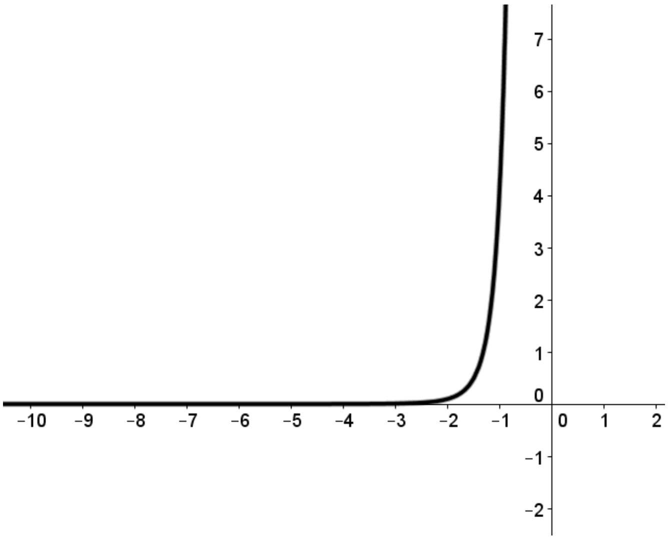
$$3x^3 + x < 0$$

$$x \cdot (3x^2 + 1) < 0$$

$\Lsh$ výraz je vždy > 0,

proto se budeme zabývat jen výrazem x.

Aby levá strana nerovnice byla < 0, musí být i $x < 0$.



Obr. 23: Podrobný náhled na řešení pro $\boldsymbol{c = 0}$

Pro $c = -4$ je definiční obor řešení: $Df = (-\infty, 0)$.

3.1.7 Příklad 7

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $\boldsymbol{y' \cdot \frac{1}{6\sqrt{y}} = 2x^2}$. ([5], str. 95)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot \frac{1}{6\sqrt{y}} = 2x^2$$

$$\int \frac{1}{6\sqrt{y}}\, dy = \int 2x^2 \; dx$$

$$\int \frac{1}{6} \cdot y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \int 2x^2 \; dx$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2x^3}{3}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{y} = \frac{2x^3}{3} + c$$

$$\sqrt{y} = 2x^3 + 3c \qquad (1)$$

$$y = (2x^3 + 3c)^2.$$

Z rovnice (1) dostáváme podmínku pro x: $2x^3 + 3c > 0$

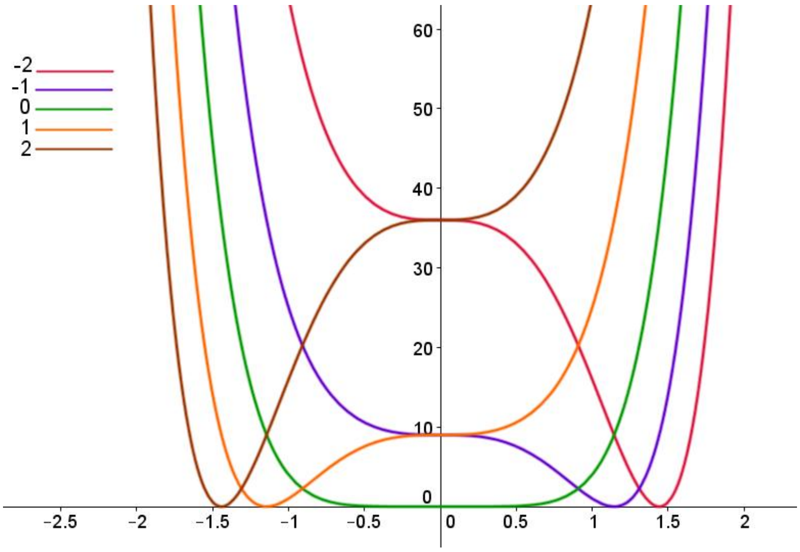
$$x^3 > -\frac{3}{2}c$$

$$x > \sqrt[3]{-\frac{3}{2}c}.$$

Řešením rovnice $y' \cdot \frac{1}{6\sqrt{x}} = 2x^2$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = (2x^3 + 3c)^2$,

kde $x > \sqrt[3]{-\frac{3}{2}c}$, $c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y = (2x^3 + 3c)^2$, a to pro $c = -2, -1, 0, 1, 2$.



Obr. 24: Grafické řešení příkladu 3.1.7

Křivky vyplní pouze polorovinu $y > 0$

3.1.8 Příklad 8

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' \cdot \frac{1}{y-2} = 3x^2$. ([5], str. 97)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot \frac{1}{y-2} = 3x^2$$

$$\int \frac{1}{y-2}\, dy = \int 3x^2 \, dx$$

$$\ln|y-2| = x^3 + c$$

lze upravit do tvaru: $$e^{\ln|y-2|} = e^{x^3+c} \quad (1)$$

následně upravíme: $$|y-2| = e^{x^3+c} \quad (2)$$

$$y - 2 = \pm e^{x^3+c}$$

$y = 2 \pm e^{x^3+c}$, pro $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

$$y = 2 \pm e^{x^3} \cdot e^{c} \quad (3)$$

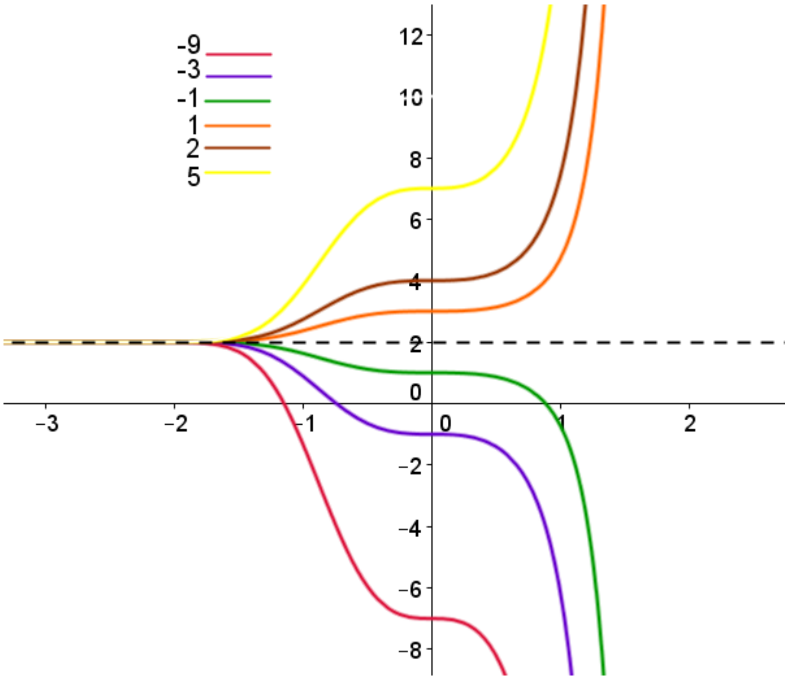
$$y = 2 \pm e^{c} \cdot e^{x^3}$$

A zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^{c}$ a dostaneme řešení:

$y = 2 + K \cdot e^{x^3}$, kde $x \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

Řešením rovnice $y' \cdot \frac{1}{y-2} = 3x^2$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = 2 + K \cdot e^{x^3}$, kde $x \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y = 2 + K \cdot e^{x^3}$, a to pro $K = -9, -3, -1, 1, 2, 5$.



Obr. 25: Grafické řešení příkladu 3.1.8

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $y = 2$.

3.1.9 Příklad 9

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{x}$. ([5], str. 97)

Ze zadání určíme podmínku: $x \neq 0$.

Postupně řešíme:

$$y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{3}{x}\, dx$$

$$\ln|y| = 3\ln|x| + c$$

lze upravit do tvaru:

$$\mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{3\ln|x|+c}$$

$$\mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{(\ln|x|+\ln|x|+\ln|x|)+c}$$

$$\mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{\ln(|x|\cdot|x|\cdot|x|)+c}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|^3+c}$$

následně upravíme:

$$|y| = |x|^3 + e^c$$

$$y = x^3 \pm e^c, \text{ pro } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

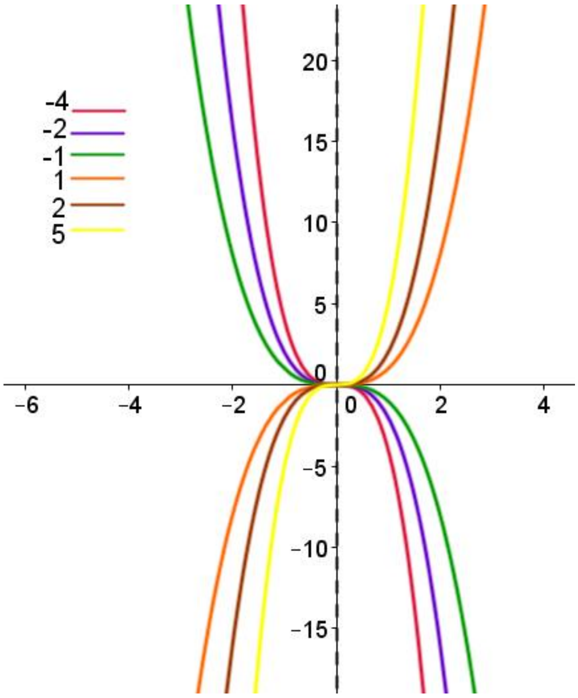
$$y = \pm e^c \cdot x^3$$

a zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^c$ a dostaneme řešení:

$$y = K \cdot x^3,\text{ kde } x \neq 0, K \neq 0.$$

Řešením rovnice $y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{x}$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = K \cdot x^3$, kde $x \neq 0, K \neq 0$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y = K \cdot x^3$, a to pro $K = -4, -2, -1, 1, 2, 5$.



Obr. 26: Grafické řešení příkladu 3.1.9

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

3.1.10 Příklad 10

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' = e^{-(x+y)}$. ([6], str. 114)

Rovnici upravíme tak, aby byla připravena pro metodu separace proměnných:

$$y' = e^{-x} \cdot e^{-y}$$

$$\frac{y'}{e^{-y}} = e^{-x}$$

$$y' \cdot \frac{1}{e^{-y}} = e^{-x}$$

a postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{e^{-y}}\, dy = \int e^{-x}\, dx$$

$$\int e^{y}\, dy = \int e^{-x}\, dx$$

$$e^{y} = -e^{-x} + c$$

lze upravit do tvaru: $$\ln e^{y} = \ln(-e^{-x} + c)$$

$$y \cdot \ln e = \ln(-e^{-x} + c)$$

následně upravíme: $$y = \ln(-e^{-x} + c)$$

$$y = \ln(c - e^{-x}). \tag{1}$$

Z rovnice (1) vznikla podmínka: $c - e^{-x} > 0$

$$-e^{-x} > -c$$

$$e^{-x} < c \Rightarrow \text{Odtud plyne, že } c > 0.$$

$$\ln(e^{-x}) < \ln(c)$$

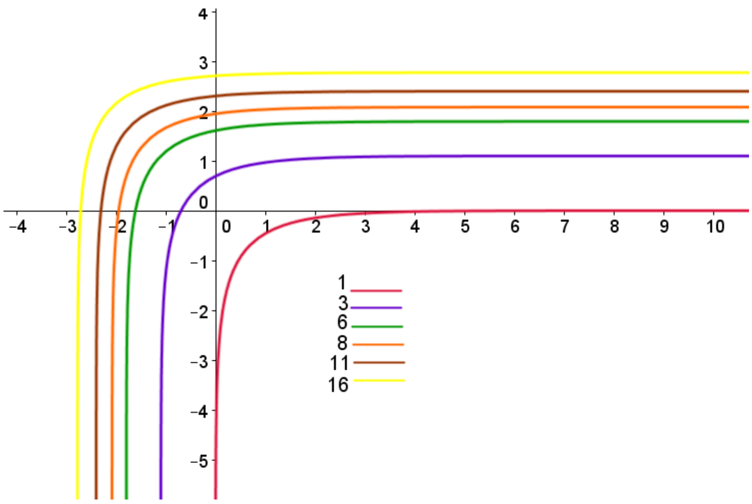
$$-x \cdot \ln(e) < \ln(c)$$

$$-x < \ln(c)$$

$$x > -\ln(c).$$

Řešením rovnice $y' = e^{-(x+y)}$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = \ln(c - e^{-x})$, kde $x > -\ln(c)$ pro $c > 0$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = e^{-(x+y)}$ a to pro $c = 1, 3, 6, 8, 11, 16$.



Obr. 27: Grafické řešení příkladu 3.1.10

Křivky vyplní celou rovinu.

3.1.11 Příklad 11

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $\boldsymbol{y' \cdot e^y = 5x^4}$. (vlastní příklad)

Postupně řešíme:

$$y' \cdot e^y = 5x^4$$

$$\int e^y \, dy = \int 5x^4 \, dx$$

$$e^y = x^5 + c$$

lze upravit do tvaru:

$$\ln e^y = \ln(x^5 + c)$$

$$y \cdot \ln e = \ln(x^5 + c)$$

následně upravíme:

$$y = \ln(x^5 + c). \quad (1)$$

Z rovnice (1) vznikla podmínka: $x^5 + c > 0$

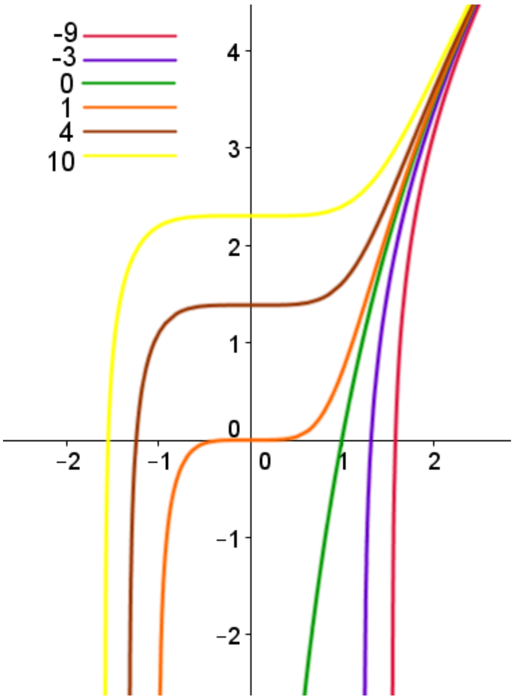
$$x^5 > -c$$

$$x > \sqrt[5]{-c}.$$

Řešením rovnice $y' \cdot e^y = 5x^4$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = \ln(x^5 + c)$,

kde $x > \sqrt[5]{-c}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' \cdot e^y = 5x^4$, a to pro $c = -9, -3, 0, 1, 4, 10$.



Obr. 28: Grafické řešení příkladu 3.1.11

Křivky vyplní celou rovinu.

3.1.12 Příklad 12

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' = -2xy$. ([6], str. 114)

Rovnici upravíme tak, aby byla připravena pro metodu separace proměnných:

$$\frac{y'}{y} = -2x$$

$$y' \cdot \frac{1}{y} = -2x.$$

Touto úpravou bychom ztratili jedno řešení – nulovou funkci. (Nulová funkce je funkce, která splňuje: $y = y(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, označuje se $y \equiv 0$.)

Postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -2x\, dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c$$

lze upravit do tvaru: $$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+c}$$

následně upravíme: $$|y| = e^{-x^2+c}$$

$$y = \pm e^{-x^2+c}, \text{ pro} x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$y = \pm e^{-x^2} \cdot e^c$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{-x^2}$$

a zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^c$ a dostaneme řešení:

$$y = K \cdot e^{-x^2}, \text{kde } x \in \mathbb{R}. K \neq 0.$$

Nyní se vrátíme ke ztracenému řešení; $y \equiv 0$ ($y(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$):

$y \equiv 0$ (Zkusíme, jestli není náhodou řešením původní rovnice.)

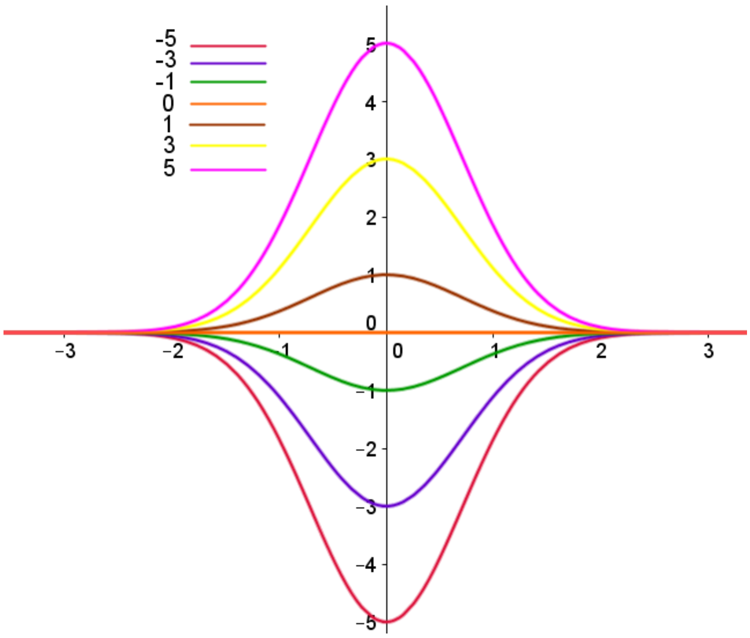
$y' = 0' = 0$

a dosadíme: $0 = -2 \cdot 0$, rovnice platí.

Protože nulovou funkci můžeme zapsat jako $y = 0 \cdot e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, všechna řešení rovnice $y' = -2xy$ jsou funkce ve tvaru: $y = K \cdot e^{-x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

(pro $K = 0$ dostaneme $y \equiv 0$)

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = -2xy$, a to pro $K = -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5$.



Obr. 29: Grafické řešení příkladu 3.1.12

Křivky vyplní celou rovinu.

3.1.13 Příklad 13

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' = \frac{y}{x}$. ([6], str. 114)

Rovnici upravíme tak, aby byla připravena pro metodu separace proměnných:

$$y' \cdot x = y$$

$$\frac{y' \cdot x}{y} = 1$$

$$y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}.$$

Určíme podmínku: $x \neq 0$.

Úpravou rovnice bychom opět ztratili jedno řešení – nulovou funkci.

Postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln|y| = \ln|x|$$

lze upravit do tvaru: $$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|}$$

následně upravíme: $$|y| = e^{\ln|x|+c}$$

$$|y| = e^{\ln|x|} \cdot e^{c}$$

$$|y| = |x| \cdot e^{c}$$

$$y = \pm e^{c} \cdot x, \text{pro } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

a zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^{c}$ a dostaneme řešení:

$$y = K \cdot x, \text{kde } x \neq 0, K \neq 0.$$

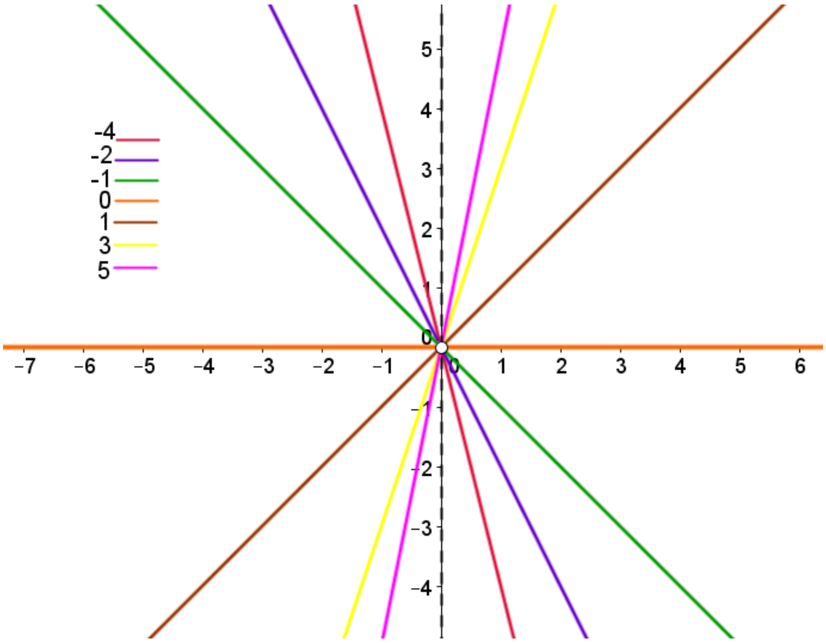
Nyní se vrátíme ke ztracenému řešení: zkusíme, jestli funkce $y(x) = 0$ pro $x \neq 0$ je řešením.

$y' = 0' = 0$

dosadíme: $0 = \frac{0}{x}$, rovnice platí.

Protože $0 = 0 \cdot x$, všechna řešení rovnice $y' = \frac{y}{x}$ můžeme napsat ve tvaru $y = K \cdot x$, kde $x \neq 0, K \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = \frac{y}{x}$, a to pro $K = -4, -2, -1, 0, 1, 3, 5$.



Obr. 30: Grafické řešení příkladu 3.1.13

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

3.1.14 Příklad 14

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $\boldsymbol{y' \cdot \sqrt{1-x^2} = x \cdot y}$. ([6], str. 114)

Rovnici upravíme:

$$\frac{y' \cdot \sqrt{1-x^2}}{y} = x$$

$$y' \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{y} = x$$

$$y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Určíme podmínku: $1 - x^2 > 0$

$$-x^2 > -1$$

$$x^2 < 1$$

$$x < \pm 1.$$

Úpravou rovnice bychom ztratili jedno řešení – nulovou funkci.

Postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\ln|y| = -\sqrt{1-x^2} + c$$

lze upravit do tvaru: $e^{\ln|y|} = e^{-\sqrt{1-x^2}+c}$

následně upravíme: $|y| = e^{-\sqrt{1-x^2}+c}$, pro $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

$$y = \pm e^{-\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{c}$$

$$y = \pm e^{c} \cdot e^{-\sqrt{1-x^2}}$$

a zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^{c}$ a dostaneme řešení:

$$y = K \cdot e^{-\sqrt{1-x^2}}, \text{kde } x \in (-1, 1), K \neq 0.$$

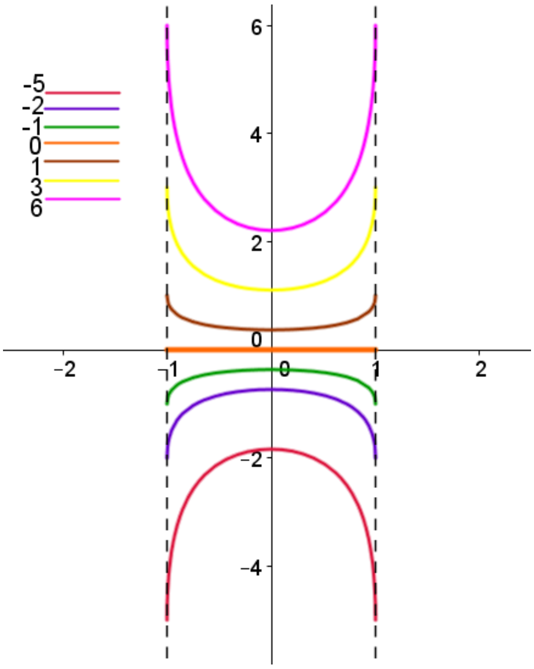
Nyní se vrátíme ke ztracenému řešení: zkusíme, jestli funkce $y(x) = 0$ pro $x \in (-1, 1)$ je řešením.

$y' = 0' = 0$

dosadíme: $0 \cdot \sqrt{1-x^2} = x \cdot 0$, rovnice platí.

Protože $0 = 0 \cdot e^{-\sqrt{1-x^2}}$, všechna řešení rovnice $y' \cdot \sqrt{1-x^2} = x \cdot y$ můžeme napsat ve tvaru $y = K \cdot e^{-\sqrt{1-x^2}}$, kde $x \in (-1, 1), K \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice$y' \cdot \sqrt{1-x^2} = x \cdot y$, a to pro $K = -5, -2, -1, 0, 1, 3, 6$.



Obr. 31: Grafické řešení příkladu 3.1.14

Křivky vyplní pouze pás, ve kterém je $x \in (-1, 1)$.

3.1.15 Příklad 15

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' = y \cdot \cos x$ ([2], str. 76)

Rovnici upravíme:

$$\frac{y'}{y} = \cos x$$

$$y' \cdot \frac{1}{y} = \cos x.$$

Touto úpravou bychom ztratili jedno řešení – nulovou funkci. (Nulová funkce je funkce, která splňuje: $y = y(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, označuje se $y \equiv 0$.)

Postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x\ \,dx$$

$$\ln|y| = \sin x + c$$

lze upravit do tvaru: $$e^{\ln|y|} = e^{\sin x + c}$$

následně upravíme: $$|y| = e^{\sin x + c}$$

$$y = \pm e^{\sin x + c}, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$y = \pm e^{\sin x} \cdot e^{c}$$

$$y = \pm e^{c} \cdot e^{\sin x}$$

a zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^{C}$ a dostaneme řešení:

$$y = K \cdot e^{\sin x}, \text{kde } x \in \mathbb{R}, K \neq 0.$$

Nyní se vrátíme ke ztracenému řešení: $y \equiv 0$ ($y(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$):

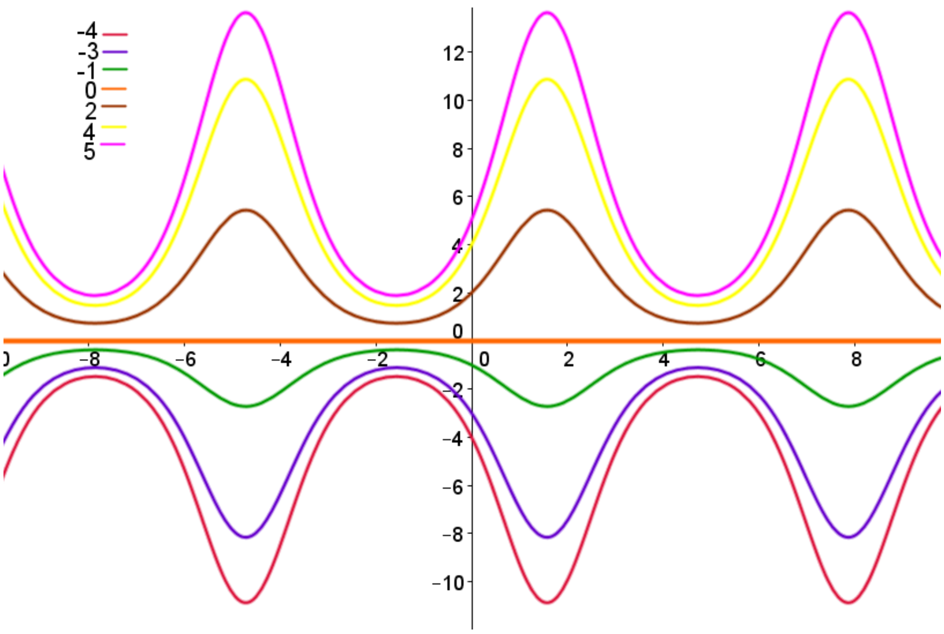
$y \equiv 0$

$y' = 0' = 0$

dosadíme: $0 = 0 \cdot \cos x$, rovnice platí.

Protože nulovou funkci můžeme zapsat jako $y = 0 \cdot e^{\sin x}, x \in \mathbb{R}$, všechna řešení rovnice $y' = y \cdot \cos x$ jsou funkce ve tvaru: $y = K \cdot e^{\sin x}$, kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$. (pro $K = 0$ dostaneme $y \equiv 0$)

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' = y \cdot \cos x$, a to pro $K = -4, -3, -1, 0, 2, 4, 5.$



Obr. 32: Grafické řešení příkladu 3.1.15

Křivky vyplní celou rovinu.

3.2 S počáteční podmínkou

3.2.1 Příklad 1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce: $3y^2 \cdot y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. ([6], str. 115)

Postupně řešíme:

$$\int 3y^2\, dy = \int -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$y^3 = \mathrm{cotg}x + c$$

$$y = \sqrt[3]{\mathrm{cotg}x + c}$$

pro $x \neq k \cdot \pi, c \in \mathbb{R}$.

Řešením rovnice $3y^2 \cdot y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ jsou všechny funkce ve tvaru:

$y = \sqrt[3]{\mathrm{cotg}x + c}$, kde $x \neq k \cdot \pi, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $3y^2 \cdot y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, a to pro

$c = -5, -2, 0, 1, 4, 8$.

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímek $x \neq k \cdot \pi$.

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínku $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tedy po dosazení $x = \frac{\pi}{2}$ vyjde $y = 2$.

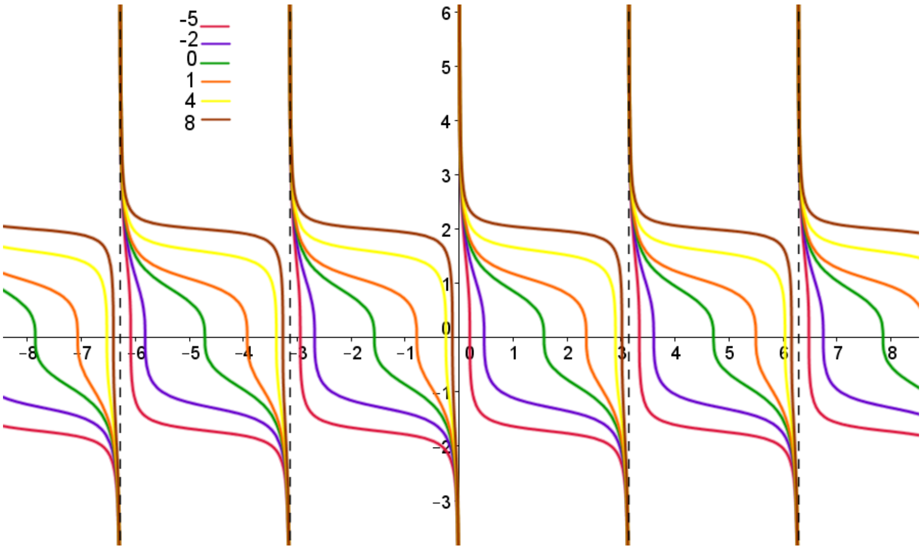
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\sqrt[3]{\mathrm{cotg}\frac{\pi}{2} + c} = 2$$

$$\mathrm{cotg}\frac{\pi}{2} + c = 8$$

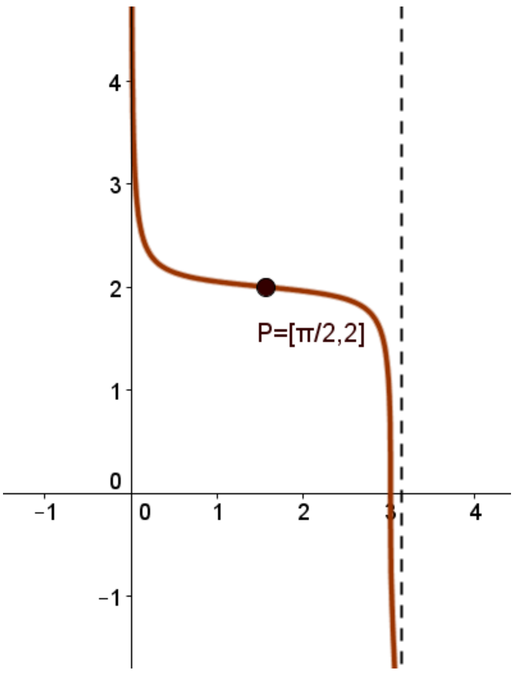
$$c = 8$$

Hledaným partikulárním řešením je funkce $y = \sqrt[3]{\mathrm{cotg}x + 8}$, kde $x \neq k \cdot \pi$.



Obr. 33: Grafické řešení příkladu 3.2.1

Detail zobrazující konkrétní partikulární řešení.



Obr. 34: Podrobný náhled na řešení splňující podmínku $\boldsymbol{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{2}$

3.2.2 Příklad 2

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce: $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 3x^2, y(2) = 1$. (vlastní příklad)

Rovnici upravíme tak, aby byla připravena pro metodu separace proměnných:

$$y' \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = 3x^2.$$

Postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \int 3x^2\, dx$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x^3 + c$$

$$2\sqrt{y} = x^3 + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^3 + c}{2} \tag{1}$$

$$y = \left(\frac{x^3 + c}{2}\right)^2.$$

Z rovnice (1) je zřejmé, že levá strana je vždy kladná, proto totéž platí i pro pravou stranu. Z toho vyplývá, že dostáváme podmínku pro x:

$$\frac{x^3 + c}{2} > 0. \tag{2}$$

Nerovnost bude platit, když čitatel i jmenovatel budou kladné nebo oba dva budou záporné.

V našem případě z nerovnice (2) vyplývá, že se budeme zabývat jen čitatelem $x^3 + c$, který musí být kladný, protože jmenovatel je také kladný.

$$x^3 + c > 0$$

$$x^3 > -c$$

$$x > \sqrt[3]{-c}$$

Řešením rovnice $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 3x^2$ jsou všechny funkce ve tvaru: $y = \left(\frac{x^3+c}{2}\right)^2$, kde $x > \sqrt[3]{-c}, c \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba různých řešení rovnice $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 3x^2$, a to pro $c = -6, -2, 0, 1, 3, 4$.

Křivky vyplní pouze polorovinu: $x \geq 0$

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínku $y(2) = 1$. Tedy po dosazení $x = 2$ vyjde $y = 1$.

$$y(2) = 1$$

$$\left(\frac{2^3 + c}{2}\right)^2 = 1$$

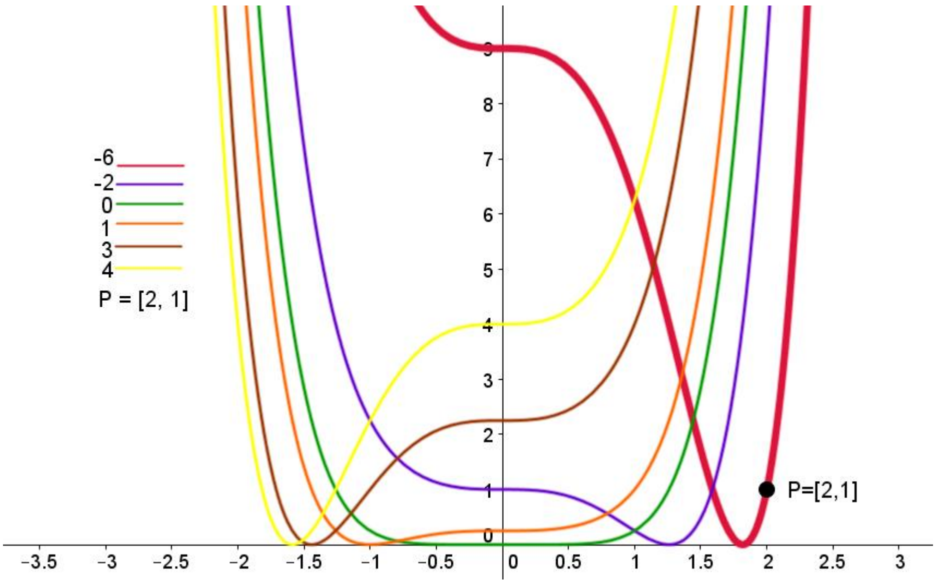
$$\frac{2^3 + c}{2} = 1$$

$$8 + c = 2$$

$$c = -6$$

Hledaným partikulárním řešením je funkce $y = \left(\frac{x^3-6}{2}\right)^2$, kde $x > \sqrt[3]{-c}$.

V obrázku je řešení tučně zvýrazněno.



Obr. 35: Grafické řešení příkladu 3.2.2

3.2.3 Příklad 3

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce: $\boldsymbol{y' \cdot \frac{1}{y} = e^x, y(3) = 0}$. ([5], str. 99)

Řešené neexistuje, když se podíváme do zadání příkladu, je okamžitě zřejmé, že za y nemůžeme dosadit 0.

Partikulární řešení vhledem k uvedené počáteční podmínce neexistuje.

Pro náš příklad si zvolíme jinou počáteční podmínku: $\boldsymbol{y(0) = e}$.

Postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int e^x\, dx$$

$$\ln|y| = e^x + c$$

lze upravit do tvaru

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c}$$

následně upravíme

$$|y| = e^{e^x + c}$$

$$y = \pm e^{e^x + c}, \text{pro } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$y = \pm e^{e^x} \cdot e^c$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{e^x}$$

a zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^c$ a dostaneme řešení:

$$y = K \cdot e^{e^x}, \text{kde } x \in \mathbb{R}, K \neq 0.$$

Grafická podoba různých řešení rovnice $y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$, a to pro $K = -4, -2, -1, 1, 3, 4$.

Křivky vyplní celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínku $y(0) = e$. Tedy po dosazení $x = 0$ vyjde $y = e$.

$$y(0) = e$$

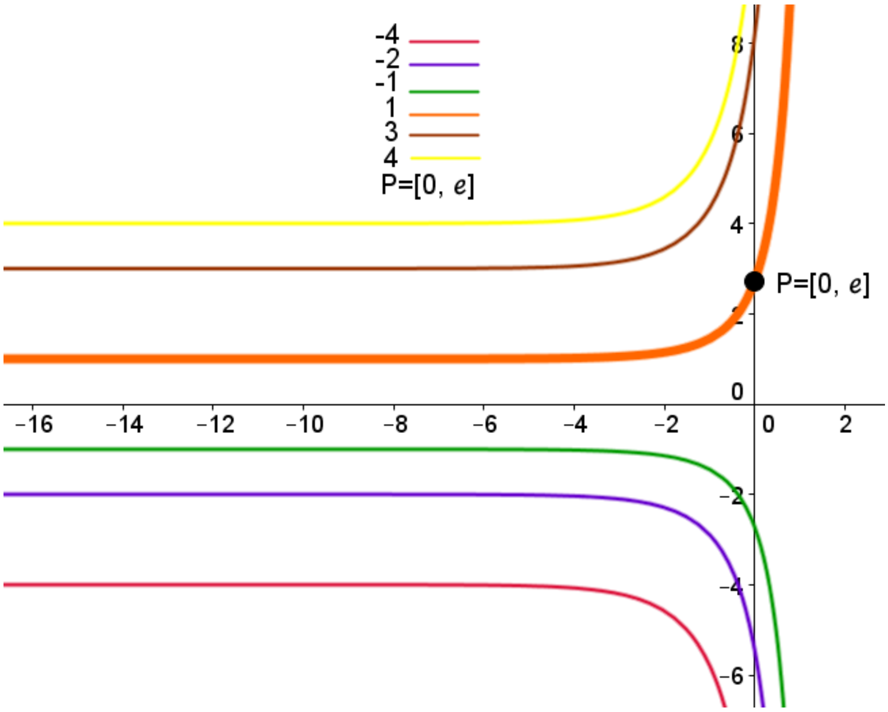
$$K \cdot e^{e^0} = e$$

$$K \cdot e^1 = e$$

$$K = 1$$

Hledané partikulární řešením je funkce $y = 1 \cdot e^{e^x}$, kde $x \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

V obrázku je řešení tučně zvýrazněno.



Obr. 36: Grafické řešení příkladu 3.2.3

3.2.4 Příklad 4

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje uvedené počáteční podmínce: $\boldsymbol{y' = -0,3 \cdot y, y(10) = 2e^3}$. ([5], str. 99)

Rovnici upravíme do potřebného tvaru:

$$\frac{y'}{y} = -0{,}3$$

$$y' \cdot \frac{1}{y} = -0{,}3.$$

Tímto postupem jsme se připravili o nulové řešení, ale v počáteční podmínce $y(10) = 2e^3$ žádná 0 není. Tudíž to není problém.

Postupně řešíme:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -0{,}3\, dx$$

$$\ln|y| = -0{,}3 \cdot x + c$$

lze upravit do tvaru $$e^{\ln|y|} = e^{-0{,}3 \cdot x + c}$$

následně upravíme $$|y| = e^{-0{,}3 \cdot x + c}$$

$$y = \pm e^{-0,3\cdot x+c}, \text{pro } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$y = \pm e^{-0,3\cdot x} \cdot e^{c}$$

$$y = \pm e^{c} \cdot e^{-0,3x}$$

a zvolíme novou konstantu: $K \coloneqq \pm e^{c}$ a dostaneme řešení:

$$y = K \cdot e^{-0,3\cdot x}, \text{kde } x \in \mathbb{R}, K \neq 0.$$

Grafická podoba různých řešení rovnice$y' = -0,3 \cdot y$, a to pro

$K = -5, -3, -1, 1, 4, 2e^{6}$.

Křivky vyplní celou rovinu.

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínku $y(10) = 2e^{3}$. Tedy po dosazení $x = 10$ vyjde $y = 2e^{3}$.

$$y(10) = 2e^{3}$$

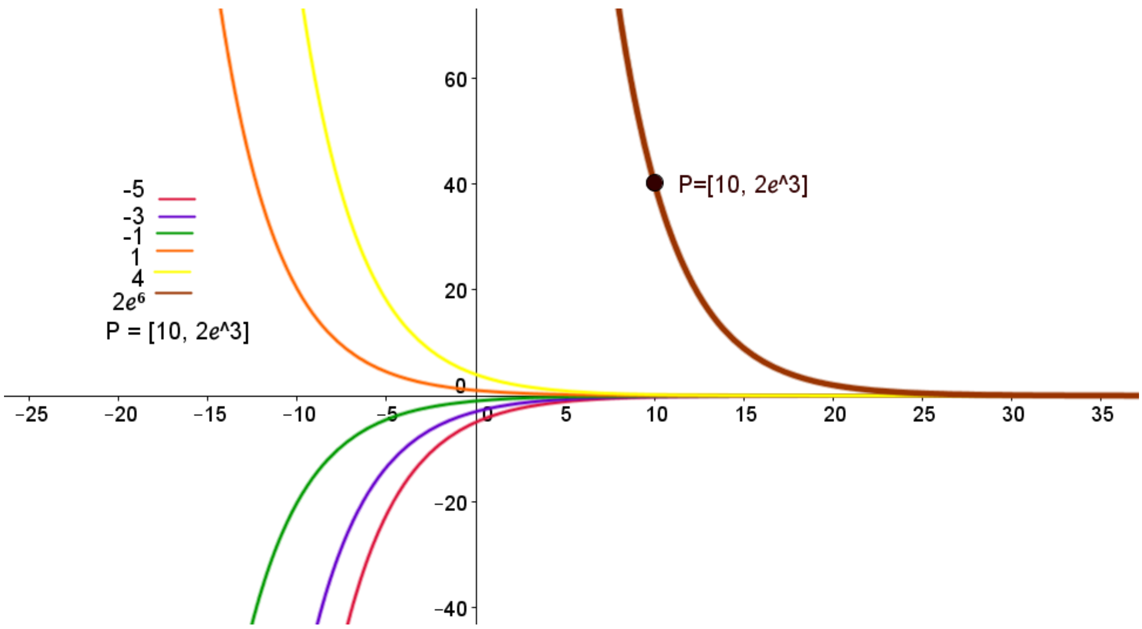
$$K \cdot e^{-0,3\cdot 10} = 2e^{3}$$

$$K \cdot e^{-3} = 2e^{3}$$

$$K = 2e^{6}$$

Hledaným partikulárním řešením je funkce $y = 2e^{6} \cdot e^{-0,3\cdot x}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

V obrázku je řešení tučně zvýrazněno.



Obr. 37: Grafické řešení příkladu 3.2.4

4 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY A NULOVOU PRAVOU STRANOU

Nechť máme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot y^{(k)} = c$, kde $y^{(k)}$ je k-tá derivace funkce y

$y^{(0)} = y, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Pak existuje vzájemně jednoznačná souvislost mezi tvarem řešení rovnice

$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot y^{(k)} = 0$ a mezi kořeny polynomu $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot x^k$.

jednonásobný reálný kořen K_1 $\longrightarrow$ tomuto kořenu je přiřazená funkce $e^{K_1 \cdot x}$

dvojnásobný reálný kořen K_2 $\longrightarrow e^{K_2 \cdot x}$

$\longrightarrow x \cdot e^{K_2 \cdot x}$

trojnásobný reálný kořen K_3 $\longrightarrow e^{K_3 \cdot x}$

$\longrightarrow x \cdot e^{K_3 \cdot x}$

$\longrightarrow x^2 \cdot e^{K_3 \cdot x}$

komplexní kořeny $b + ai \longrightarrow e^{bx} \cdot \cos(ax)$

$b - ai \longrightarrow e^{bx} \cdot \sin(ax)$

Řešení diferenciální rovnice je potom lineární kombinací příslušných funkcí za šipkou. ([9])

Tato kapitola je čerpaná výhradně z literatury [1], [2], [3], [4] a [8].

4.1 Bez počáteční podmínky

4.1.1 Příklad 1

$\mathbf{2y'' + y' - y = 0}$ ([1], str. 416)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $2x^2 + x - 1$; tedy řešení rovnice

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

Vypočítáme diskriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$$
$$D = 9.$$

D dosadíme do vzorce pro výpočet kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$
$$x_{1,2} = -1, \frac{1}{2}.$$

Řešením kvadratické rovnice jsou dva jednonásobné reálné kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = \frac{1}{2}$.
Těmto kořenům přiřadíme funkci: $e^{x_1 \cdot x}$a $e^{x_2 \cdot x}$. Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: e^{-x} a $e^{\frac{x}{2}}$.

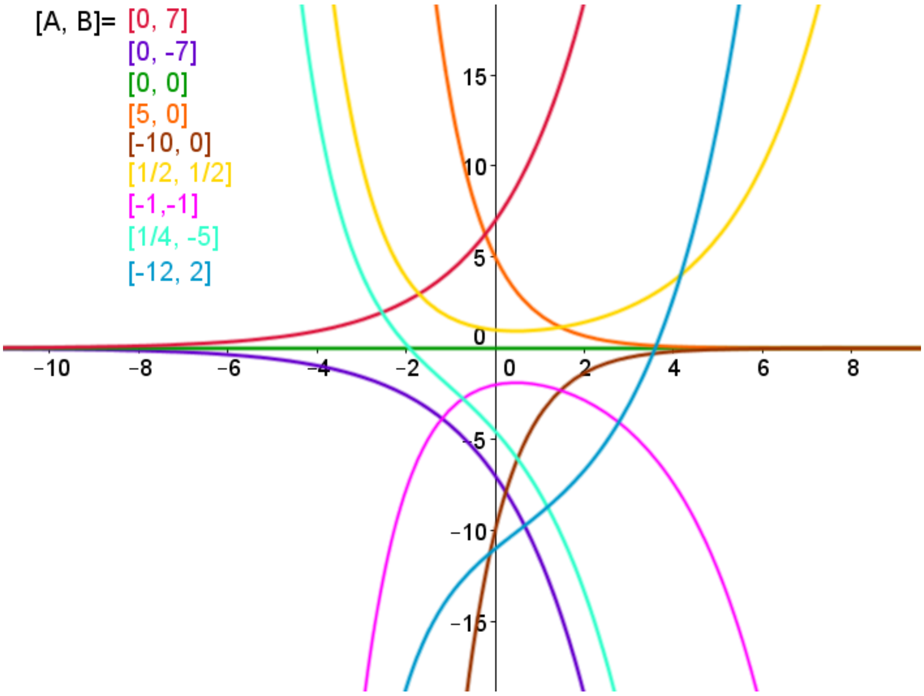
Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{\frac{x}{2}}; x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

Nastalo 9 různých případů jak graficky zobrazit řešení rovnice $y = A \cdot e^{-x} + B \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0\ a\ B > 0$	$B = 0\ a\ A > 0$	$A > 0\ a\ B > 0$
$A = 0\ a\ B < 0$	$B = 0\ a\ A < 0$	$A < 0\ a\ B < 0$
$A = 0\ a\ B = 0$		$A > 0\ a\ B < 0$
		$A < 0\ a\ B > 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané dvojice koeficientů:
$[A, B] = [0, 7], [0, -7], [0, 0], [5, 0], [-10, 0], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [-1, -1], \left[\frac{1}{4}, -5\right], [-12, 2]$.



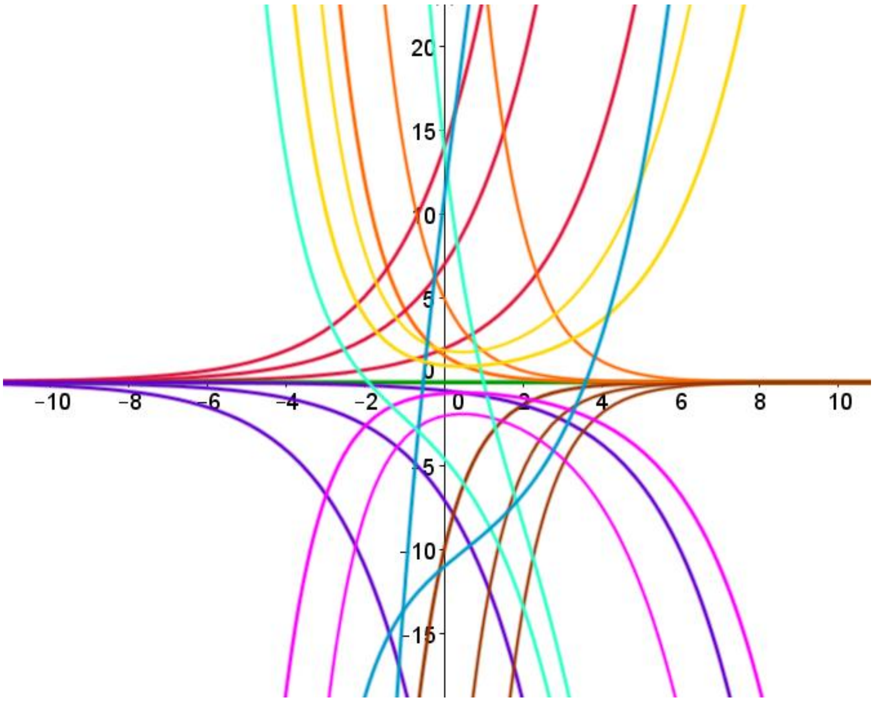
Obr. 38: Grafické řešení příkladu 4.1.1

Lineární kombinace funkcí e^{-x} a $e^{\frac{x}{2}}$ vyplní celou rovinu.

Pro názornou ukázku je v práci uvedena rozšířená grafická podoba. Pro její nepřehlednost je uvedená pouze u prvního příkladu.

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané dvojice koeficientů:

$$[A,B] = [0,2], [0,7], [0,14], [0,-7], [0,-30], \left[0,-\frac{1}{2}\right], [0,0], \left[\frac{8}{5},0\right], [5,0], [68,0], [-100,0], [1,1], \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], [-1,-1], \left[-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right], [18,-4], \left[\frac{1}{4},-5\right], [-9,20], [-12,2].$$



Obr. 39: Rozšířené grafické řešení příkladu 4.1.1

4.1.2 Příklad 2

$\boldsymbol{y'' + 3y' = 0}$ ([3], str. 167)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^2 + 3x$; tedy řešení rovnice

$$x^2 + 3x = 0.$$

Ze zadání rovnice lze rovnou vypočítat kořeny:

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot (x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3.$$

Řešením kvadratické rovnice jsou dva jednonásobné reálné kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = -3$. Těmto kořenům přiřadíme funkci: $e^{x_1 \cdot x}$ a $e^{x_2 \cdot x}$. Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: $e^{0x} = 1$ a e^{-3x}.

Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A + B \cdot e^{-3x}; x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

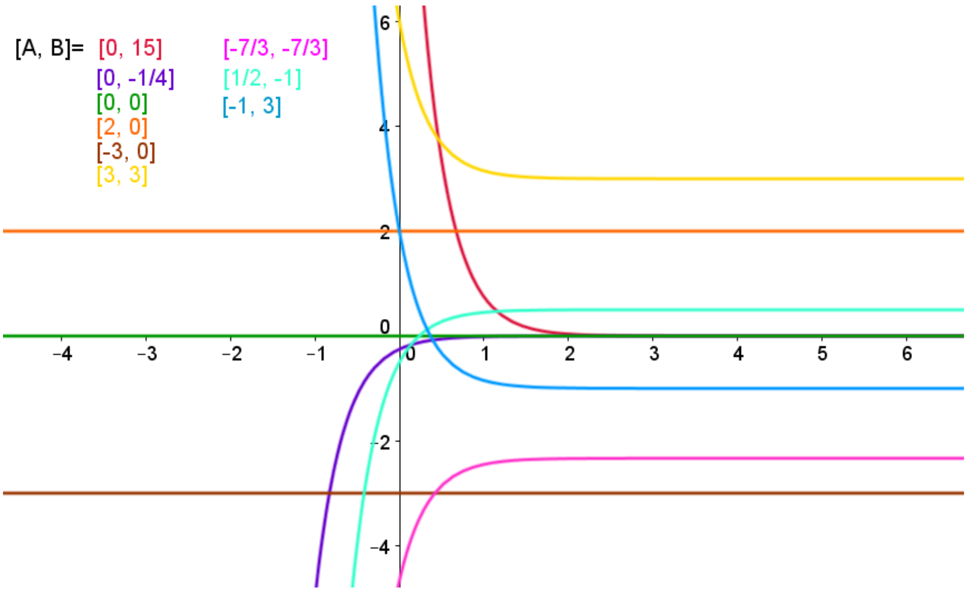
Nastalo opět 9 různých případů jak graficky zobrazit řešení rovnice: $y = A + B \cdot \mathrm{e}^{-3\mathrm{x}}$.

Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0 \; a \; B > 0$	$B = 0 \; a \; A > 0$	$A > 0 \; a \; B > 0$
$A = 0 \; a \; B < 0$	$B = 0 \; a \; A < 0$	$A < 0 \; a \; B < 0$
$A = 0 \; a \; B = 0$		$A > 0 \; a \; B < 0$
		$A < 0 \; a \; B > 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané dvojice koeficientů:$[A, B] = [0, 15], \left[0, -\frac{1}{4}\right], [0, 0], [2, 0], [-3, 0], [3, 3], \left[-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right],$

$$\left[\frac{1}{2}, -1\right], [-1, 3].$$



Obr. 40: Grafické řešení příkladu 4.1.2

Lineární kombinace funkcí $\mathrm{e}^{0\mathrm{x}}$ a $\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}}$ vyplní celou rovinu.

4.1.3 Příklad 3

$\boldsymbol{y'' - 2y' + y = 0}$ ([4], str. 327)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^2 - 2x + 1$; tedy řešení rovnice

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Vypočítáme diskriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$
$$D = 0.$$

D dosadíme do vzorce pro výpočet kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{2}{2}$$
$$x_1 = 1.$$

Řešením kvadratické rovnice je jeden dvojnásobný reálný kořen $x_1 = 1$.

Tomuto kořenu přiřadíme funkci: $e^{x_1 \cdot x}$ a $x \cdot e^{x_1 \cdot x}$.

Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: e^x a $x \cdot e^x$.

Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x; x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

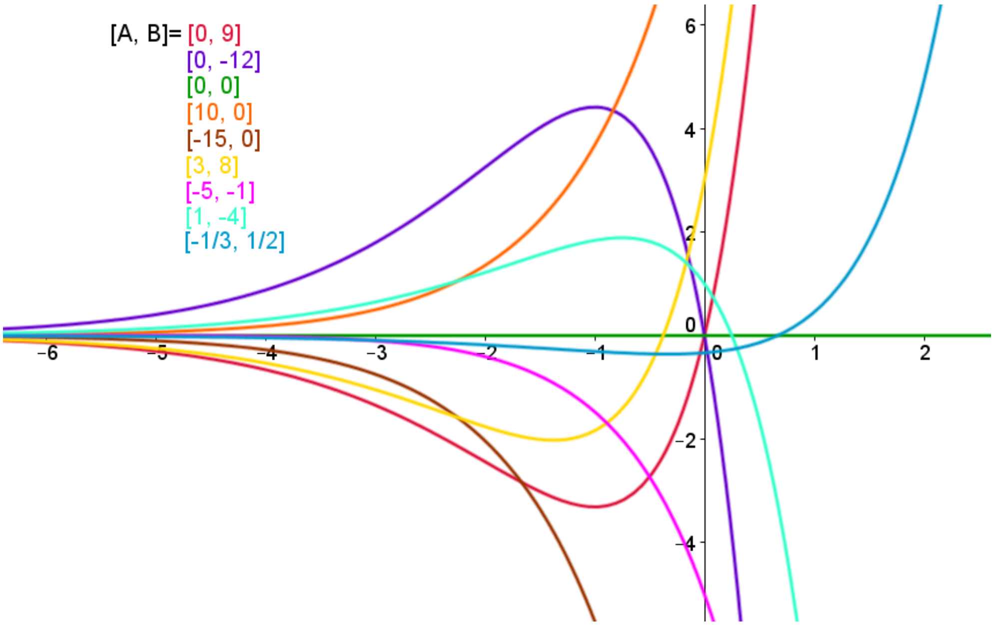
Nastalo 9 různých případů jak graficky zobrazit řešení rovnice: $y = A \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x$.

Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0\ a\ B > 0$	$B = 0\ a\ A > 0$	$A > 0\ a\ B > 0$
$A = 0\ a\ B < 0$	$B = 0\ a\ A < 0$	$A < 0\ a\ B < 0$
$A = 0\ a\ B = 0$		$A > 0\ a\ B < 0$
		$A < 0\ a\ B > 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané dvojice koeficientů: $[A, B] = [0, 9], [0, -12], [0, 0], [10, 0], [-15, 0], [3, 8], [-5, -1],$

$$[1, -4], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$



Obr. 41:Grafické řešení příkladu 4.1.3

Lineární kombinace funkcí e^x a $x \cdot e^x$ vyplní celou rovinu.

4.1.4 Příklad 4

$\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$ ([3], str. 167)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^2 + 4$; tedy řešení rovnice

$$x^2 + 4 = 0.$$

Z rovnice můžeme rovnou vypočítat kořeny:

$$x^2 = -4$$

$$x = \sqrt{-4}$$

$$x_1 = 2i,$$

$$x_2 = -2i.$$

Řešením kvadratické rovnice jsou komplexní kořeny $x_1 = 2i$ a $x_2 = -2i$. Komplexní kořeny jsou ve tvaru $0 \pm 2i$.

Těmto kořenům přiřadíme funkce:$e^{bx_1} \cdot \cos(ax)$ a $e^{bx_2} \cdot \sin(ax)$.

Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: $e^{0x} \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$ a $e^{0x} \cdot \sin(2x) = \sin(2x)$.

Řešení rovnice je ve tvaru:$y = A \cdot \cos{(2x)} + B \cdot \sin{(2x)}$; $A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

Nastalo 9 různých případů jak graficky zobrazit řešení rovnice:

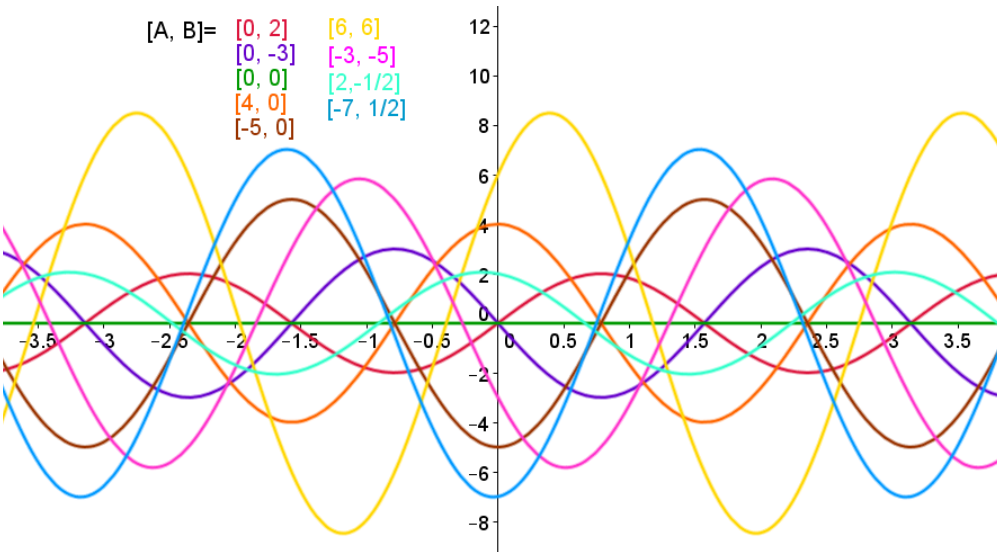
$y = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)$.

Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0 \; a \; B > 0$	$B = 0 \; a \; A > 0$	$A > 0 \; a \; B > 0$
$A = 0 \; a \; B < 0$	$B = 0 \; a \; A < 0$	$A < 0 \; a \; B < 0$
$A = 0 \; a \; B = 0$		$A > 0 \; a \; B < 0$
		$A < 0 \; a \; B > 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané dvojice koeficientů: $[A, B] = [0, 2], [0, -3], [0, 0], [4, 0], [-5, 0], [6,6], [-3, -5],$

$$\left[2, -\frac{1}{2}\right], \left[-7, \frac{1}{2}\right].$$



Obr. 42: Grafické řešení příkladu 4.1.4

Lineární kombinace funkcí $\cos(2x)$ a $\sin(2x)$vyplní celou rovinu.

4.1.5 Příklad 5

$\boldsymbol{y'' - 4y' + 5y = 0}$ ([8])

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^2 - 4x + 5$; tedy řešení rovnice

$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Vypočítáme diskriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$
$$D = -4.$$

Pokud je $D < 0$ rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. Rovnice má řešení v oboru komplexních čísel.

D dosadíme do vzorce pro výpočet kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$
$$x_1 = 2 + i$$
$$x_2 = 2 - i.$$

Řešením kvadratické rovnice jsou komplexní kořeny $x_1 = 2 + i$ a $x_2 = 2 + i$.

Komplexní kořeny jsou ve tvaru: $2 \pm i$.

Těmto kořenům přiřadíme funkce: $e^{bx_1} \cdot \cos(ax)$ a $e^{bx_2} \cdot \sin(ax)$.

Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: $e^{2x} \cdot \cos x$ a $e^{2x} \cdot \sin x$.

Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A \cdot e^{2x} \cdot \cos x + B \cdot e^{2x} \cdot \ \sin x; x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

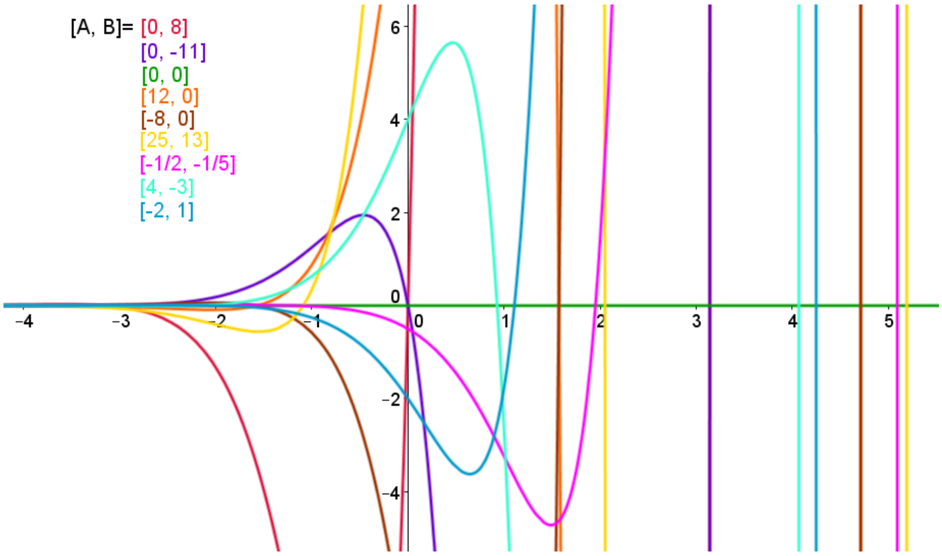
Nastalo 9 různých případů jak graficky zobrazit řešení rovnice:

$y = A \cdot e^{2x} \cdot \cos x + B \cdot e^{2x}$.

Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0\ a\ B > 0$	$B = 0\ a\ A > 0$	$A > 0\ a\ B > 0$
$A = 0\ a\ B < 0$	$B = 0\ a\ A < 0$	$A < 0\ a\ B < 0$
$A = 0\ a\ B = 0$		$A > 0\ a\ B < 0$
		$A < 0\ a\ B > 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané dvojice koeficientů: $[A, B] = [0, 8], [0, -11], [0, 0], [12, 0], [-8, 0], [25, 13], \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right],$ $[4, -3], [-2, 1]$.



Obr. 43: Grafické řešení příkladu 4.1.5

Lineární kombinace funkcí $e^{2x} \cdot \cos x$ a $e^{2x} \cdot \sin x$ vyplní celou rovinu.

4.1.6 Příklad 6

$\boldsymbol{y''' - 3y'' + 3y' - y = 0}$ ([2], str. 81)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; tedy řešení rovnice

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Vhodně zvoleným x zjistíme kořen rovnice.

Dosadíme za $x = 1$, abychom zjistili, zda není kořenem:

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 0.$$

$$x_1 = 1 \text{ je kořen.}$$

Výraz $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$ půjde vydělit výrazem $(x - 1)$:

$$(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1$$

$$\underline{-x^3 + x^2}$$

$$-2x^2 + 3x - 1$$

$$\underline{2x^2 - 2x\quad}$$

$$x - 1$$

$$\underline{-x + 1}$$

$$0$$

Výraz $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ lze tedy rozepsat na součin:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 1).$$

Z výrazu $x^2 - 2x + 1$ zjistíme další kořeny tím, že vypočítáme diskriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$D = 0.$$

D dosadíme do vzorce a dopočteme:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{2}$$

$$x_2 = 1.$$

Výraz $x^2 - 2x + 1$ lze tedy rozepsat na součin:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1) \cdot (x - 1), \text{ tedy}$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Výraz $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ lze tedy rozepsat na součin:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1) \cdot (x - 1)^2,$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3.$$

Řešením rovnice třetího řádu je jeden trojnásobný reálný kořen $x_{1,2} = 1$.

Tomuto kořenu přiřadíme funkce: $e^{x_1 \cdot x}$, $x \cdot e^{x_2 \cdot x}$a $x^2 \cdot e^{x_2 \cdot x}$.

Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: e^x, $x \cdot e^x\ a\ x^2 \cdot e^x$.

Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x + C \cdot\ x^2 \cdot e^x; x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

U příkladu můžeme najít 27 různých kombinací koeficientů A, B, C, kterými se může graficky zobrazit řešení rovnice. Pro přehlednost se budeme zabývat pouze 10-ti případy, jak graficky zobrazit řešení rovnice.

Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0, B > 0, C > 0$ $\quad$ $B = 0, A > 0, C > 0$ $\quad$ $C = 0, A > 0, B < 0$

$A = 0, B < 0, C < 0$ $\quad$ $B = 0, A < 0, C < 0$ $\quad$ $C = 0, A < 0, B > 0$

$A = 0, B > 0, C < 0$ $\quad$ $B = 0, A < 0, C > 0$

$A < 0, B > 0, C < 0$

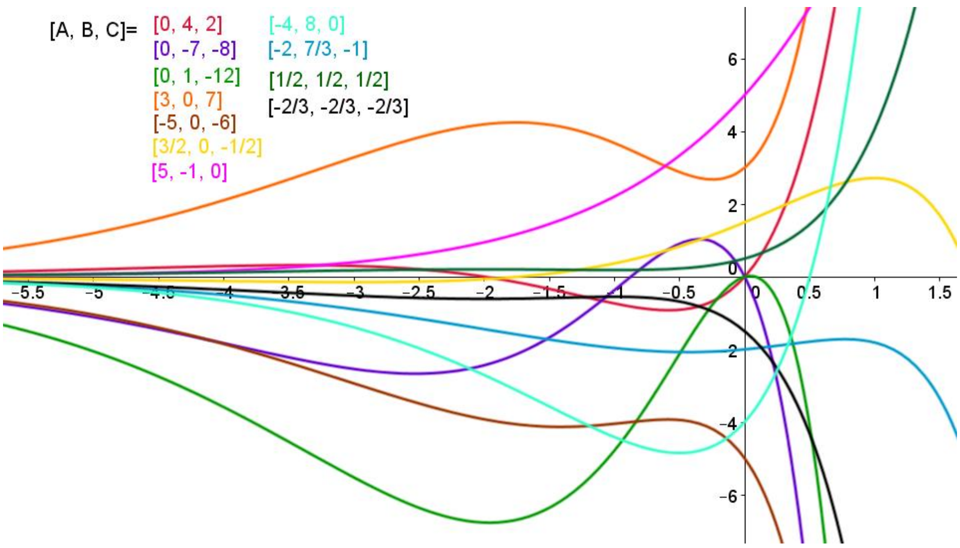
$A > 0, B > 0, C > 0$

$A < 0, B < 0, C < 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané trojice koeficientů:

$[A, B, C] = [0, 4, 2], [0, -7, -8], [0, 1, -12], [3, 0, 7], [-5, 0, -6], \left[\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right], [5, -1, 0],$

$$[-4, 8, 0], \left[-2, \frac{7}{3}, -1\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}.\right]$$



Obr. 44: Grafické řešení příkladu 4.1.6

Lineární kombinace funkcí $e^x, x \cdot e^x$ a $x^2 \cdot e^x$ vyplní celou rovinu.

4.1.7 Příklad 7

$\boldsymbol{y''' + y'' = 0}$ ([3], str. 167)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^3 + x^2$; tedy řešení rovnice

$$x^3 + x^2 = 0.$$

Z rovnice můžeme rovnou vypočítat kořeny:

$$x^3 + x^2 = 0$$
$$x^2 \cdot (x+1) = 0$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = -1.$$

Řešením rovnice třetího řádu je jeden dvojnásobný reálný kořen $x_1 = 0$ a jeden jednonásobný reálný kořen $x_2 = -1$.

Těmto kořenům přiřadíme funkce: $e^{x_1 \cdot x}$, $x \cdot e^{x_1 \cdot x}$ a $e^{x_2 \cdot x}$.

Kořenům rovnice tedy budou odpovídat příslušné funkce: $e^{0x} = 1$, $x \cdot e^{0x} = x$ a e^{-x}.

Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A + B \cdot \mathrm{x} + C \cdot e^{-x}; x \in \mathbb{R}, A, B, C \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

U příkladu můžeme najít 27 různých kombinací koeficientů A, B, C, kterými se může graficky zobrazit řešení rovnice. Pro přehlednost se budeme zabývat pouze 10-ti případy, jak graficky zobrazit řešení rovnice.

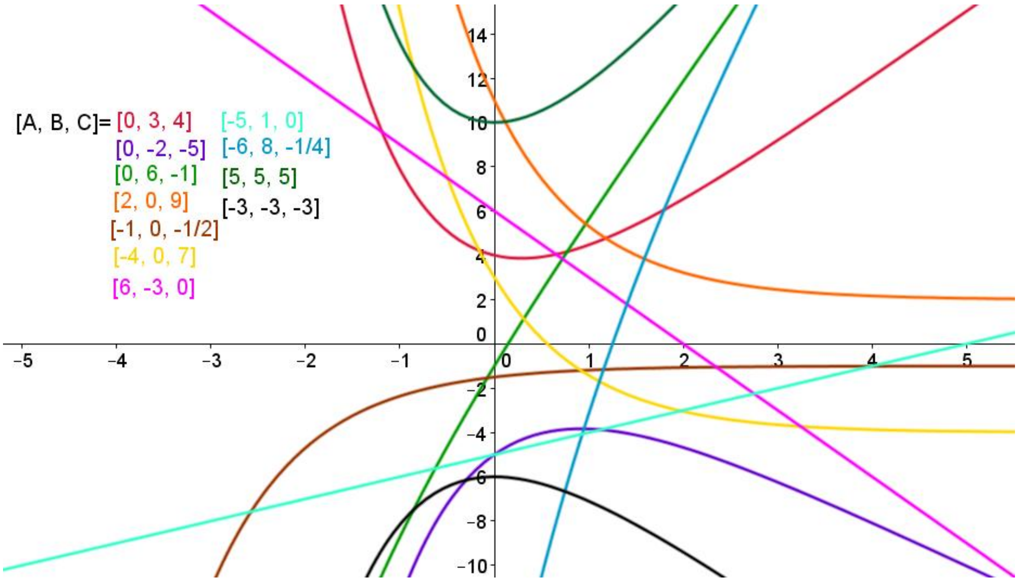
Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0, B > 0, C > 0$	$B = 0, A > 0, C > 0$	$C = 0, A > 0, B < 0$
$A = 0, B < 0, C < 0$	$B = 0, A < 0, C < 0$	$C = 0, A < 0, B > 0$
$A = 0, B > 0, C < 0$	$B = 0, A < 0, C > 0$	

$$A < 0, B > 0, C < 0$$
$$A > 0, B > 0, C > 0$$
$$A < 0, B < 0, C < 0$$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané trojice koeficientů:

$[A, B, C] = [0, 3, 4], [0, -2, -5], [0, 6, -1], [2, 0, 9], \left[-1, 0, -\frac{1}{2}\right], [-4, 0, 7], [6, -3, 0],$
$[-5, 1, 0], [-6, 8, -14], [5, 5, 5], [-3, -3, -3.]$



Obr. 45: Grafické řešení příkladu 4.1.7

Lineární kombinace funkcí $e^{0\cdot x}, x \cdot e^{0\cdot x}$ a $x^2 \cdot e^{-x}$ vyplní celou rovinu.

4.1.8 Příklad 8

$\boldsymbol{y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0}$ ([3], str. 167)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^3 - 2x^2 + 9x - 18$; tedy řešení rovnice

$$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0.$$

Vhodně zvoleným x zjistíme kořen rovnice.

Dosadíme za $x = 2$, abychom zjistili, zda není kořenem:

$$2^3 - 2 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 18 = 0.$$

$$x_1 = 2 \text{ je kořen.}$$

Výraz $(x^3 - 2x^2 + 9x - 18)$ půjde vydělit výrazem $(x - 2)$:

$$(x^3 - 2x^2 + 9x - 18) : (x - 2) = x^2 + 9$$

$$\underline{-x^3 + 2x^2}$$

$$9x - 18$$

$$\underline{-9x + 18}$$

$$0$$

Výraz $x^3 - 2x^2 + 9x - 18$ lze tedy rozepsat na součin:

$$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = (x - 2) \cdot (x^2 + 9).$$

Z výrazu $x^2 + 9$ zjistíme další kořeny tím, že vypočítáme diskriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$$D = -36.$$

Pokud je $D < 0$, tak výraz nemá v oboru reálných čísel řešení. Řešení má v oboru komplexních čísel.

Dosadíme do vzorce pro výpočet kvadratické rovnice:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{2,3} = \frac{0 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$x_{2,3} = \frac{\pm 6i}{2}$$

$$x_2 = 3i,$$

$$x_3 = -3i.$$

Výraz $x^2 + 9$ lze tedy rozepsatna součin:

$$x^2 + 9 = (x + 3i) \cdot (x - 3i).$$

Výraz $x^3 - 2x^2 + 9x - 18$ lze tedy rozepsat na součin:

$$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = (x - 2) \cdot (x + 3i) \cdot (x - 3i).$$

Řešením rovnice třetího řádu je jeden jednonásobný reálný kořen $x_1 = 2$ a komplexní kořeny $x_2 = 3i$ a $x_3 = -3i$.

Tomuto kořenům přiřadíme funkce: $e^{x_1 \cdot x}, e^{bx_2} \cdot \cos(ax)$ a $e^{bx_3} \cdot \sin(ax)$.

Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: $e^{2x}, e^{0x} \cdot \cos 3x = \cos 3x$ a $e^{0x} \cdot \sin 3x = \sin 3x$.

Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A \cdot e^{2x} + B \cdot \cos 3x + C \cdot \sin 3x; x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

U příkladu můžeme najít 27 různých kombinací koeficientů A, B, C, kterými se může graficky zobrazit řešení rovnice. Pro přehlednost se budeme zabývat pouze 10-ti případy, jak graficky zobrazit řešení rovnice.

Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0, B > 0, C > 0$ $\qquad$ $B = 0, A > 0, C > 0$ $\qquad$ $C = 0, A > 0, B < 0$

$A = 0, B < 0, C < 0$ $\qquad$ $B = 0, A < 0, C < 0$ $\qquad$ $C = 0, A < 0, B > 0$

$A = 0, B > 0, C < 0$ $\qquad$ $B = 0, A < 0, C > 0$

$A < 0, B > 0, C < 0$

$A > 0, B > 0, C > 0$

$A < 0, B < 0, C < 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané trojice koeficientů:

$$[A, B, C] = [0, 3, 1], [0, -2, -5], [0, 4, -3], \left[\frac{7}{2}, 0, 5\right], \left[-6, 0, -\frac{3}{2}\right], [-1, 0, 2], [7, -4, 0],$$
$$[-8, 6, 0], \left[-\frac{5}{3}, 2, -3\right], [8, 7, 5], [-2, -2, -2.]$$

Obr. 46: Grafické řešení příkladu 4.1.8

Lineární kombinace funkcí $e^{2x}, \cos(3x)$ a $\sin(3x)$ vyplní celou rovinu.

4.2 S počáteční podmínkou

4.2.1 Příklad 1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, která vyhovuje uvedeným počátečním podmínkám: $y'' - y' - 6y = 0, y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$. ([2], str. 80)

O řešení rovnice rozhodují kořeny polynomu $x^2 - x - 6$; tedy řešení rovnice

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Vypočítáme diskriminant$D$:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$
$$D = 25.$$

D dosadíme do vzorce pro výpočet kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x_{1,2} = -2, 3.$$

Řešením kvadratické rovnice jsou dva jednonásobné reálné kořeny $x_1 = -2$ a $x_2 = 3$.
Těmto kořenům přiřadíme funkci: $e^{x_1 \cdot x}$a $e^{x_2 \cdot x}$. Kořenům tedy budou odpovídat příslušné funkce: e^{-2x} a e^{3x}.
Řešení rovnice je ve tvaru: $y = A \cdot e^{-2x} + B \cdot e^{3x}; x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$.

Grafická podoba:

Nastalo 9 různých případů jak graficky zobrazit řešení rovnice $y = A \cdot e^{-x} + B \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
Koeficienty můžeme zapsat v těchto variantách:

$A = 0$ a $B > 0$	$B = 0$ a $A > 0$	$A > 0$ a $B > 0$
$A = 0$ a $B < 0$	$B = 0$ a $A < 0$	$A < 0$ a $B < 0$
$A = 0$ a $B = 0$		$A > 0$ a $B < 0$

$A < 0\ a\ B > 0$

Z grafu vidíme různá řešení rovnice, konkrétně pro uspořádané dvojice koeficientů:

$[A, B] = [0, 2], [0, -3], [0, 0], [13, 0], [-7, 0], \left[1, \frac{1}{6}\right], \left[-\frac{1}{2}, -9\right], \left[\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right], [-2, 15].$

Lineární kombinace funkcí e^{-2x} a e^{3x} vyplní celou rovinu.

My hledáme konkrétní řešení splňující podmínky: $y(0) = 0$ a $y'(0) = -1$.

$$y = A \cdot e^{-2x} + B \cdot e^{3x}$$

Po derivaci: $y' = -2A \cdot e^{-2x} + 3B \cdot e^{3x}$

Po dosazení počátečních podmínek $y(0) = 0$ a $y'(0) = -1$ dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

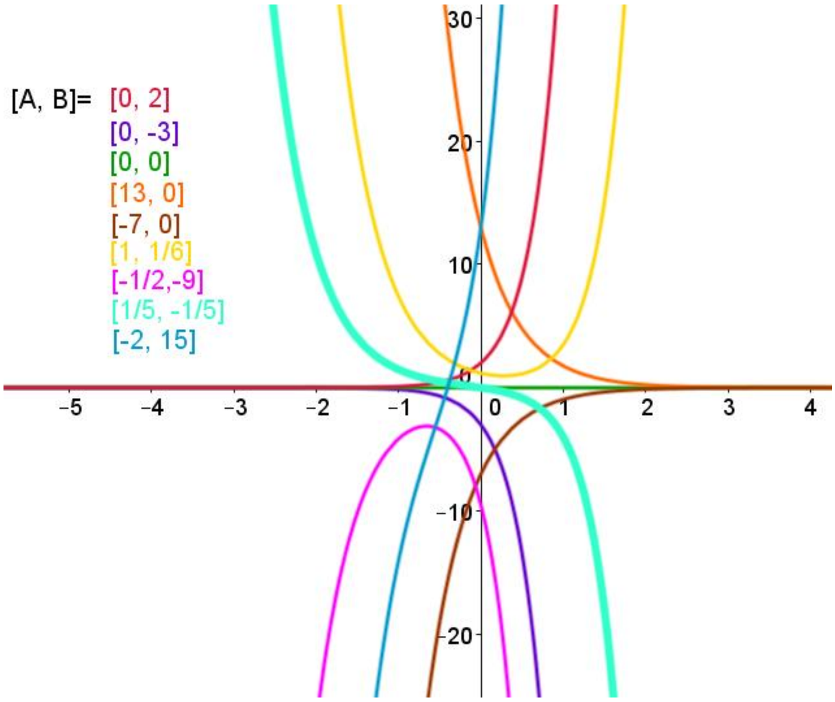
$$A + B = 0$$

$$\underline{-2A + 3B = 0}$$

Postupnými úpravami dostaneme $B = -\frac{1}{5}$ a $A = \frac{1}{5}$.

Hledaným partikulárním řešením je rovnice: $y = \frac{1}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{5} \cdot e^{3x}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

V obrázku je řešení tučně zvýrazněno.



Obr. 47: Grafické řešení příkladu 4.2.1

5 ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit ucelenou a přehlednou sbírku, která se zabývá Diferenciálními rovnicemi s programem GeoGebra. Každý příklad je nejprve vypočítaný a poté je graficky znázorněný pomocí programu GeoGebra. V této práci byla použitá dostupná verze GeoGebra 4.2. Tato práce měla za úkol tedy vyzdvihnout řešení příkladů i jinak než početně.

Každá kapitola začíná stručnou teorií a následuje souhrn řešených příkladů, ke kterým musí student znát učivo i předchozích Matematických analýz I. a II. – např.: metody výpočtu neurčitého integrálu. Ilustrační obrázky ukazují vybraná zajímavá řešení a jejich závislost na konstantě c. Studentovi pomůže dynamický software s představou, jak příklad vypadá.

Sbírka jde využít jako studijní materiál k předmětu Matematická analýza III. Práce se výhradně zaměřuje pouze na kapitoly diferenciální rovnice základního typu, na metodu separace proměnných a na lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a s nulovou pravou stranou. Jenom pro kompletnost studijního materiálu chybí v této práci kapitola Lineární diferenciální rovnice prvního řádu, které se řeší pomocí integračního faktoru.

6 LITERATURA

[1] DLOUHÝ, Zbyněk, Karel HRUŠA a Jiří KŮST. *Úvod do matematické analýzy: učebnice pro pedagogické fakulty*. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 469 s. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).

[2] HŘEBÍČKOVÁ, Jana, Jana SLABĚŇÁKOVÁ a Hana ŠAFÁŘOVÁ. *Sbírka příkladů z matematiky II*. Vyd. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 86 s. ISBN 978-80-7204-606-5.

[3] CHARVÁT, Jura. *Matematika 2: sbírka příkladů*. Vyd. 1. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006, 206 s. ISBN 80-010-3537-9.

[4] KAŇKA, Miloš a Jiří HENZLER. *Učebnice matematiky*. Vyd. 1. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 1996, 373 s. ISBN 80-707-9703-7.

[5] SAMKOVÁ, Libuše. *Matematické modelování v biologických disciplínách*. 1. vyd. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011, 137 s. ISBN 978-80-7394-300-4.

[6] SAMKOVÁ, Libuše. *Sbírka příkladů z matematiky*. Vyd. 1. Praha: ČVUT, Fakulta architektury, 2002, 122 s. ISBN 80-010-2628-0.

Ostatní zdroje

[7] http://www.fd.cvut.cz/department/k611/PEDAGOG/files/manual-cz_51pp.pdf

[8] http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/ma3dvanacte.pdf

[9] Přednášky z Matematické analýzy III. (akademický rok 2012/2013)