Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Vyšetřování průběhu funkcí v programu GeoGebra

Autor práce: Markéta Medviďová

Vedoucí práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice 2014

Prohlášení:

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Vyšetřování průběhu funkcí v programu GeoGebra jsem vypracoval/a samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě archivovaných Pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, 2014 ……………………………….

Poděkování:

Tímto bych chtěla poděkovat mé vedoucí RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D., za odbornou pomoc, cenné rady a podněty k řešení mé bakalářské práce a Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., za pomoc při řešení problémů v matematickém programu GeoGebra. Mé poděkování také patří rodině, blízkým a přátelům za trpělivost a pomoc v průběhu celého mého studia.

Anotace

Cílem práce je ukázat možné využití matematického programu GeoGebra při řešení příkladů průběhu funkcí jedné proměnné. Příklady budou řazeny vzestupně podle obtížnosti a vždy budou vyřešeny manuálně a následně pomocí programu Geogebra, doprovázené grafickým zobrazením.

Annotation

The aim of this thesis is to show possibility of using mathematical program GeoGebra in solving examples of course of functions of one variable. Examples will be sorted in ascending order of difficulty and they will be always solved manualy and then by using GeoGebra, all will be accompanied with graphical representation.

Obsah

1. Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá řešením průběhu funkcí v programu GeoGebra. Jedná se o matematický program, který je nápomocný v mnoha matematických okruzích. Téma mé práce bylo vybráno cíleně. Právě průběh funkce je vhodný k poukázání toho, jak lze využít matematické programy v praxi – v mé práci konkrétně užití GeoGebry.

Práce obsahuje sedm příkladů seřazených vzestupně podle stupně obtížnosti. Každý příklad bude spočítán manuálně. U každého kroku bude uvedeno, jakých teoretických znalostí jsme využili k samotnému řešení příkladů. Následně bude každý příklad vyřešen v programu GeoGebra. V prvním příkladu se čtenář seznámí s ovládacími nástroji a správným nastavením prostředí GeoGebry tak, aby vyhovovalo řešení průběhu funkcí jedné proměnné. Také budou popsány všechny funkce programu, které budou v práci použity. Veškeré výpočty budou podrobně okomentovány tak, aby tomu čtenář porozuměl a byl schopný na základě této práce vše aplikovat sám na jiných příkladech. Každý krok bude doplněný grafickým znázorněním přímo z prostředí GeoGebry. Celá práce je řazena postupně a systematicky.

Cílem mé práce má být přiblížení vybraného matematického programu GeoGebra čtenářům a snaha o rozšíření užívání počítačových programů při řešení matematických problémů.

2. Příklad 1 - $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = x^3 - 18x^2 + 81x}$

Je dána funkce: $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = x^3 - 18x^2 + 81x}$. Vyšetřete průběh funkce.

1) Definiční obor

Při určování definičního oboru postupujeme dle definice definičního oboru (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 8)

$$D(f) = R$$

2) Sudost, lichost, periodičnost

Pro zjištění sudosti, lichosti a periodičnosti využijeme vlastností funkcí, zejména definici sudosti a lichosti funkce a definici pro periodičnost (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 70)

$$f(-x): \quad (-x)^3 - 18(-x)^2 + 81(-x) = -x^3 - 18x^2 - 81x$$

$$\begin{matrix} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Není\ sudá \\ Není\ lichá \end{matrix}$$

Funkce není periodická.

3) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost

Při výpočtu limit použijeme větu o limitě funkce vzniklé na základě aritmetických operací (Frolíková, 1984 [1], str. 55).

Při zjišťování spojitosti funkce budeme vycházet z definice o spojitosti funkce v bodě a na intervalu. (Frolíková [1], 1984, str. 61)

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 18x^2 + 81x = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{18}{x} + \frac{81}{x^2}\right) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 18x^2 + 81x = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{18}{x} + \frac{81}{x^2}\right) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty$$

Funkce *f* je součtem a rozdílem spojitých funkcí, tudíž je ve svém definičním oboru spojitá.

4) **Průsečíky s osou x a s osou y**

$$P(x):\quad y=0\ \rightarrow\ \begin{matrix} x^3-18x^2+81x=0 \\ x(x^2-18x+81)=0 \\ x(x-9)(x-9)=0 \end{matrix}\quad\Longrightarrow\quad x=0,\quad x=9\qquad \begin{matrix} P_{x_1}=[0,0] \\ P_{x_2}=[9,0] \end{matrix}$$

$$P(y):\quad x=0\quad\longrightarrow\quad y=0\qquad\qquad P_y=[0,0]$$

5) **První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie**

Při výpočtu 1. derivace použijeme vět o derivaci funkcí vzniklých na základě aritmetických operací (Frolíková, 1984 [1], str. 74).

Při určování monotonie funkce použijeme větu o vztahu 1. derivace a monotonie funkce (Frolíková, 1984 [1], str. 78).

Při určování lokálních extrému se budeme držet definice pro lokální extrémy a dále využijeme nutnou a postačující podmínku pro lokální extrém (Frolíková, 1984 [1], str. 79).

$$f'(x)=3x^2-36x+81=3(x^2-12x+27)$$

$$x^2-12x+27=0\quad\longrightarrow\quad D:144-108=36\quad x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{36}}{2}=\begin{matrix}\nearrow 9\\ \searrow 3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y_1=9^3-18\cdot 9^2+81\cdot 9 \\ y_1=729-1458+729 \\ y_1=0 \end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix} y_2=3^3-18\cdot 3^2+81\cdot 3 \\ y_2=27-162+243 \\ y_2=108 \end{matrix}$$

$$\text{Stacionární body}\quad [9,0],[3,108]$$

Na základě zjištěných stacionárních bodů jsme si definiční obor rozdělili do několika intervalů, na kterých budeme zjišťovat monotonii. V tomto případě jsme získali 3 intervaly $(-\infty,3)$, $(3,9)$, $(9,\infty)$.

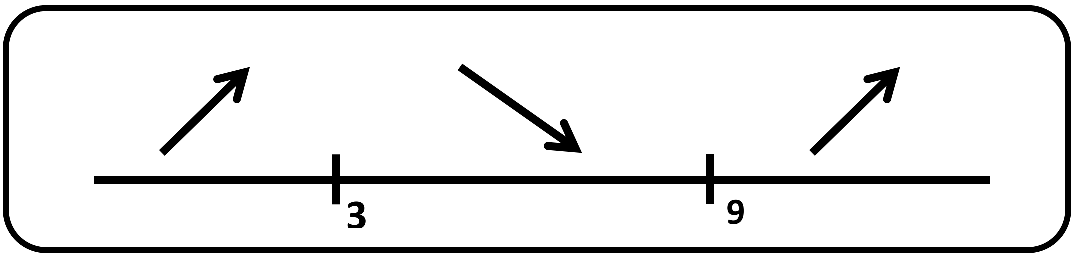
Nyní budeme postupně zkoumat, jakého znaménka nabývá první derivace v jednotlivých intervalech.

Po dosazení některého vnitřního bodu z intervalu $I = (-\infty, 3)$ do první derivace zjistíme, že první derivace je kladná $(f'(x) > 0)$, což dle věty o vztahu 1. derivace a monotonie funkce znamená, že se jedná na tomto intervalu o rostoucí funkci. Pro označení rostoucí funkce budeme používat šipku nahoru - ↗.

To samé budeme aplikovat na zbylé dva intervaly. Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (3,9)$ do první derivace zjistíme, že na intervalu $I = (3,9)$ nabývá první derivace záporné hodnoty $(f'(x) < 0$), tzn. funkce je klesající. Pro označení klesající funkce budeme používat šipku směrem dolů - ↘.

Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (9, \infty)$ do první derivace zjistíme, že na intervalu $I = (9, \infty)$ nabývá první derivace kladné hodnoty $(f'(x) > 0$), tzn. funkce je rostoucí.

.



MAX = [3,108]   MIN = [9,0]

Vzhledem k tomu, že derivace funkce f v bodě $x = 3$ mění znaménko (v levém prstencovém okolí bodu 3 je znaménko první derivace kladné, v pravém záporné), tak funkce nabývá v bodě $x = 3$ lokální maximum.

V bodě $x = 9$ derivace funkce mění znaménko (v levém prstencovém okolí bodu 9 je znaménko první derivace záporné, v pravém kladné), což znamená, že funkce nabývá v bodě $x = 9$ lokální minimum.

6) **Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost**

Pro výpočet druhé derivace se budeme držet definice derivace vyššího řádu (Frolíková, 1984 [1], str. 106).

K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme definici konvexnosti a konkávnosti na intervalu a dále větu o vztahu 2. derivace funkce f a konvexnosti, konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 108-109).

Pro zjištění inflexního bodu užijeme věty o nutné a postačující podmínce pro inflexní bod (Frolíková, 1984 [1], str. 109-110).

$$f''(x) = 2x - 12$$

$$2x - 12 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 6$$

$$\begin{matrix} y = 6^3 - 18 \times 6^2 + 81 \times 6 \\ y = 216 - 648 + 486 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad y = 54$$

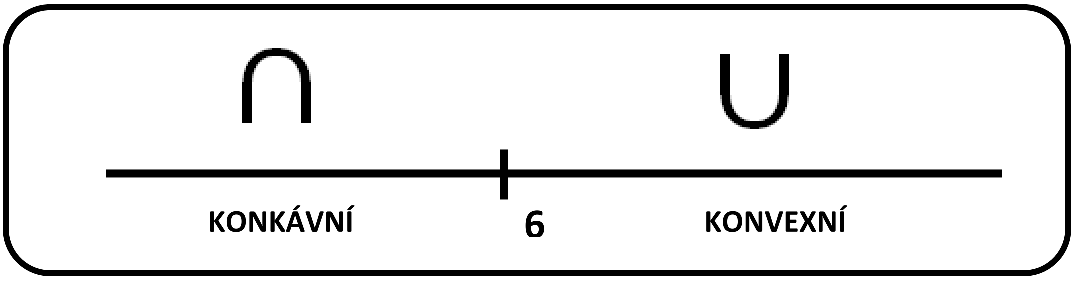
Bod podezřelý z iflexe [6,54]

Díky zjištění bodu podezřelého z inflexe jsme rozdělili definiční obor na intervaly – tentokrát na interval $(-\infty, 6)$ a $(6, \infty)$.

K určení konvexnosti a konkávnosti budeme potřebovat zjistit, jakého znaménka nabývá druhá derivace, po dosazení některého z vnitřních bodů intervalů.

V případě intervalu $I = (-\infty, 6)$ po dosazení některého vnitřního bodu do druhé derivace zjistíme, že druhá derivace zde nabývá záporných funkčních hodnot, což podle věty o vztahu 2. derivace funkce a konvexnosti/konkávnosti znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní – pro konkávnost bude používat oblouk nahoru - ∩

Po dosazení jednoho z vnitřních bodů z $I = (6, \infty)$ do druhé derivace funkce f vypočítáme, že druhá derivace zde nabývá kladných funkčních hodnot, což znamená, že se jedná a funkci konvexní na daném intervalu. Pro konvexnost budeme používat značku oblouk dolu - ∪.



Vzhledem k tomu, že v bodě $x = 6$ se mění konkávnost na konvexnost, tak funkce f má v tomto bodě inflexi.

7) Asymptoty

Dále je důležité určit asymptoty – přímky, které nám graf funkce usměrňují. Při výpočtu se budeme držet definice a nutné a postačující podmínky pro asymptoty (Frolíková, 1984 [1]).

Obecná rovnice asymptoty se směrnicí: $y = k \cdot x + q$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 18x^2 + 81x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - 18x + 81 =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \frac{18}{x} + \frac{81}{x^2}\right) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty \implies \text{není žádná asymptota}$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 18x^2 + 81x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 18x + 81 =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^2 \left(1 - \frac{18}{x} + \frac{81}{x^2}\right) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty \implies \text{není žádná asymptota}$$

8) Obor hodnot

Při určování oboru hodnot budeme postupovat na základě vět o vlastnostech spojitých funkcí na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 65).

Funkce f je na svém definičním oboru spojitá, tudíž zobrazuje definiční obor na interval. Funkce f má limity v $\pm\infty$ rovny $\pm\infty.$ Podle věty o nabývání mezihodnot je tudíž obor hodnot interval $(-\infty.\infty)$.

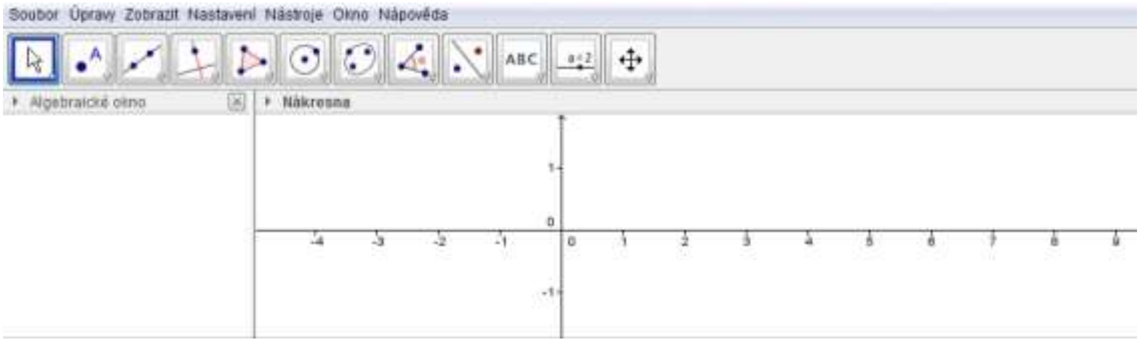
$$H(f) = R$$

2.1. Vyšetření funkce f: $y = x^3 - 18x^2 + 81x$ v programu GeoGebra

V této práci budeme používat matematický program GeoGebra verze 4.2. Při vyšetřování průběhu funkcí využijeme dvě nákresny a okno „CAS“. „Nákresna“ bude sloužit k popisu postupu v okně „CAS“. V „Nákresně 2“ bude k vidění graf funkce a zobrazené důležité body a intervaly, které vyšetříme. Okno „CAS“ slouží díky svým nástrojům k usnadnění různých výpočtů.

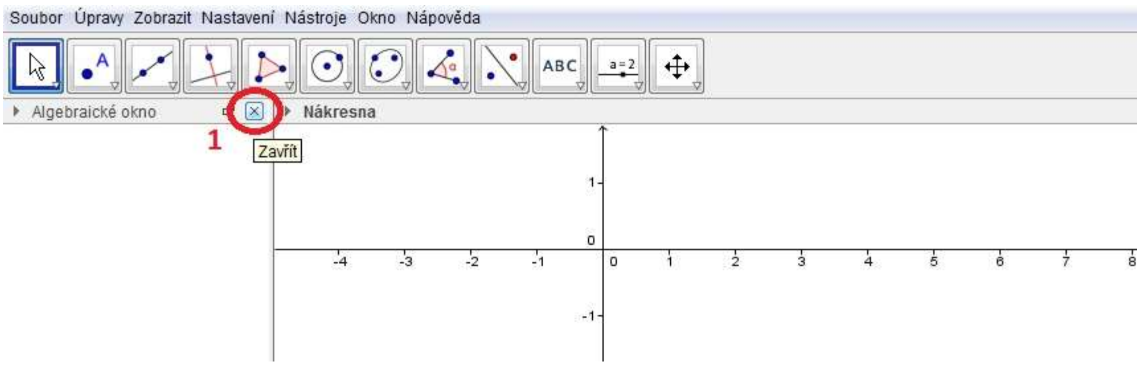
Po otevření programu GeoGebra je na ploše zobrazeno „Algebraické okno“ a „Nákresna“.

Okno po otevření programu GeoGebra



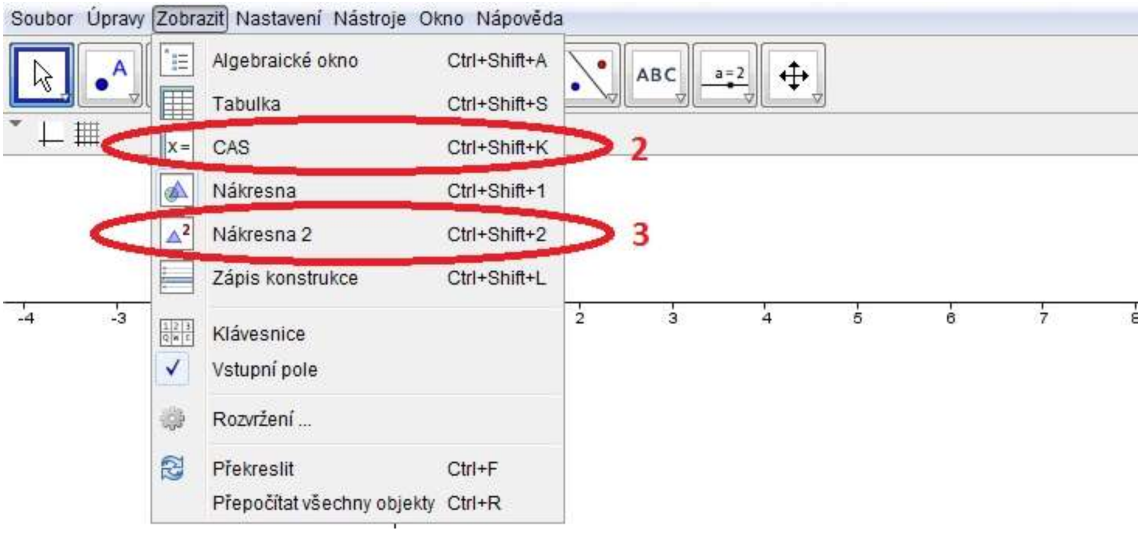
Nejprve zavřeme „Algebraické okno“, neboť ho nebudeme používat a zbytečně by zabíralo místo (krok č. 1).

Krok č. 1



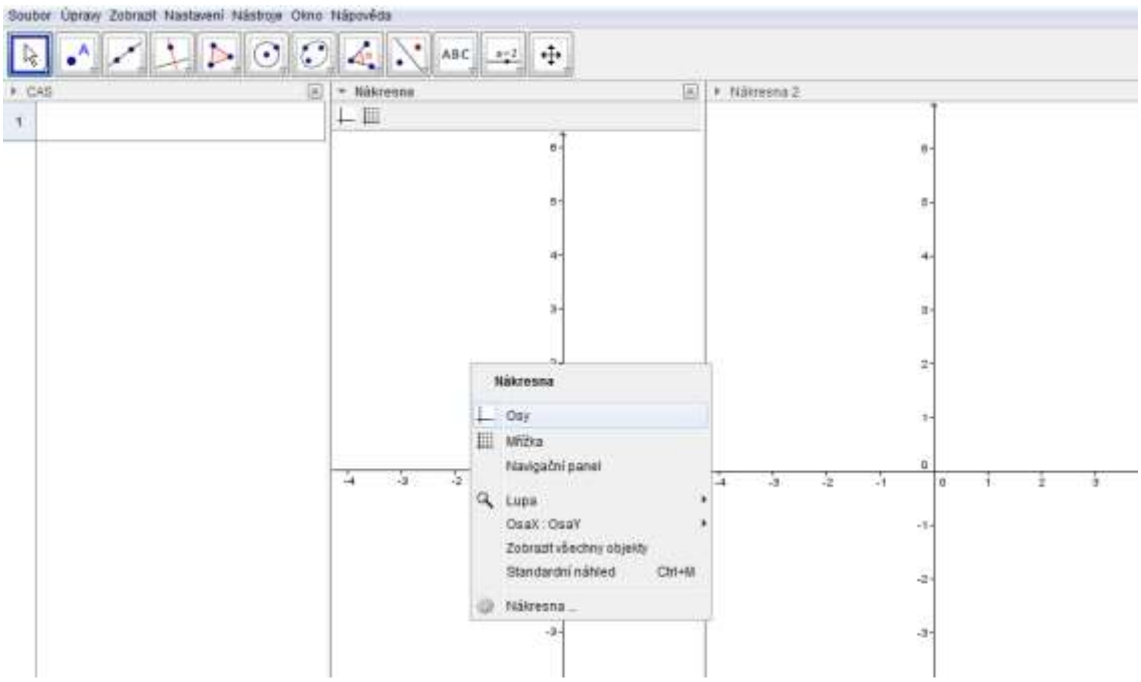
Dále si otevřeme, pro nás důležité, okno „CAS“, a „Nákresnu 2“. Na horním panelu nástrojů zvolíme „Zobrazit“, kde zvolíme „CAS“ (krok č. 2) a dále stejným postupem zvolíme „Nákresna 2“ (krok č. 3)

Krok č. 2, krok č. 3



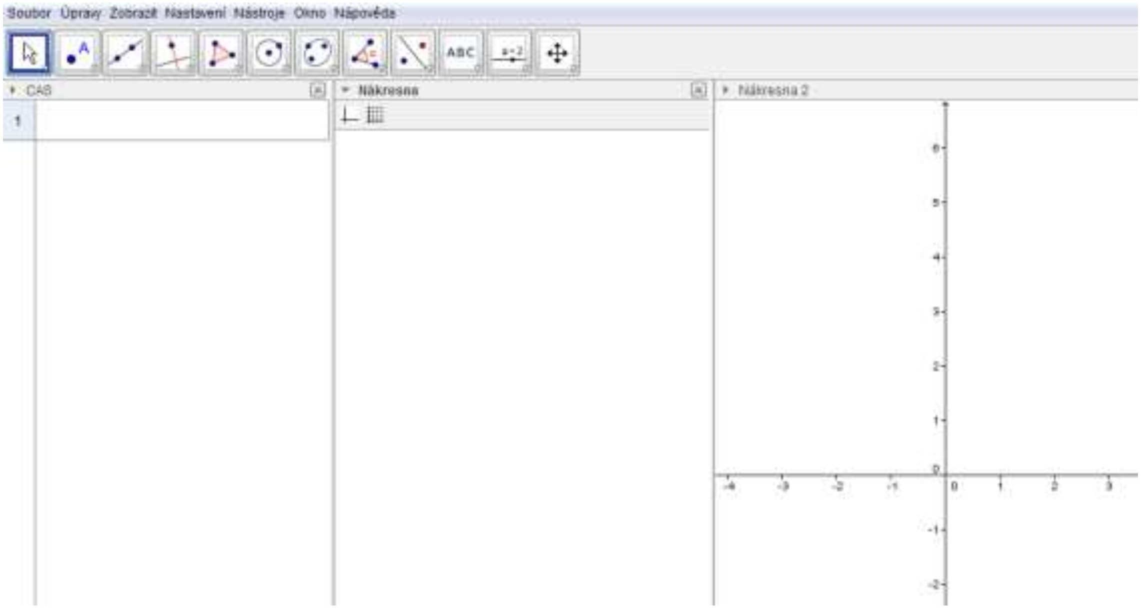
V „Nákresně“, která je zobrazena uprostřed, odstraníme osy a to pomocí pravého tlačítka myši, kde klikneme na nástroj „Osy“, čímž je zrušíme.

Zrušení os v nákresnách



Nyní máme pracovní plochu připravenou a můžeme postupovat v řešení příkladu.

Připravená pracovní plocha



a) Definiční obor

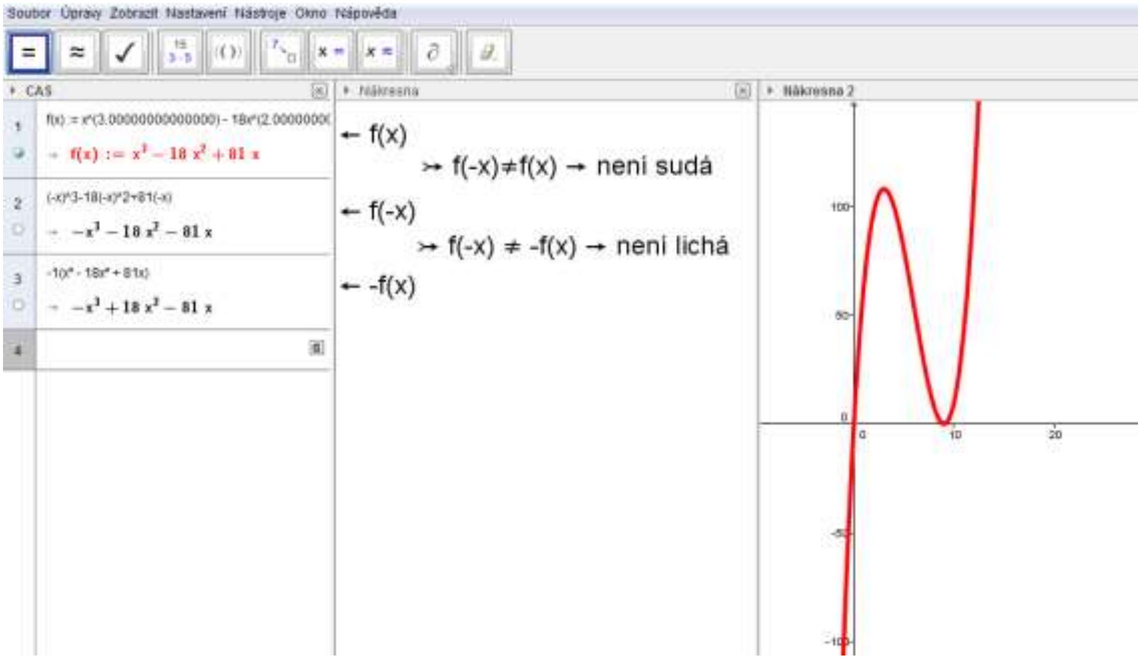
K zjištění definičního oboru není v GeoGebře žádný nástroj ani žádná funkce, musíme si ho tedy určit na základě příslušných znalostí.

b) Sudost, lichost, periodičnost

Nejprve si v okně „CAS" zapíšeme funkci. Po stisknutí tlačítka „Enter" se nám funkce objeví v daném podokně, čímž si můžeme zkontrolovat, zda naše zadání odpovídá požadované funkci. U každého podokna je na levé straně malé bílé kolečko, po jehož stisknutí, se nám zobrazí daný graf funkce, či různé body. V našem případě to bude nyní graf funkce s předpisem $f(x) = x^3 - 18x^2 + 81x$. Poté přejdeme do druhého podokna, kde ve funkci f místo x doplníme $(-x)$. Opět po „odentrování" se nám objeví funkce $f(-x)$. Ve třetím podokně zapíšeme funkci $-f(x)$ tak, že zadáme $-(f(x))$. Nyní můžeme porovnat, zda funkční hodnota v bodě $-x$ (tj. $f(-x)$) neodpovídá funkční hodnotě v bodě x (tj. $f(x)$). Pokud nastane rovnost, tak funkce f je sudá – podle definice sudosti a lichost (Petrášková, Zmeškalová [2], 2005).

V případě, že $f(-x) = -f(x)$, tak funkce f je lichá – podle definice sudosti a lichosti (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2]). Pokud neplatí ani jedna z výše uvedených rovností, což je náš případ, tak funkce f není sudá ani lichá.

Sudost, lichost, periodičnost

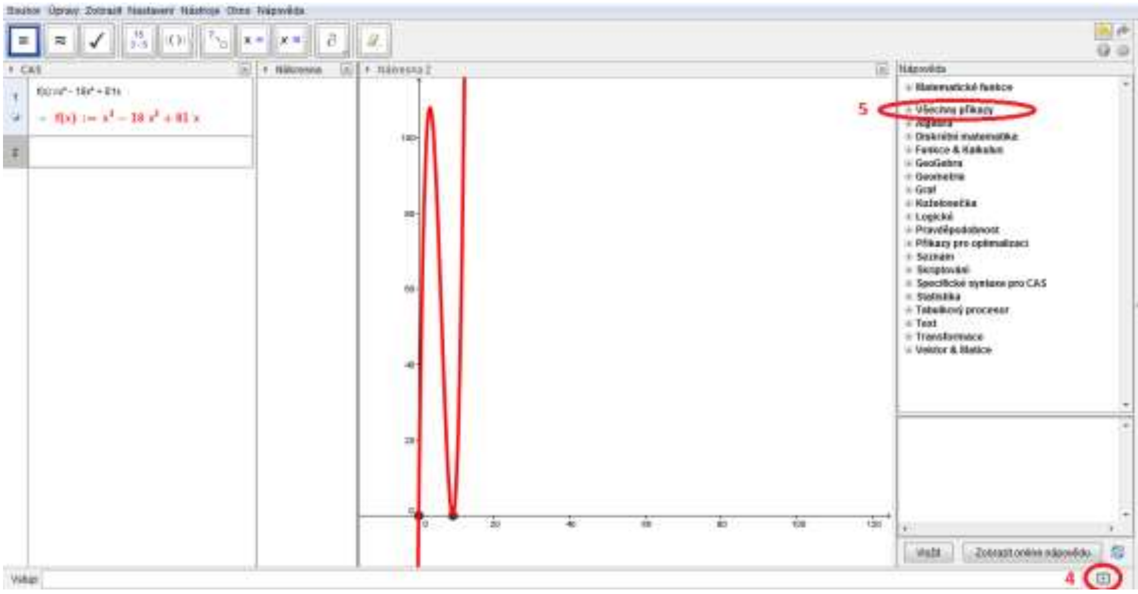


c) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost, průsečíky, průsečíky s osou x

Nyní budeme pokračovat výpočtem limit v krajních bodech definičního oboru. Nejprve si v prvním podokně opět zapíšeme naši funkci a do „Nákresny 2“ si zobrazíme graf pomocí malého bílého kolečka vlevo v podokně. Pokud se nám graf zobrazí do „Nákresny“, stačí na graf kliknout pravým tlačítkem myši a zvolit „Vlastnosti“. Tím se nám otevře okno „Vlastnosti“, kde si na horním panelu v kolonce „Pro pokročilé“ zvolíme zobrazení do „Nákresny 2“ místo do „Nákresny“.

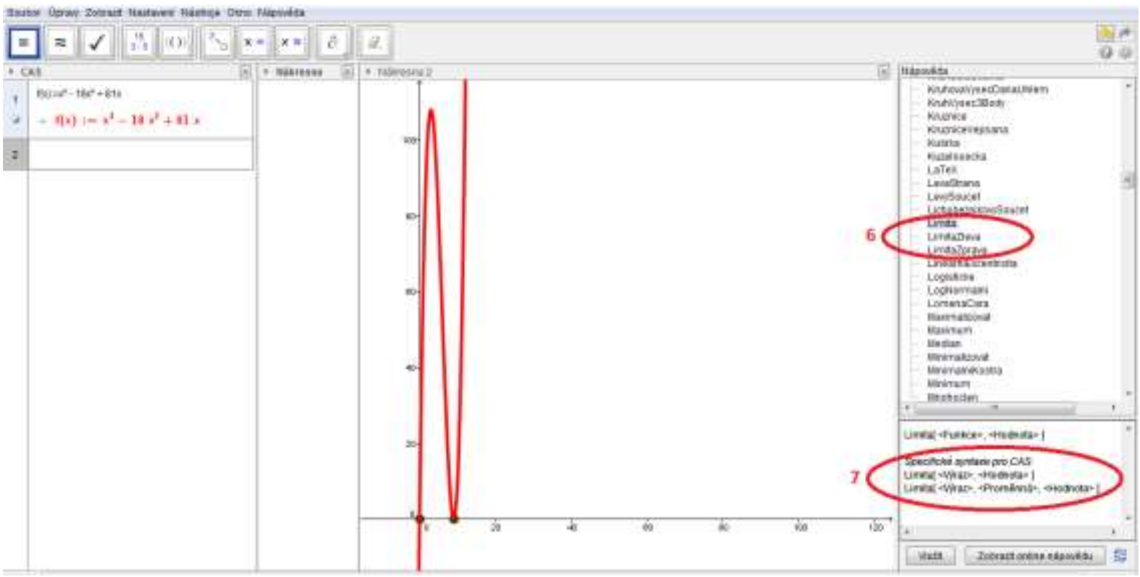
K zjištění veškerých funkcí, jež GeoGebra nabízí, existuje okno „Nápověda“. „Nápovědu“ si otevřeme pomocí ikony s malým trojúhelníkem, která se nachází v pravém dolním rohu (krok č. 4). Po jejím rozkliknutí se seznam zobrazí. My zvolíme nabídku „Všechny příkazy“ (krok č. 5). Následně se nám zobrazí seznam veškerých funkcí, ve kterém nalezneme tu, kterou zrovna potřebujeme.

Krok č. 4, krok č. 5



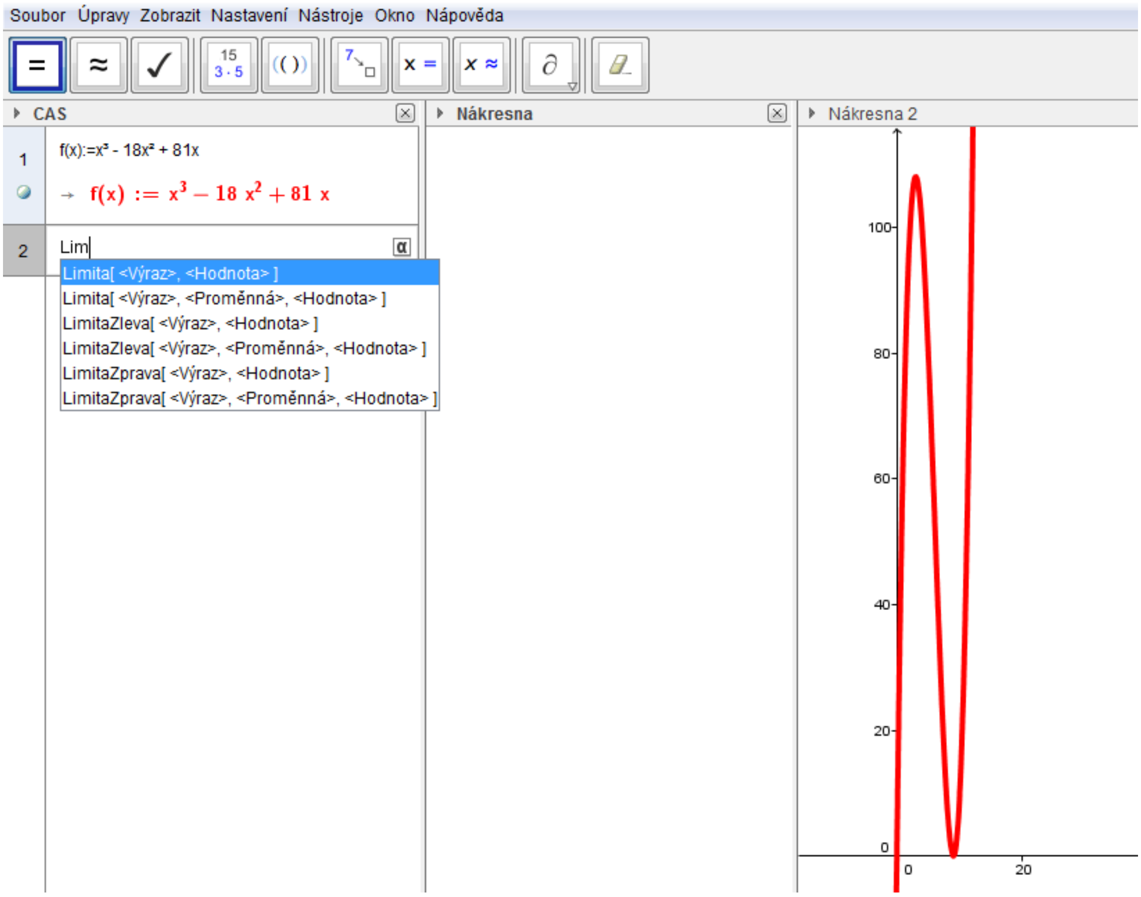
My nyní potřebujeme funkce obsahující limity, proto se v seznamu přesuneme pod písmeno L. Z limit máme na výběr „Limita“, „LimitaZprava“, „LimitaZleva“ (krok č. 6). Klikneme tedy myší na „Limita“, čímž se nám pod seznamem funkcí objeví přesný postup, jak příkaz zadat (krok č. 7). Také zde zjistíme, že funkce „Limita“ je uzpůsobená i pro okno „CAS“ a můžeme do něj tedy přejít. Seznam funkcí zavřeme jednoduše tím, že opět klikneme na ikonu s malým trojúhelníkem.

Krok č. 6, krok č. 7

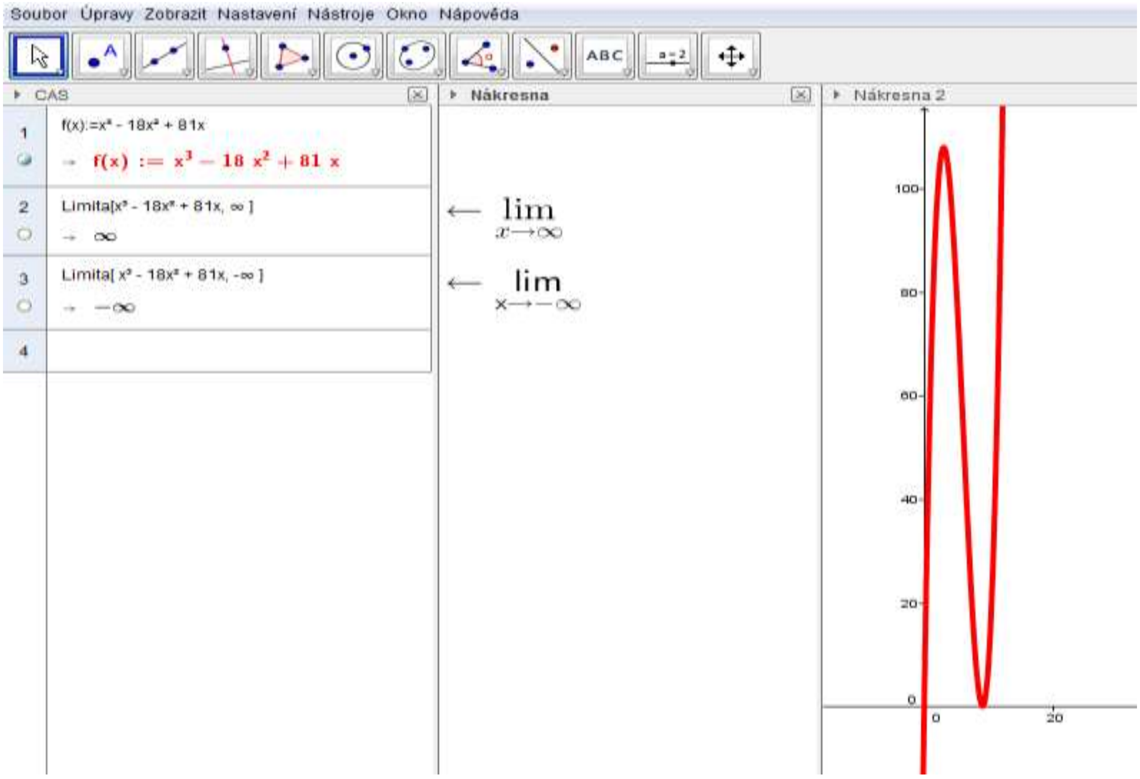


V okně „CAS“ začneme psát název „Limita“, kde se nám ihned objeví podnabídka, kterou funkci chceme vybrat. V našem případě zvolíme „Limita[<Výraz>,<Hodnota>]“. Do políčka <Výraz> zadáme naší funkci tím, že klikneme na námi zadanou funkci v prvním podokně. Do pole <Hodnota> zadáme nejdříve $+\infty$, v dalším podokně potom $-\infty$.

Zápis funkce „Limita“ v okně CAS

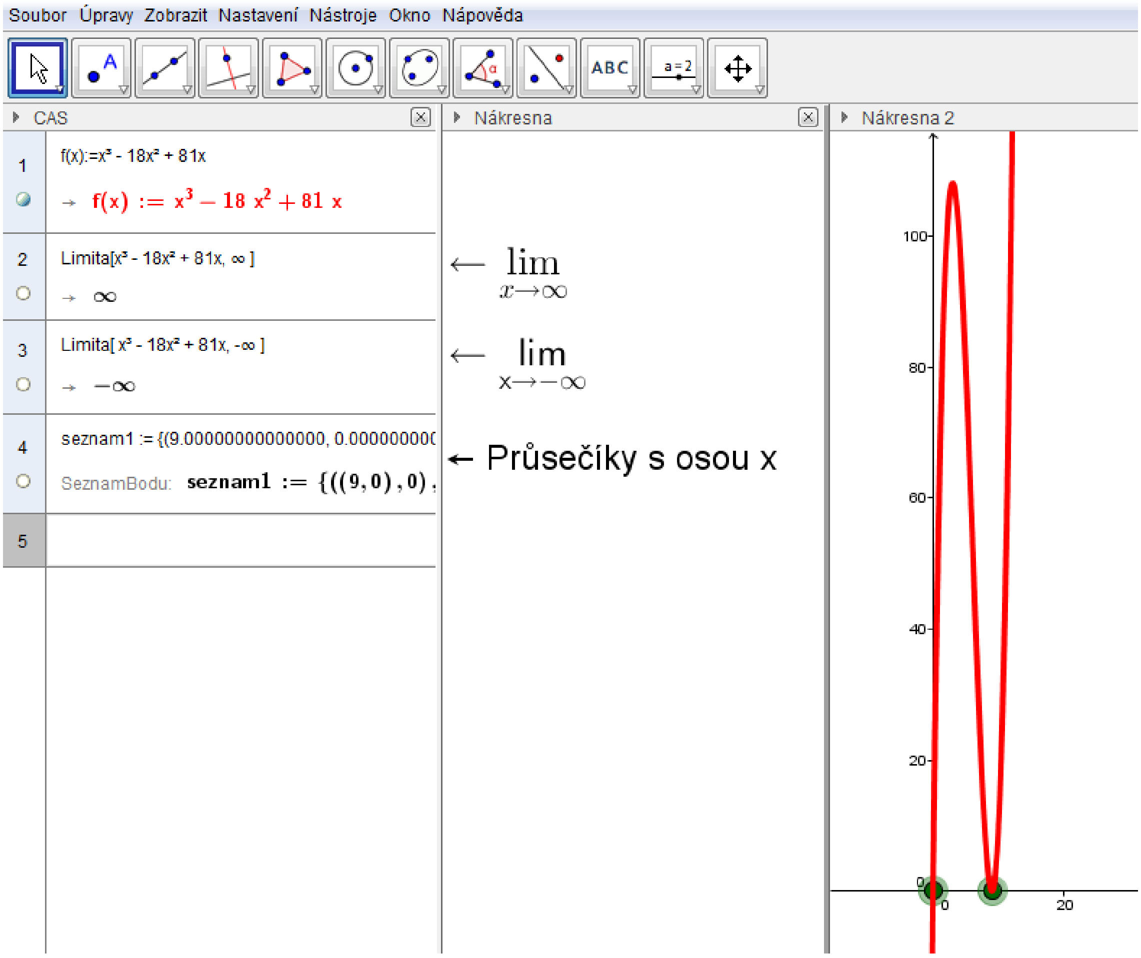


Vypočtené limity



Další na řadě je zjistit průsečíky s osou x. Pokud se opět podíváme do seznamu matematickým funkcí, zjistíme, že žádná funkce „průsečíky“ zde není. Ale vzhledem k tomu, že víme, jak se průsečíky počítají – pomocí nulových bodů - zkusíme najít funkci s nulovými body. V okně „CAS“ tedy začneme psát text „Nulové body“ – v průběhu se nám opět zobrazí nabízené funkce pro okno „CAS“. K zjištění průsečíků s osou x je to funkce „NulovéBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> opět zadáme naší funkci - $x^3 - 18x^2 + 81x$. Pro zobrazení průsečíků s osou x využijeme bílé kolečko v levé straně podokna.

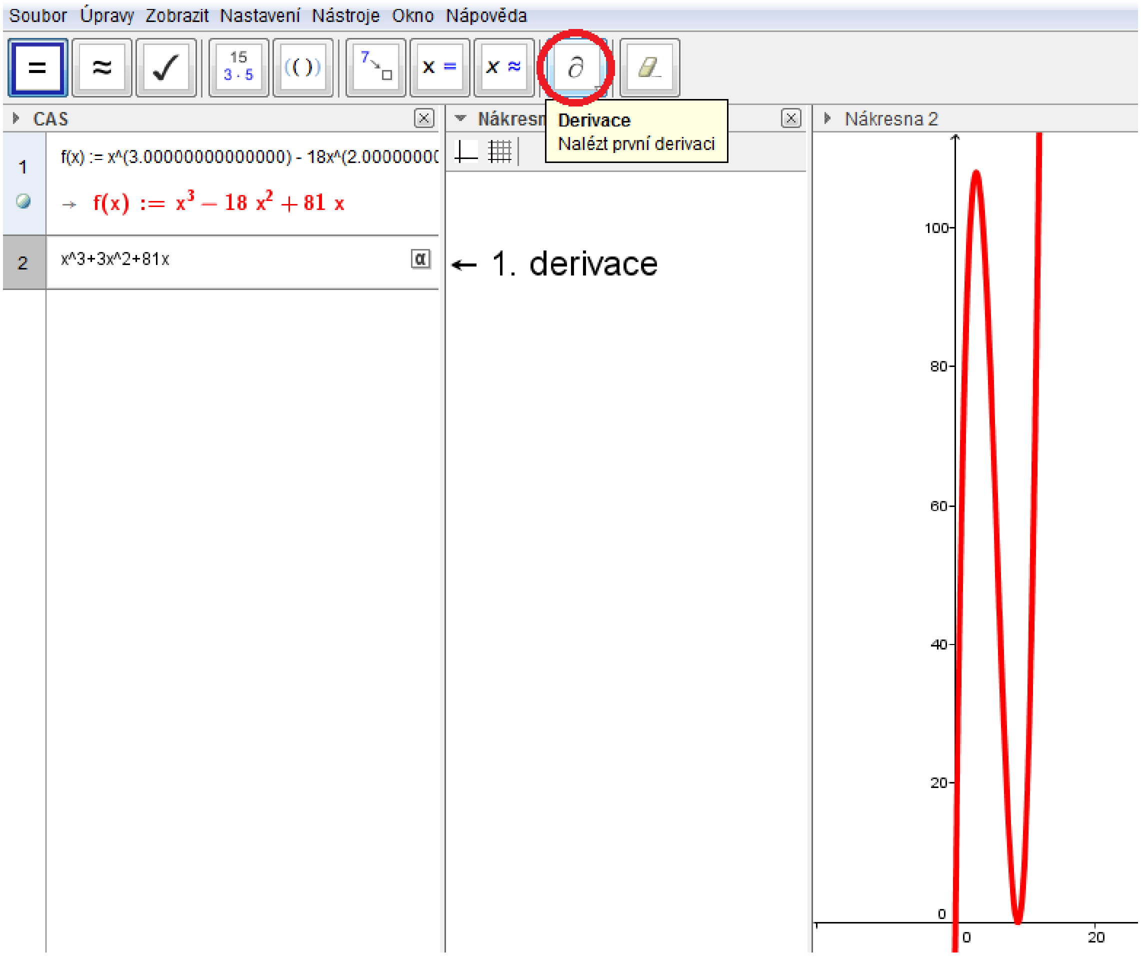
Průsečíky s osou x



d) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

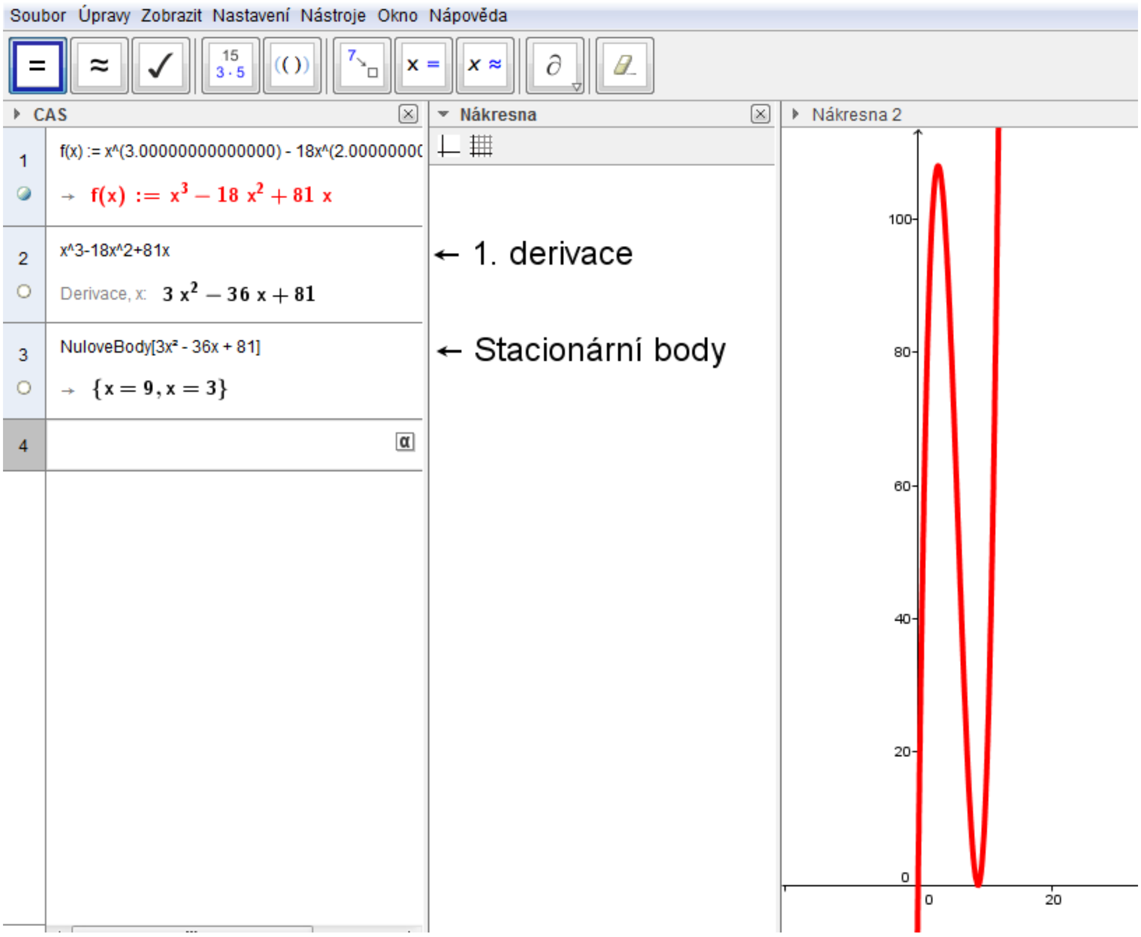
K derivaci funkce v okně „CAS“ slouží nástroj na horním panelu s ikonou ve tvaru derivace. Nejprve označíme naši funkci $x^3 - 18x^2 + 81x$ a poté klikneme právě na tento nástroj „Derivace“.

Nástroj „Derivace“



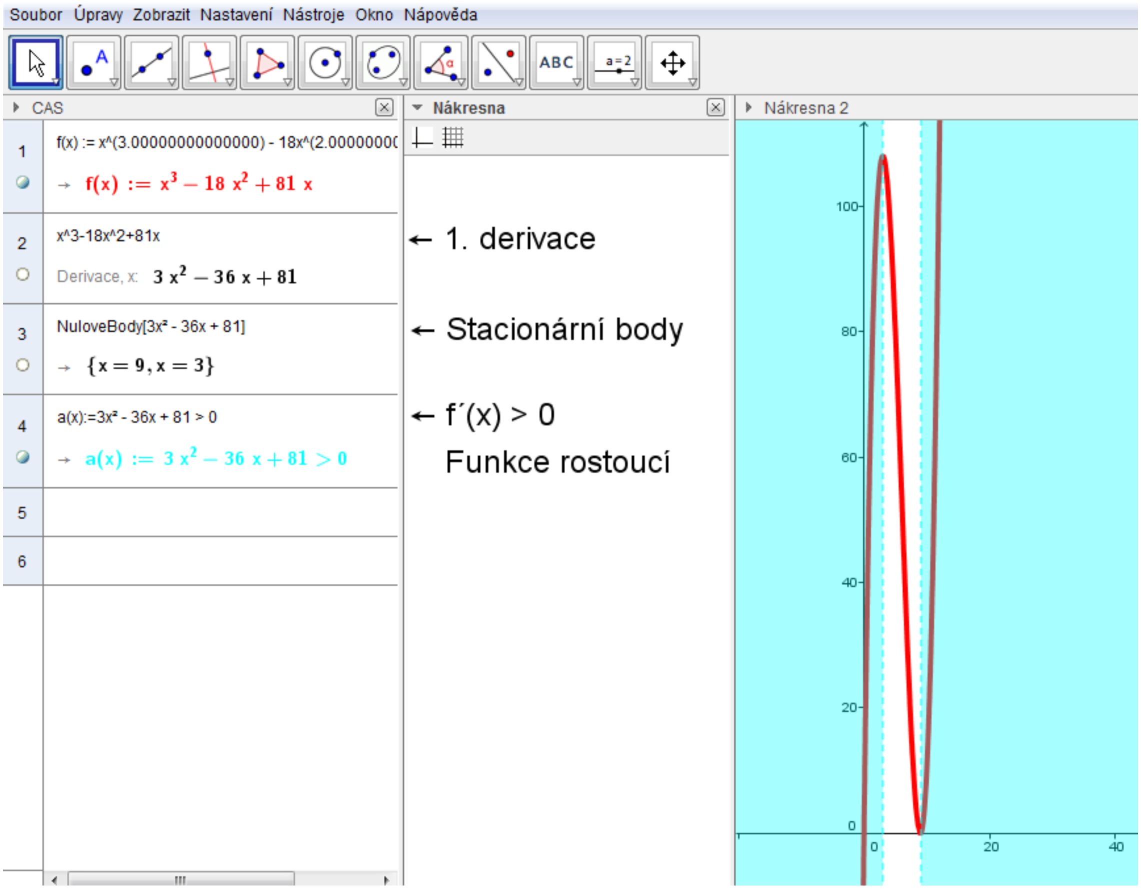
K hledání stacionárních bodů není přímo specifická funkce – ale díky vědomostem víme, že stacionární body se určují pomocí nulových bodů první derivace. Opět tedy použijeme „NuloveBody[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme první derivaci funkce tedy $3x^2 - 36x + 81$.

Stacionární body



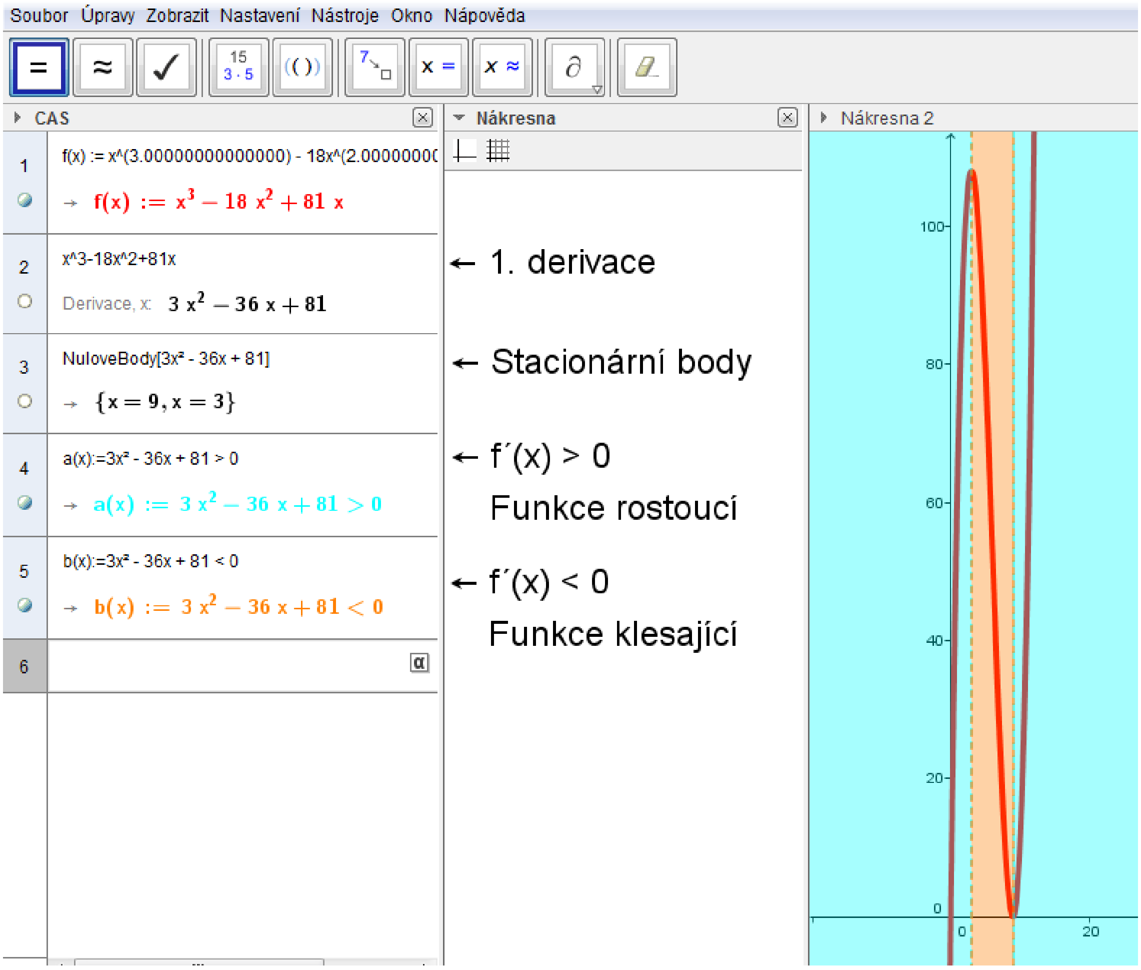
Získali jsme dva stacionární body $x = 9,\ x = 3$. Nyní musíme zjistit monotonii funkce, abychom mohli určit, zda jsou naše stacionární body lokálními extrémy, či nikoliv. V GeoGebře použijeme grafické znázornění. Dle věty o vztahu 1. derivace a monotonie (Frolíková, 1984 [1], str. 74) víme, že stacionární body nám rozdělí definiční obor na intervaly. Pokud dosadíme jeden libovolný vnitřní bod z každého intervalu do první derivace, mohou nastat dvě situace. Pokud je $f'(x) > 0$, pak funkce je rostoucí. Pokud je $f'(x) < 0$, pak je funkce klesající. V našem případě využijeme těchto nerovnic a do podokna si zapíšeme, že první derivace je větší jak nula $\rightarrow 3x^2 - 36x + 81 > 0$. Po stisknutí bílého kolečka k zobrazení na „Nákresnu 2“, se nám objeví označené intervaly (světle modrou barvou), kde je první derivace větší jak nula, což znamená, že tam je funkce rostoucí. Z grafu poté můžeme vyčíst, že naše funkce je rostoucí na intervalech $I = (-\infty, 3)$ a $(9, \infty)$.

Funkce rostoucí



V dalším podokně zapíšeme druhou nerovnost, abychom zjistili, kdy je funkce klesající, tedy $\rightarrow 3x^2 - 36x + 81 < 0$. Opět pomocí bílého kolečka tuto nerovnost zobrazíme na „Nákresnu 2“. Tentokrát k odlišení použijeme oranžovou barvu a můžeme tedy z grafu vyčíst, že funkce je klesající na intervalu $I = (3{,}9)$.

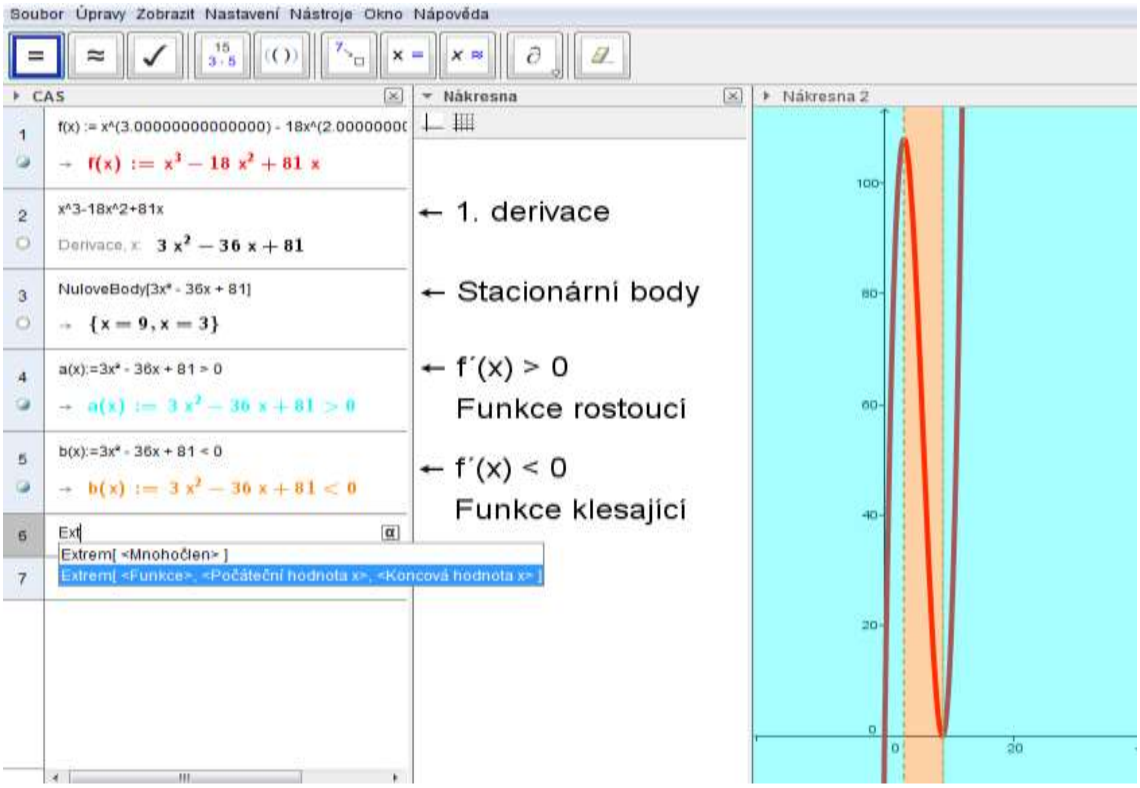
Funkce klesající



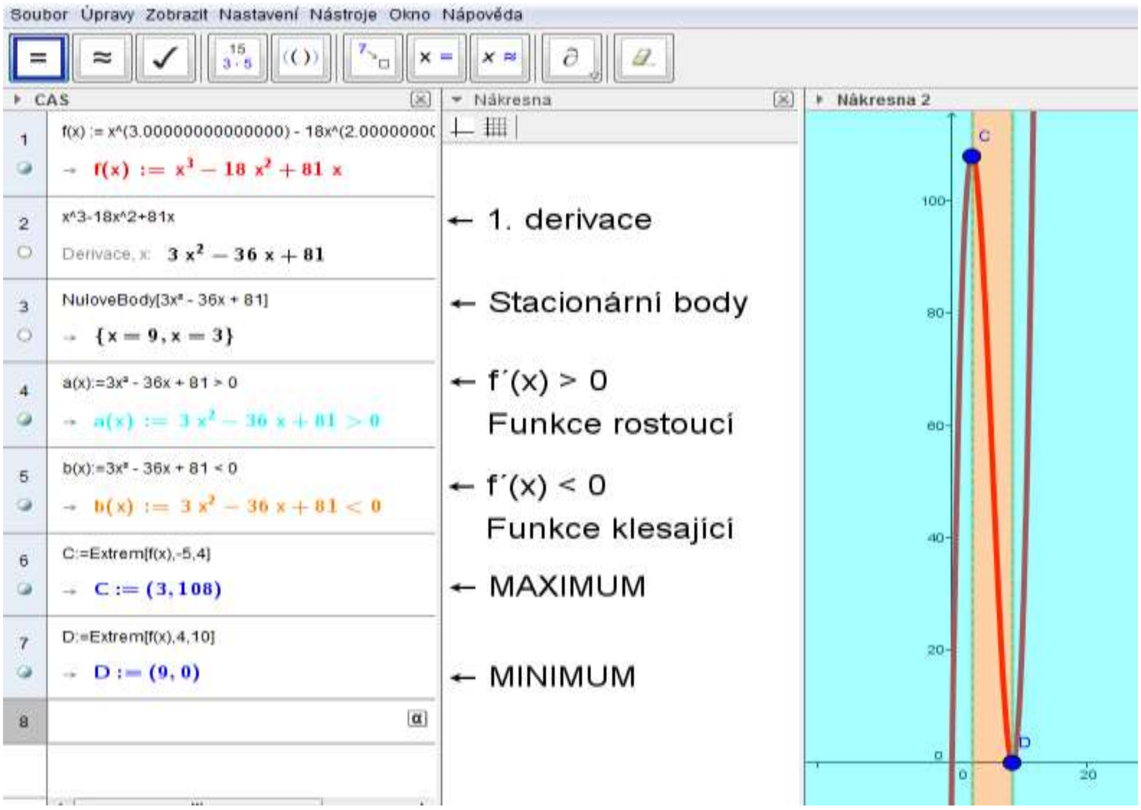
Díky monotonii jsme zjistili, že v obou našich stacionárních bodech dochází ke změně monotonie. Můžeme tedy říci, že se v obou případech jedná o lokální extrémy. V bodě $x = 3$ dochází k přechodu z funkce rostoucí, na klesající, což značí, že v tomto bodě je lokální maximum. K zjištění lokálního extrému (nyní maxima) v GeoGebře použijeme funkci „Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]“ (viz. Zadání funkce „Extrém“). Do pole <Funkce> stačí, když napíšeme „$f(x)$“ a program si sám dosadí naši původní rovnici. Do pole <Počáteční hodnota x> napíšeme libovolný bod z intervalu $I = (-\infty, 3)$, kde je funkce rostoucí a do pole <Koncová hodnota x> napíšeme libovolný bod z intervalu $I = (3,9)$, kde je funkce klesající. Po odentrování se nám zobrazí bod, kde má funkce své maximum.

Obdobně zjistíme, v jakém bodě má naše funkce minimum. Opět použijeme stejnou funkci „Extrem“, jen do pole <Počáteční hodnota x> zadáme libovolný bod z intervalu $I = (3{,}9)$, kde je funkce klesající a do pole <Koncová hodnota x> zapíšeme libovolný bod z intervalu $I = (9, \infty)$, kde je funkce rostoucí.

Zadání funkce „Extrém“



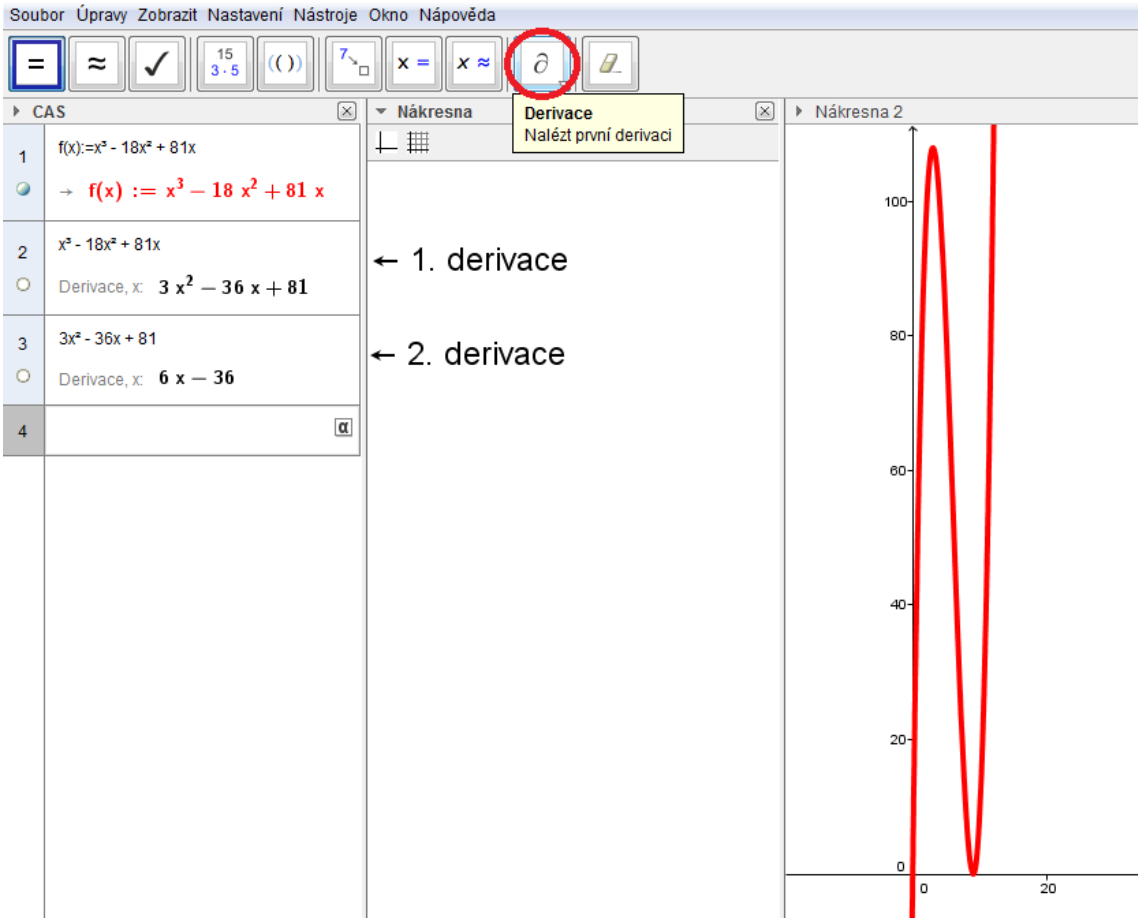
Funkce „Extrem" – lokální maximum a lokální minimum



e) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

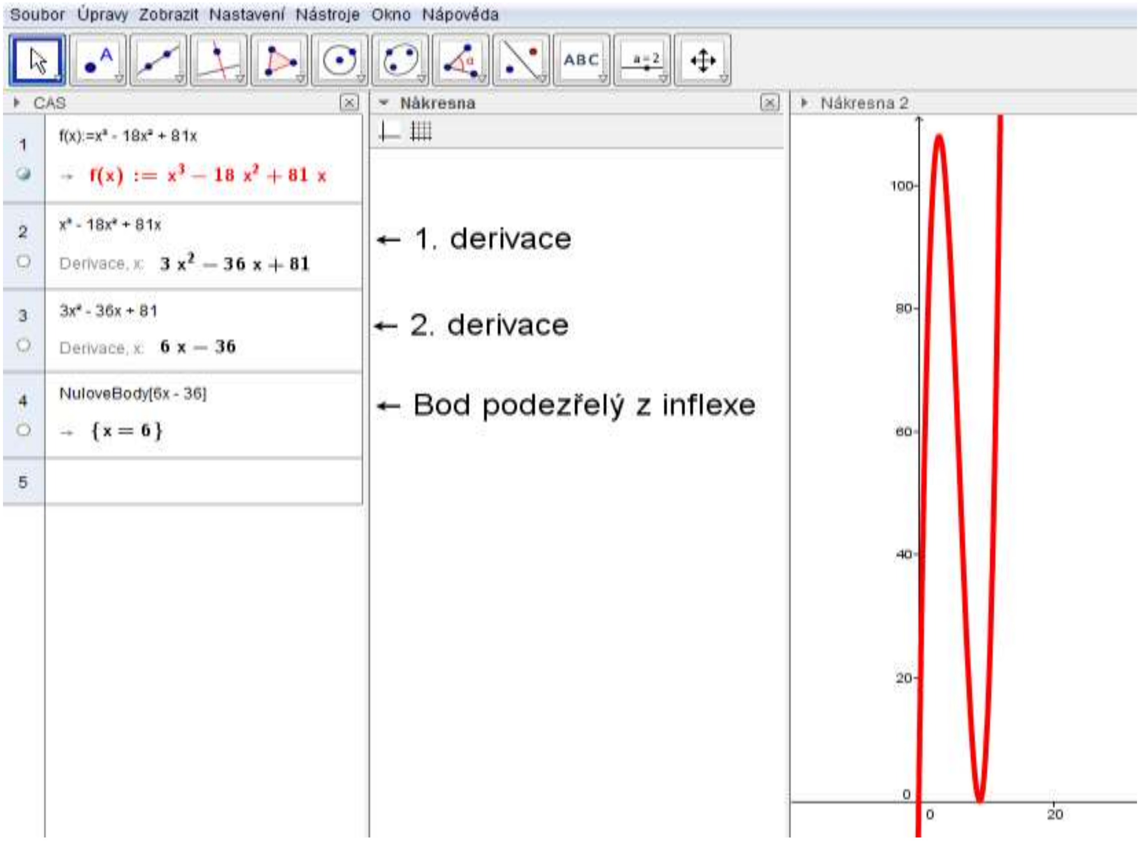
Další částí vyšetřování průběhu funkce je druhá derivace, pomocí níž se zjišťuje konvexnost/konkávnost funkce a body podezřelé z inflexe. Druhá derivace se provádí analogicky jako ta první, jen jako výchozí funkci pro derivaci bude rovnice první derivace. Což znamená, že si nejprve označíme funkci 1. derivace $(3x^2 - 36x + 18)$ a poté opět použijeme nástroj „Derivace".

První a druhá derivace



Nyní potřebujeme zjistit body podezřelé z inflexe, ve kterých by mohlo dojít ke změně konvexnosti a konkávnosti. Bod podezřelý z inflexe najdeme pomocí funkce „NuloveBody[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme druhou derivaci funkce.

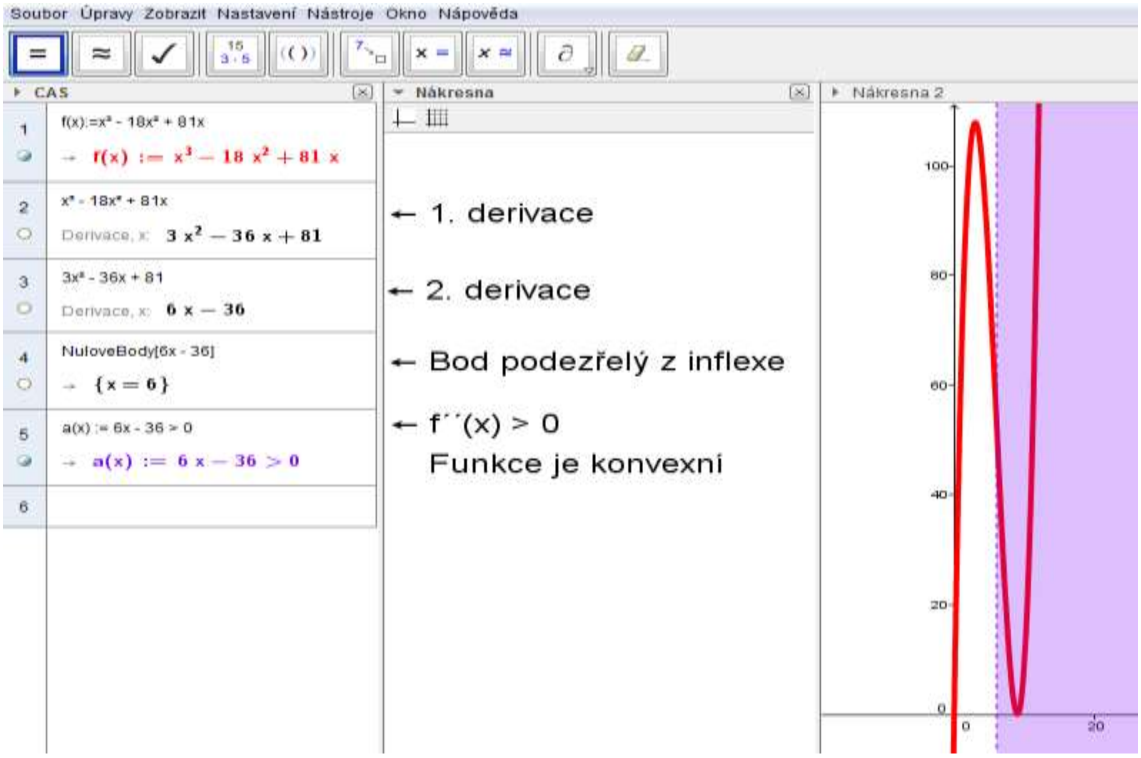
Body podezřelé z inflexe



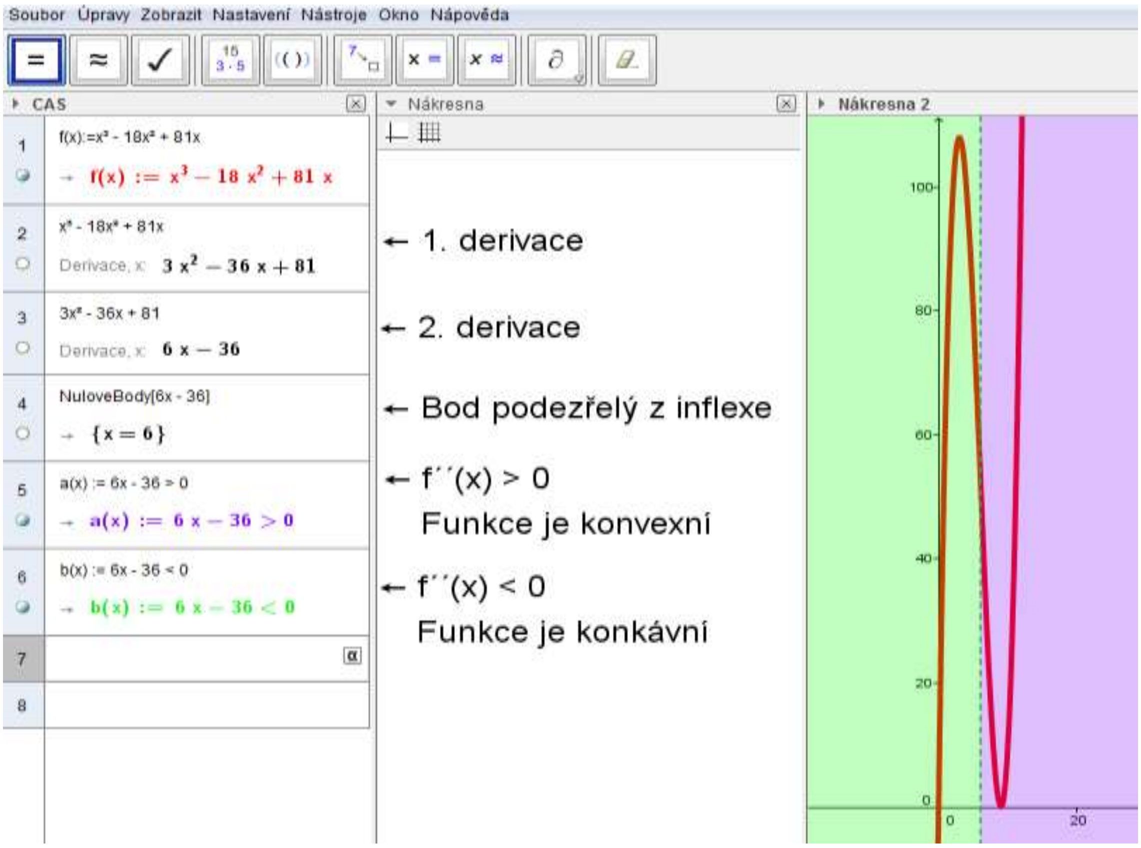
Dostali jsme bod $x = 6$, který je podezřelý z inflexe a který nám rozdělil definiční obor na dva intervaly $I = (-\infty, 6)$ a $I = (6, \infty)$. K zjišťování konvexnosti a konkávnosti využijeme znalosti z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 109). Opět dosadíme jeden libovolný vnitřní bod z daného intervalu do rovnice druhé derivace, přičemž mohou nastat dvě situace. Pokud $f''(x) > 0$, znamená to, že funkce je konvexní. Pokud $f''(x) < 0$, pak je funkce konkávní. V GeoGebře využijeme grafické znázornění a tyto nerovnosti. Nejprve zapíšeme, že druhá derivace je větší jak nula. Po odentrování a stisknutí bílého kolečka si tuto nerovnost zobrazíme na „Nákresnu 2“. Jak můžeme z grafu vyčíst, funkce je konvexní v intervalu $I = (6, \infty)$ - označeno světle fialovou barvou (viz. Konvexní funkce). Analogicky použijeme rovnici druhé derivaci, tentokrát ale bude menší než nula.

Po odentrování a stisknutí bílého kolečka k zobrazení tohoto intervalu do „Nákresny 2“ vidíme, že funkce je konkávní na intervalu $I = (-\infty, 6)$ – označeno světle zelenou barvou (viz. Konkávní funkce).

Funkce konvexní

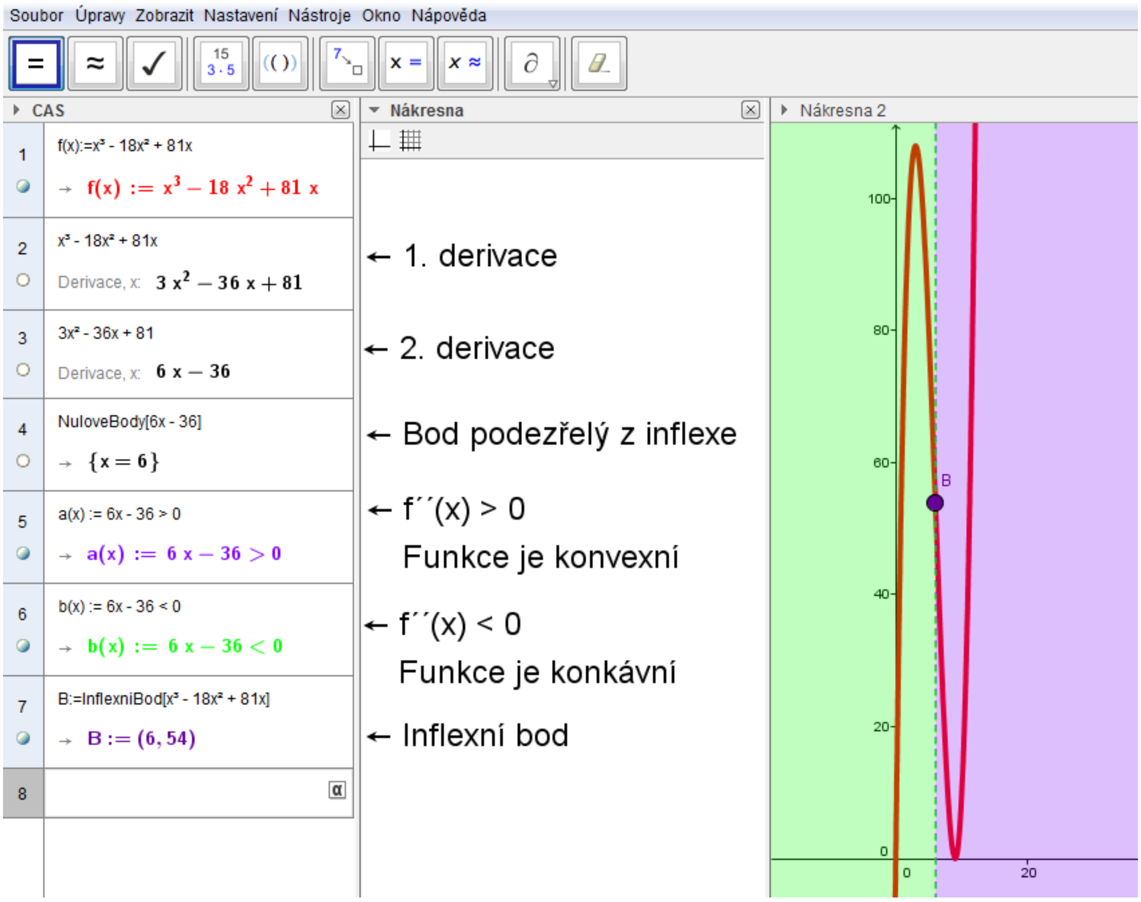


Funkce konkávní



Po zjištění konvexnosti a konkávnosti vidíme, že v bodě $x = 6$ dochází ke změně z konkávnosti na konvexnost, tudíž inflexe byla potvrzena a tento bod je opravdu inflexní. K určení přesného bodu inflexe použijeme funkci „InflexniBod[<Mnohočlen>]“, kde do pole <Mnohočlen> zadáme původní tvar naší funkce, tedy $x^3 - 18x^2 + 81x$. Pro zobrazení bodu opět zvolíme stisknutí bílého kolečka vlevo v podokně. Nevýhodou této funkce je to, že je aplikovatelná pouze na polynomiální funkce.

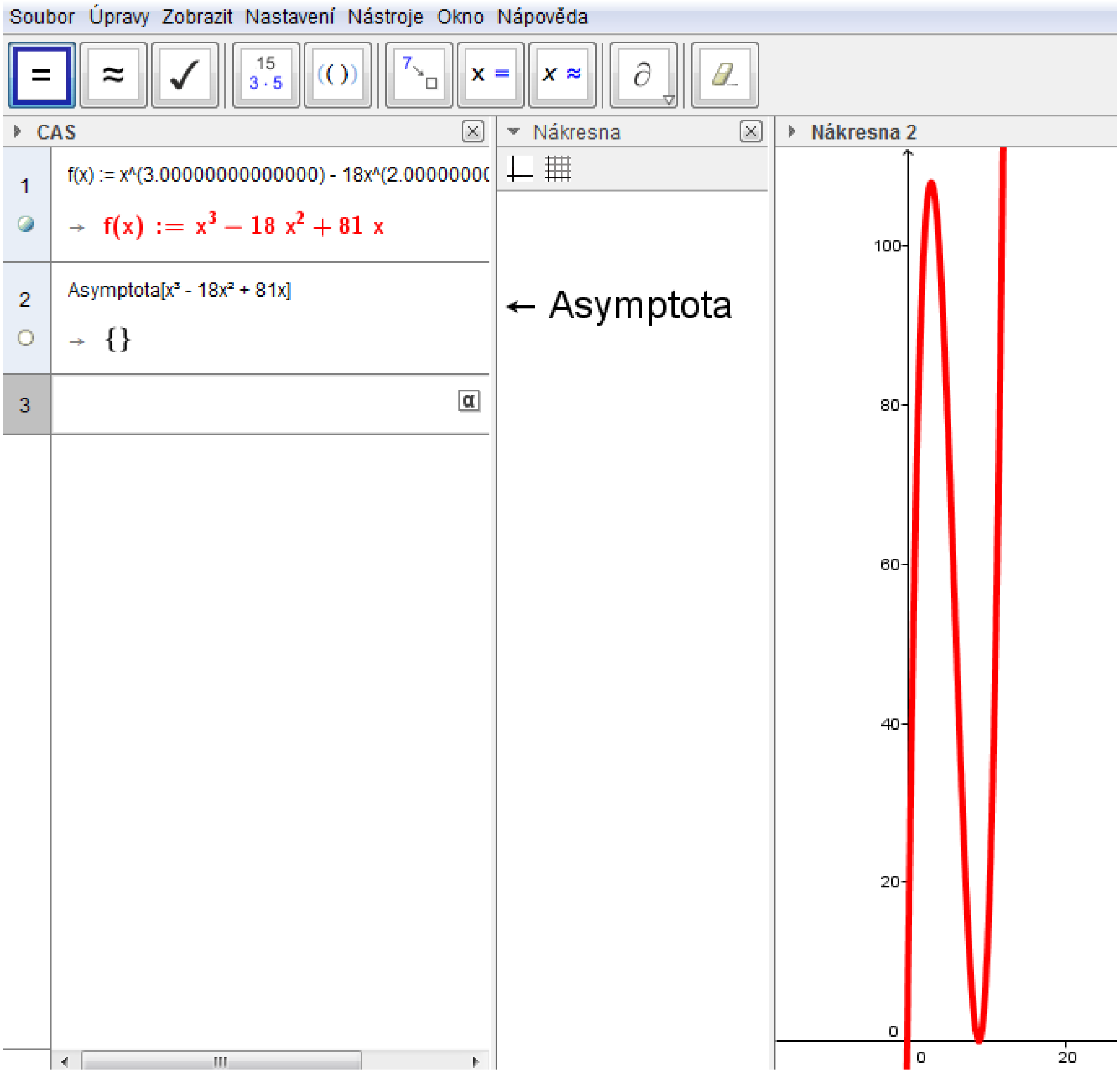
Inflexní bod



f) Asymptoty

Posledním bodem vyšetření funkce je zjistit, zda funkce má asymptotu či nikoliv. K zjištění asymptoty v GeoGebře použijeme nástroj „Asymptota[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> doplníme opět původní znění funkce $x^3 - 18x^2 + 81x$. V našem případě se v GeoGebře zobrazila prázdná množina - { }, což znamená, že funkce nemá žádnou asymptotu se směrnicí $y = k \cdot x + q$. Z manuálně spočteného definičního oboru zjistíme, že této funkci náleží všechna reálná čísla – tudíž v tomto příkladu není bod, kde by funkce nebyla definovaná, takže zde není ani vertikální asymptota.

Asymptoty



3. Příklad 2 - f: $y = \frac{x^2}{2x-4}$

Je dána funkce: $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2x-4}}$. Vyšetřete průběh funkce.

1) Definiční obor

Při určování definičního oboru postupujeme dle definice definičního oboru (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 8)

$$D(f): \quad \begin{array}{c} 2x - 4 \neq 0 \\ x \neq 2 \end{array} \qquad D(f) = R \setminus \{2\}$$

2) Sudost, lichost, periodičnost

Sudost, lichost ani periodičnost nemusíme vyšetřovat, neboť definiční obor není souměrný podle počátku.

3) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost

Při výpočtu limit použijeme větu o limitě funkce vzniklé na základě podílu (Frolíková, 1984 [1], str. 55). Při výpočtu limit v bodech, kde funkce není definovaná, použijeme definici jednostranných limit a větu o vztahu mezi jednostrannými a oboustrannými limitami (Frolíková, 1984 [1], str. 49).

Při zjišťování spojitosti funkce budeme vycházet z definice o spojitosti funkce v bodě a na intervalu. (Frolíková, 1984 [1], str. 61)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2-\frac{4}{x}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2-\frac{4}{x}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{x^2}{2x-4} = \frac{4}{0_+} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2_-} \frac{x^2}{2x-4} = \frac{4}{0_-} = -\infty$$

Funkce f je podílem spojitých funkcí, tudíž je spojitá ve svém definičním oboru – tedy na množině $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

4) Průsečíky s osou x a s osou y

$$P(x): \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x^2 = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \qquad P_x = [0,0]$$

$$P(y): \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 0 \qquad P_y = [0,0]$$

5) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Při výpočtu 1. derivace použijeme vět o derivaci funkcí vzniklých na základě podílu funkcí (Frolíková, 1984 [1], str. 74).

Při určování monotonie funkce použijeme větu o vztahu 1. derivace a monotonie funkce (Frolíková, 1984 [1], str. 78).

Při určování lokálních extrému se budeme držet definice pro lokální extrémy a dále využijeme nutnou a postačující podmínku pro lokální extrém (Frolíková, 1984 [1], str. 79).

$$f'(x) = \frac{2x(2x-4) - x^2 2}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 2x^2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x}{4x^2 - 16x + 16} =$$

$$= \frac{2(x^2 - 4x)}{2(2x^2 - 8x + 8)} = \frac{x^2 - 4x}{2x^2 - 8x + 8}$$

$$\frac{x^2 - 4x}{2x^2 - 8x + 8} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} x^2 - 4x = 0 \\ x(x-4) = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \qquad x = 4$$

$$y_1 = \frac{0^2}{2 \times 0 - 4} \qquad y_2 = \frac{4^2}{2 \times 4 - 4}$$

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = \frac{16}{4} = 4$$

Stacionární body $\quad [0,0], [4,4]$

První derivací jsme zjistili stacionární body $x = 0, x = 4$, ke kterým přidáme bod, ve kterém funkce není definovaná $x = 2$. Tím jsme si definiční obor rozdělili do několika intervalů, na kterých budeme zjišťovat monotonii. V tomto případě jsme získali 4 intervaly $(-\infty, 0)$, $(0,2), (2,4), (4, \infty)$.

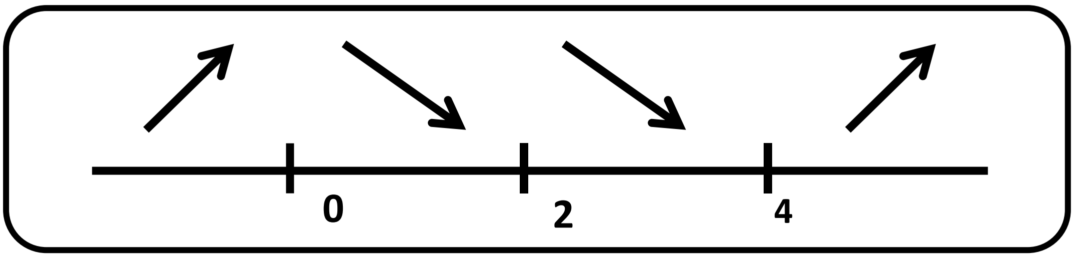
Nyní budeme postupně zkoumat, jakého znaménka nabývá první derivace v jednotlivých intervalech.

Po dosazení některého vnitřního bodu z intervalu $I = (-\infty, 0)$ do první derivace zjistíme, že první derivace je kladná $(f'(x) > 0)$, což dle věty o vztahu 1. derivace a monotonie funkce znamená, že se jedná na tomto intervalu o rostoucí funkci.

Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (0,2)$ do první derivace zjistíme, že na tomto intervalu nabývá první derivace záporné hodnoty $(f'(x) < 0)$, tzn. že funkce je klesající.

Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (2,4)$ do první derivace zjistíme, že na tomto intervalu nabývá první derivace záporné hodnoty $(f'(x) < 0)$, tzn. že funkce je klesající.

Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (4, \infty)$ do první derivace zjistíme, že na intervalu $I = (4, \infty)$ nabývá první derivace kladné hodnoty $(f'(x) > 0)$, tzn. funkce je rostoucí.



MAX = [0,0]   MIN = [4,4]

Vzhledem k tomu, že derivace funkce f v bodě $x = 0$ mění znaménko (v levém prstencovém okolí bodu 0 je znaménko první derivace kladné, v pravém záporné), tak funkce nabývá v bodě $x = 0$ lokální maximum.

V bodě $x = 4$ derivace funkce mění znaménko (v levém prstencovém okolí bodu 4 je znaménko první derivace záporné, v pravém kladné), což znamená, že funkce nabývá v bodě $x = 4$ lokální minimum.

6) **Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost**

Pro výpočet druhé derivace se budeme držet definice derivace vyššího řádu (Frolíková, 1984 [1], str. 106).

K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme definici konvexnosti a konkávnosti na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 108) a dále větu o vztahu 2. derivace funkce f a konvexnosti, konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 109).

Pro zjištění inflexního bodu užijeme věty o nutné a postačující podmínce pro inflexní bod (Frolíková, 1984 [1], str. 109-110).

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(2x^2-8x+8)-(x^2-4x)(4x-8)}{(2x^2-8x+8)^2} =$$

$$= \frac{(4x^3-16x^2+16x-8x^2+32x-32)+(-4x^3+8x^2+16x^2-32x)}{(2x^2-8x+8)^2} =$$

$$= \frac{4x^3-24x^2+48x-32-4x^3+24x^2-32}{(2x^2-8x+8)^2} = \frac{16x-32}{(x^2-4x+4)^2} =$$

$$= \frac{4x-8}{(x^2-4x+4)^2} = \frac{4(x-2)}{((x-2)^2)^2} = \frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3} =$$

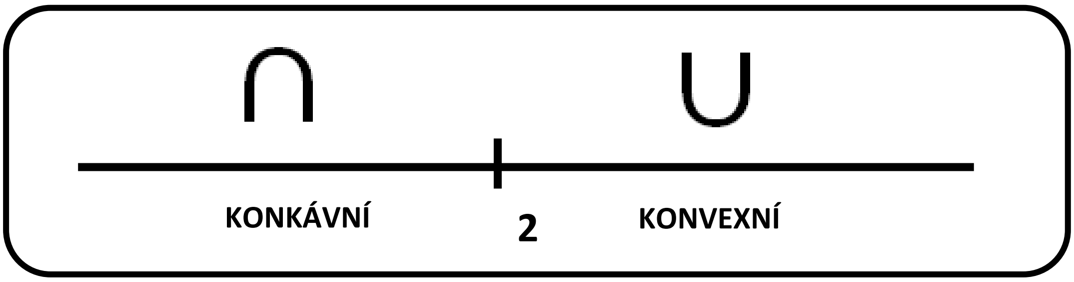
$$= \frac{4}{x^3-6x^2+12x-8}$$

$$4 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \text{nemá body podezřelé z inflexe}$$

Díky druhé derivaci funkce jsme zjistili, že tato funkce nemá body podezřelé z inflexe. Protože je ale spojitá na množině $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, zařadíme do vyšetřování bod $x = 2$, abychom zjistili, zda je funkce konvexní či konkávní na intervalu $(-\infty, 2)$ a jaká je na intervalu $(2, \infty)$.

K určení konvexnosti a konkávnosti budeme potřebovat zjistit, jakého znaménka nabývá druhá derivace, po dosazení některého z vnitřních bodů intervalů.

V případě intervalu $I = (-\infty, 2)$ po dosazení některého vnitřního bodu do druhé derivace zjistíme, že druhá derivace zde nabývá záporných funkčních hodnot, což podle věty o vztahu 2. derivace funkce a konvexnosti a konkávnosti znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.
Po dosazení jednoho z vnitřních bodů z $I = (2, \infty)$ do druhé derivace funkce f vypočítáme, že druhá derivace zde nabývá kladných funkčních hodnot, což znamená, že se jedná a funkci konvexní na daném intervalu.



V bodě $x = 2$ dochází ke změně z konkávnosti na konvexnost, ale protože je to bod, ve kterém funkce není definovaná, nemůže být bodem inflexním.

7) Asymptoty

Nyní budeme zjišťovat, zda funkce nemá asymptotu se směrnicí. Při výpočtu se budeme držet definice a nutné a postačující podmínky pro asymptoty (Frolíková, 1984 [1]).
Obecná rovnice asymptoty se směrnicí: $y = k \cdot x + q$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-4} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 4x}{2(2x-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4x-8} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1$$

$$y = kx + q \quad \to \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

Vzhledem k definičnímu oboru a $\lim_{x\to 2_+} \frac{x^2}{2x-4} = \infty$, $\lim_{x\to 2_-} \frac{x^2}{2x-4} = -\infty$ má funkce ještě vertikální asymptotu $x = 2$.

8) Obor hodnot

Při určování oboru hodnot budeme postupovat na základě vět o vlastnostech spojitých funkcí na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 65).

Funkce f je na spojitá na množině $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

V intervalu $(-\infty, 2)$ nabývá funkce svého maxima v bodě $[0{,}0]$, čímž je na tomto intervalu shora omezena. Na intervalu $(2, \infty)$ nabývá funkce svého minima v bodě [4,4], což značí, že je zdola omezená. Funkce f je spojitá na $(-\infty, 2)$, to znamená, že zobrazuje interval na interval. Limita v $-\infty$ je $-\infty$ a funkce nabývá v bodě 0 svého maxima rovného 0. Podle věty o nabývání mezihodnot funkce f zobrazuje $(-\infty, 2)$ na $(-\infty, 0\rangle$. Funkce f je spojitá na $(2, \infty)$, to znamená, že zobrazuje interval na interval. Limita v ∞ je ∞ a funkce nabývá v bodě 4 svého maxima rovného 4. Podle věty o nabývání mezihodnot funkce f zobrazuje $(2, \infty)$ na $\langle 4, \infty)$. Z čeho vyplývá obor hodnot.

$$H(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 4, \infty)$$

3.1. Vyšetření funkce f: $y = \frac{x^2}{2x-4}$ v programu GeoGebra

a) Definiční obor

K zjištění definičního oboru není v GeoGebře žádný nástroj, ani jiná funkce, proto si ho musíme určit sami, s využitím vlastních znalostí.

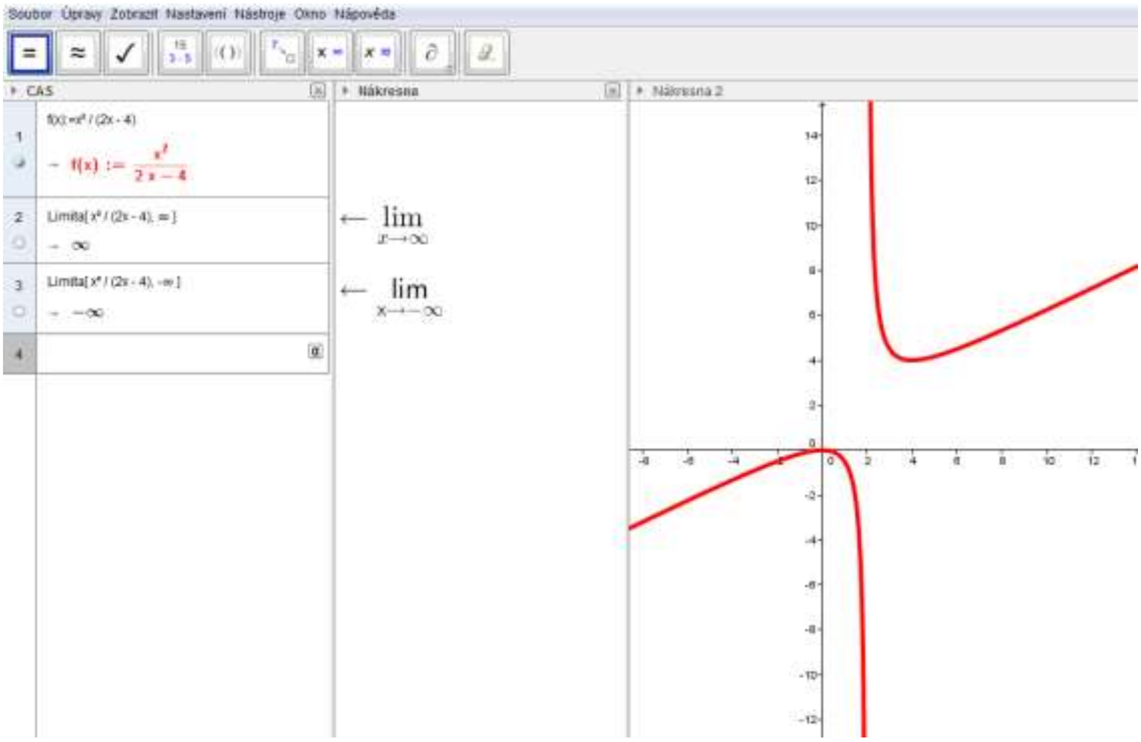
b) Sudost, lichost, periodičnost

Sudost, lichost ani periodičnost nemusíme vyšetřovat, neboť funkce není symetrická podle počátku.

c) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost, průsečíky, průsečíky s osou x

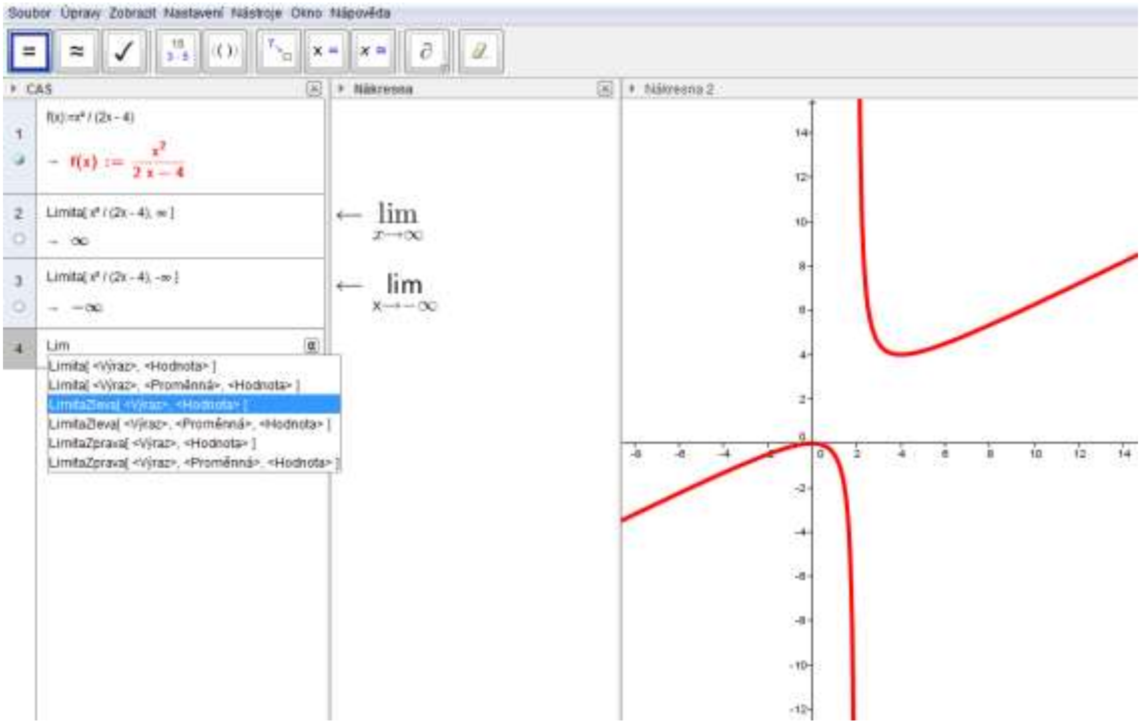
Do prvního podokna napíšeme rovnici naší funkce, díky níž zobrazíme graf do „Nákresny 2“. Ke zjištění limit v krajních bodech definičního oboru použijeme funkci „Limita[<Výraz>, <Hodnota>]“. Do pole <Výraz> zapíšeme naši funkci a do pole <Hodnota> napíšeme do jednoho podokna nejprve ∞, do dalšího pak $-\infty$.

Vypočtené limity

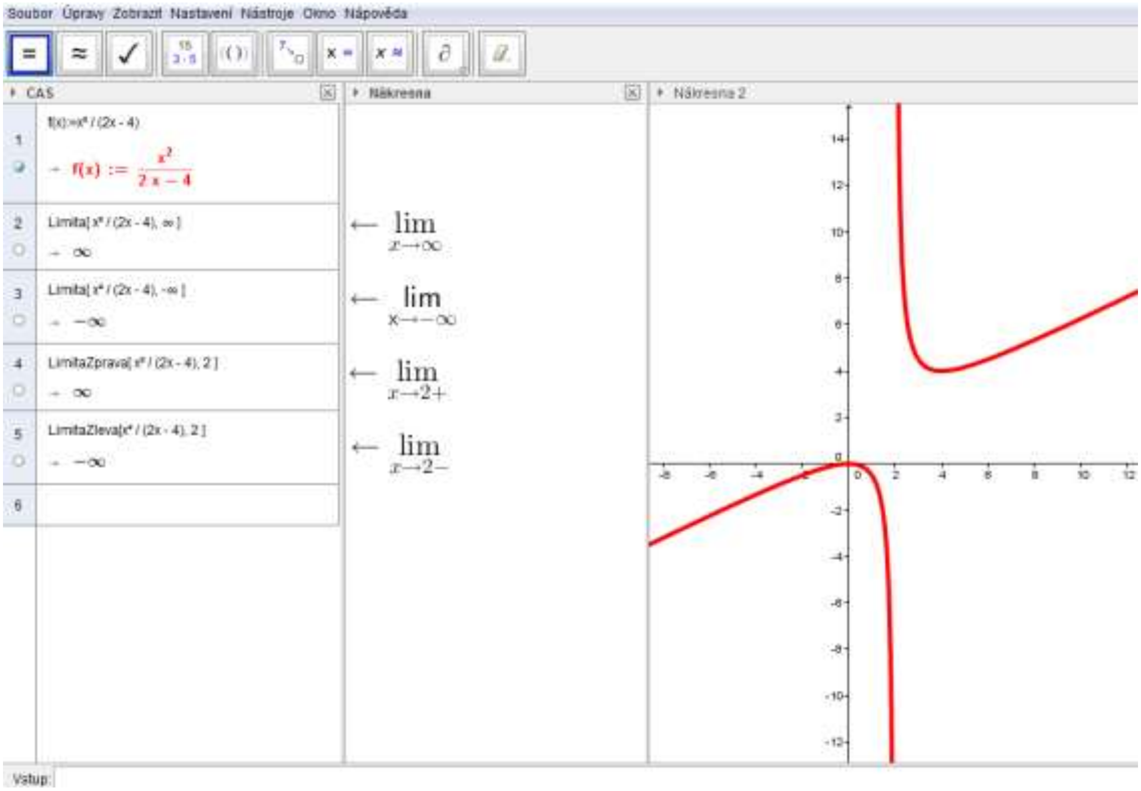


Tato funkce má definiční obor $D(f) = R \setminus 2$, což znamená, že v bodě $x = 2$ funkce není definovaná. Musíme tedy vyšetřit, jak se funkce chová okolo tohoto bodu, což zjistíme pomocí limity zprava a limity zleva. V okně „CAS“ do podokna začneme psát „Limita“, kde se nám opět zobrazí nabídka možných funkcí. Pro výpočet limity zleva bodu $x = 2$ zvolíme funkci „LimitaZleva[<Výraz>,<Hodnota>]“, kde do pole <Výraz> zadáme naší funkci $f(x) = \frac{x^2}{2x-4}$, a do pole <Hodnota> napíšeme 2. Pro výpočet limity zprava bodu $x = 2$ zvolíme funkci „LimitaZprava[<Výraz>,<Hodnota>]“, kde do pole <Výraz> zadáme funkci $f(x) = \frac{x^2}{2x-4}$, a do pole <Hodnota> napíšeme 2.

Zadávání limit zprava a zleva

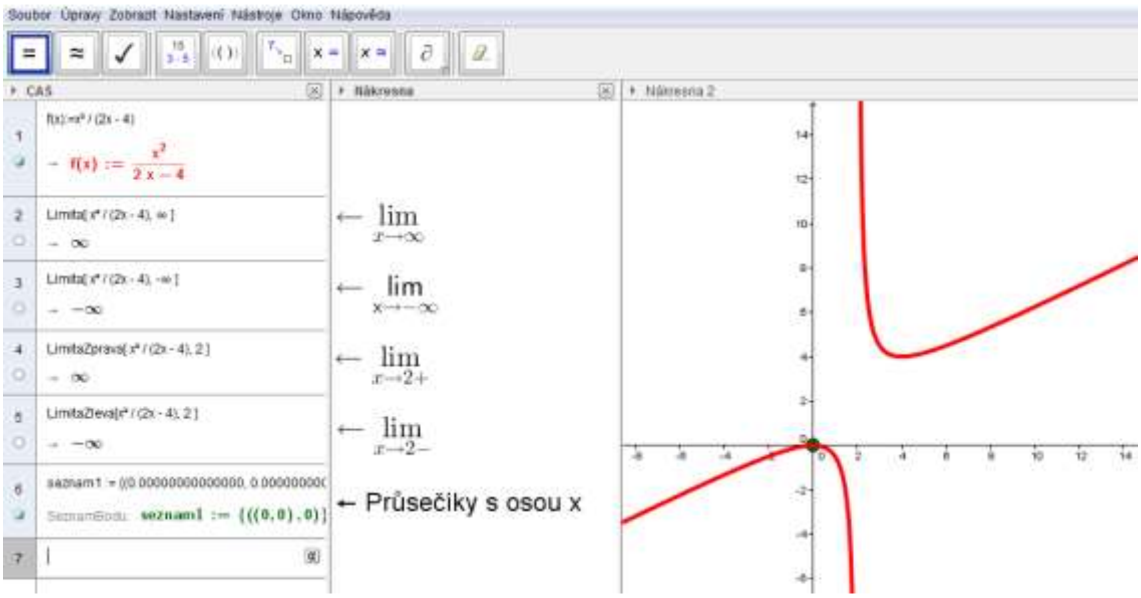


Limity v bodech, kde funkce není definovaná



Pro určení průsečíků s osou x použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> zadáme rovnici funkce. Pro zobrazení bodů opět jen stiskneme bílé kolečko na levé straně podokna.

Průsečíky s osou x

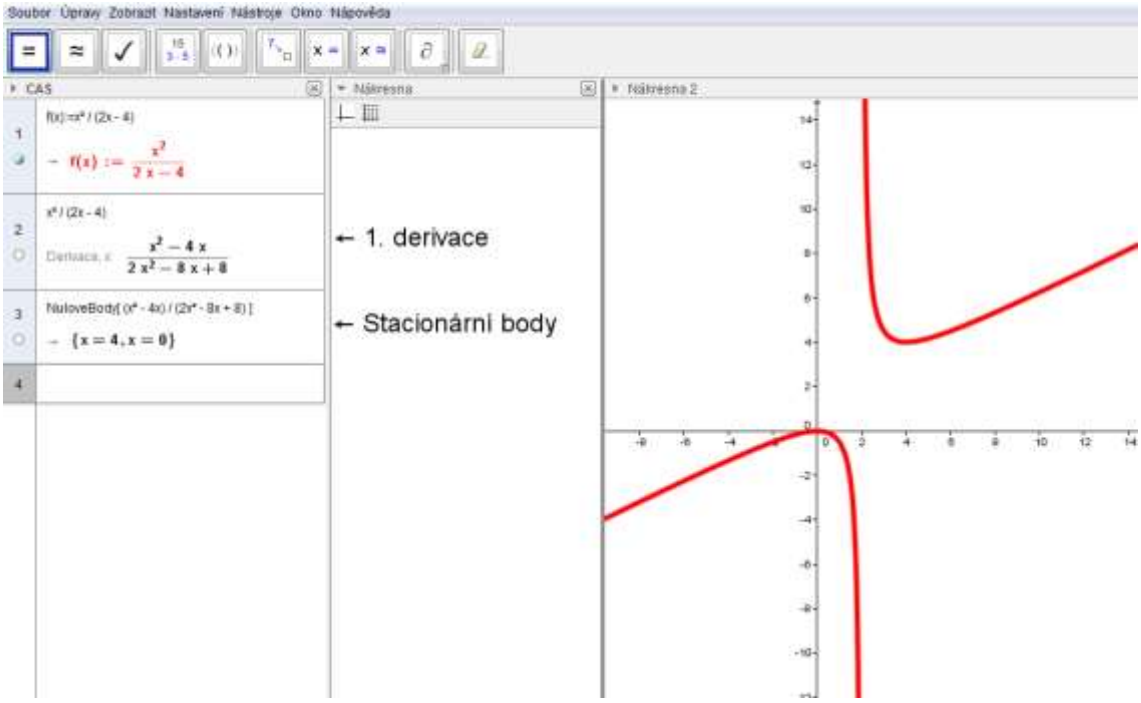


d) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Nejprve si zapíšeme funkci v původním tvaru, abychom mohli zobrazit její graf. K vypočítání první derivace použijeme nástroj se znakem derivace na horní liště. Označíme si rovnici naši funkce a stiskneme nástroj „Derivace“.

Díky první derivaci si zjistíme stacionární body, které nám rozdělí definiční obor na intervaly, ve kterých budeme zkoumat monotonii funkce. K určení stacionárních bodů využijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> dosadíme rovnici první derivace.

První derivace, stacionární body



Tato funkce má dva stacionární body $x = 0$, $x = 4$. Navíc funkce není definovaná v bodě $x = 2$, což nám společně se stacionárními body rozdělí definiční obor na čtyři intervaly $(-\infty, 0)$, $(0,2)$, $(2,4)$, $(4, \infty)$. Nyní budeme vyšetřovat monotonii v jednotlivých intervalech. V minulých příkladech jsme použili grafické zobrazení, které je funkční pouze u polynomiálních funkcí. A vzhledem k tomu, že tato funkce je lomená, grafické zobrazení použít nemůžeme.

Využijeme tedy našich znalostí při určování monotonie a z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do první derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka. Z věty o vztahu 1. derivace a monotonie (Frolíková, 1984 [1], str. 74) víme, že pokud je první derivace větší jak nula ($f'(x) > 0$), pak je funkce rostoucí. Pokud je první derivace menší jak nula ($f'(x) < 0$), pak je funkce klesající.

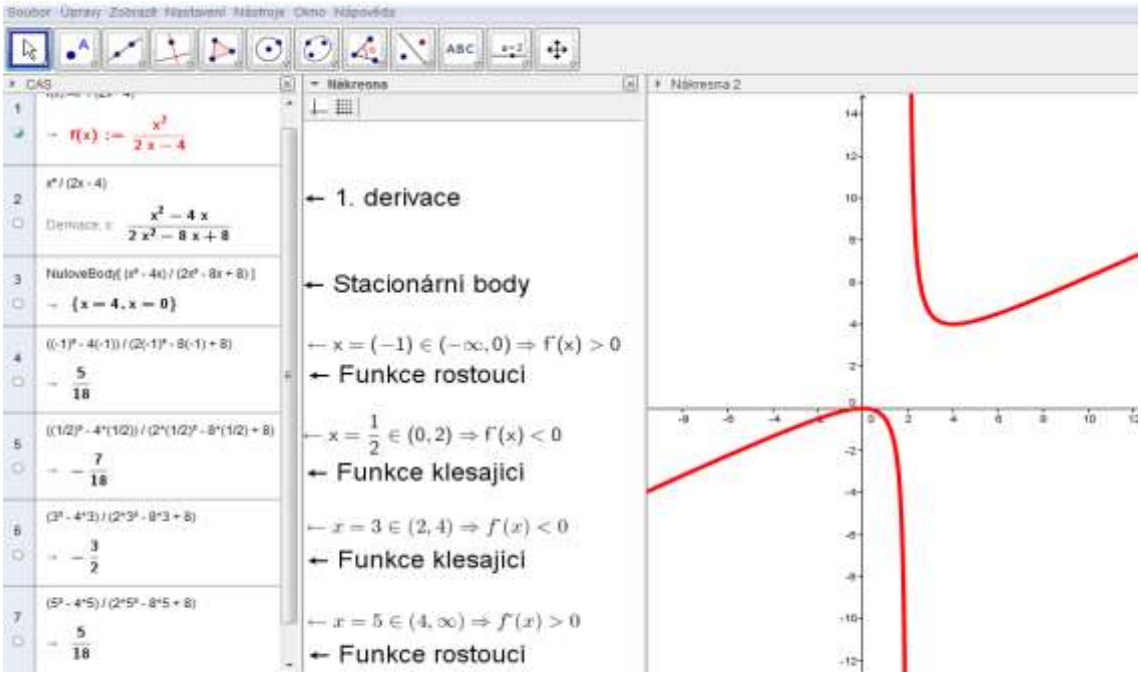
Z prvního intervalu $I = (-\infty, 0)$ zvolíme například bod $x = -1$, který dosadíme do rovnice první derivace $f'(x) = \frac{x^2-4x}{2x^2-8x+8}$. Po odentrování se nám zobrazí výsledek $\frac{5}{18} > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu rostoucí.

Z dalšího intervalu $I = (0,2)$ dosadíme do první derivace například bod $x = \frac{1}{2}$. Po vyhodnocení dostaneme výsledek $-\frac{7}{18} < 0$, tedy funkce je na tomto intervalu klesající.

Po dosazení bodu $x = 3$ z intervalu $I = (2,4)$ zjistíme, že v tomto bodě nabývá první derivace hodnoty $-\frac{3}{2} < 0$, což znamená, že na tomto intervalu je funkce klesající.

Z posledního intervalu $I = (4, \infty)$ zvolíme například bod $x = 5$, který dosadíme do první derivace. Vyjde nám výsledek $\frac{5}{18} > 0$, což značí, že funkce je na tomto intervalu rostoucí.

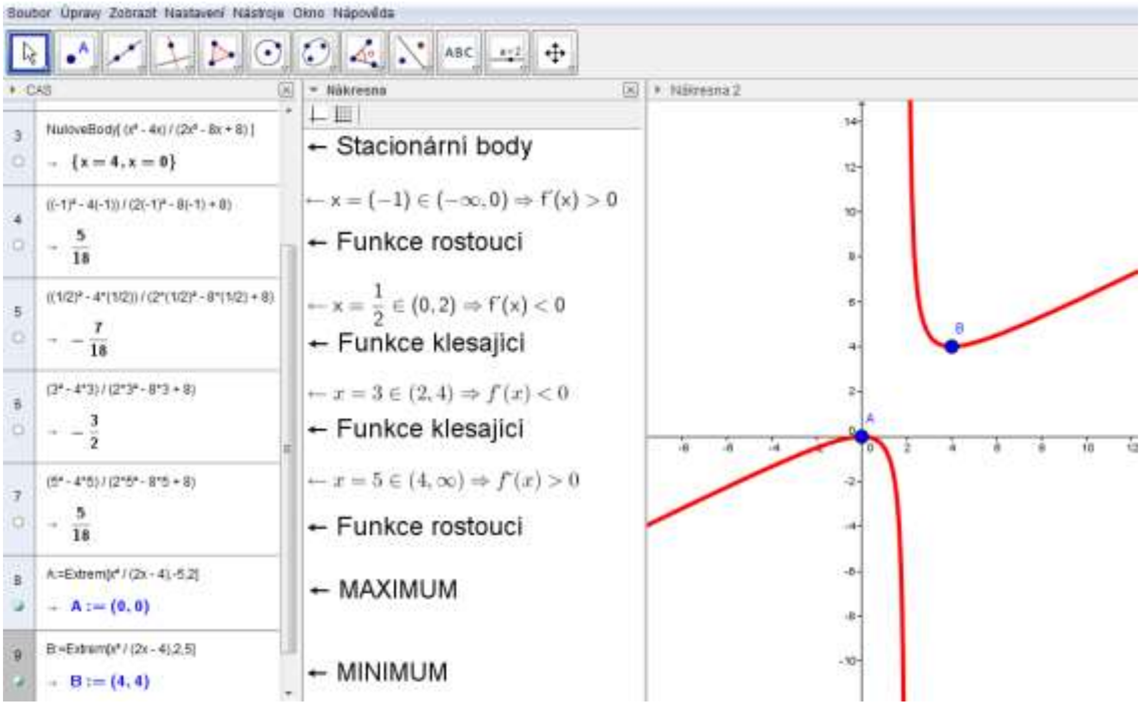
Monotonie funkce



Jak můžeme vidět, monotonie se střídá ve dvou bodech. V bodě $x = 0$ se mění funkce rostoucí na klesající, což značí, že je tam lokální extrém – přesněji lokální maximum. V GeoGebře využijeme funkci „Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]“. Do pole <Funkce> stačí napsat „$f(x)$“, do pole <Počáteční hodnota x> napíšeme libovolný bod z intervalu, kde je funkce rostoucí - $I = (-\infty, 0)$. Do pole <Koncová hodnota x> zadáme libovolný bod z intervalu, kde je funkce klesající - $I = (0,2)$. Výsledný bod lze opět zobrazit do „Nákresny 2“ pomocí bílého kolečka.

V bodě $x = 4$ se funkce mění z klesající na rostoucí, což znamená, že je v tomto bodě lokální extrém - minimum. V GeoGebře opět použijeme funkci „Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]“. Do pole <Funkce> zapíšeme opět jen „$f(x)$“, do pole <Počáteční hodnota x> zadáme libovolný bod z intervalu, kde je funkce klesající – $I = (2,4)$. Do pole <Koncová hodnota x> napíšeme libovolný bod z intervalu, kde je funkce rostoucí - $I = (4, \infty)$. Výsledné body zobrazíme do „Nákresny 2“.

Funkce „Extrem“ – lokální maximum a lokální minimum

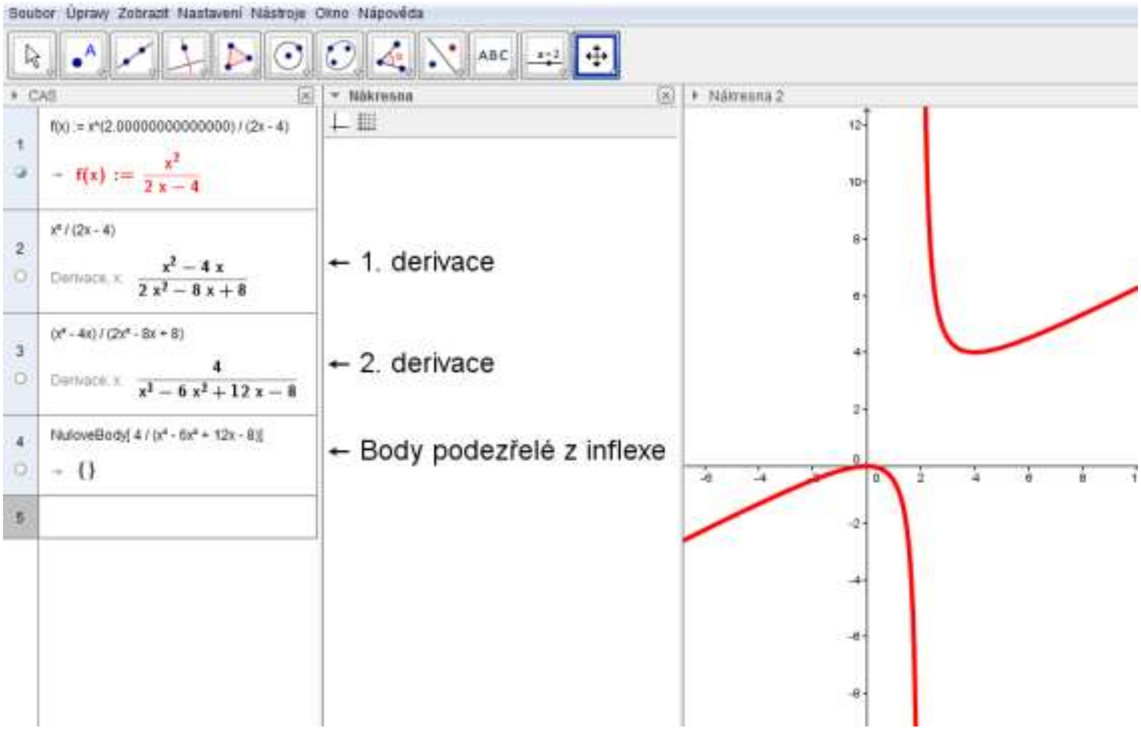


e) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Nejprve si zapíšeme rovnici naší funkce, abychom si díky ní mohli zobrazit graf funkce. Poté provedeme první derivaci funkce pomocí nástroje „Derivace“ na horním panelu. Druhá derivace se vytváří pomocí stejného nástroje, jen si před jeho použitím označíme rovnici první derivace.

K zjištění bodů podezřelých z inflexe použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> dosadíme rovnici druhé derivace.

Druhá derivace, body podezřelé z inflexe



V GeoGebře se nám zobrazí výsledek „prázdná množina - { }, což znamená, že tato funkce nemá žádný bod podezřelý z inflexe. Abychom zjistili, jak se funkce chová ve svých intervalech, ve kterých je definovaná $(-\infty, 2), (2, \infty)$, použijeme bod $x = 2$, kde funkce definována není. Nyní budeme zjišťovat konvexnost a konkávnost funkce. Z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/ konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 108) víme, že mohou nastat dvě situace. Jestliže je druhá derivace větší jak nula $(f''(x) > 0)$, pak to znamená, že funkce je konvexní. Jakmile je druhá derivace menší než nula $(f''(x) < 0)$, pak to znamená, že se jedná o funkci konkávní. Opět nemůžeme použít grafické znázornění, neboť je tato funkce lomená.

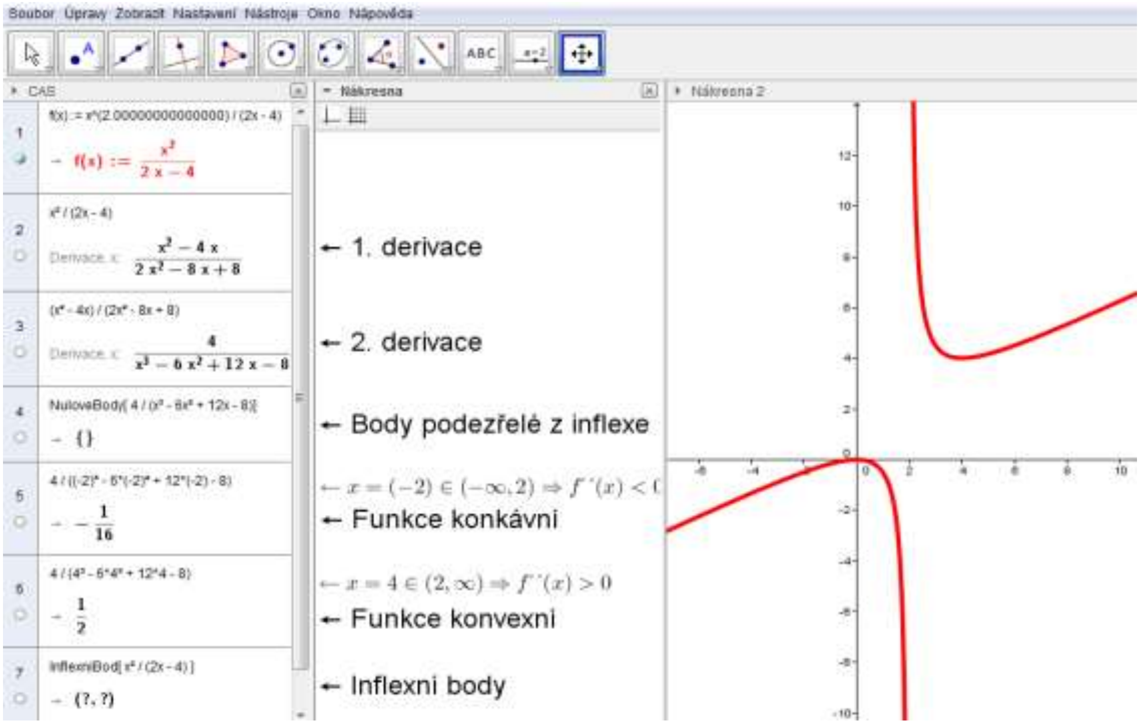
Využijeme tedy našich znalostí při určování konvexnosti a konkávnosti. Z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do druhé derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka. Z prvního intervalu $I = (-\infty, 2)$ zvolíme například bod $x = -2$, který dosadíme do rovnice druhé derivace $f''(x) = \frac{4}{x^3-6x^2+12x-8}$.

Po odentrování se nám zobrazí výsledek $-\frac{1}{16} < 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

Z dalšího intervalu $I = (2, \infty)$ dosadíme do druhé derivace například bod $x = 4$. Po vyhodnocení dostaneme výsledek $\frac{1}{2} > 0$, tedy funkce je na tomto intervalu konvexní.

V bodě $x = 2$, se funkce mění z konkávní na konvexní. Ale vzhledem k tomu, že je to bod, kde funkce není definována, nemůže být bodem inflexním. Tato funkce proto inflexní bod nemá. V GeoGebře jsme k zjišťování inflexního bodu používali funkci „InflexniBod[<Mnohočlen>]“. Bohužel, nevýhodou této funkce je, že je aplikovatelná pouze na polynomiální funkce a jelikož se v tomto příkladu jedná o funkci lomenou, funkce „InflexniBod“ není funkční a vždy se nám zobrazí výsledek „(?, ?)“.

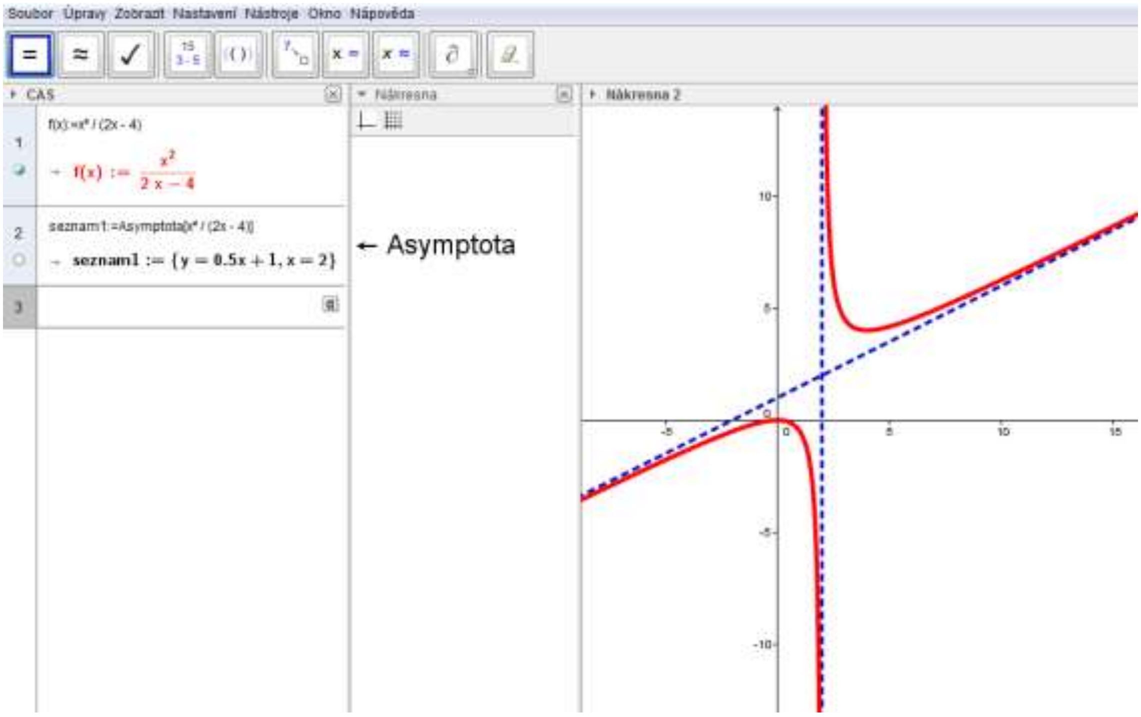
Funkce konvexní a konkávní



f) Asymptoty

K zjištění asymptoty použijeme funkci „Asymptota[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme původní znění rovnice funkce, tedy - $f(x) = \frac{x^2}{2x-4}$. V tomto případě má funkce dvě asymptoty – se směrnicí $y = \frac{1}{2}x + 1$ i vertikální $x = 2$, kde funkce není definovaná.

Asymptoty



4. Příklad 3 - $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5}$

Je dána funkce: $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5}$. Vyšetřete průběh funkce.

1) Definiční obor

Při určování definičního oboru postupujeme dle definice definičního oboru (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 8)

$$D(f): \quad \begin{matrix} 2-3x \neq 0 \\ x \neq \dfrac{2}{3} \end{matrix} \qquad D(f) = R \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

2) Sudost, lichost, periodičnost

Sudost, lichost ani periodičnost není třeba zjišťovat, protože z definičního oboru víme, že funkce není symetrická podle počátku.

3) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost

Při výpočtu limit použijeme větu o limitě funkce vzniklé na základě podílu (Frolíková, 1984 [1], str. 55). Při výpočtu limit v bodech, kde funkce není definovaná, použijeme definici jednostranných limit a větu o vztahu mezi jednostrannými a oboustrannými limitami (Frolíková, 1984 [1], str. 49).

Při zjišťování spojitosti funkce budeme vycházet z definice o spojitosti funkce v bodě a na intervalu. (Frolíková, 1984 [1], str. 61)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(\frac{2}{x}+3\right)}{x\left(\frac{2}{x}-3\right)}\right)^5 = (-1)^5 = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(\frac{2}{x}+3\right)}{x\left(\frac{2}{x}-3\right)}\right)^5 = (-1)^5 = -1$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}_+}\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = \left(\frac{4}{0_-}\right)^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}_-} \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = \left(\frac{4}{0_+}\right)^5 = \infty$$

Funkce f je podílem spojitých funkcí, tudíž je spojitá ve svém definičním oboru – tedy na množině $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

4) **Průsečíky s osou x a s osou y**

$$P(x): \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad 2 + 3x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2}{3} \qquad P_x = \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$$

$$P(y): \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 1 \qquad P_y = [0,1]$$

5) **První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie**

Při výpočtu 1. derivace použijeme vět o derivaci funkcí vzniklých na základě podílu funkcí (Frolíková, 1984 [1], str. 74).

Při určování monotonie funkce použijeme větu o vztahu 1. derivace a monotonie funkce (Frolíková, 1984 [1], str. 78).

Při určování lokálních extrému se budeme držet definice pro lokální extrémy a dále využijeme nutnou a postačující podmínku pro lokální extrém (Frolíková, 1984 [1], str. 79).

$$f'(x) = 5\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^4 \frac{3(2-3x)-(2+3x)(-3)}{(2-3x)^2} = 5\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^4 \frac{6-9x+6+9x}{(2-3x)^2} =$$

$$= 5\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^4 \frac{12}{(2-3x)^2} = 5\frac{12(2+3x)^4}{(2-3x)^6} = \frac{60(2+3x)^4}{(2-3x)^6}$$

$$\frac{60(2+3x)^4}{(2-3x)^6} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 60(2+3x)^4 = 0 \\ 2+3x = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$y = \left(\frac{2 + 3\left(-\frac{2}{3}\right)}{2 - 3\left(-\frac{2}{3}\right)}\right)^5 = \frac{2-2}{2+2} = 0$$

$$\text{Stacionární body} \quad \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$$

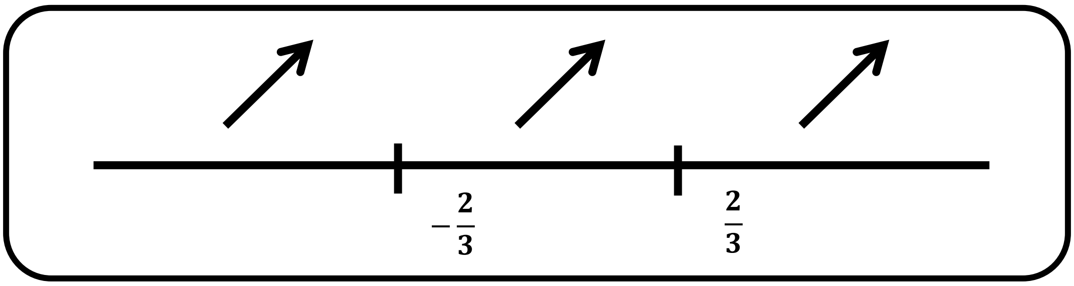
Díky první derivaci jsme vyšetřili stacionární bod $x = -\frac{2}{3}$. ke kterému přidáme bod, ve kterém funkce není definovaná $x = \frac{2}{3}$. Tím jsme definiční obor rozdělili do tří intervalů, na kterých budeme zjišťovat monotonii. V tomto případě jsme získali intervaly $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Nyní budeme postupně zkoumat, jakého znaménka nabývá první derivace v jednotlivých intervalech.

Po dosazení některého vnitřního bodu z intervalu $I = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ do rovnice první derivace zjistíme, že první derivace je kladná ($f'(x) > 0$), což dle věty o vztahu 1. derivace a monotonie funkce znamená, že se jedná na tomto intervalu o rostoucí funkci.

Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ do první derivace zjistíme, že na tomto intervalu nabývá první derivace kladné hodnoty ($f'(x) > 0$), tzn. funkce je rostoucí.

Na intervalu $I = (0, \infty)$ po dosazení některého vnitřního bodu zjistíme, že první derivace zde nabývá kladných hodnot ($f'(x) > 0$), což znamená, že funkce je zle rostoucí.



Tato funkce v žádném bodě nemění své znaménko, což znamená, že funkce nemá lokální extrém.

6) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Pro výpočet druhé derivace se budeme držet definice derivace vyššího řádu (Frolíková, 1984 [1], str. 106).

K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme definici konvexnosti a konkávnosti na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 108) a dále větu o vztahu 2. derivace funkce f a konvexnosti, konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 109).

Pro zjištění inflexního bodu užijeme věty o nutné a postačující podmínce pro inflexní bod (Frolíková, 1984 [1], str. 109-110).

$$f''(x) = \frac{60 \times 4(2+3x)^3 3(2-3x)^6 - 60(2+3x)^4 6(2-3x)^5(-3)}{((2-3x)^6)^2} =$$

$$= \frac{720(2+3x)^3(2-3x)^6 + 1080(2+3x)^4(2-3x)^5}{(2-3x)^{12}} =$$

$$= \frac{(2-3x)^5[720(2-3x)(2+3x)^3 + 1080(2+3x)^4]}{(2-3x)^{12}} =$$

$$= \frac{(2+3x)^3[720(2-3x) + 1080(2+3x)]}{(2-3x)^7} =$$

$$= \frac{(2+3x)^3[1440 - 2160x + 2160 + 3240x]}{(2-3x)^7} = \frac{(2+3x)^3[3600 + 1080x]}{(2-3x)^7}$$

$$(2+3x)^3[3600 + 1080x] = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x}_1 = -\frac{2}{3},\ \ x_2 = -\frac{10}{3}$$

$$y_1 = \left(\frac{2+3\left(-\frac{2}{3}\right)}{2-3\left(-\frac{2}{3}\right)}\right)^5 \qquad y_2 = \left(\frac{2+3\left(-\frac{10}{3}\right)}{2-3\left(-\frac{10}{3}\right)}\right)^5$$

$$y_1 = \left(\frac{2-2}{2+2}\right)^5 \qquad y_2 = \left(\frac{-8}{12}\right)^5$$

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = -\frac{32}{243}$$

Body podezřelé z inflexe $\left[-\frac{2}{3}, 0\right], \left[-\frac{10}{3}, -\frac{32}{243}\right]$

Díky druhé derivaci funkce jsme zjistili, že tato funkce má dva body podezřelé z inflexe $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{10}{3}$. Zařadíme zde i bod $x = \frac{2}{3}$, ve kterém funkce není definovaná, čímž vyšetříme konvexnost a konkávnost funkce v intervalech spojitosti. Dostali jsme tedy čtyři intervaly, ve kterých budeme určovat konvexnost a konkávnost - $\left(-\infty, -\frac{10}{3}\right), \left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

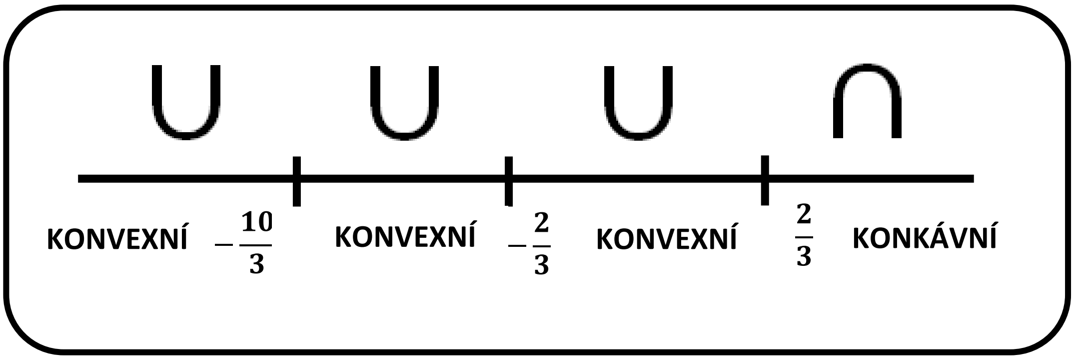
K určení konvexnosti a konkávnosti budeme potřebovat zjistit, jakého znaménka nabývá druhá derivace, po dosazení některého z vnitřních bodů intervalů.

V případě intervalu $I = \left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$ po dosazení některého vnitřního bodu do druhé derivace zjistíme, že druhá derivace zde nabývá kladných funkčních hodnot, což podle věty o vztahu 2. derivace funkce a konvexnosti a konkávnosti znamená, že funkce je na tomto intervalu konvexní.

Po dosazení jednoho z vnitřních bodů z $I = \left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ do druhé derivace funkce f vypočítáme, že druhá derivace zde nabývá kladných funkčních hodnot, což znamená, že se jedná a funkci konvexní na daném intervalu.

Na intervalu z $I = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dosadíme některý z vnitřních bodů do druhé derivace funkce f, čímž vypočítáme, že druhá derivace zde nabývá kladných funkčních hodnot, což znamená, že se jedná a funkci konvexní na daném intervalu.

Po dosazení jednoho z vnitřních bodů intervalu $I = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ zjistíme, že druhá derivace zde nabývá záporných hodnot, což znamená, že funkce je zde konkávní.



V bodě $x = \frac{2}{3}$ dochází ke změně z konvexnosti na konkávnost, ale protože je to bod, ve kterém funkce není definovaná, nemůže být bodem inflexním.

7) Asymptoty

Nyní budeme zjišťovat, zda funkce nemá asymptotu se směrnicí. Při výpočtu se budeme držet definice a nutné a postačující podmínky pro asymptoty (Frolíková, 1984 [1]).

Obecná rovnice asymptoty se směrnicí: $y = k \cdot x + q$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-243x^5 - 810x^4 - 1080x^3 - 720x^2 - 240x - 32}{243x^6 - 810x^5 + 1080x^4 - 720x^3 + 240x^2 - 32x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^6(-\frac{240}{x} - \frac{810}{x^2} - \frac{1080}{x^3} - \frac{720}{x^4} - \frac{240}{x^5} - \frac{32}{x^6})}{x^6\left(243 - \frac{810}{x} + \frac{1080}{x^2} - \frac{720}{x^3} + \frac{240}{x^4} - \frac{32}{x^5}\right)} = \frac{0}{243} = 0$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-243x^5 - 810x^4 - 1080x^3 - 720x^2 - 240x - 32}{243x^6 - 810x^5 + 1080x^4 - 720x^3 + 240x^2 - 32x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6(-\frac{240}{x} - \frac{810}{x^2} - \frac{1080}{x^3} - \frac{720}{x^4} - \frac{240}{x^5} - \frac{32}{x^6})}{x^6\left(243 - \frac{810}{x} + \frac{1080}{x^2} - \frac{720}{x^3} + \frac{240}{x^4} - \frac{32}{x^5}\right)} = \frac{0}{243} = 0$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 - 0 = \left(\frac{x\left(\frac{2}{x}+3\right)}{x\left(\frac{2}{x}-3\right)}\right)^5 = (-1)^5 = -1$$

$$y = kx + q \quad \to \quad y = -1$$

Vzhledem k definičnímu oboru a $\lim_{x\to\frac{2}{3}+} \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{2}{3}-} \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = \infty$ má funkce ještě vertikální asymptotu $x = \frac{2}{3}$.

8) Obor hodnot

Při určování oboru hodnot budeme postupovat na základě vět o vlastnostech spojitých funkcí na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 65).

Funkce f je na spojitá na množině $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Limita v ∞ je rovna -1 a limita v bodě $\frac{2}{3}$ zprava je $-\infty$. Limita v $-\infty$ je rovna -1 a limita v bodě $\frac{2}{3}$ zleva je ∞. Z věty o nabývání mezihodnot funkce f zobrazuje interval $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ na interval $(-1, \infty)$ a $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ na $(-\infty, -1)$, z čehož vyplývá obor hodnot.

$$H(f) = R \setminus \{-1\}$$

4.1. Vyšetření funkce $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5}$ v programu GeoGebra

a) Definiční obor

K zjištění definičního oboru není v GeoGebře žádný nástroj, ani jiná funkce, proto si ho musíme určit sami, s využitím vlastních znalostí.

b) Sudost, lichost, periodičnost

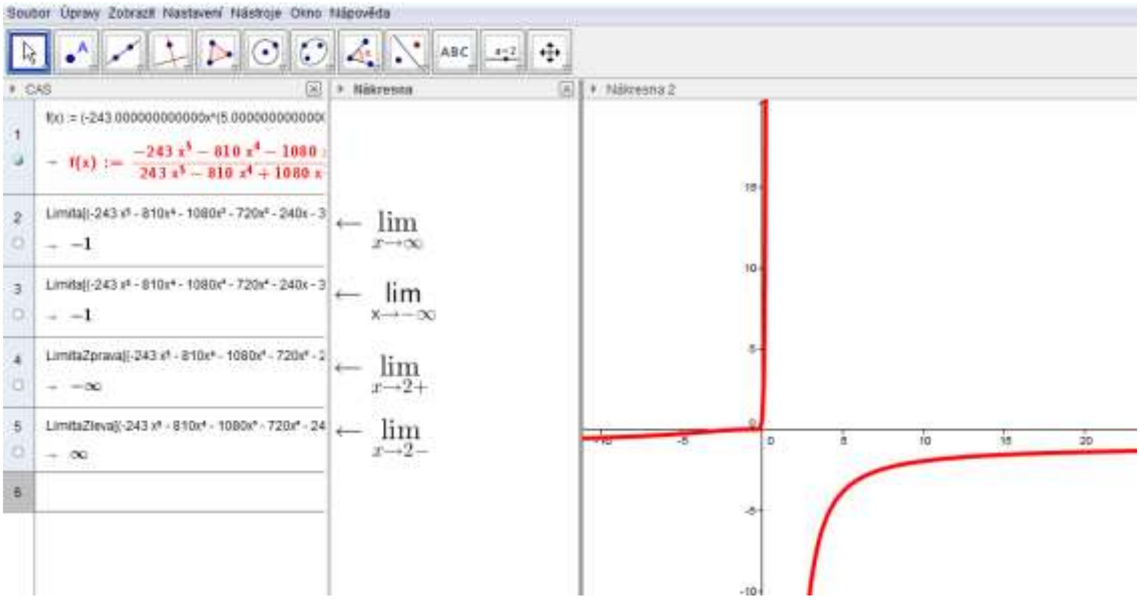
Tyto vlastnosti není potřeba zjišťovat, neboť z definičního oboru víme, že funkce není symetrická podle počátku.

c) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost, průsečíky, průsečíky s osou $\boldsymbol{x}$

Do prvního podokna napíšeme rovnici naší funkce, díky níž zobrazíme graf do „Nákresny 2“. Ke zjištění limit v krajních bodech definičního oboru použijeme funkci „Limita[<Výraz>, <Hodnota>]“. Do pole <Výraz> zapíšeme naši funkci a do pole <Hodnota> napíšeme do jednoho podokna nejprve ∞, do dalšího pak $-\infty$.

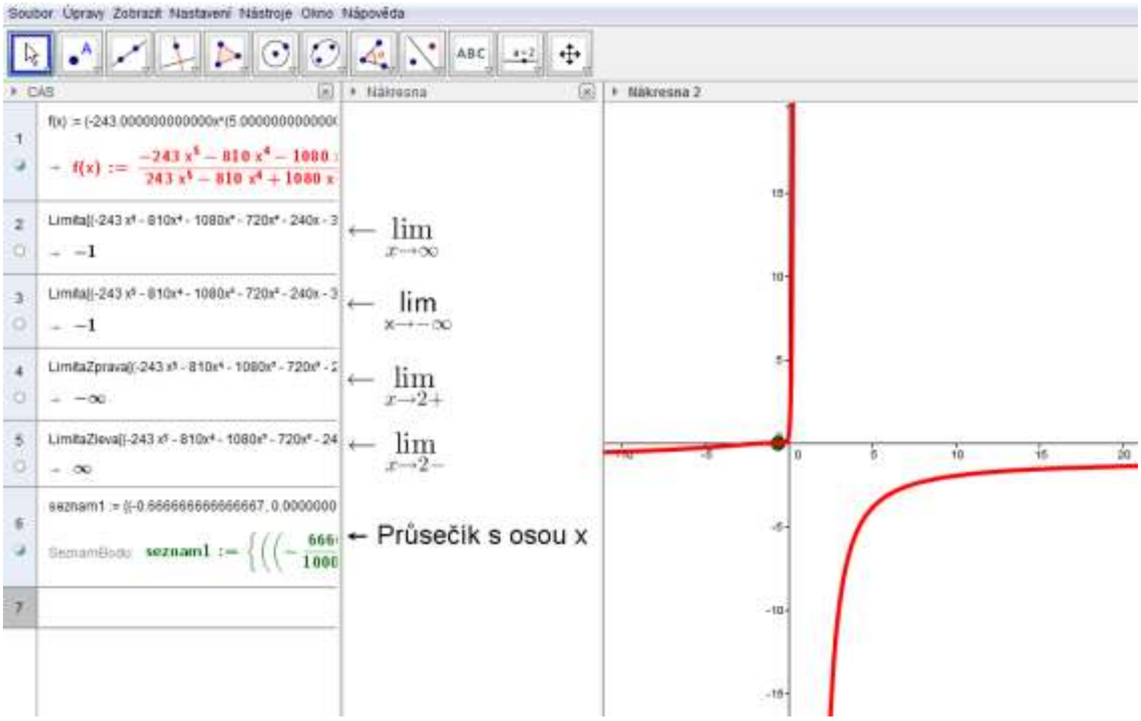
Tato funkce má definiční obor $D(f) = R \setminus \frac{2}{3}$, což znamená, že v bodě $x = \frac{2}{3}$ funkce není definovaná. Musíme tedy vyšetřit, jak se funkce chová okolo tohoto bodu, což zjistíme pomocí limity zprava a limity zleva. V okně „CAS“ do podokna začneme psát „Limita“, kde se nám opět zobrazí nabídka možných funkcí. Pro výpočet limity zprava bodu $x = \frac{2}{3}$ zvolíme funkci „LimitaZprava[<Výraz>,<Hodnota>]“, kde do pole <Výraz> zadáme funkci $f(x) = \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5$, a do pole <Hodnota> napíšeme $\frac{2}{3}$. Pro výpočet limity zleva bodu $x = \frac{2}{3}$ zvolíme funkci „LimitaZleva[<Výraz>,<Hodnota>]“, kde do pole <Výraz> zadáme naši funkci $f(x) = \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5$, a do pole <Hodnota> napíšeme $\frac{2}{3}$.

Vypočtené limity



Pro určení průsečíků s osou x použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> zadáme rovnici funkce. Pro zobrazení bodů opět jen stiskneme bílé kolečko na levé straně podokna.

Průsečíky s osou x

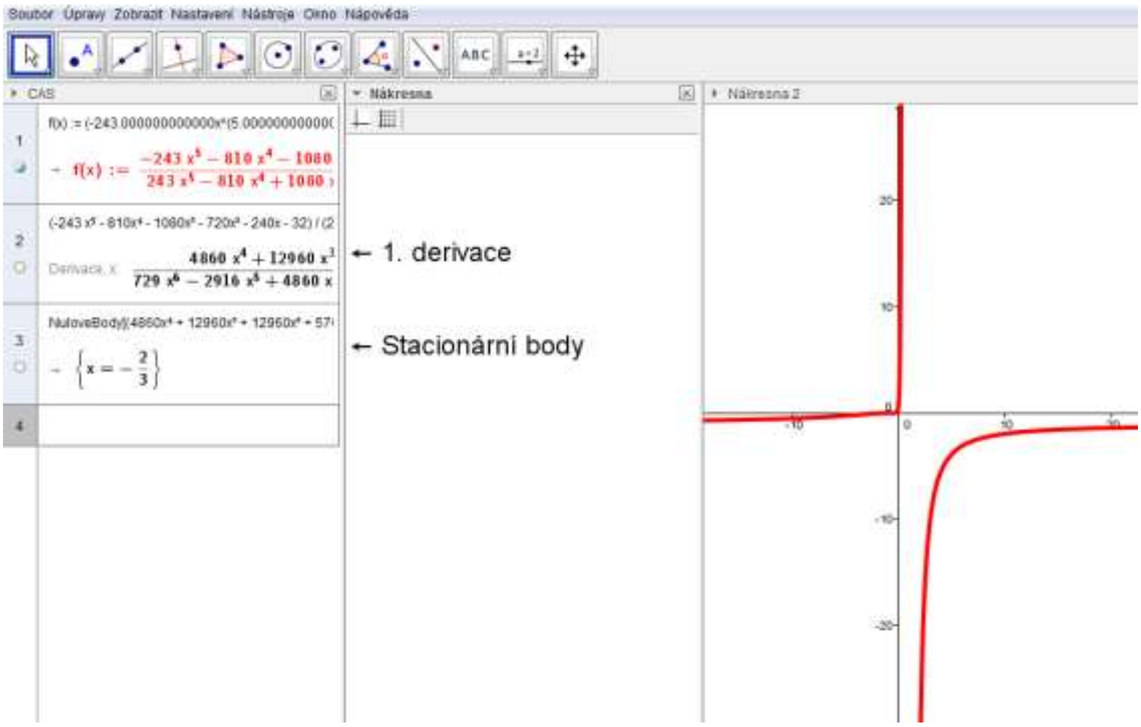


d) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Nejprve si zapíšeme funkci v původním tvaru, abychom mohli zobrazit její graf. K vypočítání první derivace použijeme nástroj se znakem derivace na horní liště. Označíme si rovnici naši funkce a stiskneme nástroj „Derivace“.

Pomocí první derivace si zjistíme stacionární body, které nám rozdělí definiční obor na intervaly, ve kterých budeme zkoumat monotonii funkce. K určení stacionárních bodů využijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> dosadíme rovnici první derivace.

První derivace, stacionární body



Díky první derivaci jsme vyšetřili jeden stacionární bod $x = -\frac{2}{3}$. Navíc funkce není definovaná v bodě $x = \frac{2}{3}$, což nám společně se stacionárním bodem rozdělí definiční obor na tři intervaly $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. Nyní budeme vyšetřovat monotonii v jednotlivých intervalech. Opět nemůžeme využít grafické znázornění, neboť se jedná o lomenou funkci.

Využijeme tedy našich znalostí při určování monotonie a z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do první derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka. Z věty o vztahu 1. derivace a monotonie (Frolíková, 1984 [1], str. 74) víme, že pokud je první derivace větší jak nula ($f'(x) > 0$), pak je funkce rostoucí. Pokud je první derivace menší jak nula ($f'(x) < 0$), pak je funkce klesající.

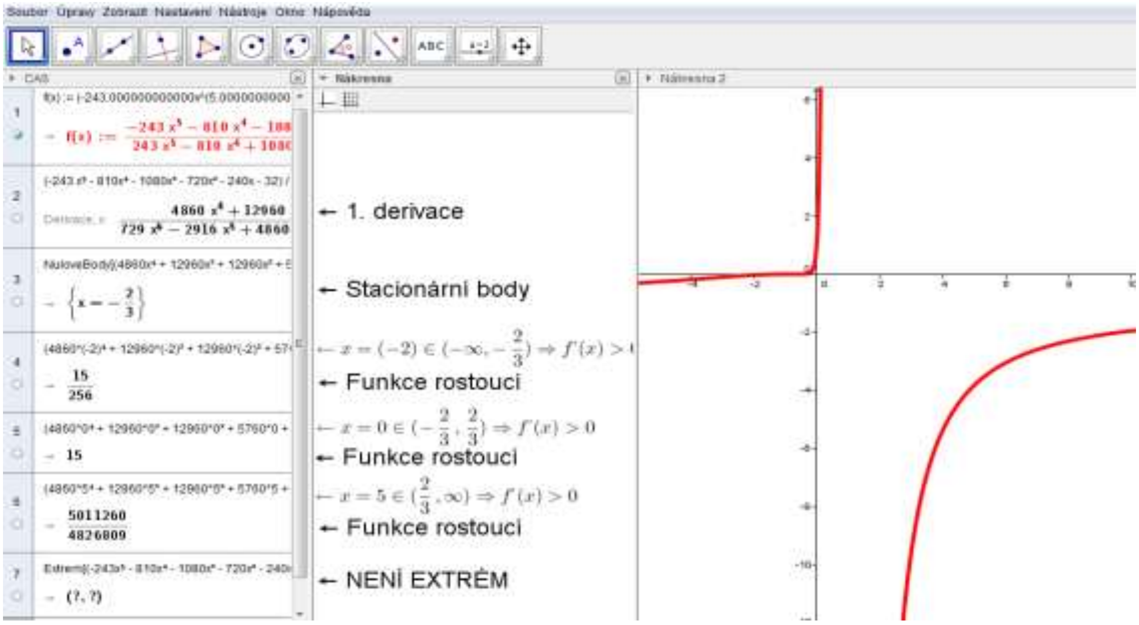
Z prvního intervalu $I = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ zvolíme například bod $x = -2$, který dosadíme do rovnice první derivace $f'(x) = \frac{60(2+3x)^4}{(2-3x)^6}$. Po odentrování se nám zobrazí výsledek $\frac{15}{256} > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu rostoucí.

Z dalšího intervalu $I = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dosadíme do první derivace například bod $x = 0$. Po vyhodnocení dostaneme výsledek $15 > 0$, tedy funkce je na tomto intervalu rostoucí.

Po dosazení bodu $x = 5$ z intervalu $I = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ zjistíme, že v tomto bodě nabývá první derivace hodnoty $\frac{5011260}{4826809} > 0$, což znamená, že na tomto intervalu je funkce rostoucí.

Jak můžeme vidět, monotonie se nestřídá v žádném bodě, tudíž nemá žádný lokální extrém. V GeoGebře se přesto můžeme přesvědčit a využijeme funkci „Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]“. Do pole <Funkce> stačí napsat „$f(x)$“, do pole <Počáteční hodnota x> napíšeme libovolný bod z levého okolí stacionárního bodu $x = -\frac{2}{3}$ a do pole <Koncová hodnota x> zadáme libovolný bod z pravého okolí stacionárního bodu $x = -\frac{2}{3}$. Po odentrování se nám zobrazí „$(?,?)$“, což znamená, že funkce nemá žádný extrém.

Monotonie funkce, lokální extrém

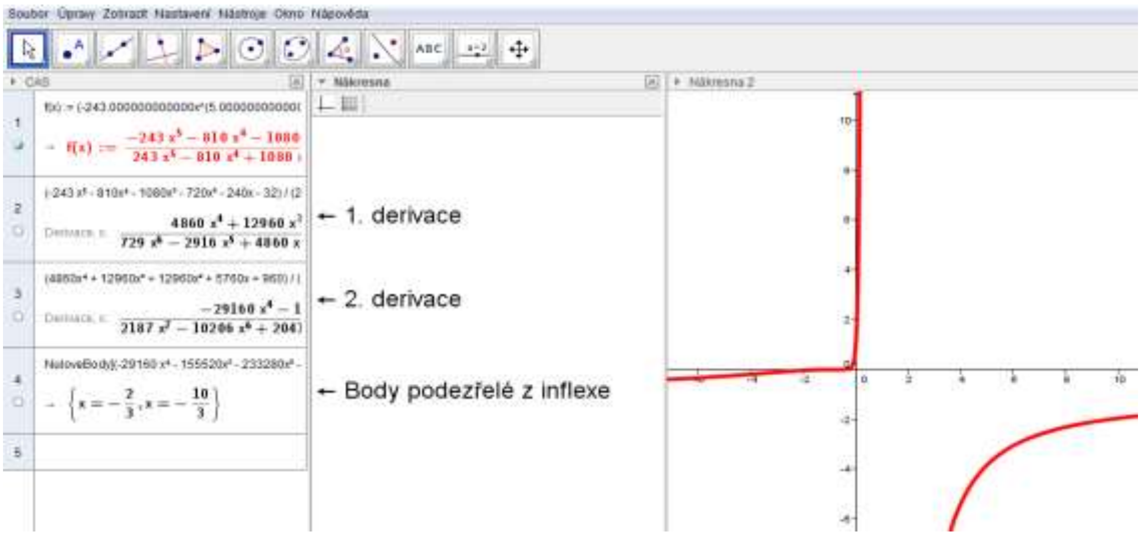


e) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Nejprve si zapíšeme rovnici naší funkce, abychom si díky ní mohli zobrazit graf funkce. Poté provedeme první derivaci funkce pomocí nástroje „Derivace" na horním panelu. Druhá derivace se vytváří pomocí stejného nástroje, jen si před jeho použitím označíme rovnici první derivace.

K zjištění bodů podezřelých z inflexe použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]", kde do pole <Polynom> dosadíme rovnici druhé derivace.

Druhá derivace, body podezřelé z inflexe



Díky druhé derivaci jsme vyšetřili, že tato funkce má dva body podezřelé z inflexe $x = -\frac{10}{3}, x = -\frac{2}{3}$. Abychom zjistili, jak se funkce chová ve svých intervalech, ve kterých je definovaná, použijeme bod $x = \frac{2}{3}$, kde funkce definována není. Tím dostaneme čtyři intervaly $\left(-\infty, -\frac{10}{3}\right), \left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. Nyní budeme zjišťovat konvexnost a konkávnost funkce. Z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 108) víme, že mohou nastat dvě situace. Jestliže je druhá derivace větší jak nula ($f''(x) > 0$), pak to znamená, že funkce je konvexní. Jakmile je druhá derivace menší než nula ($f''(x) < 0$), pak to znamená, že se jedná o funkci konkávní.

Opět nemůžeme použít grafické znázornění, neboť je tato funkce lomená. Využijeme tedy našich znalostí při určování konvexnosti a konkávnosti. Z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do rovnice druhé derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka.

Z prvního intervalu $I = \left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$ zvolíme například bod $x = -4$, který dosadíme do rovnice druhé derivace $f''(x) = \frac{(2+3x)^3[3600+1080x]}{(2-3x)^7}$. Po odentrování se nám zobrazí výsledek $\frac{5625}{823543} > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konvexní.

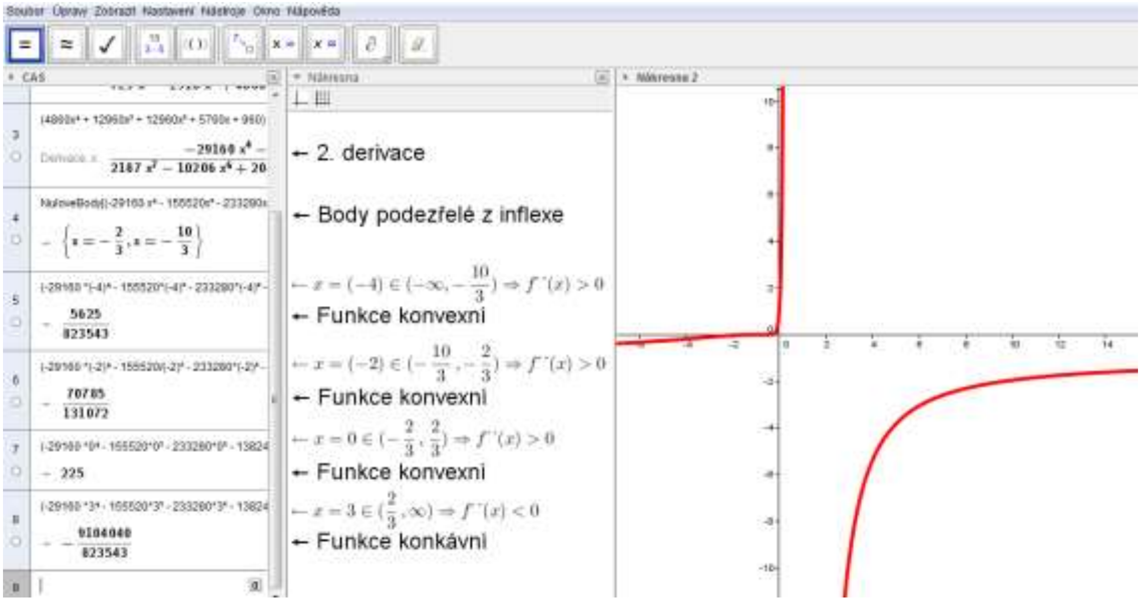
Z dalšího intervalu $I = \left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ dosadíme do druhé derivace například bod $x = -2$. Po vyhodnocení dostaneme výsledek $\frac{70785}{131072} > 0$, tedy funkce je na tomto intervalu konvexní.

Po dosazení bodu $x = 0$ z intervalu $I = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ zjistíme, že v tomto bodě nabývá druhá derivace hodnoty $225 > 0$, což znamená, že na tomto intervalu je funkce konvexní.

Po dosazení bodu $x = 3$ z intervalu $I = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ zjistíme, že druhá derivace v tomto bodě nabývá hodnoty $-\frac{9104040}{823543} < 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

V bodě $x = \frac{2}{3}$, se funkce mění z konvexní na konkávní. Ale vzhledem k tomu, že je to bod, kde funkce není definována, nemůže být ani bodem inflexním. V GeoGebře funkci „InflexniBod“ nepoužijeme, neboť je aplikovatelná na polynomiální funkce a tato funkce je lomená.

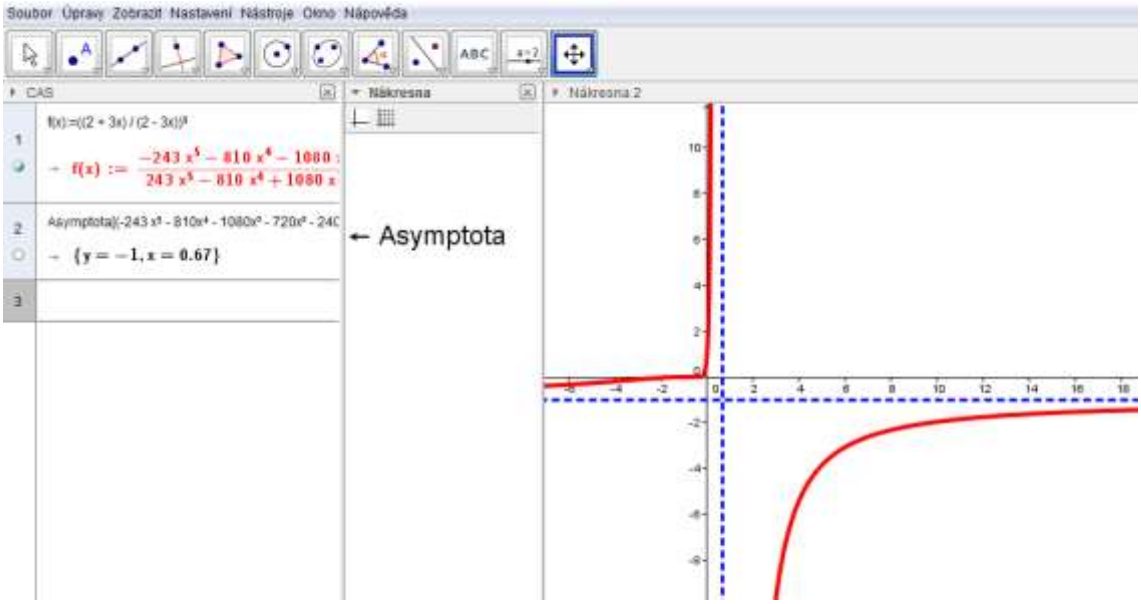
Funkce konvexní a konkávní



f) Asymptoty

K zjištění asymptoty použijeme funkci „Asymptota[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme původní znění rovnice funkce, tedy - $f(x) = \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5$. Tato funkce má asymptotu se směrnicí $y = -1$ a také vertikální asymptotu $x = \frac{2}{3}$, kde funkce není definovaná a $\lim_{x \to \frac{2}{3}+} \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = -\infty$, $\lim_{x \to \frac{2}{3}-} \left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^5 = \infty$.

Asymptoty



5. Příklad 4 - $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = \frac{\ln(2x)}{x}}$

Je dána funkce: $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = \frac{\ln(2x)}{x}}$. Vyšetřete průběh funkce.

1) Definiční obor

Při určování definičního oboru postupujeme dle definice definičního oboru (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 8)

$$D(f) = (0, \infty)$$

2) Sudost, lichost, periodičnost

V tomto příkladu není potřeba zjišťovat sudost, lichost ani periodičnost, neboť to vyplývá již ze samotného definičního oboru, který není symetrický podle počátku.

3) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost

Při výpočtu limit použijeme větu o L´Hospitalově pravidle (Frolíková, 1984 [1], str. 102). Při výpočtu limit v bodech, kde funkce není definovaná, použijeme definici jednostranných limit a větu o vztahu mezi jednostrannými a oboustrannými limitami (Frolíková, 1984 [1], str. 49).

Při zjišťování spojitosti funkce budeme vycházet z definice o spojitosti funkce v bodě a na intervalu. (Frolíková, 1984 [1], str. 61)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} \cdot \frac{1}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(2x)}{x} = -\infty \cdot \frac{1}{0_+} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

Funkce f je podílem spojitých funkcí, tudíž je spojitá ve svém definičním oboru – tedy na intervalu $(0, \infty)$.

4) Průsečíky s osou x a s osou y

$$P(x): \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \ln(2x) = 0 \\ \ln(2x) = \ln 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad P_x = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$$

$$P(y): \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{není definováno}$$

5) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Při výpočtu 1. derivace použijeme vět o derivaci funkcí vzniklých na základě podílu funkcí (Frolíková, 1984 [1], str. 74).

Při určování monotonie funkce použijeme větu o vztahu 1. derivace a monotonie funkce (Frolíková, 1984 [1], str. 78).

Při určování lokálních extrému se budeme držet definice pro lokální extrémy a dále využijeme nutnou a postačující podmínku pro lokální extrém (Frolíková, 1984 [1], str. 79).

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2x}x - \ln(2x)\,1}{x^2} = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$$

$$\frac{1 - \ln(2x)}{x^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 - \ln(2x) = 0 \\ \ln(2x) = 1 \\ \ln(2x) = \ln e \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} 2x = e \\ x = \frac{e}{2} \end{matrix}$$

$$y = \frac{\ln\left(2\left(\frac{e}{2}\right)\right)}{\frac{e}{2}} = \frac{1}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$$

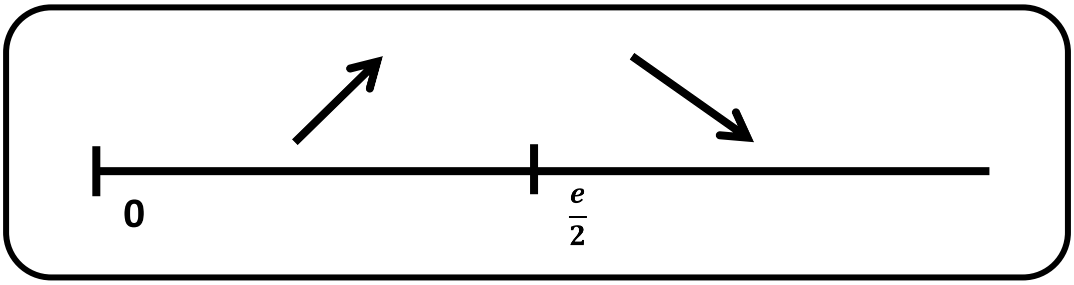
$$\text{Stacionární body} \quad \left[\frac{e}{2}, \frac{2}{e}\right]$$

Díky první derivaci jsme vyšetřili stacionární bod $x = \frac{e}{2}$. Tím se definiční obor rozdělí do dvou intervalů, na kterých budeme zjišťovat monotonii. V tomto případě jsme získali intervaly $\left(0, \frac{e}{2}\right), \left(\frac{e}{2}, \infty\right)$.

Nyní budeme postupně zkoumat, jakého znaménka nabývá první derivace v jednotlivých intervalech.

Po dosazení některého vnitřního bodu z intervalu $I = \left(0, \frac{e}{2}\right)$ do rovnice první derivace zjistíme, že první derivace je kladná ($f'(x) > 0$), což dle věty o vztahu 1. derivace a monotonie funkce znamená, že se jedná na tomto intervalu o rostoucí funkci.

Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (\frac{e}{2}, \infty)$ do první derivace zjistíme, že na tomto intervalu nabývá první derivace záporné hodnoty ($f'(x) < 0$), tzn. funkce je na tomto intervalu klesající.



$$\mathrm{MIN} = \left[\frac{e}{2}, \frac{2}{e}\right]$$

Vzhledem k tomu, že derivace funkce f v bodě $x = \frac{e}{2}$ mění znaménko (v levém prstencovém okolí bodu $\frac{e}{2}$ je znaménko první derivace kladné, v pravém záporné), tak funkce nabývá v bodě $x = \frac{e}{2}$ lokální maximum.

6) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Pro výpočet druhé derivace se budeme držet definice derivace vyššího řádu (Frolíková, 1984 [1], str. 106).

K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme definici konvexnosti a konkávnosti na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 108) a dále větu o vztahu 2. derivace funkce f a konvexnosti, konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 109).

Pro zjištění inflexního bodu užijeme věty o nutné a postačující podmínce pro inflexní bod (Frolíková, 1984 [1], str. 109-110).

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{2x}x^2 - (1 - \ln(2x))2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\ln(2x)}{x^4} = \frac{x(-3 + 2\ln(2x))}{x^4} =$$
$$= \frac{2\ln(2x) - 3}{x^3}$$

$$2\ln(2x) - 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{gathered} \ln(2x) = \frac{3}{2} \\ \ln(2x) = \ln e^{\frac{3}{2}} \\ 2x = e^{\frac{3}{2}} \end{gathered} \qquad \mathrm{x} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$y = \frac{\ln\left(2\left(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}\right)\right)}{\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}} = 3e^{\frac{3}{2}}$$

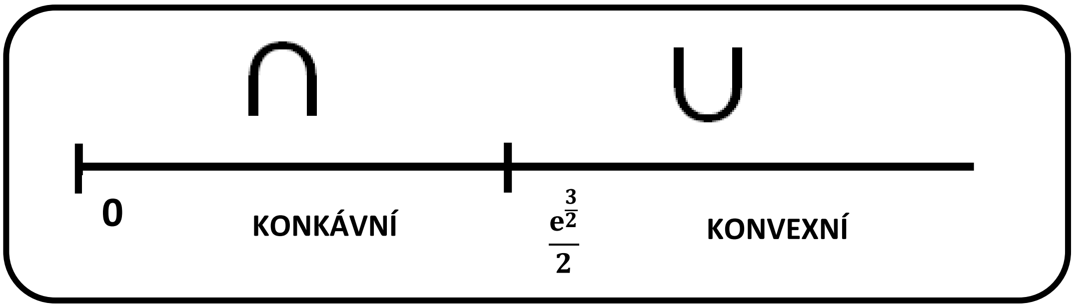
Body podezřelé z inflexe $\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}, 3e^{\frac{3}{2}}\right]$

Díky druhé derivaci funkce jsme zjistili, že tato funkce má jeden bod podezřelý z inflexe $x = \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}$. Dostaneme tedy dva intervaly, ve kterých budeme určovat konvexnost a konkávnost - $\left(0, \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}, \infty\right)$.

K určení konvexnosti a konkávnosti budeme potřebovat zjistit, jakého znaménka nabývá druhá derivace, po dosazení některého z vnitřních bodů intervalů.

V případě intervalu $I = \left(0, \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}\right)$ po dosazení některého vnitřního bodu do druhé derivace zjistíme, že druhá derivace zde nabývá záporných funkčních hodnot, což podle věty o vztahu 2. derivace funkce a konvexnosti a konkávnosti znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

Po dosazení jednoho z vnitřních bodů intervalu $I = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}, \infty\right)$ zjistíme, že druhá derivace zde nabývá kladných hodnot, což znamená, že funkce je zde konvexní.



V bodě $x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$ dochází ke změně z konkávnosti na konvexnost, což znamená, že bod $x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$ je inflexní.

7) Asymptoty

Nyní budeme zjišťovat, zda funkce nemá asymptotu se směrnicí. Při výpočtu se budeme držet definice a nutné a postačující podmínky pro asymptoty (Frolíková, 1984 [1]).

Obecná rovnice asymptoty se směrnicí: $y = k \cdot x + q$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\ln(2x)}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(2x)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{2x}}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{4x^2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\ln(2x)}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{4x^2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(2x)}{x} - 0 = 0$$

$$y = kx + q \quad \rightarrow \quad y = 0$$

Vzhledem k definičnímu oboru a $\lim_{x \to 0_+} \frac{\ln(2x)}{x} = -\infty$ má funkce i vertikální asymptotu $x = 0$.

8) Obor hodnot

Při určování oboru hodnot budeme postupovat na základě vět o vlastnostech spojitých funkcí na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 65).

Funkce f je na spojitá na intervalu $(0, \infty)$, to znamená, že zobrazuje interval na interval. Limita v 0 zprava je $-\infty$ a funkce nabývá v bodě $\frac{e}{2}$ svého maxima rovného $\frac{2}{e}$. Podle věty o nabývání mezihodnot funkce f zobrazuje $(0, \infty)$ na $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right\rangle$. Z čehož plyne obor hodnot.

$$H(f) = \left(-\infty, \frac{e}{2}\right\rangle$$

5.1. Vyšetření funkce f: $y = \frac{\ln(2x)}{x}$ v programu GeoGebra

a) Definiční obor

K zjištění definičního oboru není v GeoGebře žádný nástroj, ani jiná funkce, proto si ho musíme určit sami, s využitím vlastních znalostí.

b) Sudost, lichost, periodičnost

Tyto vlastnosti není potřeba vyšetřovat, neboť z definičního oboru plyne, že funkce není symetrická podle počátku.

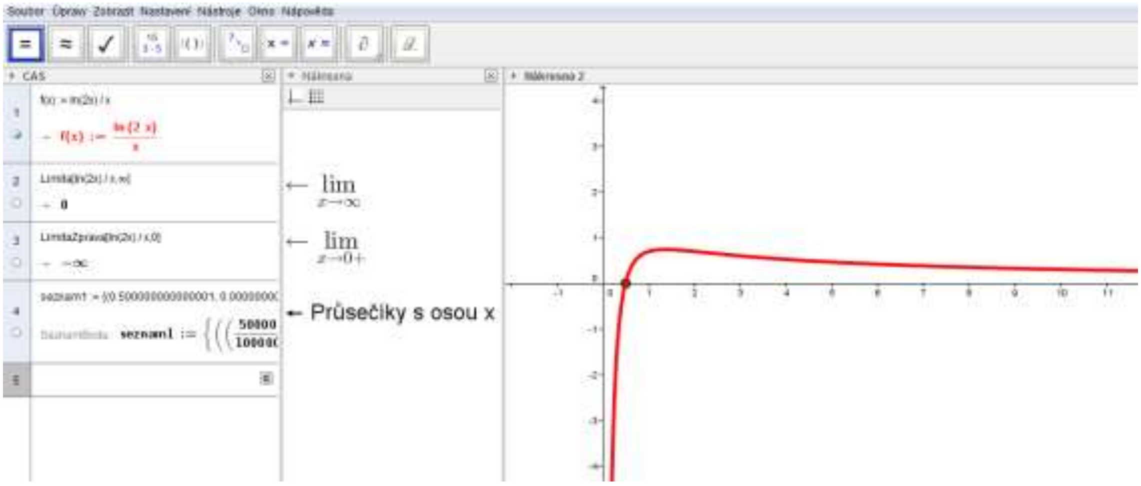
c) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost, průsečíky, průsečíky s osou x

Do prvního podokna napíšeme rovnici naší funkce, díky níž zobrazíme graf do „Nákresny 2“. Ke zjištění limit v krajních bodech definičního oboru použijeme funkci „Limita[<Výraz>, <Hodnota>]“. Do pole <Výraz> zapíšeme naši funkci a do pole <Hodnota> napíšeme do podokna ∞. Limitu jdoucí do $-\infty$ určovat nemusíme, neboť z definičního oboru této funkce víme, že logaritmus je definovaný v intervalu $(0, \infty)$.

Vzhledem k tomuto definičnímu oboru musíme vyšetřit druhý krajní bod definičního oboru, což je v našem případě 0. Vyšetříme ho pomocí limity zprava, čímž zjistíme, jak se funkce chová okolo tohoto bodu. V okně „CAS“ do podokna začneme psát „Limita“, kde se nám opět zobrazí nabídka možných funkcí. Pro výpočet limity zprava bodu $x = 0$ zvolíme funkci „LimitaZprava[<Výraz>,<Hodnota>]“, kde do pole <Výraz> zadáme funkci $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$, a do pole <Hodnota> napíšeme 0. Limitu zleva opět nemusíme řešit, protože interval definičního oboru je otevřený, tudíž 0 do něj nepatří a tím pádem není potřeba zjišťovat levé okolí bodu, když tam funkce není definovaná.

Pro určení průsečíků s osou x použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> zadáme rovnici funkce. Pro zobrazení bodů opět jen stiskneme bílé kolečko na levé straně podokna.

Vypočtené limity, průsečík s osou x

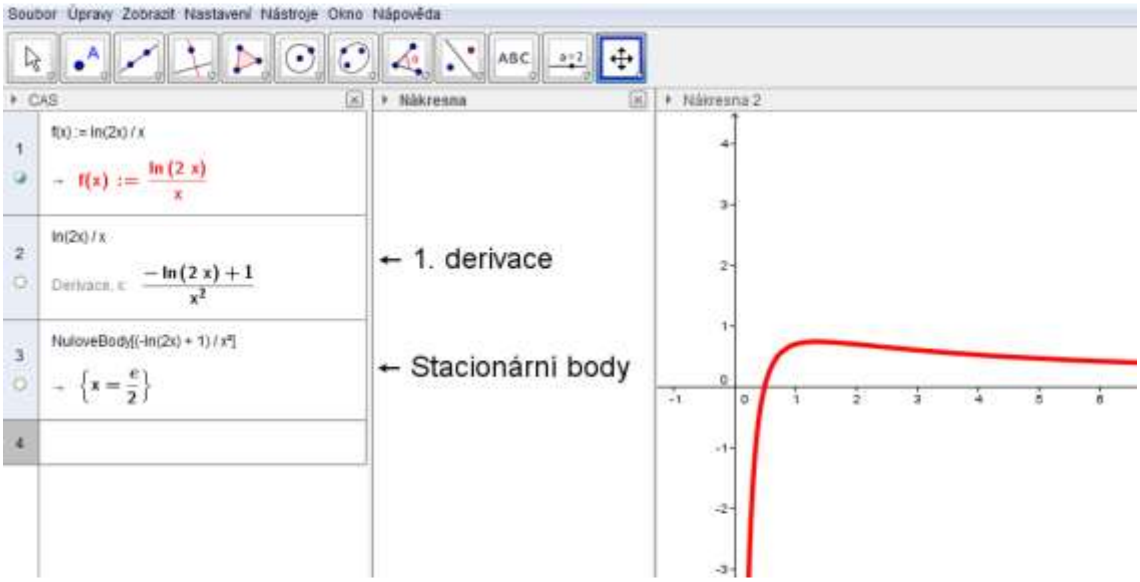


d) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Nejprve si zapíšeme funkci v původním tvaru, abychom mohli zobrazit její graf. K vypočítání první derivace použijeme nástroj se znakem derivace na horní liště. Označíme si rovnici naši funkce a stiskneme nástroj „Derivace“.

Díky první derivaci si zjistíme stacionární body, které nám rozdělí definiční obor na intervaly, ve kterých budeme zkoumat monotonii funkce. K určení stacionárních bodů využijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> dosadíme rovnici první derivace.

První derivace, stacionární body

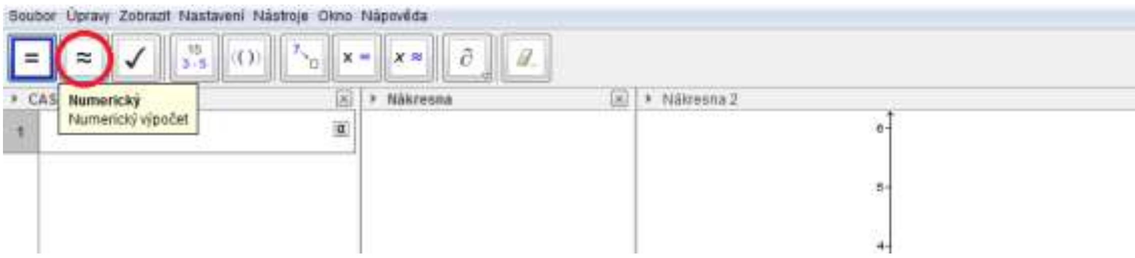


Pomocí první derivace jsme vyšetřili jeden stacionární bod $x = \frac{e}{2}$, který rozdělí definiční obor na dva intervaly $\left(0, \frac{e}{2}\right)$, $\left(\frac{e}{2}, \infty\right)$. Nyní budeme vyšetřovat monotonii v jednotlivých intervalech. Opět nemůžeme využít grafické znázornění, neboť se jedná o lomenou funkci. Využijeme tedy našich znalostí při určování monotonie a z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do první derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka. Z věty o vztahu 1. derivace a monotonie (Frolíková, 1984 [1], str. 74) víme, že pokud je první derivace větší jak nula $(f'(x) > 0)$, pak je funkce rostoucí. Pokud je první derivace menší jak nula $(f'(x) < 0)$, pak je funkce klesající.

Z prvního intervalu $I = \left(0, \frac{e}{2}\right)$ zvolíme například bod $x = 1$, který dosadíme do rovnice první derivace $f'(x) = \frac{1-\ln(2x)}{x^2}$. Abychom dostali číselný výsledek, na horní liště v okně „CAS" si zvolíme druhý nástroj zprava – „Numerický", který má ve znaku vlnité rovná se (viz. „Numerický výpočet").

Tím docílíme toho, že se nám zobrazí přesný výpočet a budeme tak moct rozhodnout o znaménku derivace.

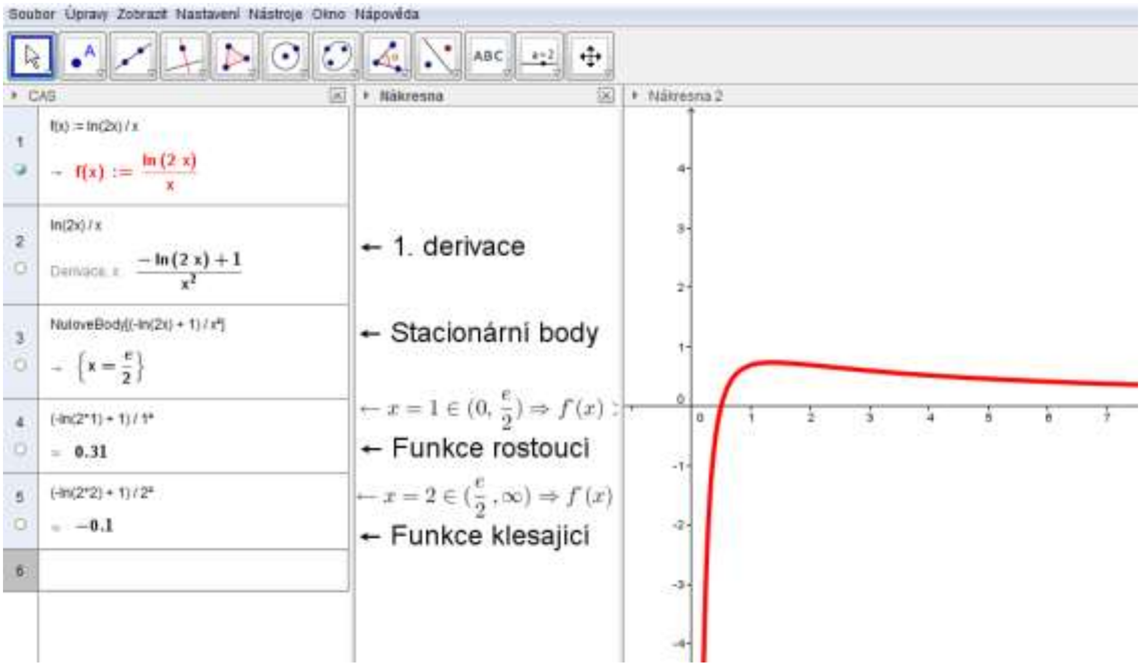
Numerický výpočet



V našem intervalu $I = \left(0, \frac{e}{2}\right)$ se po použití toho nástroje zobrazí $0{,}31 > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu rostoucí.

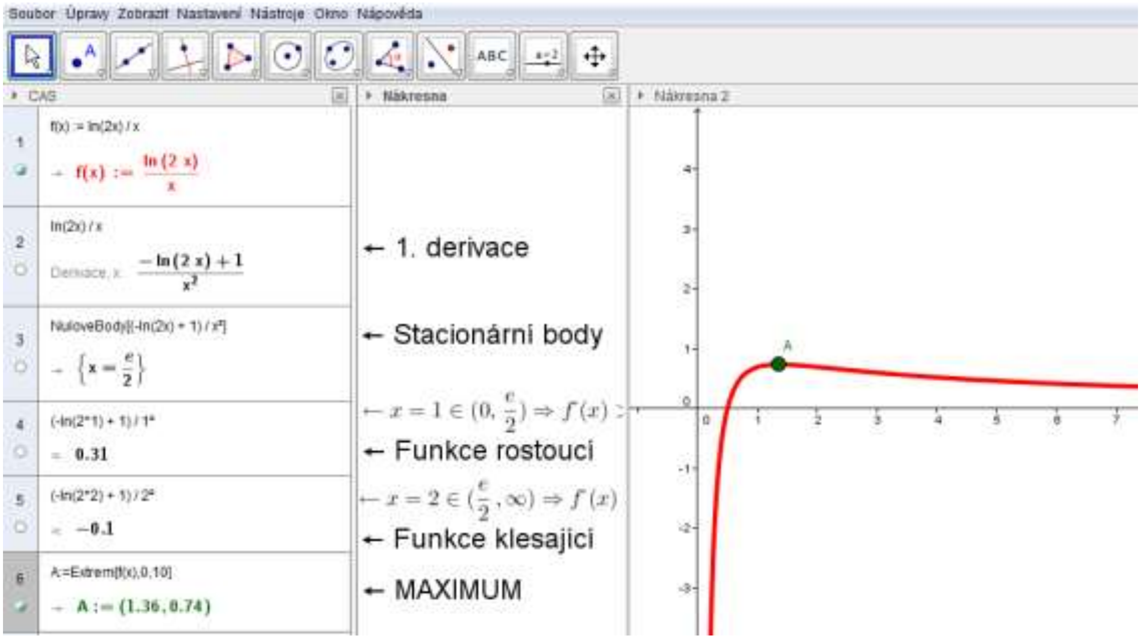
Z dalšího intervalu $I = \left(\frac{e}{2}, \infty\right)$ dosadíme do první derivace například bod $x = 2$. Po numerickém vyhodnocení dostaneme výsledek $-0{,}1 < 0$, tedy funkce je na tomto intervalu klesající.

Monotonie funkce



Jak můžeme vidět, monotonie se střídá jen v jednom bodě. V bodě $x = \frac{e}{2}$ se mění funkce z rostoucí na klesající, což značí, že je tam lokální extrém – přesněji lokální maximum. V GeoGebře využijeme funkci „Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]“. Do pole <Funkce> stačí napsat „$f(x)$“, do pole <Počáteční hodnota x> napíšeme libovolný bod z intervalu, kde je funkce rostoucí - $I = \left(0, \frac{e}{2}\right)$. Do pole <Koncová hodnota x> zadáme libovolný bod z intervalu, kde je funkce klesající - $I = (\frac{e}{2}, \infty)$. Výsledný bod lze opět zobrazit do „Nákresny 2“ pomocí bílého kolečka.

Funkce „Extrem“ – lokální maximum

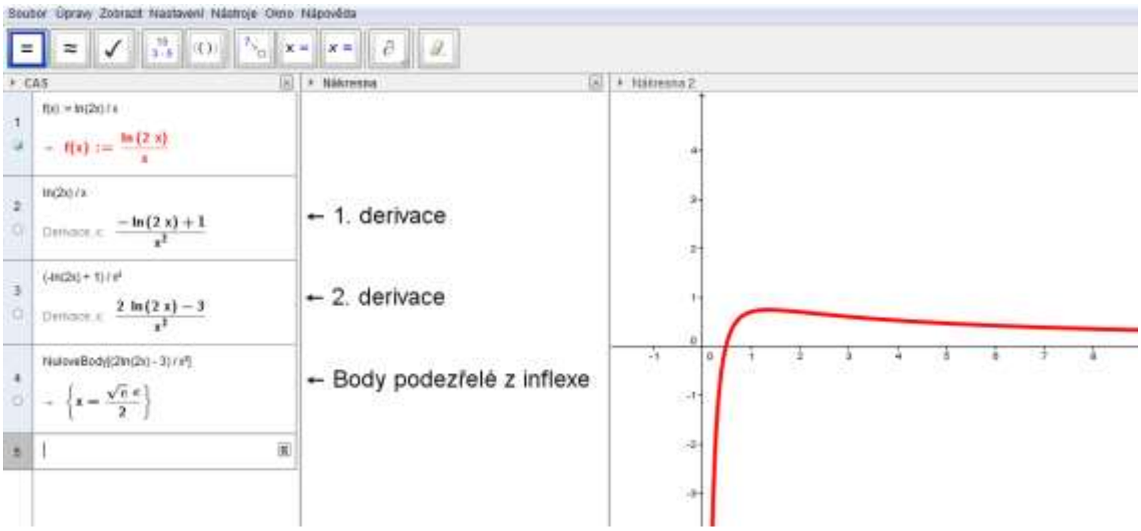


e) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Nejprve si zapíšeme rovnici naší funkce, abychom si díky ní mohli zobrazit graf funkce. Poté provedeme první derivaci funkce pomocí nástroje „Derivace“ na horním panelu. Druhá derivace se vytváří pomocí stejného nástroje, jen si před jeho použitím označíme rovnici první derivace.

K zjištění bodů podezřelých z inflexe použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> dosadíme rovnici druhé derivace.

Druhá derivace, body podezřelé z inflexe



Díky druhé derivaci jsme vyšetřili, že tato funkce má jeden bod podezřelý z inflexe $x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$. Ten nám rozdělí definiční obor na dva intervaly $\left(0, \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}\right), \left(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}, \infty\right)$. Nyní budeme zjišťovat konvexnost a konkávnost funkce. Z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/ konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 108) víme, že mohou nastat dvě situace. Jestliže je druhá derivace větší jak nula ($f''(x) > 0$), pak to znamená, že funkce je konvexní. Jakmile je druhá derivace menší než nula ($f''(x) < 0$), pak to znamená, že se jedná o funkci konkávní.

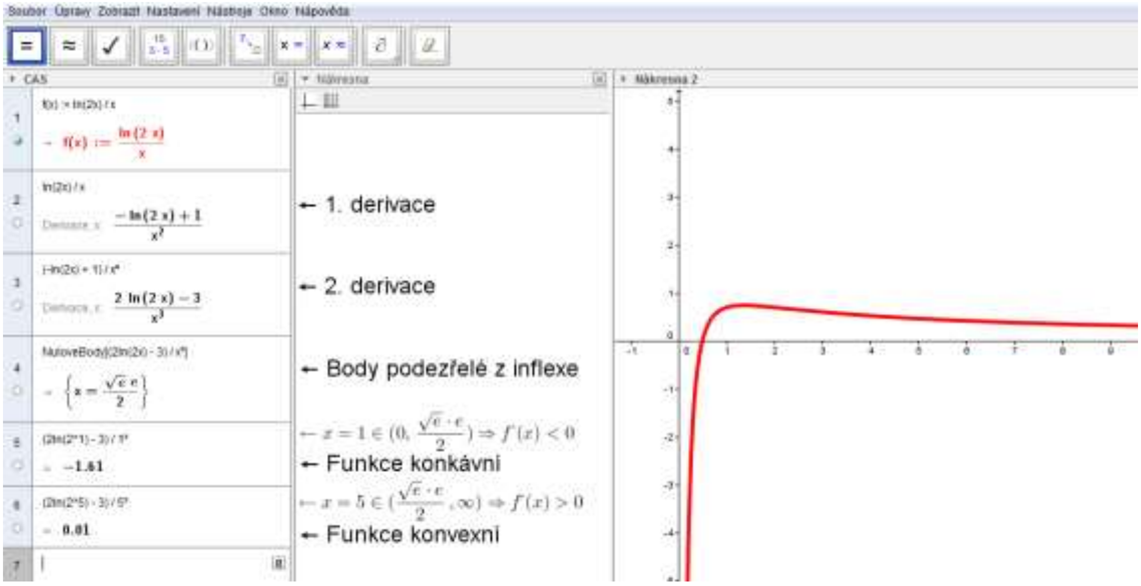
Opět nemůžeme použít grafické znázornění, neboť je tato funkce lomená. Využijeme tedy našich znalostí při určování konvexnosti a konkávnosti. Z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do rovnice druhé derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka.

Z prvního intervalu $I = \left(0, \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}\right)$ zvolíme například bod $x = 1$, který dosadíme do rovnice druhé derivace $f''(x) = \frac{2\ln(2x)-3}{x^3}$. Po numerickém vypočítání se nám zobrazí výsledek $-1{,}61 < 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

Po dosazení bodu $x = 5$ z intervalu $I = \left(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}, \infty\right)$ zjistíme, že druhá derivace v tomto bodě nabývá hodnoty $0{,}01 > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konvexní.

V bodě $x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$, se funkce mění z konkávní na konvexní. Což znamená, že tento bod je bodem inflexním. V GeoGebře funkci „InflexniBod“ nepoužijeme, neboť je aplikovatelný na polynomiální funkce a tato funkce je lomená.

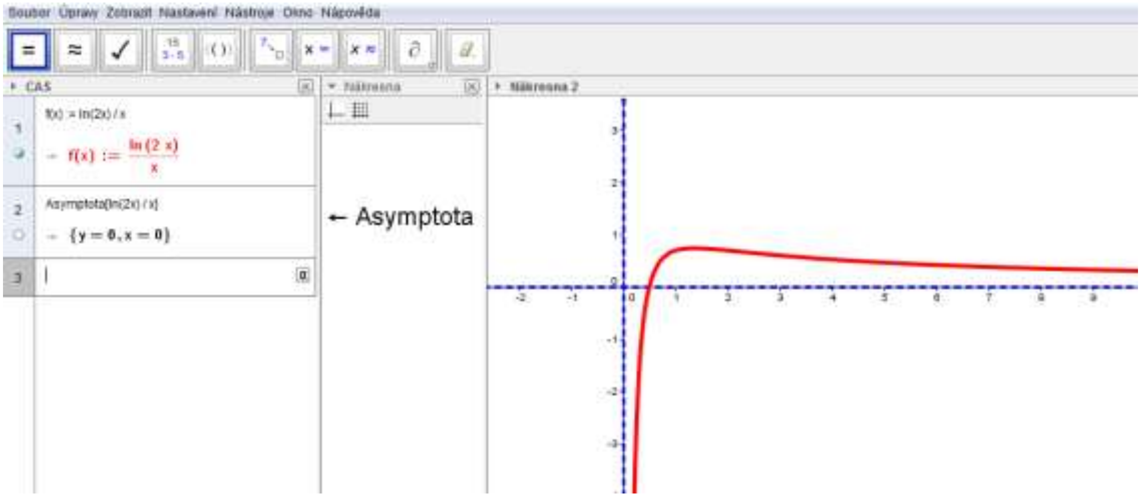
Funkce konvexní a konkávní



f) Asymptoty

K zjištění asymptoty použijeme funkci „Asymptota[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme původní znění rovnice funkce, tedy - $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$. Tato funkce má vertikální asymptotu $x = 0$, neboť definiční obor je $(0, \infty)$. Má také asymptotu se směrnicí $y = 0$.

Asymptoty



6. Příklad 5 - $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = x^3 e^{-x}}$

Je dána funkce: $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = x^3 e^{-x}}$. Vyšetřete průběh funkce.

1) Definiční obor

Při určování definičního oboru postupujeme dle definice definičního oboru (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 8)

$$D(f) = R$$

2) Sudost, lichost, periodičnost

Pro zjištění sudosti, lichosti a periodičnosti využijeme vlastností funkcí, zejména definici sudosti a lichosti funkce a definici pro periodičnost (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 70)

$$f(-x):\quad (-x)^3 e^{-(-x)} = -x^3 e^x \qquad \begin{matrix} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{matrix} \implies \begin{matrix} Není\ sudá \\ Není\ lichá \end{matrix}$$

Funkce není periodická.

3) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost

Při výpočtu limit použijeme větu o L´Hospitalově pravidle (Frolíková, 1984 [1], str. 102) a větu o vlastnostech exponenciální funkce.

Při zjišťování spojitosti funkce budeme vycházet z definice o spojitosti funkce v bodě a na intervalu. (Frolíková, 1984 [1], str. 61)

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 e^{-x} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

Funkce *f* je součinem spojitých funkcí, tudíž je ve svém definičním oboru spojitá.

4) **Průsečíky s osou x a s osou y**

$$P(x): \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x} = 0 \qquad P_x = [0{,}0]$$
$$P(y): \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 0 \qquad P_y = [0{,}0]$$

5) **První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie**

Při výpočtu 1. derivace použijeme vět o derivaci funkcí vzniklých na základě podílu funkcí (Frolíková, 1984 [1], str. 74).

Při určování monotonie funkce použijeme větu o vztahu 1. derivace a monotonie funkce (Frolíková, 1984 [1], str. 78).

Při určování lokálních extrému se budeme držet definice pro lokální extrémy a dále využijeme nutnou a postačující podmínku pro lokální extrém (Frolíková, 1984 [1], str. 79).

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{3x^2e^x - e^x x^3}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3x^2 - x^3)}{e^{x^2}} = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}$$

$$3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2e^{-x}(3 - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0^3 \cdot e^{-0} \\ y_1 &= 0 \cdot 1 \\ y_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 &= 3^3 \cdot e^{-3} \\ y_2 &= 27 \cdot e^{-3} \\ y_2 &= \frac{27}{e^3} \end{aligned}$$

$$\text{Stacionární body} \quad [0{,}0], \left[3; \frac{27}{e^3}\right]$$

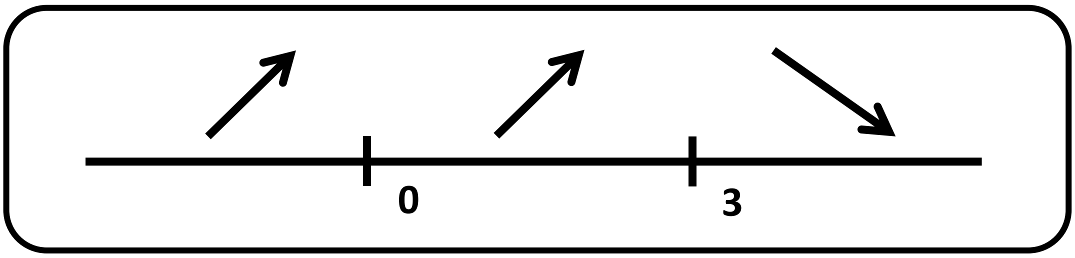
Díky první derivaci jsme vyšetřili stacionární body $x = 0, x = 3$. Tím se definiční obor rozdělí do tří intervalů, na kterých budeme zjišťovat monotonii. V tomto případě jsme získali intervaly $(-\infty, 0)(0{,}3), (3, \infty)$.

Nyní budeme postupně zkoumat, jakého znaménka nabývá první derivace v jednotlivých intervalech.

Po dosazení některého vnitřního bodu z intervalu $I = (-\infty, 0)$ do rovnice první derivace zjistíme, že první derivace je kladná ($f'(x) > 0$), což dle věty o vztahu 1. derivace a monotonie funkce znamená, že se jedná na tomto intervalu o rostoucí funkci.

Z intervalu $I = (0{,}3)$ dosadíme některý vnitřní bod do rovnice první derivace a vypočítáme, že první derivace nabývá na tomto intervalu kladné hodnoty ($f'(x) > 0$), což znamená, že funkce je rostoucí.

Po dosazení jednoho vnitřního bodu intervalu $I = (3, \infty)$ do první derivace zjistíme, že na tomto intervalu nabývá první derivace záporné hodnoty ($f'(x) < 0$), tzn. funkce je na tomto intervalu klesající.



MAX = [3; 1,34]

Vzhledem k tomu, že derivace funkce f v bodě $x = 3$ mění znaménko (v levém prstencovém okolí bodu 3 je znaménko první derivace kladné, v pravém záporné), tak funkce nabývá v bodě $x = 3$ lokální maximum.

6) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Pro výpočet druhé derivace se budeme držet definice derivace vyššího řádu (Frolíková, 1984 [1], str. 106).

K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme definici konvexnosti a konkávnosti na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 108) a dále větu o vztahu 2. derivace funkce f a konvexnosti, konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 109).

Pro zjištění inflexního bodu užijeme věty o nutné a postačující podmínce pro inflexní bod (Frolíková, 1984 [1], str. 109-110).

$$f''(x) = \left(\frac{3x^2 - x^3}{e^x}\right)' = \frac{6x \cdot e^x - 3x^2 e^x - (3x^2 - x^3)e^x}{e^{x^2}} =$$

$$= \frac{e^x(6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3)}{e^{x^2}} = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x}{e^x} =$$

$$= x^3 e^{-x} - 6x^2 e^{-x} + 6xe^{-x}$$

$$x^3 e^{-x} - 6x^2 e^{-x} + 6xe^{-x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x}e^{-x}(x^2 - 6\mathrm{x} + 6) = 0$$

$$\mathrm{x}_1 = 0 \qquad x_2 = 3 + \sqrt{3} \qquad x_3 = 3 - \sqrt{3}$$

$$y_1 = 0^3 \cdot e^0 \qquad y_2 = \left(3 + \sqrt{3}\right)^3 \cdot e^{-(3+\sqrt{3})} \qquad y_3 = \left(3 - \sqrt{3}\right)^3 \cdot e^{-(3-\sqrt{3})}$$

$$y_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{\left(3 + \sqrt{3}\right)^3}{e^{3+\sqrt{3}}} \qquad y_3 = \frac{\left(3 - \sqrt{3}\right)^3}{e^{3-\sqrt{3}}}$$

Body podezřelé z inflexe $[0,0], \left[3 + \sqrt{3}, \frac{\left(3 + \sqrt{3}\right)^3}{e^{3+\sqrt{3}}}\right], \left[3 - \sqrt{3}, \frac{\left(3 - \sqrt{3}\right)^3}{e^{3-\sqrt{3}}}\right]$

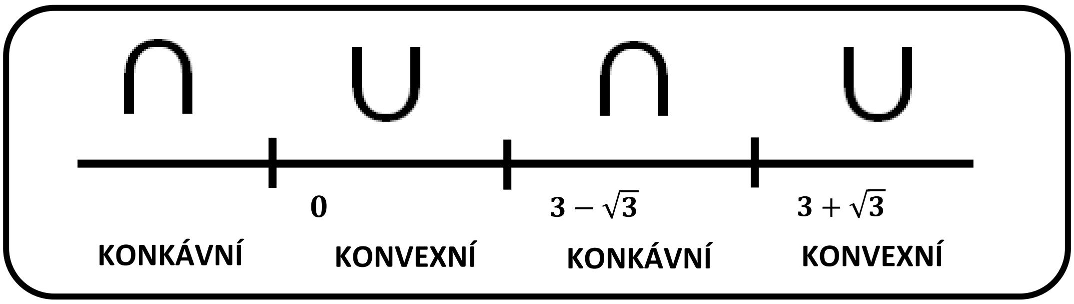
Díky druhé derivaci funkce jsme zjistili, že tato funkce má tři body podezřelé z inflexe $x = 0$, $x = 3 + \sqrt{3}$, $x = 3 - \sqrt{3}$. Dostali jsme tedy čtyři intervaly, ve kterých budeme určovat konvexnost a konkávnost - $(-\infty, 0)$, $\left(0{,}3 - \sqrt{3}\right)$, $\left(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\right)$, $\left(3 + \sqrt{3}, \infty\right)$.

K určení konvexnosti a konkávnosti budeme potřebovat zjistit, jakého znaménka nabývá druhá derivace, po dosazení některého z vnitřních bodů intervalů.

V případě intervalu $I = (-\infty, 0)$ po dosazení některého vnitřního bodu do druhé derivace zjistíme, že druhá derivace zde nabývá záporných funkčních hodnot, což podle věty o vztahu 2. derivace funkce a konvexnosti a konkávnosti znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

Po dosazení jednoho z vnitřních bodů z $I = \left(0{,}3 - \sqrt{3}\right)$ do druhé derivace funkce f vypočítáme, že druhá derivace zde nabývá kladných funkčních hodnot, což znamená, že se jedná a funkci konvexní na daném intervalu.

Na intervalu $I = (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ dosadíme některý z vnitřních bodů do druhé derivace funkce f, čímž vypočítáme, že druhá derivace zde nabývá záporných funkčních hodnot, což znamená, že se jedná a funkci konkávní na daném intervalu.
Po dosazení jednoho z vnitřních bodů intervalu $I = (3+\sqrt{3}, \infty)$ zjistíme, že druhá derivace zde nabývá kladných hodnot, což znamená, že funkce je zde konvexní.



V bodě $x = 0$ dochází ke změně z konkávnosti na konvexnost, v bodě $x = 3 - \sqrt{3}$ přechází funkce z konvexnosti na konkávnost a v bodě $x = 3 + \sqrt{3}$ se funkce mění z konkávní na konvexní. Ve všech třech bodech tedy dochází ke změně, což znamená, že všechny tři body jsou inflexní.

7) Asymptoty

Nyní budeme zjišťovat, zda funkce nemá asymptotu se směrnicí. Při výpočtu se budeme držet definice a nutné a postačující podmínky pro asymptoty (Frolíková, 1984 [1]).
Obecná rovnice asymptoty: $y = k \cdot x + q$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{x} = \frac{x\left(x^2 \frac{e^{-x}}{x}\right)}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{nejsou asymptoty}$$

8) Obor hodnot

Při určování oboru hodnot budeme postupovat na základě vět o vlastnostech spojitých funkcí na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 65).

Vzhledem k limitám v krajních bodech definičního oboru ($\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} x^3e^{-x} = -\infty$) a lokálnímu maximum, které je i zároveň globální maximum (bod [3; 1,34]) je obor hodnot:

$$H(f) = (-\infty; 1{,}34\rangle$$

6.1. Vyšetření funkce f: $y = x^3e^{-x}$ v programu GeoGebra

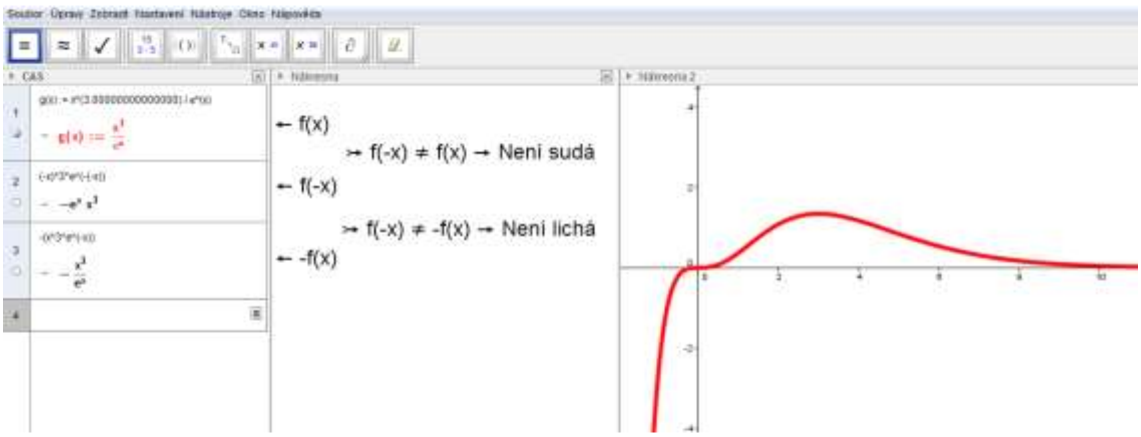
a) Definiční obor

K zjištění definičního oboru není v GeoGebře žádný nástroj, ani jiná funkce, proto si ho musíme určit sami, s využitím vlastních znalostí.

b) Sudost, lichost, periodičnost

V podokně „CAS“ si nejprve zapíšeme naši funkci $f(x) = x^3e^{-x}$. Do „Nákresny 2“ si zobrazíme graf pomocí bílého kolečka vlevo v podokně. Abychom zjistili, zda je funkce sudá, či lichá, musíme si do dalšího podokna zapsat funkci $f(-x)$, což učiníme tak, že místo x do rovnice doplníme $(-x)$. Ve třetím podokně zjistíme, jak by vypadala funkce $-f(x)$ tak, že zadáme $-(f(x))$. Po vyhodnocení výsledku zjistíme, že $f(-x) \neq -f(x)$, což znamená, že funkce není lichá a zároveň $f(-x) \neq f(x)$, což značí, že funkce není asi sudá.

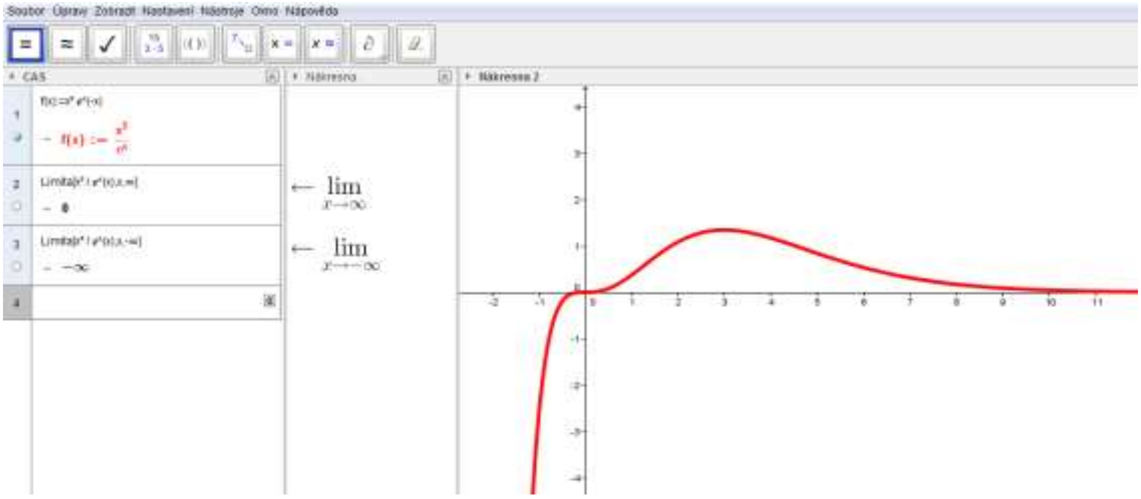
Sudost, lichost, periodičnost



c) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost, průsečíky, průsečíky s osou x

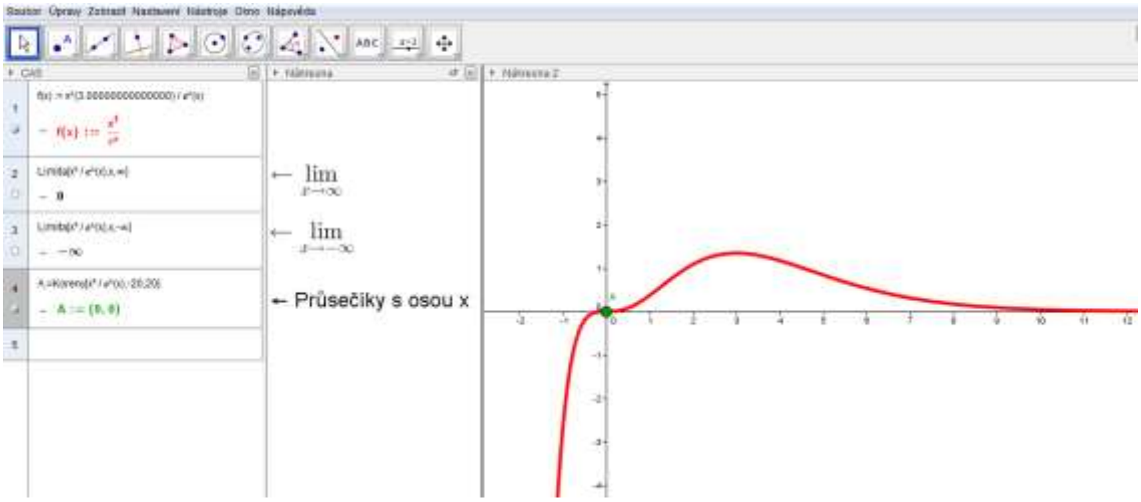
Do prvního podokna napíšeme rovnici naší funkce, díky níž zobrazíme graf do „Nákresny 2“. Ke zjištění limit v krajních bodech definičního oboru použijeme funkci „Limita[<Výraz>, <Hodnota>]“. Do pole <Výraz> zapíšeme naši funkci a do pole <Hodnota> napíšeme do jednoho podokna nejprve ∞, do dalšího pak $-\infty$.

Vypočtené limity



Pro určení průsečíků s osou x použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> zadáme rovnici funkce. Pro zobrazení bodů opět jen stiskneme bílé kolečko na levé straně podokna.

Průsečík s osou x

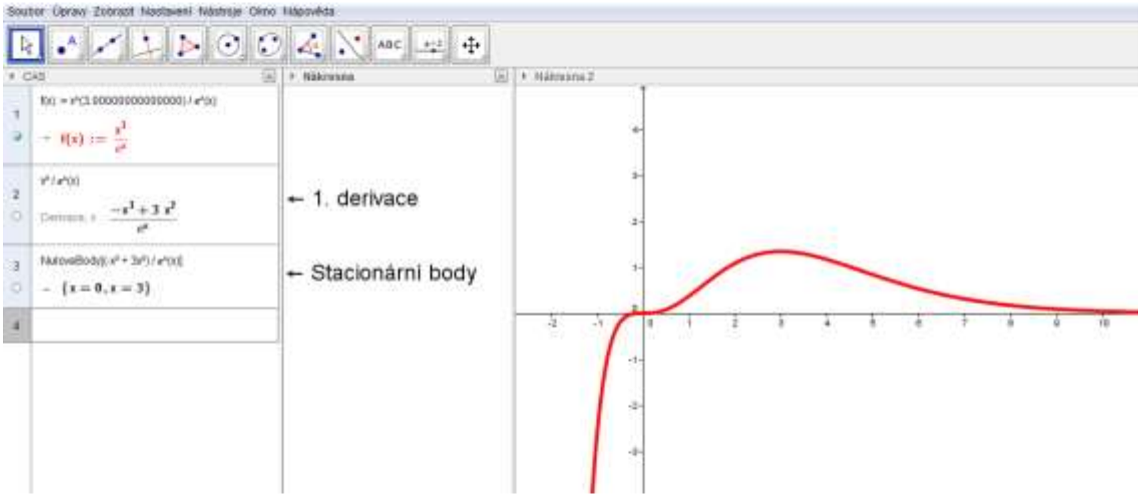


d) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Nejprve si zapíšeme funkci v původním tvaru, abychom mohli zobrazit její graf. K vypočítání první derivace použijeme nástroj se znakem derivace na horní liště. Označíme si rovnici naši funkce a stiskneme nástroj „Derivace“.

Pomocí první derivace si zjistíme stacionární body, které nám rozdělí definiční obor na intervaly, ve kterých budeme zkoumat monotonii funkce. K určení stacionárních bodů využijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> dosadíme rovnici první derivace.

První derivace, stacionární body



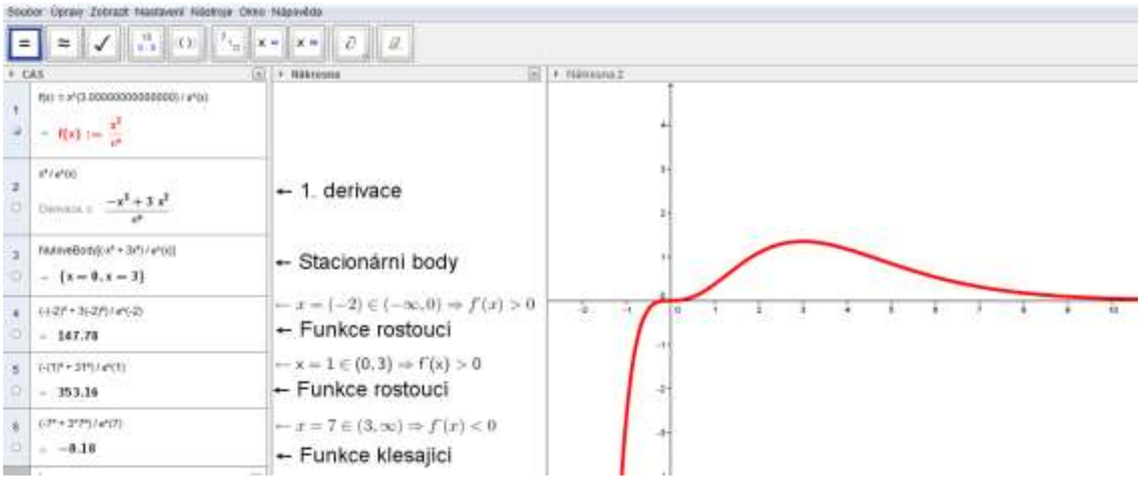
Díky první derivaci jsme vyšetřili, že funkce má dva stacionární body $x = 0$, $x = 3$, které nám rozdělí definiční obor na tři intervaly $(-\infty, 0)$, $(0,3)$, $(3, \infty)$. Nyní budeme vyšetřovat monotonii v jednotlivých intervalech. I zde nemůžeme využít grafické řešení, neboť funguje pouze u polynomiálních funkcí. Využijeme tedy našich znalostí při určování monotonie a z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do první derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka. Z věty o vztahu 1. derivace a monotonie (Frolíková, 1984 [1], str. 74) víme, že pokud je první derivace větší jak nula ($f'(x) > 0$), pak je funkce rostoucí. Pokud je první derivace menší jak nula ($f'(x) < 0$), pak je funkce klesající.

Z prvního intervalu $I = (-\infty, 0)$ zvolíme například bod $x = -2$, který dosadíme do rovnice první derivace $f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}$. Po numerickém výpočtu dostaneme hodnotu $147{,}78 > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu rostoucí.

Z druhého intervalu $I = (0{,}3)$ zvolíme například bod $x = 1$, který dosadíme do první derivace. Z numerického výpočtu získáme hodnotu $353{,}16 > 0$, tudíž je funkce na tomto intervalu rostoucí.

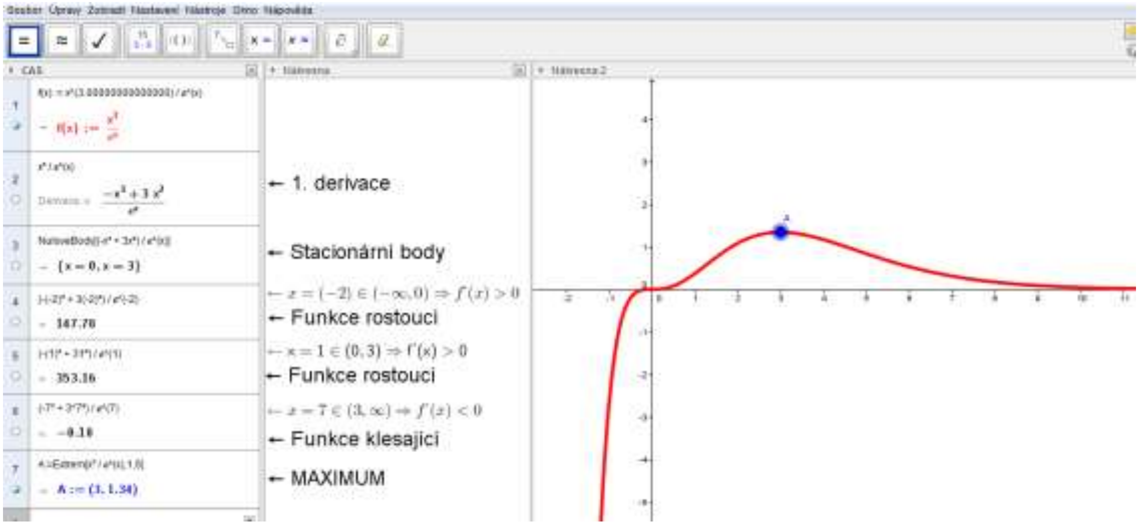
Ze třetího intervalu $I = (3, \infty)$ dosadíme do první derivace například bod $x = 7$. Po numerickém vyhodnocení dostaneme výsledek $-0{,}18 < 0$, tedy funkce je na tomto intervalu klesající.

Monotonie funkce



Jak můžeme vidět, monotonie se střídá jen v jednom bodě. V bodě $x = 3$ se mění funkce rostoucí na klesající, což značí, že je tam lokální extrém – lokální maximum. V GeoGebře využijeme funkci „Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]“. Do pole <Funkce> stačí napsat „$f(x)$“, do pole <Počáteční hodnota x> napíšeme libovolný bod z intervalu, kde je funkce rostoucí - $I = (0{,}3)$. Do pole <Koncová hodnota x> zadáme libovolný bod z intervalu, kde je funkce klesající - $I = (3, \infty)$. Výsledný bod lze opět zobrazit do „Nákresny 2“ pomocí bílého kolečka.

Funkce „Extrem“ – lokální maximum

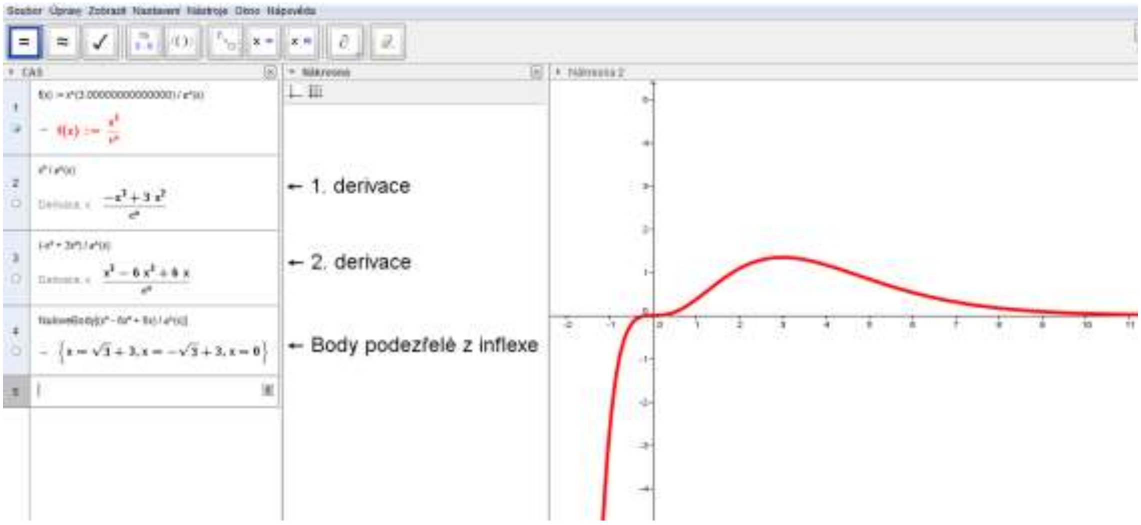


e) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Nejprve si zapíšeme rovnici naší funkce, abychom si díky ní mohli zobrazit graf funkce. Poté provedeme první derivaci funkce pomocí nástroje „Derivace“ na horním panelu. Druhá derivace se vytváří pomocí stejného nástroje, jen si před jeho použitím označíme rovnici první derivace.

K zjištění bodů podezřelých z inflexe použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> dosadíme rovnici druhé derivace.

Druhá derivace, body podezřelé z inflexe



Díky druhé derivaci jsme vyšetřili, že tato funkce má tři body podezřelé z inflexe $x = 0$, $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$. Tyto body nám rozdělí definiční obor na čtyři intervaly $(-\infty, 0)$, $(0{,}3 - \sqrt{3})$, $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$, $(3 + \sqrt{3}, \infty)$. Nyní budeme zjišťovat konvexnost a konkávnost funkce. Z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/ konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 108) víme, že mohou nastat dvě situace. Jestliže je druhá derivace větší jak nula ($f''(x) > 0$), pak to znamená, že funkce je konvexní. Jakmile je druhá derivace menší než nula ($f''(x) < 0$), pak to znamená, že se jedná o funkci konkávní.

Opět nemůžeme použít grafické znázornění, neboť funguje pouze pro polynomiální funkce. Využijeme tedy našich znalostí při určování konvexnosti a konkávnosti. Z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do rovnice druhé derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka.

Z prvního intervalu $I = (-\infty, 0)$ zvolíme například bod $x = -1$, který dosadíme do rovnice druhé derivace $f''(x) = x^3e^{-x} - 6x^2e^{-x} + 6xe^{-x}$. Po numerickém vypočítání se nám zobrazí výsledek $-35{,}34 < 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

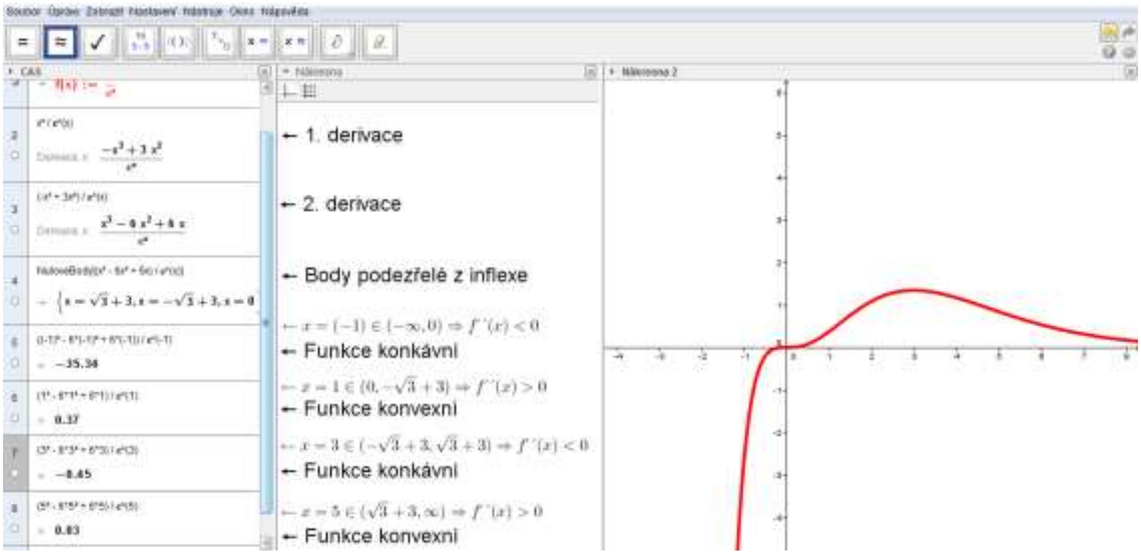
Po dosazení bodu $x = 1$ z intervalu $I = (0{,}3 - \sqrt{3})$ zjistíme, že druhá derivace v tomto bodě nabývá hodnoty $0{,}37 > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konvexní.

Z intervalu $I = (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ dosadíme například bod $x = 3$ a po numerickém vypočítání zjistíme, že druhá derivace zde nabývá hodnoty $-0{,}45 < 0$, což značí, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

Po dosazení bodu $x = 5$ z intervalu $I = (3 + \sqrt{3}, \infty)$ do druhé derivace zjistíme, že na tomto intervalu nabývá hodnoty $0{,}03 > 0$ a je tedy konvexní.

V bodě $x = 0$, se funkce mění z konkávní na konvexní, v bodě $x = 3 - \sqrt{3}$ se mění z konvexnosti na konkávnost a v bodě $x = 3 + \sqrt{3}$ funkce přechází z konkávní na konvexní. Což znamená, že všechny tři body jsou body inflexní. V GeoGebře funkci „InflexniBod“ nepoužijeme, neboť je aplikovatelný na polynomiální funkce a v tomto případě opět nefunguje.

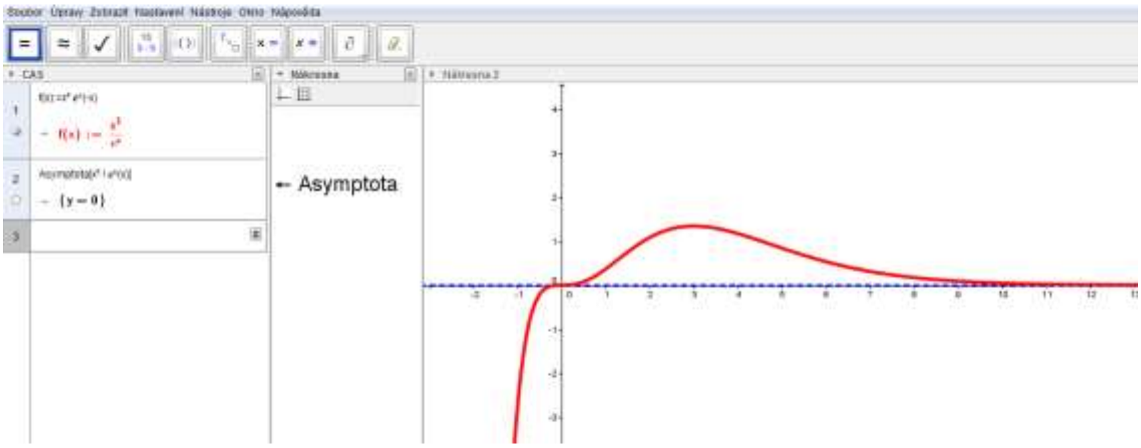
Funkce konvexní a konkávní



f) Asymptoty

K zjištění asymptoty použijeme funkci „Asymptota[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme původní znění rovnice funkce, tedy - $f(x) = x^3e^{-x}$. V tomto případě má funkce pouze asymptotu v ∞ se směrnicí $y = 0$.

Asymptoty



7. Příklad 6 - $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = x + \sin(x)}$

Je dána funkce: $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = x + \sin(x)}$**.** Vyšetřete průběh funkce.

1) Definiční obor

Při určování definičního oboru postupujeme dle definice definičního oboru (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 8)

$$D(f) = R$$

2) Sudost, lichost, periodičnost

Pro zjištění sudosti, lichosti a periodičnosti využijeme vlastností funkcí, zejména definici sudosti, lichosti a periodičnosti funkce (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 70).

$$f(-x): \quad (-x) + \sin(-x) = -x - \sin(x) = -(x + \sin(x))$$
$$f(-x) = -f(x) \implies Je\ lichá$$
$$f(x + 2\pi) = (x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi) = x + 2\pi + \sin x \neq x + \sin x = f(x)$$
$$\rightarrow \text{ funkce není periodická}$$

3) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost

Při výpočtu limit použijeme znalosti o funkci $\sin x$ – přesněji tedy o jejich neexistenci (Frolíková, 1984 [1], str. 91).

Při zjišťování spojitosti funkce budeme vycházet z definice o spojitosti funkce v bodě a na intervalu. (Frolíková, 1984 [1], str. 61)

$$\lim_{x \to \infty} x + \sin(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x + \sin(x) = -\infty$$

Funkce je spojitá v R – dle definice o spojitosti funkce.

4) Průsečíky s osou x a s osou y

$$P(x):\quad y=0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x+\sin(x)=0 \\ \sin(x)=-x \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x=0 \qquad P_x=[0,0]$$

$$P(y):\quad x=0 \quad \longrightarrow \quad 0+\sin(0)=0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \qquad P_y=[0,0]$$

Řešení průsečíků s osou x můžeme zjistit pouze v nějakém matematickém programu – například v námi používaném programu GeoGebra.

5) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Při výpočtu 1. derivace použijeme vět o derivaci funkcí vzniklých na základě podílu funkcí (Frolíková, 1984 [1], str. 74).

Při určování monotonie funkce použijeme větu o vztahu 1. derivace a monotonie funkce (Frolíková, 1984 [1], str. 78).

Při určování lokálních extrému se budeme držet definice pro lokální extrémy a dále využijeme nutnou a postačující podmínku pro lokální extrém (Frolíková, 1984 [1], str. 79).

$$f'(x)=1+\cos(x)$$

$$1+\cos x=0 \quad \longrightarrow \quad \cos(x)=-1 \quad \Rightarrow \quad x=\pi+2k\cdot\pi, \qquad k\in Z$$

$$\begin{gathered} y=\pi+2k\cdot\pi+\sin(\pi+2k\cdot\pi) \\ y=\pi+2k\cdot\pi, \qquad k\in Z \end{gathered}$$

$$\text{Stacionární body} \quad [\pi+2k\cdot\pi,\pi+2k\cdot\pi], \qquad k\in Z.$$

Díky první derivaci jsme vyšetřili stacionární body $x=\pi+2k\cdot\pi,\ k\in Z.$ Abychom našli interval monotonie, budeme řešit nerovnice $1+\cos(x)<0$ a $1+\cos(x)>0$.

$$1 + \cos(x) < 0 \qquad\qquad 1 + \cos(x) > 0$$
$$\cos(x) < -1 \qquad\qquad \cos(x) > -1$$
$$x = \emptyset \qquad\qquad x \in (-\pi + 2k \cdot \pi, \pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$$

Podle věty o vztahu 1. derivace a monotonie funkce víme, že pokud je první derivace menší jak nula, pak je funkce klesající. Jestliže je první derivace funkce větší jak nula, pak je funkce rostoucí. Z řešení nerovnic vyplývá, že funkce $x + \sin(x)$ je rostoucí ve svém definičním oboru. Klesající tato funkce není. Vzhledem k tomu, že je funkce f na celém svém definičním oboru rostoucí, nemá žádný lokální extrém.

6) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Pro výpočet druhé derivace se budeme držet definice derivace vyššího řádu (Frolíková, 1984 [1], str. 106).

K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme definici konvexnosti a konkávnosti na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 108) a dále větu o vztahu 2. derivace funkce f a konvexnosti, konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 109).

Pro zjištění inflexního bodu užijeme věty o nutné a postačující podmínce pro inflexní bod (Frolíková, 1984 [1], str. 109-110).

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$-\sin(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \pi + k \cdot \pi$$

$$y = \pi + k \cdot \pi + \sin(\pi + k \cdot \pi)$$
$$y = \pi + k \cdot \pi, \qquad k \in Z$$

Body podezřelé z inflexe $\quad [\pi + k \cdot \pi, \pi + k \cdot \pi]$.

Díky druhé derivaci funkce jsme zjistili, že tato funkce má body podezřelé z inflexe $x = \pi + k \cdot \pi$. Abychom našli intervaly konvexnosti a konkávnosti, budeme řešit nerovnice $-\sin(x) < 0$ a $-\sin(x) > 0$.

$$-\sin(x) < 0$$
$$x \in (0 + 2k \cdot \pi, \pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$$

$$-\sin(x) > 0$$
$$x \in (\pi + 2k \cdot \pi, 2\pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$$

Z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/konkávnosti víme, že pokud je druhá derivace menší než nula, pak je funkce konkávní a jestliže je druhá derivace funkce větší jak nula, pak je funkce konvexní. Pomocí nerovnic jsme vyšetřili, že druhá derivace je menší jak nula na intervalech $(0 + 2k \cdot \pi, \pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$, tudíž je na tomto intervalu konkávní. Na intervalech $(\pi + 2k \cdot \pi, 2\pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$ je druhá derivace funkce větší než nula, což znamená, že zde je funkce konvexní.

V bodech $x = \pi + k \cdot \pi, k \in Z$ přechází funkce z konkávnosti na konvexnost. V těchto bodech tedy dochází ke změně, což znamená, že všechny body jsou inflexní.

7) Asymptoty

Nyní budeme zjišťovat, zda funkce nemá asymptotu se směrnicí. Při výpočtu se budeme držet definice a nutné a postačující podmínky pro asymptoty (Frolíková, 1984 [1]).

Obecná rovnice asymptoty se směrnicí: $y = k \cdot x + q$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right)}{x} = 1$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x\to\infty} x + \sin(x) - x = \lim_{x\to\infty} \sin(x) = \text{neexistuje}$$

$$\Rightarrow \text{nemá asymptotu}$$

8) Obor hodnot

Při určování oboru hodnot budeme postupovat na základě vět o vlastnostech spojitých funkcí na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 65).

Funkce f je na svém definičním oboru spojitá, tudíž zobrazuje definiční obor na interval. Funkce f má limity v $\pm\infty$ rovny $\pm\infty$. Podle věty o nabývání mezihodnot je tudíž obor hodnot interval $(-\infty. \infty)$.

$$H(f) = R$$

7.1. Vyšetření funkce f: $y = x + \sin(x)$ v programu GeoGebra

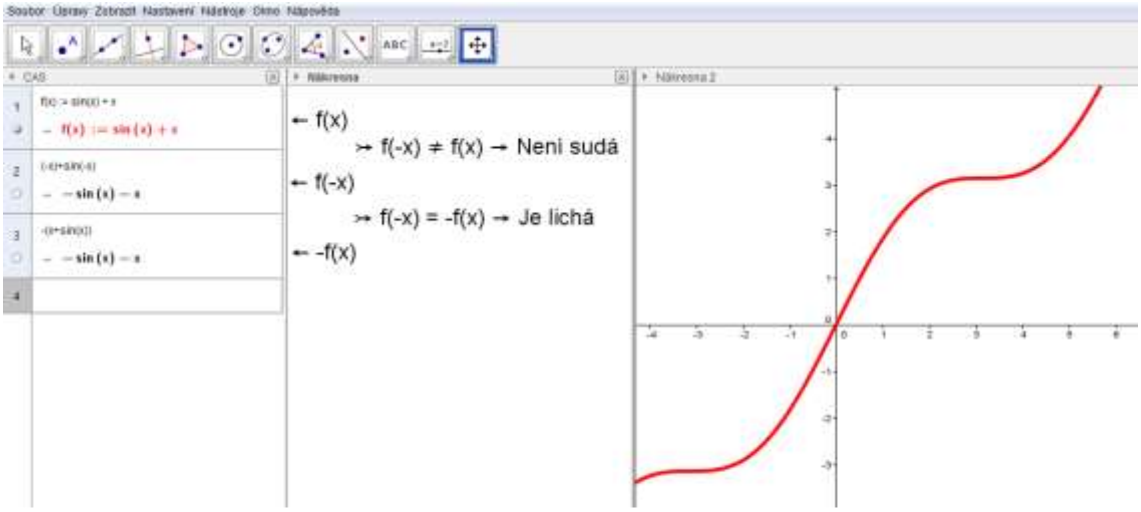
a) Definiční obor

K zjištění definičního oboru není v GeoGebře žádný nástroj, ani jiná funkce, proto si ho musíme určit sami, s využitím vlastních znalostí.

b) Sudost, lichost, periodičnost

V podokně „CAS“ si nejprve zapíšeme naši funkci $f(x) = x + \sin(x)$. Do „Nákresny 2“ si zobrazíme graf pomocí bílého kolečka vlevo v podokně. Abychom zjistili, zda je funkce sudá, či lichá, musíme si do dalšího podokna zapsat funkci $f(-x)$, což učiníme tak, že místo x do rovnice doplníme $(-x)$. Ve třetím podokně zjistíme, jak by vypadala funkce $-f(x)$ tak, že zadáme $-(f(x))$. Po vyhodnocení výsledku zjistíme, že $f(-x) = -f(x)$, což značí, že funkce je lichá. V grafu lichost poznáme tak, že funkce je osově souměrná dle počátku kartézské soustavy souřadnic.

Sudost, lichost, periodičnost



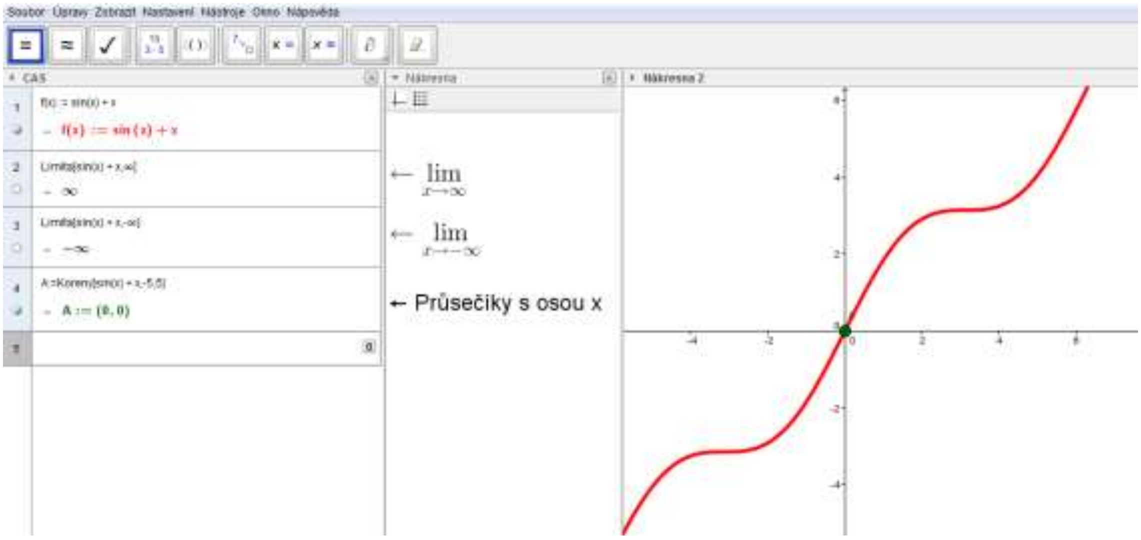
c) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost, průsečíky, průsečíky s osou x

Do prvního podokna napíšeme rovnici naší funkce, díky níž zobrazíme graf do „Nákresny 2“. Ke zjištění limit v krajních bodech definičního oboru použijeme funkci „Limita[<Výraz>, <Hodnota>]“.

Do pole <Výraz> zapíšeme naši funkci a do pole <Hodnota> napíšeme do jednoho podokna nejprve ∞, do dalšího pak $-\infty$. Protože ale limity u funkce $\sin x$ neexistují, v GeoGebře se nám zobrazí pouze otazník „?“.

Pro určení průsečíků s osou x použijeme funkci „Koreny[<Funkce>,<Počáteční hodnota x>,<Koncová hodnota x>]“. Do pole <Funkce> zadáme rovnici funkce, do pole <Počáteční hodnota x> zadáme libovolně zvolené číslo z definičního oboru, které bude menší než číslo, jež zadáme do pole <Koncová hodnota x>. Pro zobrazení bodů opět jen stiskneme bílé kolečko na levé straně podokna.

Vypočtené limity, Průsečík s osou x

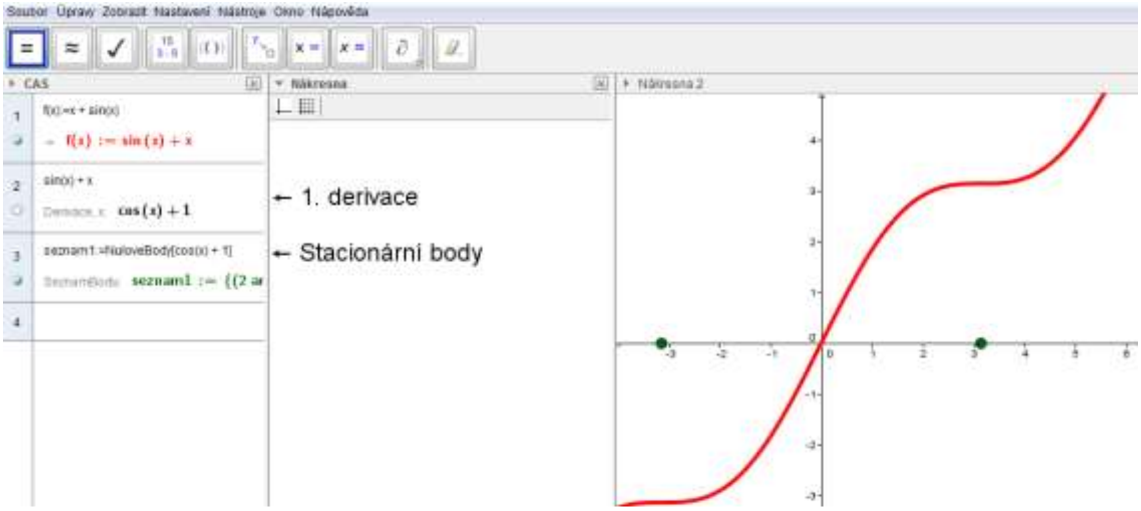


d) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Nejprve si zapíšeme funkci v původním tvaru, abychom mohli zobrazit její graf. K vypočítání první derivace použijeme nástroj se znakem derivace na horní liště. Označíme si rovnici naši funkce a stiskneme nástroj „Derivace“.

Díky první derivaci si zjistíme stacionární body, které nám rozdělí definiční obor na intervaly, ve kterých budeme zkoumat monotonii funkce. K určení stacionárních bodů využijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> dosadíme rovnici první derivace.

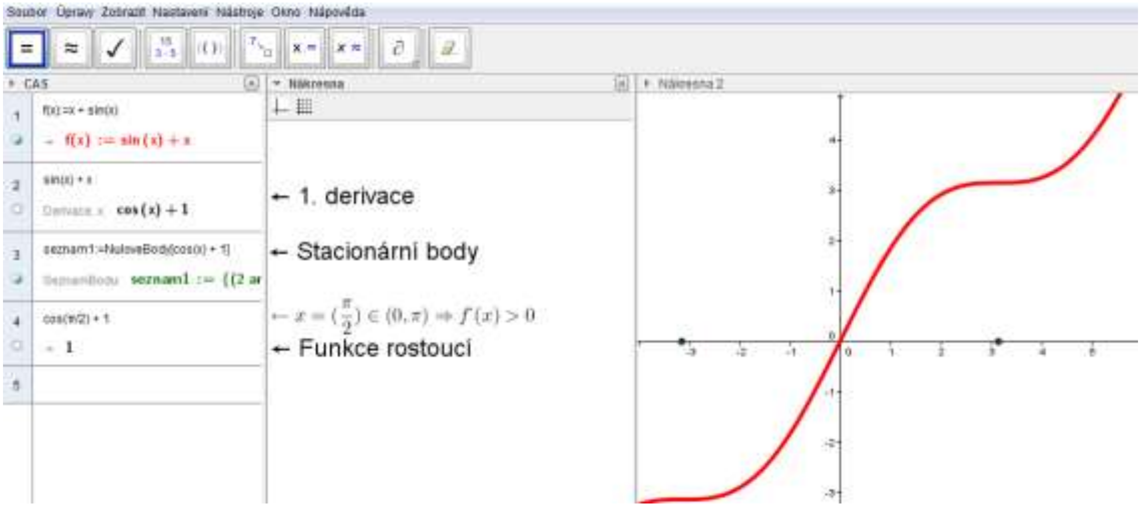
První derivace, stacionární body



Díky první derivaci jsme tedy vyšetřili, že funkce má stacionární body $x = \pi + 2k \cdot \pi, k \in Z$. Z věty o vztahu 1. derivace a monotonie (Frolíková, 1984 [1], str. 74) víme, že pokud je první derivace větší jak nula ($f'(x) > 0$), pak je funkce rostoucí. Pokud je první derivace menší jak nula ($f'(x) < 0$), pak je funkce klesající. Pomocí nerovnic $1 + \cos(x) < 0$ a $1 + \cos(x) > 0$ jsme zjistili, že funkce je rostoucí na $(-\pi + 2k \cdot \pi, \pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$. Vzhledem k lichosti funkce můžeme funkci vyšetřovat jen na jedné polovině definičního oboru. Proto v GeoGebře vyšetříme monotonii pouze na intervalu $(0, \pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$. Ani zde nemůžeme využít grafické řešení, neboť funguje pouze u polynomiálních funkcí a v tomto příkladu vyšetřujeme goniometrickou funkci. Využijeme tedy našich znalostí při určování monotonie a z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do první derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka.

Z intervalu $I = (0, \pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$ zvolíme například bod $x = \frac{\pi}{2}$, který dosadíme do první derivace. Z numerického výpočtu získáme hodnotu $1 > 0$, tudíž je funkce na tomto intervalu rostoucí.

Monotonie funkce



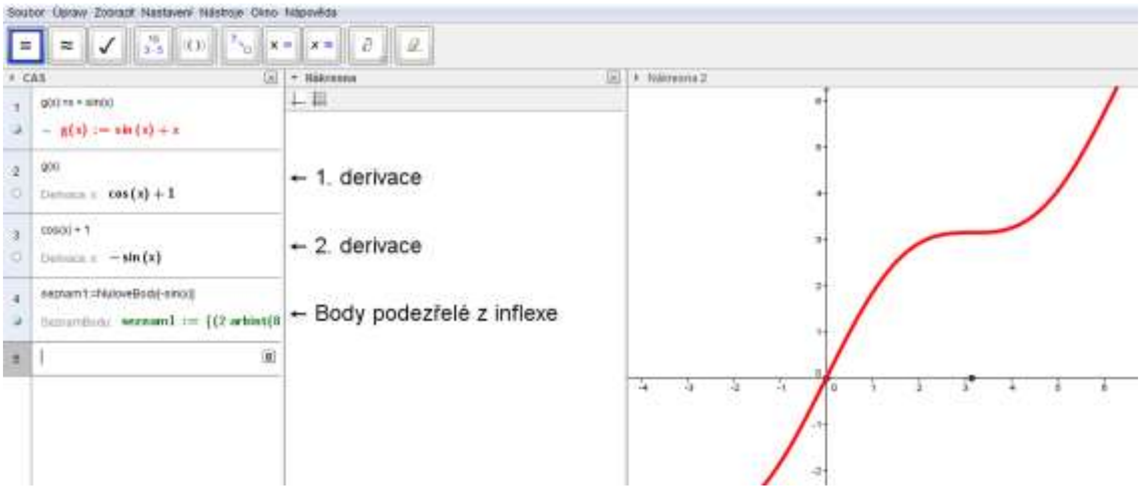
Jak můžeme vidět, monotonie je na celém definičním oboru rostoucí, což znamená, že funkce nemá lokální extrém.

e) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Nejprve si zapíšeme rovnici naší funkce, abychom si díky ní mohli zobrazit graf funkce. Poté provedeme první derivaci funkce pomocí nástroje „Derivace“ na horním panelu. Druhá derivace se vytváří pomocí stejného nástroje, jen si před jeho použitím označíme rovnici první derivace.

K zjištění bodů podezřelých z inflexe použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> dosadíme rovnici druhé derivace.

Druhá derivace, body podezřelé z inflexe



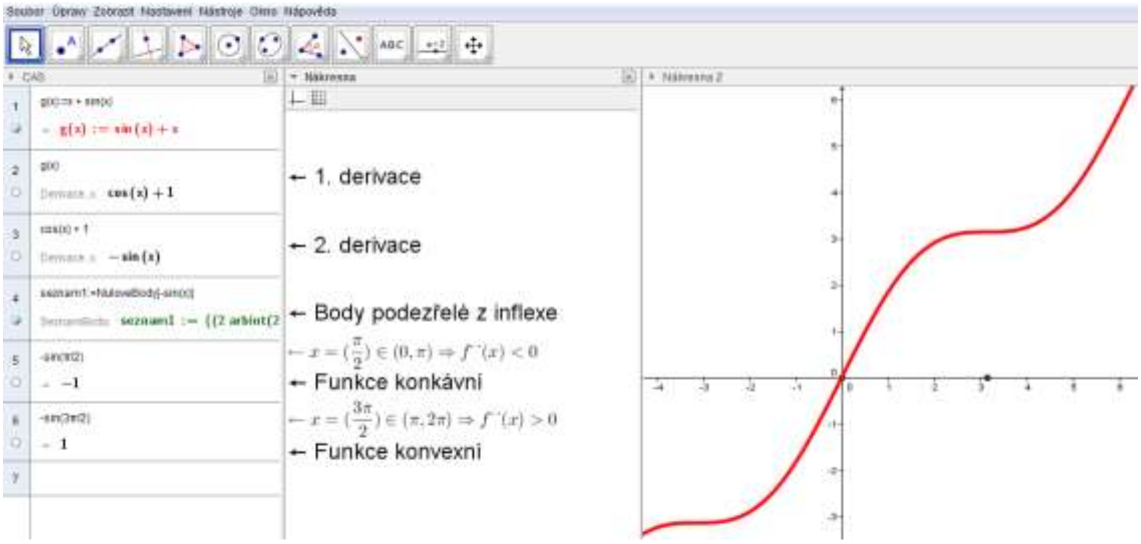
Díky druhé derivaci jsme vyšetřili, že tato funkce má body podezřelé z inflexe $x = \pi + k \cdot \pi, k \in Z.$ Nyní budeme zjišťovat konvexnost a konkávnost funkce. Z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/ konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 108) víme, že mohou nastat dvě situace. Jestliže je druhá derivace větší jak nula $(f''(x) > 0)$, pak to znamená, že funkce je konvexní. Jakmile je druhá derivace menší než nula $(f''(x) < 0)$, pak to znamená, že se jedná o funkci konkávní. Pomocí nerovnic $-\sin(x) < 0$ a $-\sin(x) > 0$ jsme zjistili, že funkce je konkávní na $(0 + 2k \cdot \pi, \pi + 2k \cdot \pi), k \in Z$ a konvexní na $(\pi + 2k \cdot \pi, 2\pi + 2k \cdot \pi), k \in Z.$ Vzhledem k lichosti funkce, můžeme vyšetřovat funkci jen na jedné polovině definičního oboru, proto stačí, když v GeoGebře konvexnost a konkávnost ověříme pouze na intervalu $(0, \pi + 2k\pi), k \in Z.$

Opět nemůžeme použít grafické znázornění, neboť funguje pouze pro polynomiální funkce a my vyšetřujeme goniometrickou funkci. Využijeme tedy našich znalostí při určování konvexnosti a konkávnosti. Z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do rovnice druhé derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka.

Po dosazení bodu $x = \frac{\pi}{5}$ z intervalu $I = (0, \pi + 2k \cdot \pi)$ zjistíme, že druhá derivace v tomto bodě nabývá hodnoty $-1 < 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

V bodě $x = \pi + k \cdot \pi, k \in Z$ se funkce mění z konkávní na konvexní. Což znamená, že tento bod je inflexní. V GeoGebře funkci „InflexniBod“ nepoužijeme, neboť je aplikovatelný na polynomiální funkce a v tomto případě opět nefunguje.

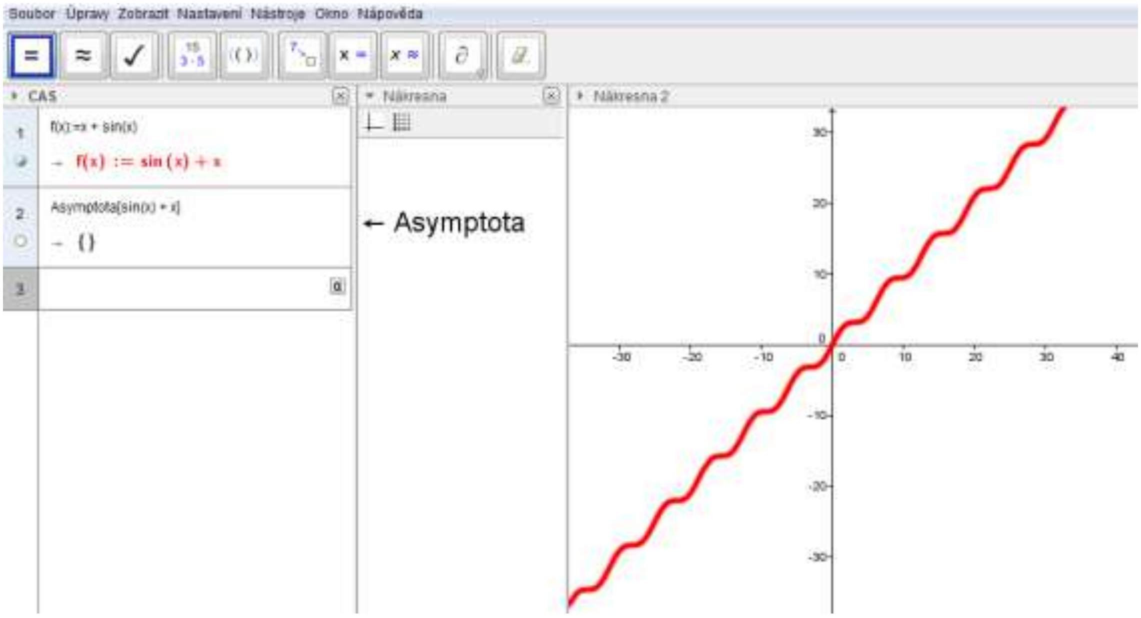
Funkce konvexní a konkávní



f) Asymptoty

K zjištění asymptoty použijeme funkci „Asymptota[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme původní znění rovnice funkce, tedy - $f(x) = x + \sin(x)$. V tomto případě funkce nemá žádnou asymptotu.

Asymptoty



8. Příklad 7 - $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = tg(x) - cotg(x)}$

Je dána funkce: $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = tg(x) - cotg(x)}$**.** Vyšetřete průběh funkce.

1) Definiční obor

Při určování definičního oboru postupujeme dle definice definičního oboru (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 8)

$$D(f) = R \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$$

2) Sudost, lichost, periodičnost

Pro zjištění sudosti, lichosti a periodičnosti využijeme vlastností funkcí, zejména definici sudosti, lichosti a periodičnosti funkce (Petrášková, Zmeškalová, 2005 [2], str. 70).

$$f(-x):\quad tg(-x) - cotg(-x) = -tg(x) + cotg(x)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \Longrightarrow \quad Je\ lichá$$

$$tg(x + \pi) - cotg(x + \pi) = tg(x) - cotg(x)$$

$$\rightarrow \text{funkce je periodická s periodou } p = \pi$$

Vzhledem k tomu, že funkce je lichá a periodická s nejmenší periodou π, stačí ji vyšetřovat na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$

3) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost

Při výpočtu limit použijeme znalosti o funkcích $tg(x)$, $cotg(x)$ – přesněji tedy o jejich neexistenci (Frolíková, 1984 [1], str. 94).

Při zjišťování spojitosti funkce budeme vycházet z definice o spojitosti funkce v bodě a na intervalu. (Frolíková, 1984 [1], str. 61)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} = tg(x) - cotg(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\cos(x)\cdot\sin(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{-(\cos^2(x) - \sin^2(x))}{\cos(x)\cdot\sin(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{-\cos 2x}{\cos(x)\cdot\sin(x)} = \infty$$

Funkce je spojitá v na svém definičním oboru $R \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ – dle definice o spojitosti funkce.

4) **Průsečíky s osou x a s osou y**

Vzhledem k lichosti funkce a k nejmenší periodě $p = \pi$ se můžeme soustředit pouze na interval $\langle 0, \frac{\pi}{2}\big)$.

$$P(x):\quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} tg(x) - cotg(x) = 0 \\ tg(x) = cotg(x) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad P_x = \left[\frac{\pi}{4}, 0\right]$$

$$P(y):\quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{tg}(0) - \mathrm{cotg}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{není definováno}$$

5) **První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie**

Při výpočtu 1. derivace použijeme vět o derivaci funkcí vzniklých na základě podílu funkcí (Frolíková, 1984 [1], str. 74).

Při určování monotonie funkce použijeme větu o vztahu 1. derivace a monotonie funkce (Frolíková, 1984 [1], str. 78).

Při určování lokálních extrému se budeme držet definice pro lokální extrémy a dále využijeme nutnou a postačující podmínku pro lokální extrém (Frolíková, 1984 [1], str. 79).

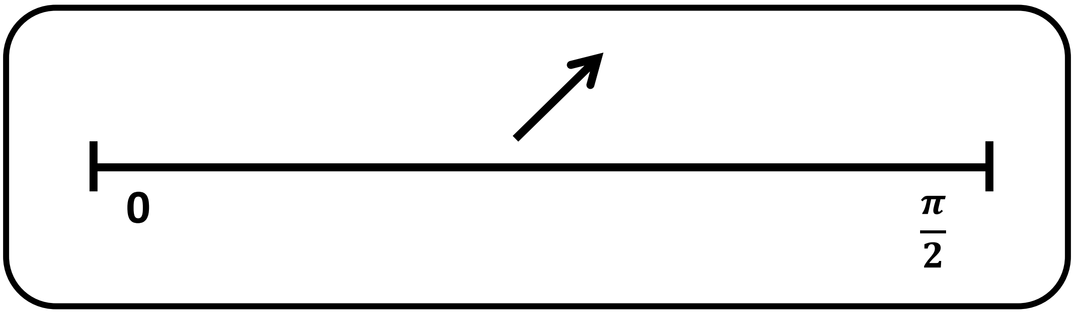
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$$

$$1 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \text{nemá stacionární body}$$

Pomocí první derivace jsme vyšetřili, že funkce nemá žádné stacionární body.

Nyní budeme zkoumat, jakého znaménka nabývá první derivace v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Po dosazení některého vnitřního bodu z intervalu $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ do rovnice první derivace zjistíme, že první derivace je kladná ($f'(x) > 0$), což dle věty o vztahu 1. derivace a monotonie funkce znamená, že se jedná na tomto intervalu o rostoucí funkci.



Vzhledem k tomu, že první derivace funkce f nemění své znaménko, nemá v žádném bodě na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ lokální extrém. Vzhledem k lichosti je funkce rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vzhledem k periodičnosti funkce je funkce rostoucí na každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, k$\epsilon Z$.

6) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Pro výpočet druhé derivace se budeme držet definice derivace vyššího řádu (Frolíková, 1984 [1], str. 106).

K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme definici konvexnosti a konkávnosti na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 108) a dále větu o vztahu 2. derivace funkce f a konvexnosti, konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 109).

Pro zjištění inflexního bodu užijeme věty o nutné a postačující podmínce pro inflexní bod (Frolíková, 1984 [1], str. 109-110).

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\right)' = (\cos^2 x \cdot \sin^2 x)^{-1'} =$$

$$= -(\cos^2 x \cdot \sin^2 x)' \cdot (\cos^2 x \cdot \sin^2 x)^{-2} = \frac{-(\cos^2 x \cdot \sin^2 x)'}{(\cos^2 x \cdot \sin^2 x)^{-2}} =$$

$$= \frac{-\left((\cos^2 x)' \cdot \sin^2 x + (\sin^2 x)' \cdot \cos^2 x\right)}{\cos^4 x \cdot \sin^4 x} =$$

$$= \frac{-(2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos^2 x)}{\cos^4 x \cdot \sin^4 x} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x - 2 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x}{\cos^4 x \cdot \sin^4 x} = \frac{(\sin x \cdot \cos x) \cdot (2 \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \cos^2 x)}{(\sin x \cdot \cos x) \cdot \cos^3 x \cdot \sin^3 x} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \cos^2 x}{\cos^3 x \cdot \sin^3 x}$$

$$2 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \cos^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{gathered} 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x \\ \sin^2 x = \cos^2 x \\ \sin x = \cos x \end{gathered} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

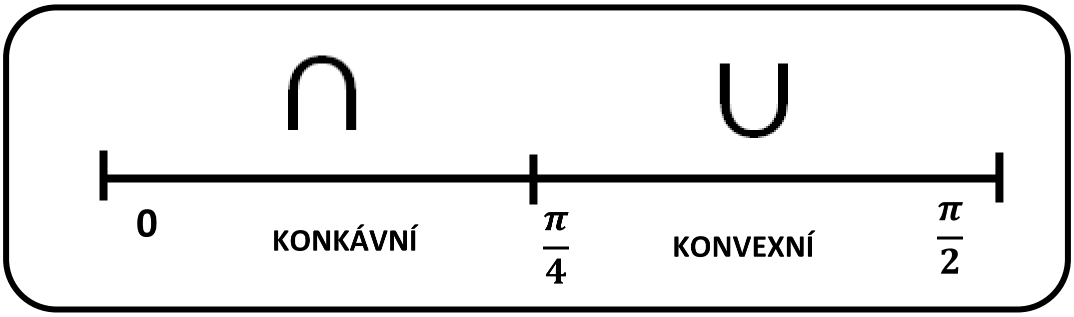
$$y = \sin^2 \frac{\pi}{4} \quad \to \quad y = 0$$

Bod podezřelý z inflexe $\left[\frac{\pi}{4}, 0\right]$

Interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nám rozdělí bod podezřelý z inflexe na dva intervaly $\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. K určení konvexnosti a konkávnosti budeme potřebovat zjistit, jakého znaménka nabývá druhá derivace, po dosazení některého z vnitřního bodu intervalů.

V případě intervalu $I = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ po dosazení některého vnitřního bodu do druhé derivace zjistíme, že druhá derivace zde nabývá záporných funkčních hodnot, což podle věty o vztahu 2. derivace funkce a konvexnosti a konkávnosti znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

Na intervalu z $I = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ dosadíme některý z vnitřních bodů do druhé derivace funkce f, čímž vypočítáme, že druhá derivace zde nabývá kladných funkčních hodnot, což znamená, že se jedná a funkci konvexní na daném intervalu.



V bodě $x = \frac{\pi}{4}$ dochází ke změně z konkávnosti na konvexnost, proto je v tomto bodě inflexní bod. Vzhledem k lichosti a periodičnosti funkce nabývá inflexe v bodech $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \epsilon Z.$

7) Asymptoty

Nyní budeme zjišťovat, zda funkce nemá asymptotu se směrnicí. Při výpočtu se budeme držet definice a nutné a postačující podmínky pro asymptoty (Frolíková, 1984 [1]).

Vzhledem k definičnímu oboru a $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} = tg(x) - cotg(x) = \infty$ má funkce vertikální asymptoty $x = \frac{\pi}{2}$.

8) Obor hodnot

Při určování oboru hodnot budeme postupovat na základě vět o vlastnostech spojitých funkcí na intervalu (Frolíková, 1984 [1], str. 65).

$$H(f) = R$$

8.1. Vyšetření funkce $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{y = tg(x) - cotg(x)}$ v programu GeoGebra

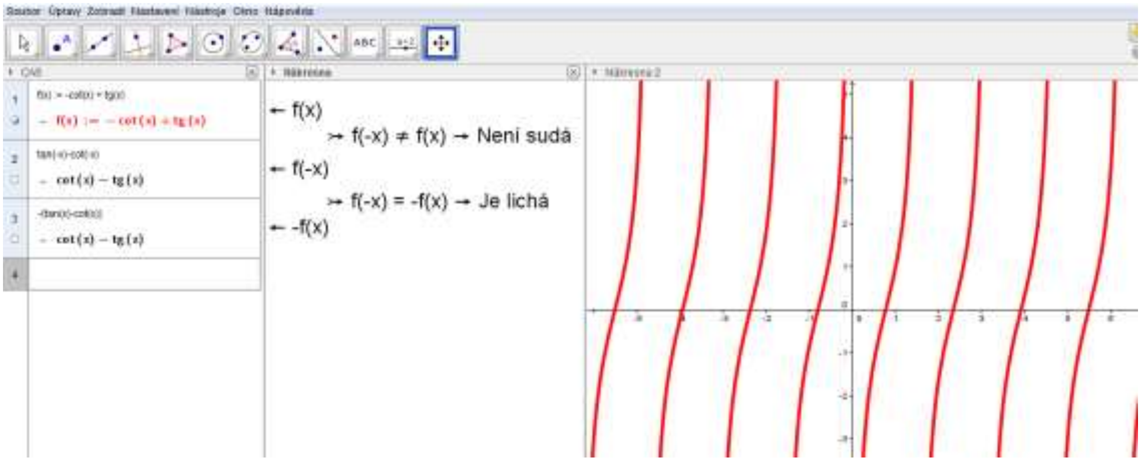
a) Definiční obor

K zjištění definičního oboru není v GeoGebře žádný nástroj, ani jiná funkce, proto si ho musíme určit sami, s využitím vlastních znalostí.

b) Sudost, lichost, periodičnost

V podokně „CAS“ si nejprve zapíšeme naši funkci $f(x) = tg(x) - cotg(x)$. Do „Nákresny 2“ si zobrazíme graf pomocí bílého kolečka vlevo v podokně. Abychom zjistili, zda je funkce sudá, či lichá, musíme si do dalšího podokna zapsat funkci $f(-x)$, což učiníme tak, že místo x do rovnice doplníme $(-x)$. Ve třetím podokně zjistíme, jak by vypadala funkce $-f(x)$ tak, že zadáme $-(f(x))$. Po vyhodnocení výsledku zjistíme, že $f(-x) = -f(x)$, což znamená, že funkce je lichá. Z grafu lichost vyčteme tak, že funkce je symetrická podle osy počátku kartézské soustavy souřadnic.

Sudost, lichost, periodičnost



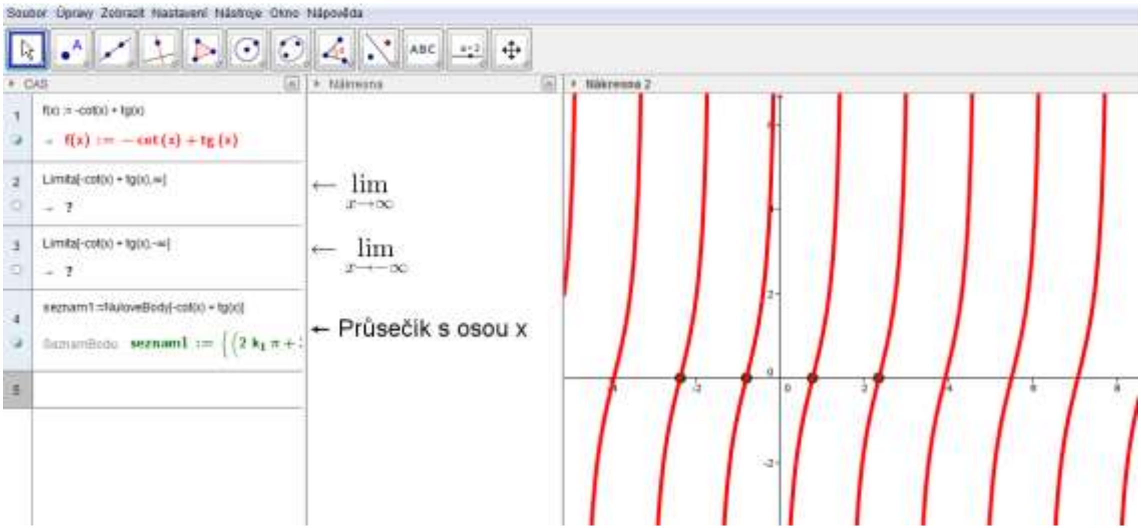
c) Limity v krajních bodech definičního oboru, spojitost, průsečíky, průsečíky s osou $\boldsymbol{x}$

Do prvního podokna napíšeme rovnici naší funkce, díky níž zobrazíme graf do „Nákresny 2“. Ke zjištění limit v krajních bodech definičního oboru použijeme funkci „Limita[<Výraz>, <Hodnota>]“.

Do pole <Výraz> zapíšeme naši funkci a do pole <Hodnota> napíšeme do jednoho podokna nejprve ∞, do dalšího pak $-\infty$. Protože ale limity u funkce $tg(x)$ ani $\cot g(x)$ neexistují, v GeoGebře se nám zobrazí pouze otazník „?“.

Pro určení průsečíků s osou x použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> zadáme rovnici funkce. Pro zobrazení bodů opět jen stiskneme bílé kolečko na levé straně podokna.

Vypočtené limity, průsečík s osou x

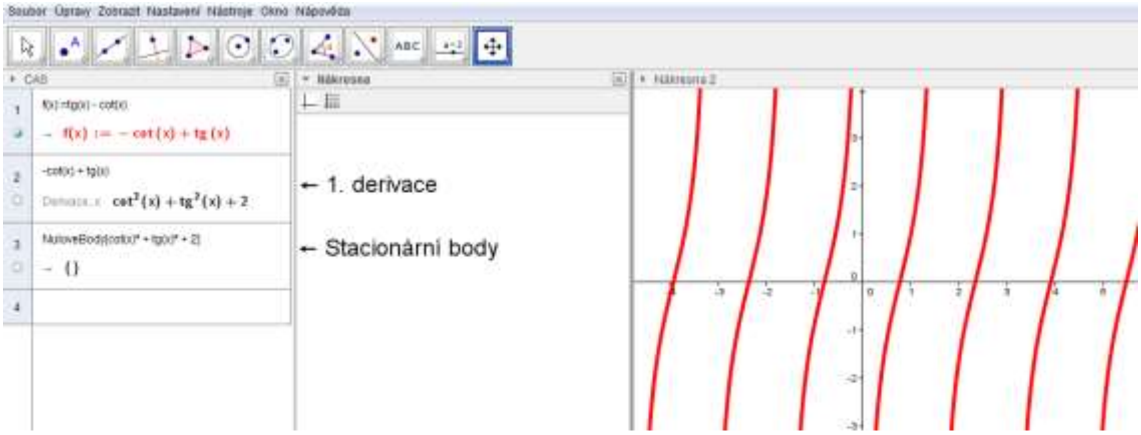


d) První derivace, stacionární body, lokální maximum, lokální minimum, monotonie

Nejprve si zapíšeme funkci v původním tvaru, abychom mohli zobrazit její graf. K vypočítání první derivace použijeme nástroj se znakem derivace na horní liště. Označíme si rovnici naši funkce a stiskneme nástroj „Derivace“.

Díky první derivaci si zjistíme stacionární body, které nám rozdělí definiční obor na intervaly, ve kterých budeme zkoumat monotonii funkce. K určení stacionárních bodů využijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“. Do pole <Polynom> dosadíme rovnici první derivace.

První derivace, stacionární body

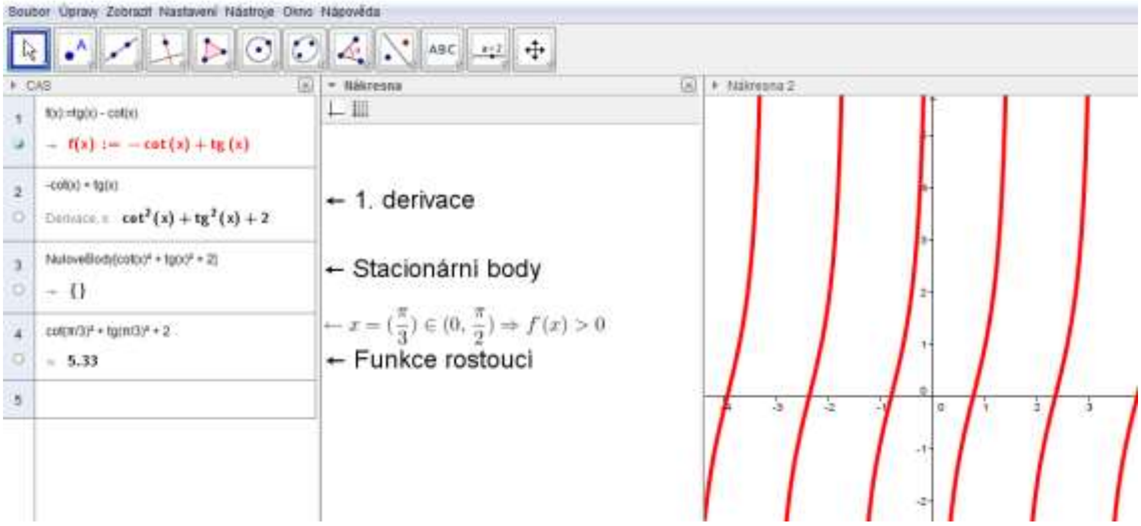


Díky první derivaci jsme vyšetřili, že funkce nemá žádný stacionární bod. Nyní budeme vyšetřovat monotonii na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. I zde nemůžeme využít grafické řešení, neboť funguje pouze u polynomiálních funkcí a v tomto příkladu vyšetřujeme goniometrickou funkci. Využijeme tedy našich znalostí při určování monotonie a z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do první derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka. Z věty o vztahu 1. derivace a monotonie (Frolíková, 1984 [1], str. 74) víme, že pokud je první derivace větší jak nula ($f'(x) > 0$), pak je funkce rostoucí. Pokud je první derivace menší jak nula ($f'(x) < 0$), pak je funkce klesající.

Z intervalu $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zvolíme například bod $x = \frac{\pi}{3}$, který dosadíme do rovnice první derivace $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$. Po numerickém výpočtu dostaneme hodnotu $5{,}33 > 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu rostoucí.

Jak můžeme vidět, celá funkce je rostoucí, její monotonie se nemění. Což znamená, že funkce nemá žádný lokální extrém. Vzhledem k lichosti je funkce rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vzhledem k periodičnosti funkce je funkce rostoucí na každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \epsilon Z$.

Monotonie funkce

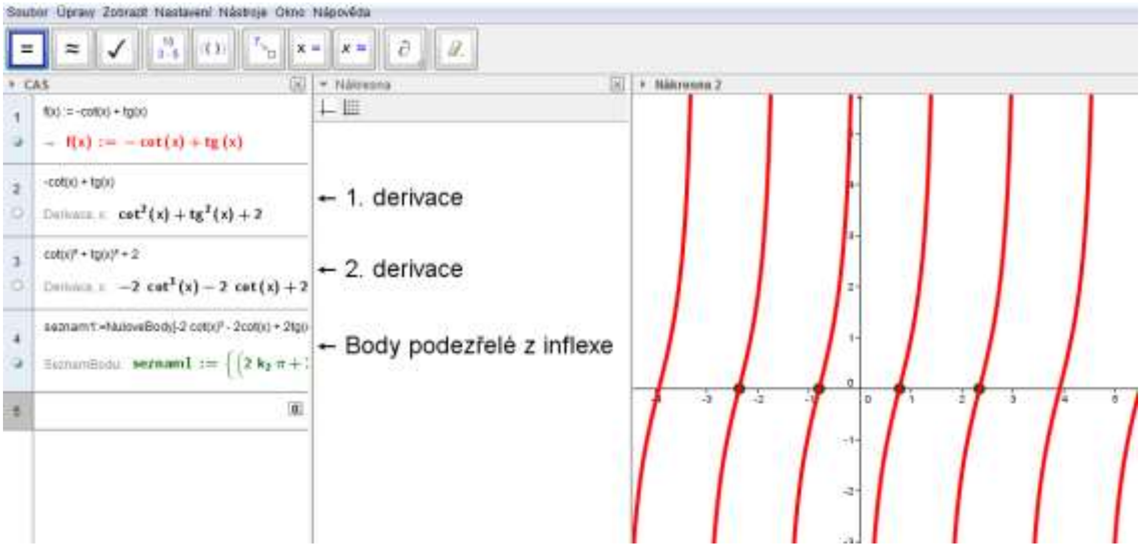


e) Druhá derivace, inflexní body, konvexnost, konkávnost

Nejprve si zapíšeme rovnici naší funkce, abychom si díky ní mohli zobrazit graf funkce. Poté provedeme první derivaci funkce pomocí nástroje „Derivace“ na horním panelu. Druhá derivace se vytváří pomocí stejného nástroje, jen si před jeho použitím označíme rovnici první derivace.

K zjištění bodů podezřelých z inflexe použijeme funkci „NuloveBody[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> dosadíme rovnici druhé derivace.

Druhá derivace, body podezřelé z inflexe



Díky druhé derivaci jsme vyšetřili, že tato funkce má bod podezřelý z inflexe $x = \frac{\pi}{4}$. Interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nám bod podezřelý z inflexe rozdělí na dva intervaly $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nyní budeme zjišťovat konvexnost a konkávnost funkce. Z věty o vztahu 2. derivace a konvexnosti/ konkávnosti (Frolíková, 1984 [1], str. 108) víme, že mohou nastat dvě situace. Jestliže je druhá derivace větší jak nula ($f''(x) > 0$), pak to znamená, že funkce je konvexní. Jakmile je druhá derivace menší než nula ($f''(x) < 0$), pak to znamená, že se jedná o funkci konkávní.

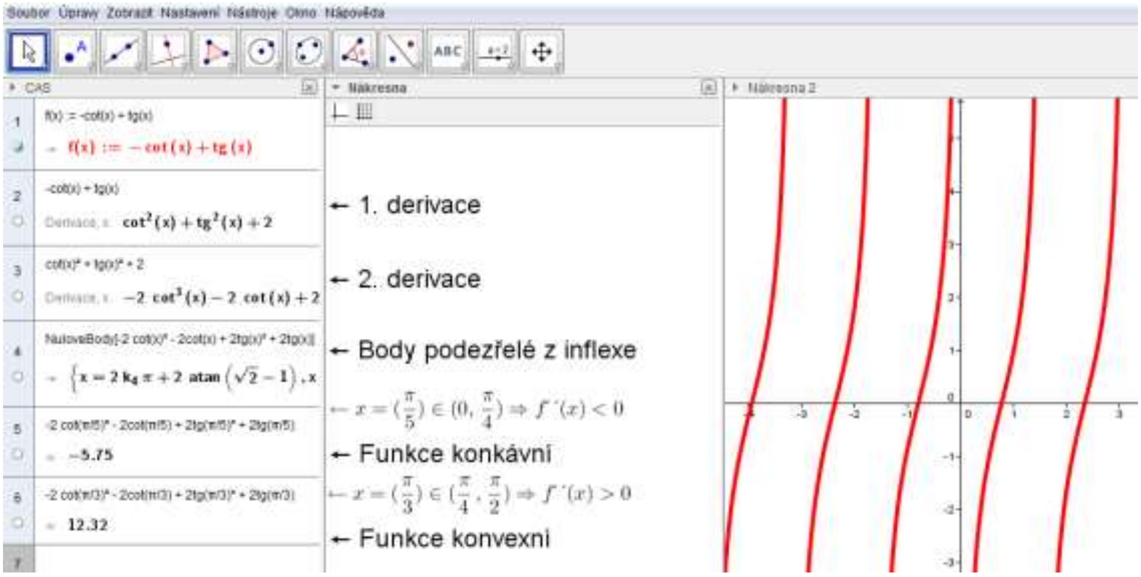
Nemůžeme použít grafické znázornění, neboť funguje pouze pro polynomiální funkce a my vyšetřujeme goniometrickou funkci. Využijeme tedy našich znalostí při určování konvexnosti a konkávnosti. Z každého intervalu dosadíme jeden libovolný vnitřní bod do rovnice druhé derivace a budeme zkoumat, jakých hodnot nabývají znaménka.

Z prvního intervalu $I = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ zvolíme například bod $x = \frac{\pi}{5}$, který dosadíme do rovnice druhé derivace $f''(x) = \frac{4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \cos^2 x}{\cos^3 x \cdot \sin^3 x}$. Po numerickém vypočítání se nám zobrazí výsledek $-5{,}75 < 0$, což znamená, že funkce je na tomto intervalu konkávní.

Po dosazení bodu $x = \frac{\pi}{3}$ z intervalu $I = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ do druhé derivace zjistíme, že na tomto intervalu nabývá hodnoty $12{,}32 > 0$ a je tedy konvexní.

V bodě $x = \frac{\pi}{4}$ dochází ke změně z konkávnosti na konvexnost, proto je v tomto bodě inflexní bod. Vzhledem k lichosti a periodičnosti funkce nabývá inflexe v bodech $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

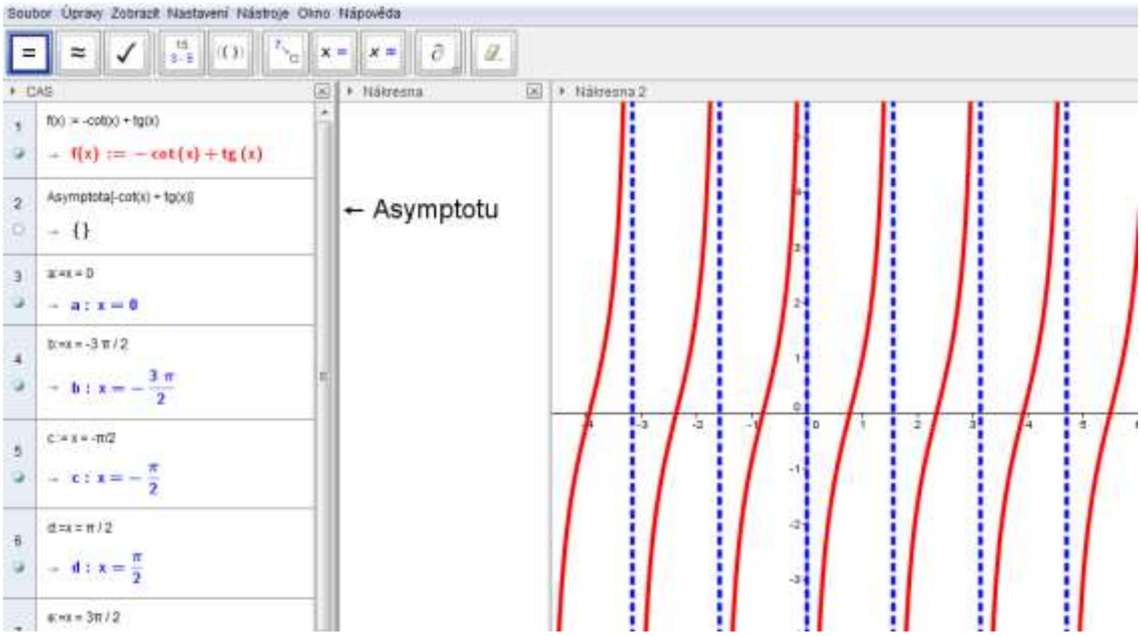
Funkce konvexní a konkávní



f) Asymptoty

K zjištění asymptoty použijeme funkci „Asymptota[<Polynom>]“, kde do pole <Polynom> zadáme původní znění rovnice funkce, tedy - $f(x) = tg(x) - cotg(x)$. V tomto případě funkce nemá žádnou asymptotu se směrnicí, ale má asymptoty vertikální, kde funkce není definovaná, tudíž s předpisem $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$.

Asymptoty



9. Závěr

Práce je zpracována na téma řešení průběhu funkcí jedné proměnné v programu GeoGebra. V práci je obsaženo sedm příkladů řazených vzestupně podle obtížnosti. Každý příklad je nejprve vždy vypočítán manuálně s tím, že u každého kroku řešení průběhu funkce je odkázáno, podle jakých teoretických znalostí – vět a definic – jsou příklady počítány. U všech příkladů je vyšetřován definiční obor, sudost, lichost, periodičnost, pomocí první derivace monotonie funkce a případné lokální extrémy. Pomocí druhé derivace se zjišťují body podezřelé z inflexe a následně konvexnost či konkávnost funkce. Při počítání průběhu funkcí nesmí chybět zjišťování existence asymptot a jejich předpisů a určení oboru hodnot. V potřebných částech řešení příkladů, jako například určování změny znamének první derivace pro zjištění monotonie či určování změny znamének druhé derivace pro zjištění konvexnosti/konkávnosti, je výpočet doplněn grafickým znázorněním.

Všech sedm příkladů je následně, krok po kroku, vyřešeno postupně v programu GeoGebra. U prvního příkladu je vysvětleno jak si nastavit základní prostředí v programu, které je ideální pro vyšetřování průběhu funkcí. Také jsou tam podrobně popsány veškeré funkce, které se v práci používají k výpočtům a jak s nimi pracovat. Grafické znázornění nechybí u žádného kroku, aby se mohl čtenář lépe seznamovat s programem a mohl si vždy ověřit, že postupuje správně.

Tato práce vznikla za účelem přiblížení matematického programu – GeoGebry. Má za cíl ukázat, že počítačové programy mohou být velice nápomocné a užitečné při řešení různých matematických problémů z různých tematických okruhů. Také byla vypracována ve snaze o rozšíření používání matematických programů.

10. Literatura a zdroje

[1] FROLÍKOVÁ, Jiřina. *Matematická analýza pro učitelské studium – I. semestr*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984, 134 s.

[2] PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra a Eva ZMEŠKALOVÁ. *Algebraické funkce*. 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2005, 167 s. ISBN 80-704-0825-1.